Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Toute surface $K3$ est Kählérienne

Astérisque, tome 126 (1985), p. 137-140

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__137_0>

EXPOSÉ XII

TOUTE SURFACE K3 EST KÄHLÉRIENNE

Arnaud BEAUVILLE

On démontre dans cet exposé que toute surface K3 est kählérienne, en suivant la méthode de Siu [1]. L'idée de la démonstration est la suivante. Soit (X_o,σ) une surface K3 marquée. D'après l'Exposé X, (X_o,σ) a même période qu'une surface K3 kählérienne marquée (X'_o,σ'). Il s'agit de prouver que X_o est isomorphe à X'_o, donc kählérienne. Il faut pour cela étendre à ce cadre le "lemme principal" de Burns-Rapoport (Exposé IX, n°2), puis adapter la fin de la démonstration du théorème de Torelli (Exposé IX).

1. EXTENSION DU "LEMME PRINCIPAL"

__Proposition__. __Soient__ $f : X \longrightarrow S$ __et__ $f' : X' \longrightarrow S$ __deux familles de surfaces__ K3 __sur une variété analytique__ S, __et__ $\varphi : R^2f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow R^2f'_*(\mathbb{Z})$ __un isomorphisme__. __Soient__ T __une partie de__ S __et__ o __un point d'accumulation de__ T. __On suppose que__ X'_o __est kählérienne__, __et qu'il existe pour chaque__ $t \in T$ __un isomorphisme__ $u_t : X'_t \longrightarrow X_t$ __tel que__ $u_t^* = \varphi_t$. __Alors__ X_o __et__ X'_o __sont isomorphes__.

C'est le même énoncé que la Proposition 4 de l'Exposé IX, mais sans hypothèse kählérienne sur X_o.

On a déjà observé (Exposé IX, n°2, remarque) que cette hypothèse a été utilisée dans la démonstration de la Prop. 4 uniquement pour borner le volume de Γ_t, et plus précisément le terme $\int_{X'_t} \varkappa'_t \wedge u_t^* \varkappa_t$. On va choisir sur X et X' des métriques hermitiennes particulières permettant de borner cette intégrale.

Sur X', nous choisirons comme dans l'Exposé IX une métrique hermitienne induisant sur chaque fibre X'_s une métrique kählérienne, dont nous noterons $\varkappa'_t$ la forme de Kähler. D'autre part, soit $\varkappa_o$ la forme de Kähler d'une métrique standard sur X_o, et soit θ_o une 2-forme réelle fermée telle que $\theta_o^{1,1} = \varkappa_o$ (Exposé XI, th.1). Quitte à réduire S, on peut supposer qu'il existe une rétraction r (de classe C^∞) de X sur X_o, et d'autre part une métrique kählérienne sur S, de classe de Kähler π. Considérons la 2-forme fermée $\theta = r^* \theta_o + f^* \pi$, et posons $\varkappa = \theta^{1,1}$; en réduisant de nouveau S, on peut supposer que $\varkappa$ est positive non dégénérée. On munit X de la métrique hermitienne de forme de Kähler $\varkappa$. On a alors

$$\int_{X_t'} \varkappa_t' \wedge u_t^* \varkappa_t = \int_{X_t'} \varkappa_t' \wedge u_t^* \theta_t = [\varkappa_t'] \cdot \varphi_t [\theta_t] ,$$

et cette fonction de t est la restriction à T d'une fonction continue sur S, donc bornée au voisinage de o. □

2. LA CLASSE D'UNE MÉTRIQUE STANDARD

Soit X une surface K3. Nous noterons comme précédemment $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ l'orthogonal de ω dans $H^2(X,\mathbb{R})$, de sorte que toute classe $x \in H^2(X,\mathbb{R})$ s'écrit $x = c\omega + k + \bar{c}\bar{\omega}$, avec $c \in \mathbb{C}$ et $k \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$. Soit $\varkappa$ la forme de Kähler d'une métrique hermitienne standard sur X.

Lemme.

a) Il existe une 2-forme réelle fermée θ sur X telle que $\varkappa = \theta^{1,1}$.

b) La composante k de $[\theta]$ dans $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ est indépendante du choix de θ ; on peut choisir θ, de manière unique, de façon que $[\theta] = k$.

c) On a $k^2 > 0$ et $k.[D] > 0$ pour tout diviseur effectif D sur X.

d) Si X est kählérienne, k appartient à la chambre kählérienne K_X (Exposé VII, n°2).

L'assertion a) a été démontrée dans l'exposé précédent. La forme θ est bien déterminée à l'addition près d'une 2-forme réelle fermée de type (2,0) + (0,2), donc de la forme $c\omega + \bar{c}\bar{\omega}$ pour $c \in \mathbb{C}$. On en déduit immédiatement l'unicité de k ; d'autre part la condition $[\theta].[\omega] = 0$ détermine c, et donc θ, de manière unique.

Choisissons la forme $\theta = \alpha + \varkappa + \bar{\alpha}$ vérifiant cette condition ; on a alors

$$k^2 = \int_X \theta \wedge \theta = 2 \int_X \alpha \wedge \alpha + \int_X \varkappa \wedge \varkappa > 0 ,$$

et pour tout diviseur effectif D

$$k.[D] = \int_D \theta = \int_D \varkappa \qquad > 0 \ ,$$

d'où c).

Supposons qu'il existe sur X une métrique kählérienne, de forme de Kähler ξ . Considérons pour $0 \leq t \leq 1$ la 2-forme $t\xi + (1-t)\theta$; elle est fermée et sa composante de type (1,1) est positive non dégénérée. On déduit de c) que le segment $[[\xi],k]$ dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ est contenu dans une chambre de $\mathcal{C}_X$, qui est nécessairement $\mathcal{K}_X$ puisqu'elle contient $[\xi]$, d'où d). □

On a ainsi associé à toute métrique hermitienne standard sur X une classe de cohomologie $k \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$, qui possède des propriétés très analogues à celles de la classe d'une métrique kählérienne (et qui coïncide avec celle-ci lorsque la métrique standard se trouve être kählérienne).

3. LE THÉORÈME DE Y.T. SIU

Théorème [1]. Toute surface K3 est kählérienne.

Soit (X_o,σ) une surface K3 marquée, et soit $P \subset L_{\mathbb{R}}$ sa période. Choisissons une métrique hermitienne standard sur X_o ; notons $\varkappa_o$ sa forme de Kähler et k_o la classe associée dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X_o)$(n°2). D'après le lemme ci-dessus, l'élément $\sigma(k_o)$ de $L_{\mathbb{R}}$ est orthogonal à P , de carré > 0 , et n'est orthogonal à aucun élément de Δ_P . Il résulte donc de l'Exposé X , n°4, prop., qu'il existe une surface K3 kählérienne marquée (X'_o,σ') , de période P , et une classe de Kähler $k'_o \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X'_o)$ telle que $\sigma(k_o) = \sigma'(k'_o)$. Alors $\varphi_o = \sigma'^{-1} \circ \sigma$ est une isométrie de Hodge de $H^2(X_o,\mathbb{R})$ dans $H^2(X'_o,\mathbb{R})$, telle que $\varphi_o(k_o) = k'_o$.

On a vu (Exposé IX,n°5) qu'on peut alors construire des déformations locales universelles $f : X \longrightarrow S$ et $f' : X' \longrightarrow S$ pour X_o et X'_o $(o \in S)$, et un isomorphisme $\varphi : R^2f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow R^2f'_*(\mathbb{Z})$ induisant pour chaque $s \in S$ une isométrie de Hodge $\varphi_s : H^2(X_s,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X'_s,\mathbb{Z})$ (et induisant l'isométrie donnée φ_o au point o) . De plus S s'identifie à un ouvert du domaine des périodes Ω , de sorte qu'il existe une partie dense T de S telle que X_t et X'_t soient projectives pour $t \in T$ (cf. par exemple Exposé VI). Il s'agit de montrer que φ_t est effective pour $t \in T$ assez proche de o : en effet on déduira alors du théorème de Torelli, pour chaque $t \in T$, un isomorphisme $u_t : X'_t \longrightarrow X_t$ tel que $u_t^* = \varphi_t$, et la proposition permettra de conclure que X_o est isomorphe à X'_o , donc kählérienne.

Soit θ'_o une forme de Kähler sur X'_o de classe k'_o , et soit θ_o une 2-forme réelle fermée sur X_o telle que $\theta_o^{1,1} = \varkappa_o$ et $[\theta_o] = k_o$ (n°2 , lemme). Quitte à réduire S , on peut comme ci-dessus étendre θ_o et θ'_o en des formes fermées θ sur X et θ' sur X' dont les composantes de type (1,1) sont positives non dégénérées. Pour $s \in S$, notons k_s la composante de $[\theta_s]$ dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X_s)$ et k'_s celle de $[\theta'_s]$ dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X'_s)$. Comme $\varphi_o(k_o) = k'_o$, on a $\varphi_s([\theta_s]) = [\theta'_s]$ pour tout $s \in S$, d'où, puisque φ_s est une isométrie de Hodge, $\varphi_s(k_s) = k'_s$. Lorsque X_s et X'_s sont kählériennes (en particulier lorsque $s \in T$), on déduit alors du lemme, d), que φ_s est effective, ce qui achève la démonstration du théorème. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y-T. Siu : Every K3 surface is Kähler, Inventiones Math. 73 (1983), 139-150.

Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris-Sud
ERA du CNRS n° 653
91405 ORSAY CEDEX (France)