

# *Astérisque*

JEAN-JACQUES RISLER

**Type topologique des surfaces algébriques  
réelles de degré 4 dans  $\mathbb{R}P^3$**

*Astérisque*, tome 126 (1985), p. 153-168

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1985\\_\\_126\\_\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__153_0)

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TYPE TOPOLOGIQUE DES SURFACES  
ALGÈBRIQUES RÉELLES DE DEGRÉ 4 DANS  $\mathbb{R}P^3$

Jean-Jacques RISLER

INTRODUCTION.

Kharlamov ([5], 1976) a récemment déterminé tous les types topologiques des surfaces algébriques réelles lisses de degré 4 dans  $\mathbb{R}P^3$ . Cela achevait de résoudre la première partie du 16ème problème de Hilbert (dans cette partie, Hilbert posait aussi la question de la détermination du type topologique du plongement d'une courbe de degré 6 dans  $\mathbb{R}P^2$ , problème résolu par Gudkov et lié au précédent comme nous le verrons plus loin).

Le but de l'exposé est d'expliquer la méthode de Kharlamov pour construire des surfaces de degré 4 dans  $\mathbb{R}P^3$  de type topologique donné, méthode qui utilise de manière essentielle les propriétés de l'application des périodes d'une surface  $K3$ .

Nous commencerons par rappeler quelques résultats essentiels de la théorie (n°1 et n°2) en renvoyant le lecteur intéressé à [8] ou [13] pour plus de détails. Nous déterminerons ensuite tous les types topologiques possibles des M-surfaces réelles lisses de degré 4 dans  $\mathbb{R}P^3$  (pour une définition, cf. le n°1) : au n°3 nous montrerons qu'il n'y a que 3 types possibles pour de telles surfaces, nous construirons ces surfaces au n°4 et déterminerons le type topologique du plongement au n°5.

1. LA THÉORIE DE SMITH ([10])

Dans le théorème suivant, tous les espaces sont supposés triangulables, et l'homologie est à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Théorème 1.1 . Soit  $\tilde{X}$  un espace compact muni d'une involution  $\tau$ ,  $X$  l'ensemble des points fixes de  $\tau$  et  $X'$  le quotient  $\tilde{X}/\tau$  ; on a alors une suite exacte :

$$\longrightarrow H_r(X', X) \oplus H_r(X) \xrightarrow{\alpha_r} H_r(\tilde{X}) \xrightarrow{\beta_r} H_r(X', X) \xrightarrow{\gamma_r} H_{r-1}(X', X) \oplus H_{r-1}(X) \longrightarrow \dots$$

et de plus :

- a)  $\tau_*$  (action de  $\tau$  sur l'homologie) est l'identité sur  $\text{Im } \alpha_r$
- b)  $\dim H_*(\tilde{X}) = \dim H_*(X) + 2 \sum \dim \text{Ker } \gamma_r$   
 ( $H_*$  signifiant la somme directe de tous les groupes d'homologie).

Démonstration : Soit  $\tilde{K}$  un complexe simplicial fini (qui sera une triangulation de  $\tilde{X}$ ) muni d'une action de  $\mathbb{Z}_2 = (1, h)$ . On suppose que si  $h$  fixe globalement un simplexe  $s$  de  $\tilde{K}$ , il fixe tous les sommets de  $s$  ; alors si l'on pose  $\rho = 1+h$ , si  $K$  désigne le complexe fixé par  $h$  et  $C(\tilde{K})$  le groupe des chaînes sur  $\tilde{K}$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$ , il est facile de voir que la suite :

$$0 \longrightarrow \rho C(\tilde{K}) \oplus C(K) \xrightarrow{i} C(\tilde{K}) \xrightarrow{\rho} \rho C(\tilde{K}) \longrightarrow 0$$

est exacte, d'où une suite exacte d'homologie :

$$\longrightarrow H_i(\tilde{K}) \xrightarrow{\rho_*} H_i(\rho C(\tilde{K})) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(\rho C(\tilde{K})) \oplus H_{i-1}(K) \xrightarrow{i_*} H_{i-1}(\tilde{K}) \longrightarrow$$

et il suffit de remarquer que

$$H_i(\rho C(\tilde{K})) \xrightarrow{\sim} H_i(K', K)$$

où  $K' = K/\mathbb{Z}_2$  pour retrouver la suite exacte de Smith.

Les points a) et b) sont immédiats.

Corollaire 1.2

- a) Soit  $X$  un sous-ensemble algébrique de  $\mathbb{R}P^n$ ,  $X_{\mathbb{C}}$  son complexifié (défini par les mêmes équations dans  $\mathbb{C}P^n$ ) ; alors  $\dim H_*(X) \leq \dim H_*(X_{\mathbb{C}})$  et la différence est paire.
- b) Si  $\dim H_*(X) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}})$ ,  $\tau_*$  est l'identité sur  $H_*(X_{\mathbb{C}})$ .
- c) Soit  $X \subset \mathbb{R}P^2$  une courbe algébrique lisse définie par un polynôme homogène de degré  $d$  à coefficients réels ; alors le nombre de composantes connexes de  $X$  est inférieur ou égal à  $g+1$ , avec  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

( $g$  est le genre de  $X_{\mathbb{C}}$ ).

Démonstration : a) et b) résultent immédiatement du Théorème 1.1 (et du fait que les ensembles algébriques sont triangulables). c) est le "théorème de Harnack" : si  $X$  est une courbe algébrique réelle lisse de degré  $d$  ayant  $p$  composantes connexes,  $\dim H_*(X) = 2p$  et  $\dim H_*(X_{\mathbb{C}}) = 2g+2$ , d'où l'inégalité  $p \leq g+1$  ( $X_{\mathbb{C}}$  est aussi supposée lisse).

Définition 1.3 . Soit  $X$  une variété algébrique réelle projective,  $X_{\mathbb{C}}$  sa complexifiée ; on dit que  $X$  est une M-variété si  $\dim H_*(X) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}})$ , une (M-k)-variété si  $\dim H_*(X) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}}) - 2k$ .

Si  $Y$  est une variété complexe compacte munie d'une involution anti-holomorphe  $\tau$ , on dira par abus de langage que  $(Y, \tau)$  est une M-variété si  $\dim H_*(\text{Fix } \tau) = \dim H_*(Y)$ .

Proposition 1.4 . Il existe des M-courbes en tous degrés.

Cette proposition est due à Harnack, cf. [2] pour une démonstration.

Remarque 1.5 . Viro ([12], 1979) a annoncé qu'il savait construire des M-variétés en toutes dimensions.

## 2. LES CONGRUENCES D'ARNOLD-ROKHLIN POUR LES M-VARIÉTÉS

Soit  $X \subset \mathbb{R}P^q$  une variété algébrique lisse telle que  $X_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}P^q$  soit aussi lisse ; on suppose  $X$  de dimension paire  $2n$  ;  $X_{\mathbb{C}}$  est alors de dimension réelle  $4n$  et possède donc une signature  $\sigma(X_{\mathbb{C}})$  ( $\sigma$  est le nombre de signes + moins le nombre de signes - dans une diagonalisation de la forme "cup-carré" sur  $H^{2n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$ ).

On a alors :

Théorème 2.1 . Si  $\tau_*$  est l'identité sur  $H_{2n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_2)$  (et donc en particulier si  $X$  est une M-variété, cf. 1.2), on a  $\chi(X) \equiv \sigma(X_{\mathbb{C}}) \pmod{16}$ .

Nous allons donner une démonstration de ce théorème valable sous l'hypothèse plus large que  $X_{\mathbb{C}}$  est une variété compacte presque complexe munie d'une involution "anti-holomorphe"  $\tau$ , avec  $X = \text{Fix } \tau$  ; cf. [13] .

Posons  $H_{\mathbb{R}} = H^{2n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$  .

L'involution  $\tau$  induit une involution  $\tau^*$  sur  $H_{\mathbb{R}}$ , et donc  $H_{\mathbb{R}} = H_1 \oplus H_{-1}$ ,

$H_{\pm 1}$  étant le sous-espace propre de  $\tau^*$  correspondant à la valeur propre  $\pm 1$  ( $H_1 = \text{Ker}(1-\tau^*)$  et  $H_{-1} = \text{Ker}(1+\tau^*)$ ).

Il est immédiat de voir que cette décomposition est orthogonale pour la forme quadratique cup-carré  $Q_{\mathbb{R}}$  sur  $H_{\mathbb{R}}$  qui est donc somme de deux formes  $Q_1$  et  $Q_{-1}$  de signatures  $\sigma_1$  et  $\sigma_{-1}$ .

Lemme 2.2 .  $\sigma_1 - \sigma_{-1} = (-1)^n \chi(X)$ .

Ce lemme (valable sans l'hypothèse que  $X$  est une  $M$ -variété) résulte de la formule  $\sigma_1 - \sigma_{-1} = (X \cdot X)$  due à Atiyah-Singer (cf. [ 4 ] pour une preuve élémentaire) et du fait que la multiplication par  $i$  ( $i^2 = -1$ ) induit un isomorphisme entre le fibré normal à  $X$  (dans  $X_{\mathbb{C}}$ ) et le fibré tangent à orientation près (l'orientation est multipliée par  $(-1)^n$ ). Comme par définition  $(X \cdot X)$  est la self-intersection de  $X$  dans  $X_{\mathbb{C}}$ , et donc dans son fibré normal, on peut la calculer dans le fibré tangent et on trouve  $(-1)^n \chi(X)$ .  $\square$

On peut aussi montrer ce lemme en utilisant la décomposition de Hodge de  $H^*(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$  et la formule des points fixes de Lefschetz pour l'application  $\tau$ , cf. [13]. Posons maintenant  $H = H^{2n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) / (\text{torsion})$ ;  $\tau$  induit un endomorphisme  $\tau^*$  sur  $H$ , et l'on pose comme plus haut :  $H_1 = \text{Ker}(1-\tau^*)$ ,  $H_{-1} = \text{Ker}(1+\tau^*)$ .

Lemme 2.3 . Si  $\tau^*$  est l'identité sur  $H^{2n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_2)$ , alors  $H = H_1 \oplus H_{-1}$ .

Démonstration : Si  $x \in H$ ,  $x + \tau^* x$  et  $x - \tau^* x$  sont divisibles par 2 puisque  $\tau^*$  agit trivialement sur  $H \otimes \mathbb{Z}_2$ , et on peut donc écrire :

$$x = \frac{1}{2} [(x + \tau^* x) + (x - \tau^* x)] ,$$

ce qui montre le lemme car  $x + \tau^* x \in H_1$  et  $x - \tau^* x \in H_{-1}$ .  $\square$

Lemme 2.4 . Soit  $Q$  la forme cup-produit sur  $H$ , et soient  $Q_1$  et  $Q_{-1}$  les formes quadratiques induites par  $Q$  sur  $H_1$  et  $H_{-1}$ . Alors si  $n$  est pair,  $Q_{-1}$  est paire, et si  $n$  est impair  $Q_1$  est paire.

Démonstration : Notons  $x \cdot y$  le produit de deux classes  $x$  et  $y$ ; soit  $w \in H^{2n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_2)$  la classe de Wu (qui vérifie par définition  $w \cdot x = x \cdot x$   $\forall x \in H^{2n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_2)$ ).

$w$  est un polynôme en les classes de Stiefel-Whitney du fibré tangent complexe de  $X_{\mathbb{C}}$ , qui sont elles-mêmes les réductions mod 2 des classes de Chern  $c_i$

vérifiant  $\tau^*(c_i) = (-1)^i c_i$  (car  $\tau^*$  change l'orientation du fibré tangent si et seulement si la dimension complexe est impaire,  $\tau^*(T_{X_{\mathbb{C}}})$  étant isomorphe à  $\bar{T}_{X_{\mathbb{C}}}$ , cf. [ 7 ]).

Supposons  $n$  pair par exemple : on déduit de cela que  $w$  est la réduction d'un élément  $y \in H_1$  ; si alors  $x \in H_{-1}$ , on a  $x \cdot y = 0$ , d'où  $\bar{x} \cdot w = \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ , et donc  $x \cdot x = Q_{-1}(x, x)$  est pair ( $\bar{x}$  est la réduction de  $x \bmod 2$ ).  $\square$

Démontrons maintenant le Théorème 2.1 : On a  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_{-1}$ , d'où

$$\sigma - 2 \sigma_{-1} = (-1)^n \chi(X) \quad \text{par 2.2} \quad .$$

Supposons  $n$  pair par exemple ; alors si  $\tau_*$  est l'identité sur  $H_{2n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_2)$ ,  $\tau^*$  est l'identité sur  $H^{2n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_2)$  par dualité de Poincaré ;  $Q_{-1}$  est donc paire par 2.4, d'où  $\sigma_{-1} \equiv 0(8)$  (cf. [ 11 ]).  $\square$

Dans le cas où la dimension de  $X$  est impaire, il y a un résultat analogue au Théorème 2.1 pour les intersections complètes (cf. [ 9 ] ) ; nous nous bornerons ici au cas des courbes lisses dans  $\mathbb{R}P^2$  de degré pair  $d = 2k$ .

Si  $X$  est une telle courbe, toutes ses composantes connexes sont des ovals (i.e. disconnectent  $\mathbb{R}P^2$ ) ; chaque ovale sépare  $\mathbb{R}P^2$  en deux composantes, l'une contractile et homéomorphe à un disque appelée l'intérieur de l'ovale et l'autre homéomorphe à une bande de Moëbius.

Un ovale est dit pair s'il est inclus dans l'intérieur d'un nombre pair d'ovals, et impair dans le cas contraire.

On note  $P$  le nombre d'ovals pairs et  $I$  le nombre d'ovals impairs.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.5 . Soit  $X \subset \mathbb{R}P^2$  une M-courbe lisse de degré  $2k$  ; alors  $P - I \equiv k^2 \pmod{8}$ .

Démonstration : Soit  $f$  une équation de  $X$  que nous supposons négative à l'infini (i.e. à l'extérieur de  $X$  ; ceci a un sens car le degré de  $f$  est pair).

Soit  $Y$  le revêtement double de  $\mathbb{C}P^2$  ramifié au-dessus de  $X_{\mathbb{C}}$  ; il y a sur  $Y$  deux involutions antiholomorphes  $\tau_1$  et  $\tau_2$  "au-dessus" de l'involutions naturelle  $\tau$  de  $\mathbb{C}P^2$  (si dans une carte affine  $Y$  est défini par l'équation  $z^2 = f(x, y)$ , on a

$$\tau_1(x, y, z) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

et

$$\tau_2(x, y, z) = (\bar{x}, \bar{y}, -\bar{z}) \quad ).$$

Notons  $\mathbb{R}P^+$  (resp.  $\mathbb{R}P^-$ ) l'ensemble des points de  $\mathbb{R}P^2$  où  $f$  est  $\geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ) ; alors  $\text{Fix } \tau_2$  est le revêtement double de  $\mathbb{R}P^-$  ramifié le long de  $X$ .

Lemme 2.6 . Sous les hypothèses de 2.5,  $(Y, \tau_2)$  est une M-variété.

Le lecteur pourra montrer 2.6 à titre d'exercice ou se reporter à [13] ; nous le démontrerons dans le cas  $k = 3$  au n°3.

Pour montrer 2.5, on applique le Théorème 2.1 à  $(Y, \tau_2)$  : on trouve

$$\sigma(Y) \equiv \chi(\text{Fix } \tau_2) \pmod{16}.$$

Or  $\chi(\text{Fix } \tau_2) = 2\chi(\mathbb{R}P^-) = 2(1 - (P-I))$  (exercice facile) et  $\sigma(Y) = 2 - 2k^2$  (conséquence de la formule d'Atiyah-Singer (2.2) appliquée à l'involution du revêtement  $Y \rightarrow \mathbb{C}P^2$ ), d'où le Théorème 2.5.  $\square$

Pour les M-courbes de degré 6, on a  $g = 10$  et donc  $P + I = 11$ . Le Théorème 2.5 donne alors trois valeurs possibles pour  $P - I$ , qui correspondent chacune à une courbe existant effectivement :

<u>Valeur de P-I</u>	<u>Dessin de la courbe</u>	<u>Auteur de la construction</u>
9		Harnack (1876)
1		Gudkov (1973)
-7		Hilbert (1891)

Pour plus de détails sur les courbes (en particulier de degré 6) cf. [6].

3. TYPE TOPOLOGIQUE DES M-SURFACES DE DEGRÉ 4 DANS  $\mathbb{R}P^3$

Rappelons d'abord qu'une surface algébrique lisse dans  $\mathbb{R}P^3$  est orientable si et seulement si sa classe dans  $H_2(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2)$  est nulle, et donc si et seulement si son degré est pair.

Notons  $T_i$  la surface compacte connexe orientable de genre  $i$  ("Tore à  $i$  trous") ;  $T_0$  est la sphère  $S^2$ . Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1 . Les seuls types topologiques possibles pour une M-surface de degré 4 dans  $\mathbb{R}P^3$  sont les suivants :

$$9S^2 \amalg T_2 \quad 5S^2 \amalg T_6 \quad S^2 \amalg T_{10}$$

( $pS^2$  signifiant la réunion disjointe de  $p$  sphères).

Démonstration : Soit  $X$  une M-surface lisse de degré 4 dans  $\mathbb{R}P^3$  ;  $X_{\mathbb{C}}$  est une surface K3 (Exposé III), on a donc :

$$\dim H_*(X) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}}) = 24$$

$$\text{et} \quad \chi(X) \equiv \sigma(X_{\mathbb{C}}) \pmod{16}, \quad (2.1)$$

$$\text{d'où} \quad \chi(X) \equiv 0 \pmod{16}$$

puisque  $\sigma(X_{\mathbb{C}}) = -16$ .

Ces deux relations ne suffisent pas à démontrer 3.1 : par exemple si  $\chi(X) = 16$  et si  $X$  a  $p$  composantes, on trouve les équations (avec  $h_1 = \dim H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ ) :

$$\begin{array}{ll} 2p + h_1 = 24 & p = 10 \\ & \text{d'où} \\ 2p - h_1 = 16 & h_1 = 4 \end{array}$$

ce qui donne deux possibilités :

$$9S^2 \amalg T_2 \quad \text{et} \quad 8S^2 \amalg 2T_1 .$$

Pour achever de montrer le Théorème 3.1, il suffit évidemment de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.2 . Soit  $X_{\mathbb{C}}$  une surface K3 munie d'une involution antiholomorphe  $\tau$ ,  $X = \text{Fix } \tau$ . Alors :

- 1)  $X$  est soit vide, soit une surface analytique réelle lisse.
- 2) Il y a au plus une composante connexe orientable  $X_1$  de  $X$  telle que  $\chi(X_1) \leq 0$  sauf si  $X$  est homéomorphe à  $2T_1$  (autrement dit, si  $X$  n'est pas homéomorphe à  $2T_1$ , il y a au plus une composante connexe orientable de  $X$  qui n'est pas une sphère  $S^2$ ).

Démonstration : Le fait que si  $X$  est non vide, c'est une variété analytique réelle de dimension 2 provient de ce que si  $\varphi : X_{\mathbb{C}} \rightarrow X_{\mathbb{C}} \times X_{\mathbb{C}}$  est définie par  $\varphi(x) = (x, \tau(x))$ , alors  $X = \text{Fix } \tau = \varphi^{-1}(\Delta_{X_{\mathbb{C}}} \cap \varphi(X_{\mathbb{C}}))$ , et  $\tau$  étant antiholomorphe,  $\Delta_{X_{\mathbb{C}}}$  et  $\varphi(X_{\mathbb{C}})$  sont transverses. Signalons la question suivante :

$X = \text{Fix } \tau$  est-il nécessairement orientable ? C'est évidemment le cas si  $X$  est homéomorphe à une surface de degré 4 dans  $\mathbb{R}P^3$  (ce qui est montré au n° 4 pour les M-surfaces mais pas a priori dans le cas général).

Pour démontrer 2), considérons plus généralement une surface complexe lisse  $X_{\mathbb{C}}$  munie d'une involution anti-holomorphe  $\tau$ .

Soit  $H_{\mathbb{R}} = H_2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$ ,  $H_1 = \text{Ker}(1 - \tau^*)$  et  $H_{-1} = \text{Ker}(1 + \tau^*)$  (cf. n° 2). En diagonalisant les formes quadratiques  $Q_1$  et  $Q_{-1}$ , on a des décompositions (non canoniques) :

$$H_1 = H_1^+ \oplus H_1^- \quad \text{et} \quad H_{-1} = H_{-1}^+ \oplus H_{-1}^- .$$

Posons  $a = \dim H_1^+$ ,  $b = \dim H_1^-$ ,  $c = \dim H_{-1}^+$ ,  $d = \dim H_{-1}^-$ .

Lemme 3.3 . On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} (1) & a + b + c + d = \dim H_2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}) \\ (2) & a - b + c - d = \sigma(X_{\mathbb{C}}) \\ (3) & a + b - c - d = \chi(\text{Fix } \tau) - 2 \\ (4) & a - b - c + d = -\chi(\text{Fix } \tau) . \end{cases}$$

Démonstration : (1) et (2) sont triviales ; (3) est la formule des points fixes de Lefschetz pour l'endomorphisme  $\tau$  et (4) le Lemme 2.2.  $\square$

Si  $X_{\mathbb{C}}$  est une surface K3, on a  $\dim H_2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}) = 22$  et  $\sigma(X_{\mathbb{C}}) = -16$ . On en déduit  $a + c = 3$  et  $a - c = -1$ , d'où  $a = 1$  et  $c = 2$ .

Démontrons maintenant 3.2 : soit  $X' = X_{\mathbb{C}}/\tau$ . La suite exacte de Smith (n°1)

montre que  $H_3(X', X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2$  (car le début de la suite de Smith se réduit à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_4(X', X) \longrightarrow H_4(X_{\mathbb{C}}) \longrightarrow H_4(X', X) \longrightarrow H_3(X', X) \longrightarrow 0$$

et l'on a  $H_4(X_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2$ , et la suite exacte d'homologie de la paire  $(X', X)$  s'écrit :

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow H_2(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\alpha} H_2(X', \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_2(X', X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

car  $H_1(X', \mathbb{Z}_2) = H_3(X', \mathbb{Z}_2) = 0$  puisqu'il en est de même pour  $X_{\mathbb{C}}$ .

Soient  $X_1, \dots, X_k$  les composantes connexes orientables de  $X$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_k$  leurs classes dans  $H_2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$  et  $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k$  les images dans  $H_2(X', \mathbb{Z}_2)$  des  $\xi_i$  (obtenues avec l'application  $p_*$  induite par la projection  $p: X_{\mathbb{C}} \rightarrow X'$ ). On a évidemment  $\xi_i \cdot \xi_j = 0$  pour  $i \neq j$ , et  $\xi_i \in \text{Ker}(1 - \tau_*) = H_1$  (en considérant que  $H_2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \subset H_2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$ ).

D'autre part l'image par  $\alpha$  de la classe fondamentale de  $X$  est nulle dans  $H_2(X', \mathbb{Z}_2)$  (car  $X_{\mathbb{C}} \rightarrow X'$  est un revêtement double ramifié le long de  $X$  qui est de codimension réelle 2 dans  $X_{\mathbb{C}}$ ; cf. par exemple [3], § 6 où il est montré que la classe fondamentale (entière) de  $X$  est divisible par 2 dans  $H_2(X', \mathbb{Z})$  lorsque  $X$  est orientable et que la classe fondamentale modulo 2 de  $X$  est nulle dans le cas général); or cette image est égale à  $\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_k + \lambda$  ( $\lambda$  correspondant à la partie non orientable de  $X$ ); on a donc  $\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_k + \lambda = 0$ , et ceci est la seule relation entre les  $\bar{\xi}_i$  et  $\lambda$  compte-tenu de la suite (1). On en déduit qu'il y a deux possibilités pour les classes  $\xi_i$  :

- a) les  $\xi_i$  sont linéairement indépendantes ;
  - b) il y a une seule relation entre les  $\xi_i$ , de la forme  $\sum_{i=1}^k a_i \xi_i = 0$
- avec  $\prod_{i=1}^k a_i \neq 0$ .

Examinons le cas a) : comme  $a = 1$  (Lemme 3.3 plus haut) et  $\xi_i \cdot \xi_i = -\chi(X_i)$  (Lemme 2.2) on en déduit qu'il y a au plus une composante orientable de caractéristique d'Euler  $\leq 0$ .

Pour le cas b), on déduit de la relation  $\sum_{i=1}^k a_i \xi_i = 0$  que  $X$  est orientable, et que  $\xi_i \cdot \xi_i = 0 \forall i$  (car  $\xi_i \cdot \xi_j = 0$  pour  $i \neq j$ ). Le fait que  $a = 1$  implique alors que  $X$  a au plus deux composantes homéomorphes à  $T_1$ , et que si  $X$  a deux composantes, leurs classes  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont liées par une relation.  $\square$

4. CONSTRUCTION DES M-SURFACES DE DEGRÉ 4 DANS  $\mathbb{R}P^3$

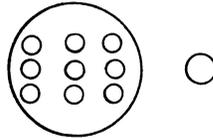
La méthode de Kharlamov permet de construire les trois types de M-surface de degré 4 dans  $\mathbb{R}P^3$  ; pour fixer les idées, nous allons construire une surface homéomorphe à  $9S^2 \amalg T_2$ , la surface  $5S^2 \amalg T_2$  ayant été construite par Utkin (1974) et la surface  $S^2 \amalg T_{10}$  par Hilbert (1909) par des procédés différents.

La méthode de Kharlamov comprend trois étapes :

- a) construire une surface K3  $X_{\mathbb{C}}$  munie d'une involution antiholomorphe  $\tau$  telle que  $X = \text{Fix } \tau$  soit homéomorphe à  $9S^2 \amalg T_2$  ;
- b) déformer  $X_{\mathbb{C}}$  en une surface  $X'_{\mathbb{C}}$  spéciale de type 3 (cf. Exposé VI) de manière "équivariante" ;
- c) plonger  $X'_{\mathbb{C}}$  dans  $\mathbb{C}P^3$  de manière "équivariante".

a) Construction de  $X_{\mathbb{C}}$

Soit  $C$  la courbe de degré 6 dans  $\mathbb{R}P^2$  construite par Hilbert (cf. n°2) dont le dessin réel est :



$C_{\mathbb{C}}$  sa complexifiée ( $C_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}P^2$ ) ;  $X_{\mathbb{C}}$  est par définition le revêtement double de  $\mathbb{C}P^2$  ramifié le long de  $C_{\mathbb{C}}$ , muni de l'involution  $\tau = \tau_2$  (cf. la démonstration de 2.5) ;  $X = \text{Fix } \tau$  est donc le revêtement double de  $\mathbb{R}P^2$  ramifié le long de  $C$  :  $(X_{\mathbb{C}}, \tau)$  est alors une M-surface (2.6) et  $X$  est homéomorphe à  $9S^2 \amalg T_2$  (exercice facile ; les 9 sphères correspondent aux neuf composantes impaires de  $C$ ).

b) Déformation de  $X_{\mathbb{C}}$

**Proposition 4.1** . Soit  $X_{\mathbb{C}}$  une surface K3 marquée (cf. Exposé VI), munie d'une involution antiholomorphe  $\tau$ . Il existe alors une déformation de la structure complexe :

$$\begin{array}{ccc}
 X_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{j} & V \\
 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 m & \in & M
 \end{array}$$

(où  $M$  et  $V$  sont des variétés analytiques complexes lisses,  $\pi$  une submersion

holomorphe propre telle que  $j(X_{\mathbb{C}}) = \pi^{-1}(m)$ , une application holomorphe  $p: M \rightarrow \Omega \subset K_{20} \subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$  (cf. Exposé V) et des involutions antiholomorphes  $\tau_V$  et  $\tau_M$  sur  $V$  et  $M$  telles que :

- $p$  soit un isomorphisme de  $M$  sur un ouvert de  $\Omega$  ;
- $j \circ \tau = \tau_V \circ j$ ,  $\tau_M \circ \pi = \pi \circ \tau_V$  ;
- $p \circ \tau_M = \tau^* \circ p$ ,  $\tau^*$  étant l'automorphisme de  $L_{\mathbb{C}}$  induit par  $\tau$  .

Démonstration : Il existe (cf. Exposé V) une déformation "localement universelle" de la structure complexe de  $X_{\mathbb{C}}$  :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} X_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{j_1} & V_1 \\ \downarrow & \pi_1 \downarrow & \downarrow \\ m_1 & \in M_1 & \xrightarrow{p_1} \Omega \end{array}$$

et une application holomorphe  $p_1: M_1 \rightarrow \Omega$  qui est un plongement ( $p_1$  est l'application des périodes qui existe pour toute déformation de  $X_{\mathbb{C}}$ ).

Si  $\bar{V}_1$  et  $\bar{M}_1$  désignent les variétés conjuguées de  $V_1$  et  $M_1$ , l'application  $j_1 \circ \tau = X_{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{V}_1$  est holomorphe, d'où une déformation de  $X_{\mathbb{C}}$  :

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{j_1 \circ \tau} & \bar{V}_1 \\ \downarrow & \pi_1 \downarrow & \downarrow \\ m_1 & \in \bar{M}_1 & \xrightarrow{p'_1} \Omega \end{array} .$$

La déformation (1) étant localement universelle, il existe un voisinage  $M_2$  de  $m_1$  dans  $M_1$  tel que si  $V_2 = \pi_1^{-1}(M_2)$ , on ait un diagramme commutatif :

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} & & X_{\mathbb{C}} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & \bar{V}_2 & & V_1 & \\ & \xrightarrow{g} & & \xrightarrow{\pi_1} & \\ \pi_1 \downarrow & & & & \downarrow \pi_1 \\ & \bar{M}_2 & \xrightarrow{f} & M_1 & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & p'_2 & & p_1 & \\ & & & & \Omega \end{array}$$

On a de plus la relation  $p_2' = \overline{\tau^* \circ p_1}$ ,  $\tau^*$  étant l'endomorphisme de  $L_{\mathbb{C}}$  induit par  $\tau$  : il suffit pour le voir de revenir à la définition de l'application des périodes (Exposé VI) : si  $m \in M_1$ ,  $p_1(m)$  est l'image (par le morphisme naturel déduit de (1) et du marquage de  $X_{\mathbb{C}}$ ) dans  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$  de la droite  $H^{2,0}$  des 2-formes holomorphes de la surface K3  $\pi_1^{-1}(m)$ ; si  $X$  est une surface K3,  $\bar{X}$  sa conjuguée, on applique alors la relation  $H^{2,0}(\bar{X}) = H^{2,0}(X)$ . La relation  $p_2' = \overline{\tau^* \circ p_1}$  implique qu'il existe un voisinage  $M$  de  $m_1$  dans  $M_2$  tel que  $p_2'(M) = p_1(M)$  ; si l'on pose  $V = \pi_1^{-1}(M)$ , on déduit de (2) un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{V} & \xrightarrow{g} & V \\ \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \bar{M} & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Les applications holomorphes  $f$  et  $g$  peuvent être considérés comme des applications antiholomorphes de  $M$  dans  $M$  et de  $V$  dans  $V$  ; on pose alors  $\tau_M = f$  et  $\tau_V = g$ .

Il suffit maintenant de vérifier que  $\tau_M$  et  $\tau_V$  sont des involutions ; ceci résulte du fait que la déformation  $V \xrightarrow{\pi} M$  de  $X_{\mathbb{C}}$  étant restriction de (1) est localement universelle : le diagramme d'applications holomorphes :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau_V \circ \tau_V} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\tau_M \circ \tau_M} & M \end{array}$$

étant commutatif et  $\tau_V \circ \tau_V$  induisant l'identité sur  $\pi^{-1}(m)$ , on a alors nécessairement  $\tau_V \circ \tau_V = \text{Id}_V$  et  $\tau_M \circ \tau_M = \text{Id}_M$ .  $\square$

**Remarque** : Dans la déformation de 4.1, on a par construction  $m \in \text{Fix } \tau_M$  ; on en déduit que  $\text{Fix } \tau_M$  est une variété analytique réelle lisse (cf. 3.2) et que le morphisme  $\pi'$  (où  $\pi' = \pi / \text{Fix } \tau_V$ ) :  $\text{Fix } \tau_V \xrightarrow{\pi'} \text{Fix } \tau_M$  est une submersion propre. Les "parties réelles"  $\pi'^{-1}(\alpha)$  des fibres de  $\pi$  sont donc difféomorphes entre elles (pour  $\alpha \in \text{Fix } \tau_M$ ).

Nous allons maintenant montrer qu'il existe  $\alpha \in \text{Fix } \tau_M$  tel que  $\pi^{-1}(\alpha)$  soit spéciale de type 4, en suivant la méthode de l'Exposé VI.

Rappelons que  $(X_{\mathbb{C}}, \tau)$  est une  $M$ -surface marquée par  $\sigma : H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \rightarrow L$  ; on a donc  $L = L_{-1} \oplus L_1$  avec  $L_1 = \text{Ker}(1 - \tau^*)$  et  $L_{-1} = \text{Ker}(1 + \tau^*)$  (lemme 2.3).

Comme  $X = \text{Fix } \tau$  est le revêtement double de  $\mathbb{R}P^-$  ramifié le long de la courbe  $C$ , on a  $\chi(\text{Fix } \tau) = 2\chi(\mathbb{R}P^-) = 2(1 - (P-I)) = 16$ , (cf. le Lemme 2.6), et les calculs du Lemme 3.3 donnent  $c = d = 2$ . Autrement dit,  $L_{-1}$  est de rang 4, la forme quadratique  $Q_{-}$  (restriction de  $Q$  à  $L_{-1}$ ) étant isomorphe à  $U \oplus U$ ,  $U$  étant associée à la forme bilinéaire de matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 4.2** (cf. Exposé VI, Proposition 2) . Soit  $U$  un voisinage de  $p(m)$  dans  $\Omega$  ; il existe dans  $L_{-1}$  un élément  $\beta$  non divisible tel que :

- (1)  $(\beta \cdot \beta) = 4$
- (2) L'hyperplan  $L_\beta$  de  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$  d'équation  $\beta \cdot z = 0$  rencontre  $p(\text{Fix } \tau_M) \cap U$ .

**Lemme 4.3** . Soit  $K'$  la quadrique de  $\mathbb{P}(L_{-1} \otimes \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}P^3$  des droites isotropes (pour  $Q_{-}$ ) ; si  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{P}(L_{-1} \otimes \mathbb{R})$  rencontrant  $K'$ , il existe  $(\beta) \in V$  avec  $\beta \in L_{-1}$ , non divisible et tel que  $Q(\beta) = \beta \cdot \beta = 4$ .

**Démonstration** : Nous renvoyons à la démonstration du lemme 1 de l'Exposé VI qui s'applique ici pratiquement mot pour mot.

Pour démontrer la Proposition 4.2, il suffit maintenant de prendre  $(\xi_1) \in K'$  tel que  $L_{\xi_1}$  (on a plongé  $K'$  dans  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ ) soit transverse à  $p(\text{Fix } \tau_M)$  en  $p(m)$  (ceci est facile car on connaît l'équation explicite de  $K'$ ) ; si  $\beta \in L_{-1}$  est tel que  $(\beta)$  soit proche de  $(\xi_1)$ ,  $L_\beta$  sera proche de  $L_{\xi_1}$  et donc rencontrera  $p(\text{Fix } \tau_M) \cap U$  transversalement.  $\square$

Le même raisonnement que dans l'Exposé VI (démonstration du Théorème 2) montre alors qu'il existe  $\alpha \in L_\beta \cap p(\text{Fix } \tau_M)$  qui est la période d'une surface  $X'_\alpha$  marquée dont le groupe de Picard est engendré par  $\beta$ . De plus, comme  $\alpha \in p(\text{Fix } \tau_M)$ ,  $X'_\alpha$  est munie d'une involution  $\tau'$  telle que  $X' = \text{Fix } \tau'$  soit difféomorphe à  $X$  (cf. remarque plus haut) et que  $\tau'^*$  induise le même morphisme que  $\tau^*$  sur  $L$ .

c) Plongement de  $X'$  dans  $\mathbb{R}P^3$

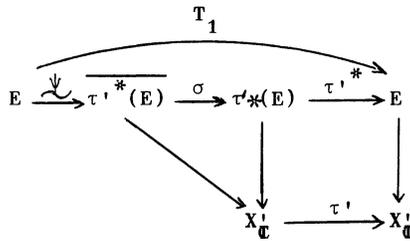
**Proposition 4.4** (cf. exposé VI, Théorème 2) : Avec les notations ci-dessus, il existe un plongement  $\varphi : X'_\alpha \rightarrow \mathbb{C}P^3$  tel que

- (1)  $\varphi(X'_\alpha)$  soit une surface de degré 4 ;
- (2)  $\varphi^*(e) = \beta$  ( $e$  étant un générateur de  $H^2(\mathbb{C}P^3, \mathbb{Z})$  ;

$$(3) \quad \bar{\varphi} = \varphi \circ \tau' .$$

**Démonstration** : Elle est presque la même que dans l'Exposé VI : il faut simplement s'assurer que l'on peut satisfaire la condition (3) (de façon à ce que  $X' = \text{Fix } \tau'$  se plonge dans  $\mathbb{RP}^3$ ).

Soit  $E \xrightarrow{\pi} X'_{\mathbb{C}}$  le fibré holomorphe de classe de Chern  $\beta$  considéré dans l'Exposé VI. Montrons d'abord qu'il existe une involution (analytique réelle)  $T : E \rightarrow E$  telle que  $T \circ \pi = \pi \circ \tau'$  et que la restriction  $T_x$  de  $T$  à chaque fibre  $L_x$  soit antilinéaire (i.e.  $T_x(\lambda a + \mu b) = \bar{\lambda} T_x(a) + \bar{\mu} T_x(b)$ ) ; comme  $\beta \in L_{-1}$ , le fibré  $\tau'^*(E)$  a pour classe de Chern  $-\beta$ . Le fibré  $\tau'^*(E)$ , conjugué de  $\tau'^*(E)$ , a alors  $\beta$  pour classe de Chern (cf. par exemple [7], § 14) ; il existe donc un isomorphisme (analytique complexe)  $\psi : E \rightarrow \tau'^*(E)$  ; si  $\sigma : \tau'^*(E) \rightarrow \tau'^*(E)$  est l'application (antilinéaire) canonique, il suffit de poser  $T_1 = \tau'^* \circ \sigma \circ \psi$  :



et  $T = \lambda T_1$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  est choisi pour que  $T$  soit une involution. L'application  $\theta$  définie par  $\theta(s) = T \circ s \circ \tau'$  est alors une involution antilinéaire sur l'espace  $H^0(X'_{\mathbb{C}}, E)$  des sections globales de  $E$  ; il existe donc une base  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  de  $H^0(X'_{\mathbb{C}}, E)$  dans  $\text{Ker}(1 - \theta)$  ; le plongement  $\varphi$  de  $X'_{\mathbb{C}}$  dans  $\mathbb{CP}^3$  obtenu à partir de cette base (défini par  $\varphi(x) = (s_0(x), s_1(x), s_2(x), s_3(x))$ ) vérifie alors évidemment la condition (3) de 4.4.  $\square$

5. TYPE TOPOLOGIQUE DU PLONGEMENT

Nous nous contenterons de démontrer la proposition suivante :

**Proposition 5.1** . Soit  $X \xrightarrow{i} \mathbb{RP}^3$  une M-surface algébrique de degré 4. Alors le morphisme  $i_{1*} : H_1(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^3, \mathbb{Z}_2)$  est non nul.

**Démonstration** : Supposons par l'absurde que  $i_{1*} = 0$ .

a) Montrons d'abord que cela implique  $i_{2*} = 0$  ; si en effet  $\xi \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$  est tel que  $i_{2*}(\xi) \neq 0$ , soit  $\lambda \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$  la classe de  $X \cap H$  où  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}P^3$  (cf. [1]), alors  $\xi \cdot \lambda \in H_1(X, \mathbb{Z}_2)$  et  $i_{1*}(\xi \cdot \lambda) = i_{2*}(\xi) \cap [H] \neq 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

b) On a donc par hypothèse  $i_{1*} = i_{2*} = 0$ , et aussi  $i_{0*} = 0$  car le nombre de composantes de  $X$  est pair.

On déduit immédiatement de cela et de la suite exacte d'homologie de la paire  $(X, \mathbb{R}P^3)$  que  $\dim H_*(\mathbb{R}P^3, X) = \dim H_*(X) + 4$ .

D'autre part, si  $j$  est l'injection de  $X_{\mathbb{C}}$  dans  $\mathbb{C}P^3$ , on voit facilement  $j_{2*} = j_{4*} = 0$  (toujours pour l'homologie à coefficients  $\mathbb{Z}_2$ ) : on en déduit de même  $\dim H_*(\mathbb{C}P^3, X_{\mathbb{C}}) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}}) + 2$ .

Comme  $X$  est une  $M$ -surface, on a  $\dim H_*(X) = \dim H_*(X_{\mathbb{C}})$ , d'où  $\dim H_*(\mathbb{R}P^3, X) = \dim H_*(\mathbb{C}P^3, X_{\mathbb{C}}) + 2$ , ce qui est contradictoire avec l'inégalité  $\dim H_*(\mathbb{R}P^3, X) \leq \dim H_*(\mathbb{C}P^3, X_{\mathbb{C}})$  qui découle de la théorie de Smith "relative" (cf. le Corollaire 1.2).  $\square$

Remarque : On peut déduire de cette proposition le type topologique du plongement de la surface  $9S^2 \amalg T_2$  construite au n°4 :

1)  $T_2$  se plonge comme un "hyperboloïde à une nappe avec une anse non nouée" (terminologie des Russes) ;

2) les 9 sphères restantes sont toutes dans une même composante connexe du complémentaire de  $T_2$  et à l'extérieur les unes des autres (ceci pour une question de degré : une droite ne peut couper  $X$  en plus de quatre points).

\*  
\*  
\*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Borel - A. Haefliger : La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique, Bull. S.M.F. 89 (1961), 461-513.
- [2] D.A. Gudkov : The topology of real projective algebraic manifolds, Russian Math. Surveys 29 (1974), 1-79.
- [3] F. Hirzebruch : The signature of ramified coverings, Global Analysis (in honour of Kodaira), University Press, Tokyo (1969).

- [4] K.Janich-E. Ossa : The signature of an involution, *Topology* 8 (1969), 27-30.
- [5] V.M. Kharlamov : The topological type of non-singular surfaces in  $\mathbb{R}P^3$  of degree four, *Functional Anal. Appl.* n° 10 (1976), 295-305.
- [6] A.Marin : Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles, *Séminaire sur la géométrie algébrique réelle (Risler)*, *Pub. Math. de l'Université Paris VII*, n° 9.
- [7] J.Milnor-J. Stasheff : Characteristic classes, *Annals of Mathematics Studies* 76, Princeton (1974).
- [8] J.J. Risler : Sur le 16ème problème de Hilbert : un résumé et quelques questions, *Pub. Math. de l'Université Paris VII*, n° 9.
- [9] V.A. Rokhlin : Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem, *Funct. Analysis Appl.* n° 6 (1972), 301-106.
- [10] Seminar on transformation groups, *Ann. Math. Studies* n° 46, Princeton (1960).
- [11] J.P. Serre : *Cours d'arithmétique*, P.U.F.
- [12] O.Y. Viro : Construction of M-surfaces, *Funct. Analysis Appl.* n° 13 (1979), 212-213.
- [13] G.Wilson : Hilbert sixteenth problem, *Topology* 17 (1978), 53-73.

U.E.R. de Mathématiques  
Université Paris VII  
2, place Jussieu  
75251 PARIS Cedex 05