PIERRE BERTHELOT

Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles

Astérisque, tome 119-120 (1984), p. 17-49

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__119-120__17_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 119-120 (1984) p.17-49.

COHOMOLOGIE RIGIDE ET THÉORIE DE DWORK : LE CAS DES SOMMES EXPONENTIELLES

par

Pierre BERTHELOT(*)

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Dans [2 ; 3], nous montrons comment définir sur la catégorie des k-schémas séparés de type fini une théorie cohomologique, la cohomologie rigide, qui s'identifie à la cohomologie cristalline (tensorisée par $\mathbb{Q}$) dans le cas propre et lisse, et à la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine et lisse. Nous nous proposons ici de donner quelques indications sur les relations entre cette théorie et la théorie de Dwork.

D'une manière générale, la théorie de Dwork comprend plusieurs aspects : théorie algébrique, théorie analytique, théorie (analytique) duale (voir par exemple [10] dans le cas des fonctions hypergéométriques). Depuis la thèse de Katz [12], on sait comment la théorie algébrique peut s'interpréter, dans le cas des hypersurfaces, en termes de la cohomologie de De Rham des hypersurfaces sur un corps de caractéristique zéro. Des interprétations similaires peuvent être données dans d'autres contextes : ainsi, comme l'a montré Messing [17], la théorie algébrique des équations différentielles associées aux fonctions hypergéométriques [10, ch. 1] s'interprète géométriquement comme l'étude d'un facteur direct de la cohomologie de De Rham d'une famille convenable de courbes algébriques.

Le principe général que cet article cherche à illustrer est que la cohomologie rigide permet de donner des interprétations analogues

----

(*) Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 305.

de la théorie analytique et de la théorie duale, les espaces de cohomologie qui s'introduisent étant alors attachés fonctoriellement à une situation géométrique en caractéristique p. En ce qui concerne la théorie analytique, il ne s'agit pas à proprement parler d'un résultat nouveau, car les situations étudiées par la théorie de Dwork sont généralement affines et lisses ; or dans ce cas la cohomologie rigide s'identifie par construction à la cohomologie de Monsky-Washnitzer, et on sait bien comment comparer les théories de Dwork et de Monsky-Washnitzer (voir [12] dans le cas des hypersurfaces, [9] et [22] dans le cas des revêtements d'Artin-Schreier, ou encore la définition de la théorie analytique [10, ch. 3] dans le cas des fonctions hypergéométriques). Il faut toutefois observer que, même dans le cas affine et lisse, l'introduction de la cohomologie rigide permet d'utiliser des techniques qui débordent du cadre de la théorie de Monsky-Washnitzer : d'une part par l'introduction de coefficients non constants, d'autre part parce qu'on peut calculer la cohomologie rigide d'un schéma X (en caractéristique p) par plongement dans un schéma lisse relevé en inégales caractéristiques, et pas seulement en relevant X lui-même ; il en va d'ailleurs de même si l'on veut calculer l'homomorphisme induit sur la cohomologie rigide par un morphisme de schémas en caractéristique p (par exemple le Frobenius, comme en (1.5) plus bas). Quant à la théorie analytique duale, il ne semble pas qu'elle ait encore reçu d'interprétation par la géométrie algébrique, faute de l'existence jusqu'à présent d'une théorie p-adique de la cohomologie à support propre pour les schémas de caractéristique p. La cohomologie rigide à support propre comble cette lacune, et nous montrerons que, dans le cas étudié ici, elle s'identifie effectivement à la théorie duale de Dwork.

Parmi les différentes situations auxquelles ont été appliquées les méthodes de Dwork, nous avons choisi l'exemple des espaces de cohomologie associés à l'étude des sommes exponentielles à une variable. D'une part, la comparaison entre les deux théories est alors fort simple, grâce à la construction que donne Robba [21] de ces espaces de cohomologie. D'autre part, l'étude p-adique éventuelle des sommes exponentielles par des méthodes analogues à celles de Deligne [5] et Katz [13] est une des motivations pour développer la cohomologie "p-adique" des variétés algébriques de caractéristique p au-delà du cas propre et lisse où elle était restée limitée. Mentionnons enfin que la dernière section de l'article [9] de Dwork, comparant sa théorie avec celle de Monsky, a été le point de départ du présent article.

Après de brefs rappels sur les principales constructions utilisées pour définir la cohomologie rigide, nous consacrons les deux premières sections à la construction géométrique des F-cristaux surconvergents associés aux caractères additifs et multiplicatis de $\mathbb{F}_q$. Dans la première, nous étudions la cohomologie rigide relative d'un revêtement d'Artin-Schreier d'équation $z^q - z = t$ de la droite affine sur k. Seule l'image directe du faisceau structural est non nulle, et nous expliquons comment elle se scinde naturellement en somme directe de F-cristaux surconvergents $\mathcal{L}_\psi$ de rang 1 sur $\mathbb{A}^1_k$, indexés par les caractères additifs ψ de $\mathbb{F}_q$, et correspondant à des fonctions exponentielles. Il s'agit d'une reformulation, du point de vue de la cohomologie rigide, des résultats de Dwork sur l'exponentielle et le relèvement des caractères [6, § 1 ; 7, § 4, a ; 9, § 9]. Dans la deuxième section, nous étudions de la même manière la cohomologie rigide relative d'un revêtement de Kümmer de $\mathbb{G}_{m,k}$, de degré n premier à p. Elle se scinde en somme directe de cristaux surconvergents $\mathcal{K}_\chi$ de rang 1 sur $\mathbb{G}_{m,k}$, indexés par les caractères χ du groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité ; les $\mathcal{K}_\chi$ sont des F^s-cristaux surconvergents, si s est tel que n divise p^s-1. Les cristaux $\mathcal{L}_\psi$, $\mathcal{K}_\chi$ sont les homologues en cohomologie rigide des faisceaux inversibles ℓ-adiques du même nom introduits par Deligne [5] et Katz [13] dans la théorie ℓ-adique des sommes exponentielles. La troisième section développe ce point de vue : en suivant les constructions de Robba [21], nous montrons que les espaces de cohomologie utilisés dans la théorie p-adique des sommes exponentielles à une variable s'identifient à la cohomologie rigide (resp. à support propre) d'un ouvert de la droite projective à coefficients dans un F-cristal surconvergent de la forme $f^*\mathcal{L}_\psi \otimes h^*\mathcal{K}_\chi$, donc sont les homologues de ceux de la théorie ℓ-adique. Bien que nous nous soyons limités pour simplifier au cas de dimension 1, il est clair que, au prix d'un peu de travail supplémentaire, on peut donner des interprétations analogues en dimensions supérieures dans les différents cas étudiés par Sperber et Adolphson.

O. DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici quelques définitions, en renvoyant à [2 ; 3] pour plus de détails.

(O.1) Nous désignerons par K un corps de caractéristique O, complet pour une valuation non archimédienne notée ord ; nous noterons $\mathcal{V}$ l'anneau des entiers de K, k son corps résiduel, supposé de caractéristique $p > 0$. La valuation de K sera normalisée par $\mathrm{ord}\ p = 1$, et la valeur absolue correspondante définie par $|a| = p^{-\mathrm{ord}\,a}$ pour tout $a \in K$.

(O.2) Si P est un schéma formel sur $\mathcal{V}$, nous noterons $\tilde{P}$ sa <u>fibre générique</u> au sens de Raynaud [19], qui est un espace analytique rigide sur K ; si P est le schéma formel associé à un $\mathcal{V}$-schéma Y, $\tilde{P}$ est un ouvert admissible de l'espace analytique Y_K^{an} associé à la fibre générique (au sens usuel) Y_K de Y, et est égal à celui-ci si Y est propre sur K. Les points de $\tilde{P}$ correspondent aux sous-schémas fermés intègres de P, finis et plats sur $\mathcal{V}$; le support d'un tel sous-schéma est réduit à un point fermé de P, appelé <u>spécialisation</u> du point correspondant de $\tilde{P}$.

(O.3) Soit X un k-schéma, muni d'une immersion $j : X \hookrightarrow P$. L'ensemble des points de $\tilde{P}$ dont la spécialisation est un point de X est un ouvert admissible de $\tilde{P}$, appelé <u>tube de</u> X <u>dans</u> P, et noté $]X[_P$. S'il existe $f_1,\ldots,f_r,g_1,\ldots,g_s \in \Gamma(P,\mathcal{O}_P)$ tel que X soit le sous-schéma de $P \times \mathrm{Spec}(k)$ défini par l'annulation des f_i, et la non-annulation de l'un au moins des g_j, on peut considérer $f_1,\ldots,g_s$ comme des fonctions analytiques sur $\tilde{P}$, et $]X[_P$ est l'ouvert défini par les conditions

$$\forall\, i, \quad |f_i(x)| < 1 ,$$
$$\exists\, j, \quad |g_j(x)| \geqslant 1 .$$

(O.4) Sous les hypothèses de (O.3), soit $\overline{X}$ l'adhérence de X dans P. Un ouvert admissible $V \subset\ ]\overline{X}[_P$ est appelé <u>voisinage strict</u> de $]X[_P$ s'il contient X, et si pour tout affinoïde $W \subset\ ]\overline{X}[_P$, et toutes sections locales $f_1,\ldots,g_s$ de $\mathcal{O}_P$ définissant X au voisinage d'un point de P, il existe $\lambda < 1$ tel que si un point x de X est tel que $|g_j(x)| \geqslant \lambda$ pour un j, alors $x \in V$. Un <u>système fondamental de voisi-</u>

<u>nages stricts</u> de $]X[_P$ est une partie cofinale de l'ensemble des voisinages stricts de $]X[_P$. Si X est un ouvert de $P \times \mathrm{Spec}(k)$, les ensembles

$$U_\lambda = \{x \in \tilde{P} \mid \exists j ,\ |g_j(x)| \geqslant \lambda\} \quad ,$$

pour $\lambda < 1$, forment un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_P$.

(0.5) Sous les hypothèses précédentes, on associe à tout faisceau E sur un voisinage strict V_0 de $]X[_P$ dans $]\overline{X}[_P$ le faisceau des germes de sections de E au voisinage de $]X[_P$, noté $j^\dagger E$, et défini par

$$j^\dagger E = \varinjlim_{V \subset V_0} i_{V*}\, i_V^* E \ ,$$

où $i_V : V \hookrightarrow]\overline{X}[_P$ désigne l'inclusion d'un voisinage strict V de $]X[_P$ dans $]\overline{X}[_P$.

Supposons P lisse sur $\mathcal{V}$ au voisinage de X, et $\overline{X}$ propre sur k ; soient $p_1, p_2 :]\overline{X}[_{P^2} \longrightarrow]X[_P$ les morphismes induits par les deux projections $\tilde{P}^2 \longrightarrow \tilde{P}$. Un <u>cristal surconvergent sur</u> X est un $j^\dagger \mathcal{O}_{]\overline{X}[_P}$-module E, localement libre de rang fini, muni d'un isomorphisme de $j^\dagger \mathcal{O}_{]\overline{X}[_{P^2}}$-modules $p_2^* E \xrightarrow{\sim} p_1^* E$, vérifiant la condition de cocycle habituelle sur $]\overline{X}[_{P^3}$. Un tel module est de la forme $j^\dagger \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{V_0}$-module localement libre de rang fini sur un voisinage strict V_0 de $]X[_P$, muni d'une connexion intégrable $\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{V_0}$ dont la série de Taylor [2, (4.1)] définit un isomorphisme $p_2^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{E}$ sur un voisinage strict de $]X[_{P^2}$ dans $]\overline{X}[_{P^2}$. La catégorie des cristaux surconvergents sur X ne dépend pas, à équivalence canonique près, du choix de P, et est fonctorielle en X/K : si $f : X' \longrightarrow X$ est un morphisme de schémas, induit par un morphisme de schémas formels $g : P' \longrightarrow P$ (vérifiant les hypothèses précédentes), le foncteur image inverse g^* pour les modules à connexion induit un foncteur entre les cristaux surconvergents sur X et X', qui ne dépend, à isomorphisme canonique près, que de f, et sera noté f^*.

Si $s \in \mathbb{N}$, et si σ est un automorphisme de K induisant la puissance s-ième du Frobenius sur k, un <u>F^s-cristal surconvergent sur</u> $(X/K, \sigma)$ est un cristal surconvergent E sur X muni d'un isomorphisme

$F_X^{s*}E \xrightarrow{\sim} E$, où F_X est l'endomorphisme de Frobenius absolu de X.

(0.6) Soient X un k-schéma séparé de type fini, S un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, $u : X \longrightarrow S$ un $\mathcal{V}$-morphisme. On choisit une compactification $\overline{X}$ de X au-dessus de S, et une immersion fermée $\overline{X} \hookrightarrow P$, où P est un S-schéma formel, lisse sur S au voisinage de X. Si E est un cristal surconvergent sur X, E définit un $j^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_P}$-module E_P sur $]\overline{X}[_P$, muni d'une connexion intégrable $\nabla : E_P \to E_P \otimes \Omega^1_{]\overline{X}[/\tilde{S}}$, ce qui permet de définir le complexe de De Rham $E_P \otimes \Omega^\bullet_{]\overline{X}[/\tilde{S}}$. Si $\tilde{v} :]\overline{X}[_P \longrightarrow \tilde{S}$ est le morphisme induit par $v : P \longrightarrow S$, les <u>faisceaux de cohomologie rigide de</u> X <u>relativement à</u> S, <u>à coefficients dans</u> E, sont par définition les faisceaux $R^i\tilde{v}_*(E_P \otimes \Omega^\bullet_{]\overline{X}[/\tilde{S}})$; nous les noterons $R^iu_{rig*}(X/S,E)$ (resp. $R^iu_{rig*}(X/S)$ lorsque E est le cristal "constant" correspondant à $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, d)$). Lorsque $S = \mathrm{Spf}(\mathcal{V})$, on obtient les espaces de cohomologie rigide $H^i_{rig}(X/K,E)$ (resp. $H^i_{rig}(X/K)$). Les faisceaux $R^iu_{rig*}(X/S)$ sont indépendants, à isomorphisme canonique près, des choix de $\overline{X}$ et P, et sont fonctoriels en E et en X/S/K.

(0.7) Soient encore $\overline{X}$ une compactification de X sur k, $\overline{X} \hookrightarrow P$ une immersion fermée dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X, et E un cristal surconvergent sur X. Soit $V \subset]\overline{X}[_P$ un voisinage strict de $]X[_P$ sur lequel il existe un $\mathcal{O}_V$-module localement libre $\mathcal{E}$ muni d'une connexion intégrable définissant E. On note $\Gamma_{]X[}(V, -)$ le foncteur "sections à support dans $]X[_P$", et $H^i_{]X[}(V,-)$ ses dérivés. La <u>cohomologie rigide à support propre de</u> X, <u>à coefficients dans</u> E, est donnée par les espaces $H^i_{]X[}(V,\mathcal{E}\otimes\Omega^\bullet_V)$. Ils ne dépendent ni des choix de V et $\mathcal{E}$, ni de ceux de $\overline{X}$ et P, et sont fonctoriels en E, et en X/K pour les morphismes propres.

1. REVÊTEMENTS D'ARTIN-SCHREIER ET EXPONENTIELLES.

Soient $q = p^s$, $k = \mathbb{F}_q$, $\mathcal{W}$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, $K_0 = \mathrm{Frac}(\mathcal{W})$, K l'extension de K_0 obtenue par adjonction d'un élément $\pi \in \overline{K}_0$ tel que $\pi^{p-1} = -p$, $\mathcal{V}$ l'anneau des entiers de K. Nous étendrons l'action du Frobenius absolu de $\mathbb{F}_q$ sur K_0 en un automorphisme σ de K en posant $\sigma(\pi) = \pi$.

On note $X = \mathrm{Spec}(k[t])$ la droite affine sur k, $u_0 : Y \longrightarrow X$ le revêtement d'Artin-Schreier d'équation

$$z^q - z = t\ .$$

Soient P la droite projective formelle sur $\mathcal{V}$, $j : X \hookrightarrow P$ l'immersion naturelle, $u = j \circ u_0$, $\tilde{P}$ la fibre générique de P, qui est la droite projective analytique sur K. On se propose ici de montrer que le faisceau de cohomologie rigide relative $u_{rig*}(Y/P)$ se décompose de façon canonique en somme de q F-cristaux surconvergents $\mathcal{L}_\psi$ sur X, de rang 1, indexés par les caractères additifs ψ de $\mathbb{F}_q$.

1.1. LEMME.

i) *Les* $R^i u_{rig*}(Y/P)$ *sont nuls pour* $i \geqslant 1$, *et* $u_{rig*}(Y/P)$ *est libre de rang* q *sur* $j^\dagger \mathcal{O}_{\tilde{P}}$.

ii) *Soient* K' *une extension de* K, *complète pour une valeur absolue prolongeant celle de* K, k' *son corps résiduel*, X' *un* k'*-schéma*, $f : X' \longrightarrow X$ *un* k*-morphisme*, $Y' = X' \times_X Y$, $u'_0 : Y' \longrightarrow X'$; *supposons donnés un schéma formel* P' *sur l'anneau* $\mathcal{V}'$ *des entiers de* K', *une immersion* $j' : X' \hookrightarrow P'$, *et un* $\mathcal{V}$*-morphisme* $g : P' \longrightarrow P$ *tel que* $g \circ j' = j \circ f$; *soit* $u' = j' \circ u'_0$. *Alors les* $R^i u'_{rig*}(Y'/P')$ *sont nuls pour* $i \geqslant 1$, *et l'homomorphisme canonique de* $j'^\dagger \mathcal{O}_{\tilde{P}'}$*-modules*

$$\tilde{g}^* u_{rig*}(Y/P) \longrightarrow u'_{rig*}(Y'/P')$$

est un isomorphisme. *En particulier*, $u_{rig*}(Y/P)$ *a une structure naturelle de* F*-cristal surconvergent sur* X.

Soit Z l'adhérence schématique dans $\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}} \times \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$ de la courbe affine de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} \times \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}}$ d'équation $z^q - z = t$; notons $\hat{Z}$ le complété formel de Z, Z_0 la réduction de Z et $\hat{Z}$ sur k, $\tilde{Z}$ la fibre générique de $\hat{Z}$, qui est égale à Z_K^{an}. Alors Z_0 est une compactification de Y au-dessus de

$P_0 = \mathbb{P}^1_k$, et la deuxième projection $\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}} \times \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$ (correspondant à $(z,t) \longmapsto t$) induit un morphisme de schémas formels $v : \hat{Z} \to P$ qui est un relèvement de $Z_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$, lisse aux points de Y. Il permet donc de calculer la cohomologie rigide relative de Y/P : si $j_1^\dagger$ est le foncteur "germes de sections au voisinage de]Y[" sur $\tilde{Z}$, on a par définition

$$(1.1.1) \qquad \mathbb{R}u_{rig*}(Y/P) = \mathbb{R}\tilde{v}_*(j_1^\dagger \Omega^\bullet_{\tilde{Z}/\tilde{P}}) ,$$

où $\tilde{v} : \tilde{Z} \to \tilde{P}$ est le morphisme d'espaces analytiques associé à v (ou encore, à la projection de Z_K sur $\mathbb{P}^1_K$).

Soient z,t les coordonnées sur $\mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} \times \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}}$; un système fondamental de voisinages stricts de $]\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k[$ dans $\tilde{P} \times \tilde{P}$ est fourni par les polydisques

$$|z| \leqslant \lambda , \quad |t| \leqslant \rho ,$$

avec $\lambda, \rho > 1$; leur trace sur $\tilde{Z}$ est un système fondamental de voisinages stricts de $]Y[_{\hat{Z}}$. Au-dessus de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{V}}$, Z est contenu dans $\mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} \times \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}}$, et, en un point $x \in Z$ où $|t(x)| \leqslant \rho$, $\rho > 1$, on a $|z(x)| \leqslant \rho^{1/q}$. Si $U_\rho = D(0,\rho^+) \subset \mathbb{A}^{1\,an}_K$, et si $V_\rho = \tilde{v}^{-1}(U_\rho) \subset \tilde{Z}$, les V_ρ forment donc un système fondamental de voisinages stricts de]Y[dans $\tilde{Z}$; en notant $j_{1\rho} : V_\rho \hookrightarrow \tilde{Z}$, on a par conséquent pour tout faisceau E sur $\tilde{Z}$

$$j_1^\dagger E = \varinjlim_{\rho \overset{>}{\to} 1} j_{1\rho*} j_{1\rho}^* E .$$

Comme $\tilde{v}$ est un morphisme quasi-compact d'espaces analytiques, les $R^i\tilde{v}_*$ commutent aux limites inductives filtrantes [3], et il en résulte un isomorphisme canonique

$$(1.1.2) \qquad j^\dagger\, \mathbb{R}\tilde{v}_*\Omega^\bullet_{\tilde{Z}/\tilde{P}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\tilde{v}_*(j_1^\dagger \Omega^\bullet_{\tilde{Z}/\tilde{P}}) .$$

Soit U l'ouvert de $\mathbb{A}^{1\,an}_K$ défini par

$$(1.1.3) \qquad \operatorname{ord} t > -\frac{qs}{q-1} .$$

Alors U est un voisinage strict de $]X[_P$, au-dessus duquel $\tilde{Z}$ est un revêtement étale de $\tilde{P}$. On a donc $j_1^\dagger \Omega^i_{\tilde{Z}/\tilde{P}} = 0$ pour $i \geqslant 1$, d'où d'après

(1.1.2) :

$$R^i u_{rig*}(Y/P) = O \quad \text{si} \quad i \geqslant 1 , \quad u_{rig*}(Y/P) = j^\dagger \tilde{v}_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}} ,$$

de sorte que $u_{rig*}(Y/P)$ est de rang q sur $j^\dagger \mathcal{O}_{\tilde{P}}$.

Pour prouver la seconde assertion, on considère le schéma formel $\hat{Z}'$ image réciproque de $\hat{Z}$ par le morphisme $g : P' \longrightarrow P$; on peut encore calculer la cohomologie rigide relative $\mathbb{R}u'_{rig*}(Y'/P')$ en utilisant l'immersion $Y' \hookrightarrow \hat{Z}'$. L'ouvert $U' = \tilde{g}^{-1}(U)$ de $\tilde{P}'$ définit un voisinage strict de $]X'[_{P'}$ dans $]\overline{X}'[_{P'}$ au-dessus duquel $\tilde{Z}'$ est un revêtement étale ; il suffit alors de reprendre le raisonnement précédent, et d'observer que

$$\tilde{g}^* \tilde{v}_* (\mathcal{O}_{\tilde{Z}}) \xrightarrow{\sim} \tilde{v}'_* (\mathcal{O}_{\tilde{Z}'})$$

au-dessus de U'.

En prenant $X' = X$, $P' = P \times P$, l'immersion diagonale $X \hookrightarrow P'$ et les deux projections $p_i : P' \longrightarrow P$, on obtient en particulier sur $]P_0[_{P'}$ l'isomorphisme

(1.1.4) $$\varepsilon : p_2^* u_{rig*}(Y/P) \xrightarrow{\sim} u_{rig*}(Y/P') \xleftarrow{\sim} p_1^* u_{rig*}(Y/P) ,$$

qui munit $u_{rig*}(Y/P)$ d'une structure de cristal surconvergent sur X. Bien entendu, la connexion correspondante est simplement celle qui provient de ce que $\tilde{v}_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$ est une algèbre étale au-dessus de U, et est donc donnée par

(1.1.5) $$\nabla(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (qz^{q-1} - 1)^{-1} \frac{\partial f}{\partial z}\right) \otimes dt .$$

Enfin, l'action de Frobenius résulte de la fonctorialité de la cohomologie rigide ; nous l'expliciterons plus loin dans une base convenable.

Remarque. Dans l'énoncé précédent, on pouvait prendre $K = \mathbb{Q}_p$, $k = \mathbb{F}_p$.

(1.2) LEMME. (Dwork [9, § 9]). Soient $\alpha \in \mathbb{F}_q$, $\tilde{\alpha} \in \mathcal{W}$ son représentant de Teichmüller. Il existe une unique série formelle

$$\varphi_\alpha(z) \in \mathcal{W}[[z]]$$

<u>de la forme</u>

$$(1.2.1) \qquad \varphi_\alpha(z) = \tilde{\alpha} + z + \sum_{i\geq 1} a_i z^i$$

<u>telle que</u>

$$(1.2.2) \qquad \varphi_\alpha(z)^q - \varphi_\alpha(z) = z^q - z \ .$$

<u>De plus</u> :

(i) <u>Pour tout</u> $i \geq 1$, <u>on a</u>

$$(1.2.3) \qquad \operatorname{ord} a_i \geq \frac{i}{q-1} ,$$

<u>et</u> φ_α <u>définit une fonction analytique pour</u> $\operatorname{ord} z > -\frac{1}{q-1}$.

(ii) <u>Si</u> $w_\alpha(z) = \varphi_\alpha(z) - \tilde{\alpha} - z$, <u>alors</u>, <u>pour</u> $\operatorname{ord} z > -\frac{1}{q-1}$,

$$|w_\alpha(z)| \leq p^{-1/(q-1)}|z| < 1 \ .$$

(iii) <u>Pour tous</u> $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$,

$$\varphi_\alpha(\varphi_\beta(z)) = \varphi_{\alpha+\beta}(z) \ .$$

La relation (1.2.2) peut encore s'écrire, avec $w = w_\alpha(z)$:

$$(1.2.4) \qquad w^q + \sum_{j=2}^{q-1} \binom{q}{j}(z+\tilde{\alpha})^{q-j}w^j + (q(z+\tilde{\alpha})^{q-1}-1)w = z^q + \tilde{\alpha} - (z+\tilde{\alpha})^q \ .$$

En identifiant les deux membres, on détermine $w_\alpha(z)$ grâce à la relation de récurrence :

$$(q-1)a_i + P_i(a_1,\ldots,a_{i-1}) = \begin{cases} -\binom{q}{i}\tilde{\alpha}^{q-i} & \text{si} \quad 1 \leq i < q \\ 0 & \text{si} \quad i \geq q \ , \end{cases}$$

où P_i est un polynôme à coefficients dans $\mathcal{W}$ isobare de poids i par rapport à $a_1,\ldots,a_{i-1}$ affectés des poids $1,\ldots,i-1$, avec $P_1 = 0$. Les assertions (i) et (ii) en résultent également.

Pour $\operatorname{ord} z > -\frac{1}{q-1}$, le polygone de Newton montre que l'équation (1.2.4) possède une unique solution w telle que $\operatorname{ord} w > 0$. Par suite, pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_q$, l'équation

$$(1.2.5) \qquad X^q - X = z^q - z$$

possède une unique solution x_α telle que $\operatorname{ord}(x_\alpha - \tilde{\alpha} - z) > 0$, nécessairement égale à $\varphi_\alpha(z)$. Or, si $\beta \in \mathbb{F}_q$, $\varphi_\alpha(\varphi_\beta(z))$ est solution de

(1.2.5), et

$$\varphi_\alpha(\varphi_\beta(z)) = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + z + w_\beta(z) + w_\alpha(\varphi_\beta(z)) \ ;$$

comme ord $w_\beta(z) > 0$, ord $w_\alpha(\varphi_\beta(z)) > 0$, et $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \equiv \widetilde{\alpha+\beta}$ mod p, on en tire l'assertion (iii).

<u>Remarque</u>. Soit $X_1 \subset \mathbb{A}^{1\,\mathrm{an}}_K$ le disque ouvert défini par

$$\text{ord } t > -\frac{q}{q-1} \ .$$

Avec les notations de 1.1, $\tilde{v}^{-1}(X_1)$ est l'ouvert $Y_1 \subset \tilde{Z}$ défini par ord $z > -\frac{1}{q-1}$. L'action de $\mathbb{F}_q$ sur Y se relève naturellement en une action sur l'ouvert $\hat{Y}$ du schéma formel $\hat{Z}$ relevant Y, donc sur la fibre générique de cet ouvert (qui n'est autre que l'image inverse par $\tilde{v}$ du disque unité fermé). Le lemme précédent montre que cette action se prolonge en une action sur l'ouvert analytique Y_1, induite par $(\alpha,(z,t)) \longmapsto (\varphi_\alpha(z),t)$.

L'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{X_1} \longrightarrow (\tilde{v}_*\mathcal{O}_{Y_1})^{\mathbb{F}_q}$ est un isomorphisme. Puisque $\tilde{v}_*\mathcal{O}_{Y_1}$ est cohérent, il suffit que $\Gamma(X_1,\mathcal{O}_{X_1}) \longrightarrow \Gamma(Y_1,\mathcal{O}_{Y_1})^{\mathbb{F}_q}$ soit un isomorphisme. Soit

$$f = \sum_1^{q-1} c_i(t) z^i \in \Gamma(Y_1,\mathcal{O}_{Y_1})^{\mathbb{F}_q} \ ;$$

si l'un des c_i est non nul, on peut supposer que l'un des $c_i(0)$ est non nul. Pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_q$, on a

$$\sum_1^{q-1} c_i(t)\varphi_\alpha(z)^i = \sum_1^{q-1} c_i(t) z^i \ ,$$

d'où au point $(0,0)$ de Y :

$$\sum_1^{q-1} c_i(0)\tilde{\alpha}^i = 0 \ ,$$

ce qui entraîne la nullité des $c_i(0)$, donc de f.

(1.3) Rappelons que $K = K_0(\mu_p)$, où $\mu_p \subset \overline{K}_0$ est le groupe des racines p-ièmes de l'unité, et qu'à toute racine $\pi \in K$ du polynôme $X^{p-1} + p$ correspond une unique racine primitive p-ième de l'unité ζ, caractérisée par la congruence

(1.3.1) $$\zeta \equiv 1 + \pi \mod \pi^2$$

(voir par exemple [15, III 5] ou [18, 4.3]). On en déduit, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\zeta^m \equiv 1 + m\pi \mod \pi^2 .$$

Si $\tilde{m}$ est le représentant de Teichmüller de la classe résiduelle de m mod p, alors $m \equiv \tilde{m} \mod p$, et, si $(m,p) = 1$, la correspondance précédente associe ζ^m à la racine $\tilde{m}\pi$ de $X^{p-1} + p$.

Soit ψ un caractère additif de $\mathbb{F}_q$, considéré comme étant à valeurs dans μ_p, et fixons un caractère additif non trivial ψ_0 de $\mathbb{F}_p$. Alors $\psi_0^{-1} \circ \psi$ est une forme linéaire $\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_p$, et il existe un unique élément $a \in \mathbb{F}_q$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{F}_q$, on ait

$$\psi(x) = \psi_0(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(ax)) .$$

Si on remplace ψ_0 par ψ_0^m, avec $(m,p) = 1$, a est remplacé par $m^{-1}a$. Soient $\zeta_0 = \psi_0(1)$, π_0 correspondant à ζ_0 par (1.3.1), et $\tilde{a} \in W(\mathbb{F}_q)$ le représentant de Teichmüller de a. D'après ce qui précède, l'élément

(1.3.2) $$\pi_\psi = \pi_0 \tilde{a}$$

ne dépend que de ψ ; nous le noterons simplement π si aucune ambiguïté n'en résulte. On observera que, si ψ est non trivial,

$$\mathrm{ord}\ \pi_\psi = \frac{1}{p-1} .$$

(1.4) LEMME. <u>Soient</u> ψ <u>un caractère additif de</u> $\mathbb{F}_q$, $\pi_\psi \in K$ <u>l'élément lui correspondant par</u> (1.3.2).

(i) <u>La série formelle</u>

$$\theta_\psi(z) = \exp \pi_\psi (z - z^q)$$

<u>converge pour</u> $\mathrm{ord}\ z > -\frac{p-1}{qp}$.

(ii) <u>Pour tout</u> $\alpha \in \mathbb{F}_q$, <u>et pour</u> $\mathrm{ord}\ z > -\frac{p-1}{qp}$,

(1.4.1) $$\theta_\psi(\varphi_\alpha(z)) = \psi(\alpha)\theta_\psi(z) ;$$

<u>en particulier</u>, $\theta_\psi(\tilde{\alpha}) = \psi(\alpha)$.

On sait (voir par exemple [10, 21.1]) que la série $\theta_{\pi_0}(z) = \exp\pi_0(z-z^p)$ converge pour

$$\operatorname{ord} z > -\frac{p-1}{p^2}.$$

L'assertion (i) résulte alors de l'identité entre séries formelles

$$\theta_\psi(z) = \exp\pi_0(\tilde{a}z-\tilde{a}^p z^p)\exp\pi_0(\tilde{a}^p z^p-\tilde{a}^{p^2} z^{p^2})\ldots\exp\pi_0(\tilde{a}^{p^{s-1}} z^{p^{s-1}} - \tilde{a}^q z^q) .$$

Comme d'habitude, θ_ψ n'est la composée de $z-z^q$ et $\exp\pi_\psi z$ que pour $\operatorname{ord} z > 0$. Par contre, pour $\operatorname{ord} z > -\frac{p-1}{qp}$, on a

$$\operatorname{ord} p(z-z^q) > 1 - \frac{p-1}{qp}.q > 0 ,$$

de sorte que $\theta_\psi(z)^p$ est la composée de $p(z-z^q)$ et $\exp\pi_\psi z$. On en déduit :

$$(\theta_\psi(\varphi_\alpha(z))/\theta_\psi(z))^p = 1 .$$

Donc $\theta_\psi(\varphi_\alpha(z)) = \xi\theta_\psi(z)$, où ξ est une racine p-ième de l'unité qui est fonction analytique de z pour $\operatorname{ord} z > -\frac{p-1}{qp}$, donc indépendante de z et égale à $\theta_\psi(\tilde{\alpha})$. Il suffit alors de vérifier que $\theta_\psi(\tilde{\alpha}) = \psi(\alpha)$.

L'estimation des coefficients de $\theta_{\pi_0}(z)$ donnée par Dwork [9, § 9] (complétée par un calcul direct pour $p=2$) montre que $\theta_{\pi_0}(z) - 1 - \pi_0 z \in \pi_0^2\mathcal{V}[[z]]$. Par suite, on a pour $|z| \leqslant 1$

$$\theta_{\pi_0}(z) \equiv 1 + \pi_0 z \mod \pi_0^2 ,$$

d'où l'on déduit

$$\theta_\psi(z) \equiv 1 + \pi_0(\tilde{a}z+\ldots+\tilde{a}^{p^{s-1}} z^{p^{s-1}}) \mod \pi_0^2 .$$

On obtient alors

$$\theta_\psi(\tilde{\alpha}) \equiv 1 + \pi_0 \operatorname{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a\alpha)^\sim \mod \pi_0^2 ;$$

il résulte donc de 1.3 que, si ζ_0 est la racine p-ième de l'unité correspondant à π_0 , on a

$$\theta_\psi(\tilde{\alpha}) = \zeta_0^{\operatorname{Tr}(a\alpha)^\sim} = \psi_0(\operatorname{Tr}(a\alpha)) = \psi(\alpha) .$$

(1.5) PROPOSITION. <u>Avec les notations de</u> 1.1, <u>soit</u> $\mathcal{L}_\psi$ <u>le sous-</u>

$j^\dagger\mathcal{O}_{\tilde{P}}$-module de $u_{rig*}(Y/P)$ formé des sections sur lesquelles $\mathbb{F}_q$ agit par multiplication par ψ.

(i) $\mathcal{L}_\psi$ est un $j^\dagger\mathcal{O}_{\tilde{P}}$-module libre de rang 1, de base θ_ψ, et $u_{rig*}(Y/P)$ est somme directe des $\mathcal{L}_\psi$.

(ii) $\mathcal{L}_\psi$ est un sous-cristal surconvergent de $u_{rig*}(Y/P)$, et la connexion correspondante est donnée par

(1.5.1) $$\nabla(\theta_\psi) = -\pi_\psi\,\theta_\psi \otimes dt .$$

(iii) $\mathcal{L}_\psi$ est stable par l'action de Frobenius sur $u_{rig*}(Y/P)$, qui est donnée sur $\mathcal{L}_\psi$ par

(1.5.2) $$\Phi(\theta_\psi \otimes 1) = \exp\pi_0(\tilde{a}t - \tilde{a}^p t^p).\theta_\psi$$

(pour le relèvement du Frobenius sur P donné en coordonnées homogènes par $F(t,t') = (t^p,t'^p)$).

Les $\mathcal{L}_\psi$ sont donc munis d'une structure de F-cristal surconvergent ; nous dirons que $\mathcal{L}_\psi$ est le F-cristal de Dwork associé au caractère ψ.

Notons encore φ_α l'automorphisme de Y_1 associé à $\alpha \in \mathbb{F}_q$ en 1.2. Par prolongement analytique, l'action de $\mathbb{F}_q$ sur $u_{rig*}(Y/P)$ est celle qu'induisent les φ_α sur $j^\dagger\tilde{v}_*\mathcal{O}_{Y_1}$. Pour toute section h de $\tilde{v}_*\mathcal{O}_{Y_1}$, posons
$$h_\psi = \frac{1}{q}\sum_{\beta\in\mathbb{F}_q} \psi(\beta)^{-1} h\circ\varphi_\beta ;$$
on vérifie aussitôt que
$$h = \sum_\psi h_\psi .$$
Par ailleurs,
$$h_\psi\circ\varphi_\alpha = \frac{1}{q}\sum_{\beta\in\mathbb{F}_q} \psi(\beta)^{-1} h\circ\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha = \frac{1}{q}\sum_{\beta\in\mathbb{F}_q} \psi(\beta)^{-1} h\circ\varphi_{\beta+\alpha}$$
$$= \psi(\alpha) h_\psi .$$
Au-dessus du disque ouvert $X_2 \subset X_1$ défini par $\mathrm{ord}\ t > -\frac{p-1}{p}$, la fonction h_ψ/θ_ψ est invariante sous l'action de $\mathbb{F}_q$, et est donc une section g_ψ de $\mathcal{O}_{X_2}$; la relation

$$h = \sum_{\psi} g_{\psi}\ \theta_{\psi}$$

montre que les θ_{ψ} engendrent $\tilde{v}_{*}\mathcal{O}_{Y_2}$ sur $\mathcal{O}_{X_2}$ (avec $Y_2 = \tilde{v}^{-1}(X_2)$), donc en forment une base. Par passage à la limite sur les disques $D(0,\rho^{-})$, avec $\rho \xrightarrow{>} 1$, l'assertion (i) en résulte.

D'après (1.1.5), la valeur en θ_{ψ} de la connexion ∇ de $u_{rig*}(Y/P)$ est

$$\nabla(\theta_{\psi}) = (qz^{q-1} - 1)^{-1} \frac{d\theta_{\psi}}{dz} \otimes dt$$

$$= - \pi_{\psi}\ \theta_{\psi} \otimes dt\ ,$$

ce qui montre que $\mathcal{L}_{\psi}$ est stable par ∇. Comme l'isomorphisme ε défini en (1.1.4) est déterminé à partir de ∇ par la formule de Taylor [2, (4.1)], il en résulte que ε induit un isomorphisme $p_2^{*}\mathcal{L}_{\psi} \xrightarrow{\sim} p_1^{*}\mathcal{L}_{\psi}$, faisant de $\mathcal{L}_{\psi}$ un sous-cristal surconvergent de $u_{rig*}(Y/P)$.

Soient $Z' = \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}} \times \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$, v' la deuxième projection de Z' sur $\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$, $\tilde{v}' : \tilde{Z}' \longrightarrow \tilde{P}$ le morphisme d'espaces analytiques correspondant. La cohomologie rigide relative $u_{rig*}(Y/P)$ peut être calculée en utilisant l'immersion $j' : Y \hookrightarrow \hat{Z}'$, l'homomorphisme naturel

$$\mathcal{H}^0(\tilde{v}'_{*}j'^{\dagger}\Omega^{\cdot}_{]Z_0[_{Z'}/\tilde{P}}) \longrightarrow \tilde{v}_{*}j_1^{\dagger}\mathcal{O}_{\tilde{Z}}$$

étant un isomorphisme [2 , théorème 1]. Le tube de Y dans $\hat{Z}'$ est l'ouvert de $\mathbb{A}^{2\ an}_K$ défini par

$$|z| \leqslant 1, \quad |t| \leqslant 1\ , \quad |z^q - z - t| < 1\ ;$$

les ouverts V'_{ρ} définis par

$$|z| \leqslant \rho^{1/q}, \quad |t| \leqslant \rho\ , \quad |z^q - z - t| < 1\ ,$$

avec $\rho > 1$, en forment un système fondamental de voisinages stricts. Soit F le relèvement du Frobenius sur Z' donné en coordonnées bihomogènes par $F((z,z'),(t,t')) = ((z^p,z'^p),(t^p,t'^p))$. Pour ρ assez voisin de 1, on obtient $F(V_{\rho}) \subset V_{\rho^p}$, de sorte que F induit un morphisme d'espaces munis de complexes de faisceaux

$$(]Z_0[_{Z'}\ ,\ j'^{\dagger}\Omega^{\cdot}_{]Z_0[/\tilde{P}}) \longrightarrow (]Z_0[_{Z'}\ ,\ j'^{\dagger}\Omega^{\cdot}_{]Z_0[/\tilde{P}})\ ,$$

au-dessus du relèvement choisi $F : \tilde{P} \longrightarrow \tilde{P}$. Par construction de la cohomologie rigide, l'homomorphisme induit

$$\mathcal{H}^0(\tilde{v}^{!}_{*}j^{\dagger}\Omega^{\cdot}_{]Z_0[/\tilde{P}}) \longrightarrow \mathcal{H}^0(\tilde{v}^{!}_{*}j^{\dagger}\Omega^{\cdot}_{]Z_0[/\tilde{P}})$$

définit, après linéarisation, l'action de Frobenius sur $u_{rig*}(Y/P)$. Pour calculer $\Phi(\theta_\psi \otimes 1)$, il suffit donc de relever θ_ψ en une section de $\tilde{v}^{!}_{*}j^{\dagger}\mathcal{O}_{]Z_0[}$ annulée par $d_{\tilde{Z}'/\tilde{P}} = \frac{\partial}{\partial z}$, d'appliquer F à celle-ci, puis de réduire modulo l'idéal (z^q-z-t). Pour tout ρ, la fonction $\exp\pi_\psi(z^q-z-t)$ est analytique sur V_ρ, puisque $|z^q-z-t| < 1$ et $\mathrm{ord}\ \pi_\psi = \frac{1}{p-1}$. La fonction $\theta_\psi.\exp\pi_\psi(z^q-z-t)$ est donc une section de $\tilde{v}^{!}_{*}j^{\dagger}\mathcal{O}_{]Z_0[}$ relevant θ_ψ, et annulée par $\frac{\partial}{\partial z}$. Par suite, $\Phi(\theta_\psi\otimes 1)$ est la classe modulo z^q-z-t de

$$\exp\pi_\psi^\sigma(z^p-z^{qp})\exp\pi_\psi^\sigma(z^{qp}-z^p-t^p) \quad ,$$

avec $\pi_\psi^\sigma = \sigma(\pi_\psi) = \pi_0\tilde{a}^p = \pi_0\tilde{a}^{qp}$. On peut alors écrire dans $\tilde{v}^{!}_{*}j^{\dagger}\mathcal{O}_{]Z_0[}$:

$$\frac{\exp\pi_0(\tilde{a}^p z^p-\tilde{a}^{qp}z^{qp})\exp\pi_0(\tilde{a}^{qp}z^{qp}-\tilde{a}^p z^p-\tilde{a}^p t^p)}{\exp\pi_0(\tilde{a}z-\tilde{a}^q z^q)\exp\pi_0(\tilde{a}^q z^q-\tilde{a}z-\tilde{a}t)} = \exp\pi_0(\tilde{a}t-\tilde{a}^p t^p) \quad ,$$

car toutes les fonctions considérées sont analytiques sur un voisinage strict de $]Y[$, et, $]Y[$ étant connexe [3], l'égalité des séries formelles en $(0,0)$ entraîne l'égalité des fonctions analytiques. Par réduction modulo z^q-z-t, on en déduit l'égalité

$$\Phi(\theta_\psi\otimes 1)\theta_\psi^{-1} = \exp\pi_0(\tilde{a}t-\tilde{a}^p t^p) \quad .$$

<u>Remarque</u>. La série de Taylor de $\mathcal{L}_\psi$ est donnée par

$$\begin{aligned} \varepsilon(1) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \nabla^\nu(1)\ \frac{(t'-t)^\nu}{\nu!} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu\ \pi_\psi^\nu\ \frac{(t'-t)}{\nu!} \\ &= \exp(-\pi_\psi(t'-t)) \quad . \qquad (1.5.3) \end{aligned}$$

(1.6) COROLLAIRE.

(i) <u>Sous les hypothèses de</u> 1.1 (ii), <u>l'action de</u> $\mathbb{F}_q$ <u>sur</u> $u'_{rig*}(Y'/P')$ <u>en définit un scindage en somme de</u> F-<u>cristaux surconver-</u>

gents $\mathcal{L}_{\psi,f}$ sur lesquels $\mathbb{F}_q$ agit par multiplication par ψ, et l'isomorphisme de changement de base induit un isomorphisme

$$f^*\mathcal{L}_\psi = \tilde{g}^*\mathcal{L}_\psi \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\psi,f} \ . \tag{1.6.1}$$

(ii) L'action de $\mathbb{F}_q$ sur $H^*_{rig}(Y'/K')$ fournit une décomposition

$$H^*_{rig}(Y'/K') \simeq \bigoplus_\psi H^*_{rig}(X'/K', f^*\mathcal{L}_\psi) \ . \tag{1.6.2}$$

La première assertion est claire d'après la démonstration de (1.1) (ii). Soient $\overline{X}'$ l'adhérence de X' dans P', $\overline{Y}' = \overline{X}' \times_{P'} Z'$; on a alors $]\overline{Y}'[_{Z'} = \tilde{v}'^{-1}(]\overline{X}'[_{P'})$. Avec les notations de (1.1), $\tilde{v}' : \tilde{Z}' \longrightarrow \tilde{P}'$ induit un revêtement étale au-dessus de U', donc $]\overline{Y}'[_{Z'} \longrightarrow]\overline{X}'[_{P'}$ est un revêtement étale au-dessus du voisinage strict $U' \cap]\overline{X}'[_{P'}$ de $]X'[_{P'}$. On en déduit les isomorphismes

$$\begin{aligned}
H^*(]\overline{Y}'[_{Z'}, j_1'^\dagger \Omega^\bullet_{\tilde{Z}'}) &\simeq H^*(]\overline{X}'[_{P'}, \mathbb{R}\tilde{v}'_* j_1'^\dagger \Omega^\bullet_{\tilde{Z}'}) \\
&\simeq H^*(]\overline{X}'[_{P'}, j'^\dagger \tilde{v}'_* \Omega^\bullet_{\tilde{Z}'}) \\
&\simeq H^*(]\overline{X}'[_{P'}, (j'^\dagger \tilde{v}'_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}'}) \otimes \Omega^\bullet_{\tilde{P}'}) \\
&\simeq H^*(]\overline{X}'[_{P'}, u'_{rig*}(Y'/P') \otimes \Omega^\bullet_{\tilde{P}'}) \\
&\simeq \bigoplus_\psi H^*(]\overline{X}'[_{P'}, \mathcal{L}_{\psi,f} \otimes \Omega^\bullet_{\tilde{P}'}) \ .
\end{aligned}$$

En prenant P' lisse au voisinage de X', et tel que $\overline{X}'$ soit propre sur k, $\overline{Y}'$ est une compactification de Y', et Z' est lisse au voisinage de Y', de sorte que l'isomorphisme précédent fournit l'isomorphisme (1.6.2).

2. F-CRISTAUX SURCONVERGENTS ASSOCIÉS AUX REVÊTEMENTS DE KUMMER.

(2.1) Soient n un entier tel que $(n,p) = 1$, $q = p^s$ une puissance de p telle que n divise q-1. On pose $k = \mathbb{F}_q$, $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{W}(\mathbb{F}_q))$; on identifiera le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité dans k au groupe des racines n-ièmes de l'unité dans K grâce au caractère de Teichmüller $\xi \longmapsto \tilde{\xi}$. Tout caractère multiplicatif $\chi : \mu_n \longrightarrow K^*$ est une puissance du caractère de Teichmüller, et, si $\chi(\xi) = \tilde{\xi}^i$, avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$, nous poserons $a_\chi = i/n \in \mathbb{Q}$; on obtient ainsi un isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mu_n, K^*) \simeq (\frac{1}{n}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$.

On pose $X = Y = \mathbb{G}_{m,k}$, et on note $u_0 : Y \longrightarrow X$ l'élévation à la puissance n-ième. Soient P la droite projective formelle sur $\mathcal{W}$, $j : X \hookrightarrow P$ l'immersion naturelle, $u = j \circ u_0 : Y \longrightarrow P$.

(2.2) PROPOSITION.

(i) Les $R^i u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$ sont nuls pour $i \geqslant 1$, et $u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$ est un F-cristal surconvergent, libre de rang n sur $j^\dagger \mathcal{O}_{\tilde{P}}$, dont la formation commute à tout changement de base (au sens de (1.1)(ii)).

(ii) Pour tout caractère multiplicatif χ, soit $\mathcal{K}_\chi$ le sous-$j^\dagger\mathcal{O}_{\tilde{P}}$-module de $u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$ sur lequel μ_n agit par multiplication par χ. Alors $\mathcal{K}_\chi$ est un sous-cristal surconvergent de rang 1 de $u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$, et possède une base θ_χ dans laquelle la connexion correspondante est donnée par

$$\nabla(\theta_\chi) = a_\chi t^{-1}\theta_\chi \otimes dt \; ; \tag{2.2.1}$$

$u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$ est somme directe des $\mathcal{K}_\chi$.

(iii) L'action de Frobenius sur $u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$ induit des isomorphismes

$$\Phi : F^*\mathcal{K}_\chi \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\chi^p}$$

(pour le relèvement de Frobenius sur P défini par $F(t,t') = (t^p, t'^p)$). Si $a_\chi = i/n$, et si $pi = nb_\chi + i'$, avec $0 \leqslant i' < n$, alors

$$\Phi(\theta_\chi \otimes 1) = t^{b_\chi}.\theta_{\chi^p} \, . \tag{2.2.2}$$

En particulier, chaque $\mathcal{K}_\chi$ a une structure naturelle de F^s-cristal surconvergent, avec

$$(2.2.3)\qquad \Phi_s(\theta_\chi \otimes 1) = t^{(q-1)a_\chi}\theta_\chi .$$

Le revêtement de Kümmer $u_0 : Y \longrightarrow X$ est la réduction du revêtement analogue de $\mathbb{G}_{m,\mathcal{W}}$, qu'on peut compactifier en prenant par exemple dans $\mathbb{P}^1_{\mathcal{W}} \times \mathbb{P}^1_{\mathcal{W}}$ l'adhérence schématique Z de la courbe d'équation $z^n - t$ de $\mathbb{A}^1_{\mathcal{W}} \times \mathbb{A}^1_{\mathcal{W}}$; soit v le morphisme induit sur Z par la projection sur l'axe des t. Comme v est lisse aux points de Y, on peut utiliser le relèvement v de $Z \times \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$ (ou plutôt le morphisme qu'on en déduit en passant aux complétés formels) pour calculer les $R^i u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$. Sur la fibre générique, $\tilde{v}$ est un revêtement étale au-dessus de $\mathbb{G}_{m,K}$, donc, en passant aux espaces analytiques, au-dessus d'un voisinage strict de $]X[_P$ (i.e. de la couronne $|t| = 1$ dans $\tilde{P}$). On en déduit comme en 1.1 :

$$u_{\mathrm{rig}*}(Y/P) = j^\dagger \tilde{v}_* \mathcal{O}_Z \ ; \quad \forall\, i \geqslant 1,\quad R^i u_{\mathrm{rig}*}(Y/P) = 0 .$$

La commutation au changement de base se voit comme en 1.1.

Soit $U = (\mathbb{G}_{m,K})^{an}$; au-dessus de U, on peut écrire

$$\tilde{v}_* \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_U[z]/(z^n - t) .$$

L'action de μ_n se relève en une action sur Z au-dessus de U, induite par $(\xi, z) \longmapsto \tilde{\xi} z$ pour $\xi \in \mu_n$. On obtient donc

$$u_{\mathrm{rig}*}(Y/P) = j^\dagger \mathcal{O}_U[z]/(z^n - t) ,$$

et, si $a_\chi = i/n$, $\mathcal{K}_\chi$ est le sous-$j^\dagger\mathcal{O}_U$-module de $u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$ engendré par z^i ; nous poserons $\theta_\chi = z^i$. La connexion ∇ de $u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$ est donnée par

$$(2.2.4)\qquad \nabla(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{n}\frac{z}{t}\frac{\partial f}{\partial z}\right) \otimes dt ,$$

d'où (2.2.1). Il en résulte que $\mathcal{K}_\chi$ est stable par ∇, et est donc un sous-cristal surconvergent de $u_{\mathrm{rig}*}(Y/P)$; il est clair que $u_{\mathrm{rig}*}(Y/P) = \bigoplus_\chi \mathcal{K}_\chi$.

Enfin, l'endomorphisme de Frobenius de Y se relève en un endomorphisme de Z au-dessus de U, donné par $F(z) = z^p$, qui induit donc l'action de Frobenius sur $u_{rig*}(Y/P)$. On obtient ainsi :

$$\Phi(z^i \otimes 1) = z^{pi} = z^{nb_\chi + i'} = t^{b_\chi} z^{i'} .$$

Comme $\chi^p(\xi) = \tilde{\xi}^{pi} = \tilde{\xi}^{i'}$, $a_{\chi^p} = i'/n$, ce qui montre (2.2.2), et (2.2.3) en résulte par itération.

(2.3) <u>Remarques</u>. Plus généralement, soient K une extension de $\mathbb{Q}_p$, complète pour une valeur absolue prolongeant la valeur absolue p-adique, d'anneau des entiers $\mathcal{V}$ et de corps résiduel k. Pour tout $a \in \mathcal{V}$, on peut définir une connexion sur $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,\mathcal{V}}}$ en posant

$$\nabla(1) = at^{-1} \otimes dt . \tag{2.3.1}$$

(i) Si $a \in \mathbb{Z}_p$, ce module à connexion définit encore un cristal surconvergent $\mathcal{K}_a$ sur $\mathbb{G}_{m,k}$. En effet, la série de Taylor correspondante est donnée par

$$\begin{aligned} \varepsilon(1) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \nabla^\nu(1) . \frac{(t'-t)^\nu}{\nu!} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-\nu+1)}{\nu!} \frac{(t'-t)^\nu}{t^\nu} . \\ &= (1 + \frac{t'-t}{t})^a . \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Pour $a \in \mathbb{Z}_p$, le coefficient $a(a-1)\ldots(a-\nu+1)/\nu!$ est un entier p-adique, de sorte que $\varepsilon(1)$ définit une fonction analytique sur l'ouvert U de $\mathbb{A}_K^{2\,an}$ défini par $|t-t'| < |t|$. Or le tube de la diagonale de $\mathbb{G}_{m,k}$ dans $\mathbb{P}_K^{1\,an} \times \mathbb{P}_K^{1\,an}$ est l'ouvert de $\mathbb{A}_K^{2\,an}$ défini par

$$|t| = 1, \quad |t'-t| < 1 ,$$

et on vérifie facilement que U en est un voisinage strict.

(ii) Si $a \in \mathcal{V} - \mathbb{Z}_p$, posons $\rho = \operatorname{Inf}_{i \in \mathbb{Z}} |a-i|$, et soit $k \geq 1$ l'entier tel que $|p^k| < \rho \leq |p^{k-1}|$. Si l'on pose $i = i'p^k + j$, avec $0 \leq j < p^k$, on a donc $|a-i| = |a-j|$, de sorte que pour $\nu = \nu'p^k + r$, avec $0 \leq r < p^k$, on obtient

$$|a(a-1)\ldots(a-\nu+1)| = |a\ldots(a-p^k+1)|^{\nu'} |a\ldots(a-r+1)| .$$

Compte tenu de la définition de k, on voit sans difficulté que

$$|a\dots(a-p^k+1)| = \rho|(p^k-1)!| = \rho p^{-(p^k-1-k(p-1))/(p-1)} \ .$$

On en déduit que la série $\varepsilon(1)$ définit une fonction analytique pour $|t-t'| < \eta|t|$, avec

$$\eta = \rho^{-1/p^k} \ p^{-(k+\frac{1}{p-1})/p^k} \ .$$

Le module à connexion (2.3.1) définit donc sur $\mathbb{G}_{m,k}$ un cristal $\mathcal{K}_a$, "surconvergent de rayon η", avec $p^{-1/p-1} \leqslant \eta < 1$ (en se limitant au cas $\eta > \frac{1}{2}$ si $p = 2$).

(iii) Si on se donne de plus un automorphisme σ de K induisant l'endomorphisme de Frobenius de k, alors $F^* \mathcal{K}_a$ est défini par le module à connexion sur $\mathbb{G}_{m,\mathcal{V}}$ déduit de (2.3.1) par l'endomorphisme σ-linéaire F tel que $F^*(t) = t^p$; cette connexion ∇^σ est donc donnée par

$$\nabla^\sigma(1) = pa^\sigma t^{-1} \otimes dt \ . \tag{2.3.3}$$

Pour définir une structure de F^s-cristal $\Phi : F^{s*} \mathcal{K}_a \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_a$ (où s est un entier quelconque), il faut se donner une fonction f(t), analytique sur une couronne de la forme $1-\varepsilon < |t| < 1+\varepsilon$, telle que

$$t \frac{df}{dt} = (p^s a^{\sigma^s} - a)f \ .$$

On en déduit immédiatement qu'une telle structure n'existe que si $(p^s-1)a \in \mathbb{Z}$, de sorte que $\mathcal{K}_a$ est l'un des $\mathcal{K}_\chi$ considérés plus haut, et la structure de F^s-cristal est nécessairement celle de $\mathcal{K}_\chi$.

(iv) Soient $\mu : \mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ la loi de groupe de $\mathbb{G}_{m,k}$, et p_1, p_2 les deux projections. Notant x,y les deux coordonnées sur le produit, on a $\mu^*(dt/t) = dx/x + dy/y$, et on obtient pour tout a un isomorphisme canonique

$$\mu^* \mathcal{K}_a \ \simeq \ p_1^* \mathcal{K}_a \otimes p_2^* \mathcal{K}_a \ . \tag{2.3.4}$$

Si X est un k-schéma, $u,v : X \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ deux k-morphismes, et $uv : X \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ le morphisme produit, on en déduit donc l'isomorphisme

$$(uv)^* \mathcal{K}_a \ \simeq \ u^* \mathcal{K}_a \otimes v^* \mathcal{K}_a \ . \tag{2.3.5}$$

On remarquera d'autre part que

(2.3.6) $$\mathcal{K}_a \otimes \mathcal{K}_b \simeq \mathcal{K}_{a+b} ,$$

(2.3.7) $$\mathcal{K}_a^{-1} \simeq \mathcal{K}_{-a} .$$

(v) On laisse au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer l'analogue du corollaire (1.6).

3. LA COHOMOLOGIE DE DWORK ASSOCIÉE A CERTAINES SOMMES EXPONENTIELLES.

Dans [21], Robba construit une cohomologie de Dwork pour l'étude de certaines sommes exponentielles à une variable ; cette construction généralise celle de Dwork pour les sommes de Gauss (exposée par exemple dans [4], [10] ou [16]), ou de Dwork [9] et Adolphson-Sperber [1] pour les sommes de Kloosterman, et est analogue à celle qu'utilisent Dwork [8] et Reich [20] dans l'étude des fonctions zêta et des séries L associées aux variétés sur un corps fini.

A. Cohomologie analytique.

(3.1) Soient $K = \mathbb{C}_p$, $\mathcal{V}$ l'anneau des entiers de K, $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ son corps résiduel, X un ouvert de $\mathbb{P}^1_k$, Z le fermé complémentaire ; on suppose que le point à l'infini de $\mathbb{P}^1_k$ appartient à Z, et on note $Z = (a_1, \ldots, a_r, \infty)$. On fixe un k-morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ et un caractère additif non trivial ψ de $\mathbb{F}_q$, correspondant à $\pi \in \mathcal{V}$ par (1.3). D'autre part, pour tout point $a_i \in Z$, $a_i \neq \infty$, on se donne un élément $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$; soit $h_i : X \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ le morphisme défini par la fonction inversible $x-a_i$ sur X (x désignant une coordonnée sur $\mathbb{A}^1_k$). Par fonctorialité de la catégorie des cristaux surconvergents, on dispose sur X du cristal surconvergent

(3.1.1) $$\mathcal{L} = f^* \mathcal{L}_\psi \otimes (\bigotimes_i h_i^* \mathcal{K}_{\alpha_i}^{-1}) .$$

Soient $\tilde{f}(x) \in \mathbb{C}_p(x)$ une fonction rationnelle (à numérateur et dénominateur entiers) relevant la fonction $f(x) \in k(x)$ qui définit f, et soient, pour tout i, une famille finie de points $a_{i,j} \in \tilde{P} = \mathbb{P}^{1\,\mathrm{an}}_K$

de spécialisation $a_i \in \mathbb{P}^1_k$, et d'éléments $\alpha_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$ tels que $\sum_j \alpha_{i,j} = \alpha_i$. On pose (avec $\tilde{f}' = d\tilde{f}/dx$) :

$$\ell = \frac{d}{dx} - \pi\tilde{f}' - \sum_{i,j} \alpha_{i,j}(x-a_{i,j})^{-1} . \tag{3.1.2}$$

Soit $A =]X[$ le tube de X dans $\tilde{P}$: c'est le complémentaire dans $D(0,1^+)$ de la réunion des disques $D(a_{i,j}, 1^-)$; pour $\varepsilon < 1$, $\varepsilon \neq 0$, soient $A_\varepsilon = D(0,(\varepsilon^{-1})^+) - \bigcup_{i,j} D(a_{i,j}, \varepsilon^-)$, et

$$\mathcal{H}^\dagger(A) = \varinjlim_{\varepsilon \xrightarrow{<} 1} \Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{\tilde{P}})$$

l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur les voisinages stricts de A ; la cohomologie étudiée par Robba est l'espace

$$\underline{W} = \mathcal{H}^\dagger(A) / \ell\mathcal{H}^\dagger(A) .$$

(3.2) PROPOSITION. <u>Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme canonique</u>

$$\underline{W} \simeq H^1_{rig}(X/K, \mathcal{L}) .$$

C'est une conséquence immédiate de la fonctorialité de la catégorie des cristaux surconvergents, et de la définition de la cohomologie rigide. Le morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ défini par $f(x)$ se prolonge en un morphisme $\mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$, et $\tilde{f}(x)$ en définit un relèvement à $\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$. Comme $\mathcal{L}_\psi$ est défini par le module à connexion $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, d - \pi dt)$ sur un voisinage strict de $]\mathbb{A}^1_k[_P$ dans $\tilde{P}$, $f^*\mathcal{L}_\psi$ est défini par l'image inverse de celui-ci, c'est-à-dire $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, d - \pi\tilde{f}'dx)$, sur un voisinage strict de A. De même, h_i définit un morphisme $\mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$, et, pour tout j, $(x-a_{i,j})$ définit un morphisme $\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$ relevant h_i. Par définition, $\mathcal{K}_\alpha$ correspond au module à connexion $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, d+\alpha t^{-1}dt)$ sur un voisinage strict de $]\mathbb{G}_{m,k}[_P$, et son dual $\mathcal{K}_\alpha^{-1}$ est donc défini par $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, d - \alpha t^{-1}dt)$. Par suite, $h_i^*\mathcal{K}^{-1}_{\alpha_{i,j}}$ est défini par $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, d - \alpha_{i,j}(x-a_{i,j})^{-1}dx)$ sur un voisinage strict de A, et, compte tenu de (2.3.6), le cristal $h_i^*\mathcal{K}^{-1}_{\alpha_i} \simeq \bigotimes_j h_i^*\mathcal{K}^{-1}_{\alpha_{i,j}}$ est défini par $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, d - \sum_j \alpha_{i,j}(x-a_{i,j})^{-1}dx)$. Finalement, $\mathcal{L}$ est donc défini par le module à connexion $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, d - \pi\tilde{f}' - \sum_{i,j} \alpha_{i,j}(x-a_{i,j})^{-1}dx) = (\mathcal{O}_{\tilde{P}}, \ell.dx)$

sur un voisinage strict de A.

Soient $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$, $j_\varepsilon : A_\varepsilon \hookrightarrow \tilde{P}$. Comme les A_ε forment un système fondamental de voisinages stricts de A, on a :

$$j^\dagger \Omega^i_{\tilde{P}} = \varinjlim_{\varepsilon \overset{<}{\to} 1} j_{\varepsilon *} \Omega^i_{A_\varepsilon} .$$

La quasi-compacité de $\tilde{P}$ fournit les isomorphismes

$$H^n(\tilde{P}, j^\dagger \Omega^i_{\tilde{P}}) \simeq \varinjlim_{\varepsilon \overset{<}{\to} 1} H^n(\tilde{P}, j_{\varepsilon *} \Omega^i_{A_\varepsilon}) .$$

Pour tout affinoïde V de $\tilde{P}$, $V \cap A_\varepsilon$ est un domaine spécial de V, et le théorème B entraîne que les $\Omega^i_{A_\varepsilon}$ sont acycliques pour $j_{\varepsilon *}$. Comme A_ε est affinoïde, on obtient donc : $H^n(\tilde{P}, j^\dagger \Omega^i_{\tilde{P}}) = 0$ pour $n > 0$, et $H^0(\tilde{P}, j^\dagger \Omega^i_{\tilde{P}}) = \varinjlim_{\varepsilon} \Gamma(A_\varepsilon, \Omega^i_{A_\varepsilon})$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} H^*_{rig}(X/K, \mathcal{L}) &= H^*(\tilde{P}, j^\dagger \mathcal{O}_{\tilde{P}} \xrightarrow{\ell.dx} j^\dagger \Omega^1_{\tilde{P}}) \\ &\simeq H^*(\mathcal{H}^\dagger(A) \xrightarrow{\ell} \mathcal{H}^\dagger(A)) , \end{aligned}$$

d'où la proposition.

<u>Remarques</u>.

1) Dans la description des $h_i^* \mathcal{K}_{\alpha_{i,j}}$ donnée plus haut, nous avons implicitement utilisé le fait que si deux morphismes h',h" relèvent des compactifications d'un même morphisme h, les foncteurs h'^* et h''^* sont canoniquement isomorphes sur la catégorie des modules à connexion dont la série de Taylor converge sur un voisinage strict du tube de la diagonale, et définissent le foncteur h^* sur la catégorie des cristaux surconvergents. Rappelons que l'isomorphisme $h''^* \xrightarrow{\sim} h'^*$ est précisément fourni par la série de Taylor ; par exemple, dans le cas de $\mathcal{K}_\alpha$, celle-ci est d'après (2.3.2)

$$\begin{aligned} \varepsilon(1) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{\nu!} \frac{(t'-t)^\nu}{t^\nu} \\ &= (1 + \frac{t'-t}{t})^\alpha , \end{aligned}$$

et l'isomorphisme $h''^* \xrightarrow{\sim} h'^*$ est donné par la multiplication par

$(1+\frac{h''(x)-h'(x)}{h'(x)})^{\alpha}$. On remarquera que c'est cet isomorphisme qu'utilise Robba en [21, 5.4.1] pour se ramener au cas où les $a_{i,j}$ sont égaux à un même point c_i de spécialisation a_i.

2) En [21, 5.4], Robba calcule plus généralement l'indice sur $\mathcal{H}^{\dagger}(A)$ d'un opérateur de la forme $L=P.\ell$, où $P\in\mathbb{C}_p[x]$ peut avoir des zéros dans A. Les espaces de cohomologie associés à un tel opérateur possèdent certainement eux-aussi une interprétation du point de vue de la cohomologie rigide, à condition de disposer de coefficients plus généraux que les cristaux surconvergents, coefficients qui devraient être fournis par un analogue de la théorie des $\mathcal{D}_X$-modules sur une variété complexe. Faute de disposer d'une telle théorie pour l'instant, nous nous limiterons ici au cas d'un opérateur sans singularités sur A.

B. Action de Frobenius.

(3.3) Comme on l'a remarqué en (2.3) (iii), les $\mathcal{K}_\alpha$ ne sont pas en général des F-cristaux, et on ne dispose pas en général d'une action de Frobenius sur $H^1_{rig}(X/K,\mathcal{L})$. Néanmoins, si α est de la forme $m/(q-1)$, avec $m\in\mathbb{Z}$ et $q=p^s$, $\mathcal{K}_\alpha$ est un F^s-cristal. Supposons donc maintenant que tous les α_i intervenant en (3.1) sont de la forme $\alpha_i=m_i/(q-1)$. D'après (2.3.6) et (2.3.5), il existe, pour tout $h_i : X\longrightarrow\mathbb{G}_{m,k}$, des isomorphismes canoniques

$$h_i^*\mathcal{K}_{m_i/q-1}\simeq(h_i^*\mathcal{K}_{1/q-1})^{\otimes m_i}\simeq(h_i^{m_i})^*\mathcal{K}_{1/q-1}\ .$$

On peut donc remplacer, dans la définition de $\mathcal{L}$ donnée en (3.1.1), le terme $\bigotimes_i h_i^*\mathcal{K}_{\alpha_i}^{-1}$ par $h^*\mathcal{K}_{1/q-1}$, avec $h=\prod_i h_i^{-m_i}$; on observera que $\mathcal{K}_{1/q-1}=\mathcal{K}_\chi$, où $\chi:\mathbb{F}_q^*\longrightarrow W(\mathbb{F}_q)^*$ est le caractère de Teichmüller.

Supposons maintenant que X,f et h proviennent par extension des scalaires d'un ouvert $X_0\subset\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$, et de morphismes $f_0:X_0\longrightarrow\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$, $h_0 : X_0\longrightarrow\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q}$. Alors $\mathcal{L}$ provient du F^s-cristal $\mathcal{L}_0=f_0^*(\mathcal{L}_\psi)\otimes h_0^*(\mathcal{K}_\chi)$ sur $(X_0/K_0,\sigma)$, avec $K_0=\mathrm{Frac}(W(\mathbb{F}_q)[\pi])$. Soit

$F' = F_{X_0}^s \times \mathrm{Id}_k : X \longrightarrow X$ le Frobenius géométrique de X ; comme $\mathcal{L}$ provient de $\mathcal{L}_0$, il existe un isomorphisme canonique $F'^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} F_X^{s*}\mathcal{L}$, et la structure de F-cristal de $\mathcal{L}$ fournit donc un isomorphisme

$$F'^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} . \tag{3.3.1}$$

On en déduit par fonctorialité un homomorphisme K-linéaire sur la cohomologie rigide :

$$\Phi' : H^1_{\mathrm{rig}}(X/K,\mathcal{L}) \xrightarrow{F'^*} H^1_{\mathrm{rig}}(X/K,F'^*\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{rig}}(X/K,\mathcal{L}) . \tag{3.3.2}$$

Pour obtenir une formule de rationalité pour la fonction L définie par les sommes exponentielles associées à ψ,χ,f,h, Robba considère la cohomologie de $\mathcal{L}^{-1}$ plutôt que celle de $\mathcal{L}$; si $\tilde{f}(x)$, $\tilde{h}(x) \in K(x)$ relèvent $f(x), h(x)$, $\mathcal{L}^{-1}$ est donc défini sur un voisinage strict de A par le module à connexion

$$(\mathcal{O}_{\tilde{P}} , d + (\pi\tilde{f}'(x) - \frac{1}{q-1}\frac{\tilde{h}'(x)}{\tilde{h}(x)})dx) =: (\mathcal{O}_{\tilde{P}} , \ell'.dx) .$$

Robba suppose d'autre part que x est inversible sur X, le cas général s'y ramenant facilement ; il construit alors sur $\underline{W}' := \mathcal{H}^\dagger(A)/x\ell'\mathcal{H}^\dagger(A) \simeq \underline{W} := \mathcal{H}^\dagger(A)/\ell'\mathcal{H}^\dagger(A)$ un endomorphisme $\bar{\alpha}$ tel que $\det(1-t\bar{\alpha})$ fournisse le facteur de poids 1 de la fonction L.

(3.4) PROPOSITION. <u>Avec l'identification</u> $\underline{W}' \simeq H^1_{\mathrm{rig}}(X/K, \mathcal{L}^{-1})$ <u>résultant de</u> (3.2), Φ' <u>et</u> $\bar{\alpha}$ <u>sont liés par la relation</u>

$$\bar{\alpha}\circ\Phi' = \Phi'\circ\bar{\alpha} = q . \tag{3.4.1}$$

Le morphisme $F' : \mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$ peut être relevé sur $\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$ en prenant l'identité sur $\mathcal{V}$ et l'élévation à la puissance q-ième sur une coordonnée. Avec les choix faits en (1.5) et (2.2), les isomorphismes $F'^*\mathcal{L}_\psi^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_\psi^{-1}$, $F'^*\mathcal{K}_\chi^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_\chi^{-1}$ sont donnés respectivement par la multiplication par

$$\Phi_\psi(1) = \exp\pi(t^q-t) ,$$
$$\Phi_\chi(1) = t^{-1}$$

sur $\mathcal{O}_{\tilde{P}}$, sur des voisinages stricts de $]\mathbb{A}^1_k[$ et $]\mathbb{G}_{m,k}[$. Notons encore

$\tilde{f},\tilde{h}$ les morphismes $\tilde{P} \longrightarrow \tilde{P}$ définis par $\tilde{f}(x),\tilde{h}(x)$, $\tilde{F}' : \tilde{P} \longrightarrow \tilde{P}$ le morphisme défini par $t \mapsto t^q$. Les isomorphismes images inverses par f et h :

$$f^*F'^*\mathcal{L}_\psi^{-1} \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{L}_\psi^{-1}\ ,\qquad h^*F'^*\mathcal{K}_\chi^{-1} \xrightarrow{\sim} h^*\mathcal{K}_\chi^{-1}$$

sont donnés par la multiplication par $\exp\pi(\tilde{f}(x)^q - \tilde{f}(x))$ et par $\tilde{h}(x)^{-1}$ sur $\mathcal{O}_{\tilde{P}}$, sur un voisinage strict de A. Comme on a en général $\tilde{F}'\circ\tilde{f} \neq \tilde{f}\circ\tilde{F}'$, (resp. $\tilde{F}'\circ\tilde{h} \neq \tilde{h}\circ\tilde{F}'$), l'isomorphisme $F'^*f^*\mathcal{L}_\psi^{-1} \xrightarrow{\sim} f^*F'^*\mathcal{L}_\psi^{-1}$ (resp. $F'^*h^*\mathcal{K}_\chi^{-1} \xrightarrow{\sim} h^*F'^*\mathcal{K}_\chi^{-1}$) est non trivial, et est défini par substitution de $\tilde{F}'^*\tilde{f}^*(t)$ et $\tilde{f}^*\tilde{F}'^*(t)$ (resp. $\tilde{F}'^*\tilde{h}^*(t)$ et $\tilde{h}^*\tilde{F}'^*(t)$) à t' et t dans la série de Taylor (1.5.3) (resp. (2.3.2)) de $\mathcal{L}_\psi^{-1}$ (resp. $\mathcal{K}_\chi^{-1}$) ; il est donc donné par la multiplication par

$$\exp\pi(\tilde{f}(x^q) - \tilde{f}(x)^q)\ \ (\text{resp. } (1 + \frac{\tilde{h}(x^q)-\tilde{h}(x)^q}{\tilde{h}(x)^q})^{-1/q-1})\ ,$$

fonctions dont la surconvergence résulte de celle des cristaux $\mathcal{L}_\psi^{-1}$ et $\mathcal{K}_\chi^{-1}$. Si l'on pose

(3.4.2)

$$G(x) = \exp\pi(\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x)^q)\exp\pi(\tilde{f}(x)^q - \tilde{f}(x^q))\tilde{h}(x)(1 + \frac{\tilde{h}(x^q)-\tilde{h}(x)^q}{\tilde{h}(x)^q})^{1/q-1}\ ,$$

G(x) est analytique et inversible sur A_ε pour ε assez près de 1, et l'isomorphisme $F'^*\mathcal{L}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{-1}$ est défini par la multiplication par $G(x)^{-1}$ sur $\mathcal{O}_{A_\varepsilon}$.

Soient $\ell_1' = x\ell'$, $\ell_1'^{\sigma} = x\ell'^{\sigma}$, avec

$$\ell'^{\sigma} = \frac{d}{dx} + qx^{q-1}(\pi\tilde{f}'(x^q) - \frac{1}{q-1}\frac{\tilde{h}'(x^q)}{\tilde{h}(x^q)})\ ,$$

de sorte que ℓ'^{σ} correspond à la connexion définissant $F'^*\mathcal{L}^{-1}$. On déduit de (3.2) un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^1_{rig}(X/K, \mathcal{L}^{-1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^1(\mathcal{H}^\dagger(A) \xrightarrow{\ell'} \mathcal{H}^\dagger(A)) \arrow[r, "x.", "\sim"'] \arrow[d, "u"'] & H^1(\mathcal{H}^\dagger(A) \xrightarrow{\ell'_1} \mathcal{H}^\dagger(A)) \arrow[d, "u_1"'] \\
H^1_{rig}(X/K, F'^* \mathcal{L}^{-1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & H^1(\mathcal{H}^\dagger(A) \xrightarrow{\ell'^\sigma} \mathcal{H}^\dagger(A)) \arrow[r, "x.", "\sim"'] \arrow[d, "G^{-1}."', "\wr"] & H^1(\mathcal{H}^\dagger(A) \xrightarrow{\ell'^\sigma_1} \mathcal{H}^\dagger(A)) \arrow[d, "G^{-1}."', "\wr"] \\
H^1_{rig}(X/K, \mathcal{L}^{-1}) \arrow[r, "\sim"] & H^1(\mathcal{H}^\dagger(A) \xrightarrow{\ell'} \mathcal{H}^\dagger(A)) \arrow[r, "x.", "\sim"'] & H^1(\mathcal{H}^\dagger(A) \xrightarrow{\ell'_1} \mathcal{H}^\dagger(A))
\end{tikzcd},$$

où x. et G^{-1}. désignent les homomorphismes induits par la multiplication par x et G^{-1}, et u, u_1 sont respectivement induits par $\varphi(x) \longmapsto qx^{q-1}\varphi(x^q)$ et $\varphi(x) \mapsto q\varphi(x^q)$. Par suite, dans l'identification $H^1_{rig}(X/K, \mathcal{L}^{-1}) \simeq \underline{W}'$, Φ' correspond au morphisme induit par $\varphi(x) \mapsto qG^{-1}(x)\varphi(x^q)$.

D'autre part, l'endomorphisme $\bar{\alpha}$ est induit par l'application $\alpha : \mathcal{H}^\dagger(A) \longrightarrow \mathcal{H}^\dagger(A)$ définie par $\alpha(\varphi) = \psi_q(G\varphi)$, où, pour $\xi \in \mathcal{H}^\dagger(A)$, on pose

$$(\psi_q\xi)(x) = \frac{1}{q} \sum_{z^q=x} \xi(z) \ ;$$

rappelons que ψ_q est inverse à gauche de $\xi(x) \mapsto \xi(x^q)$ [10, 3.5-3.6] . Il en résulte que $\bar{\alpha}\circ\Phi'$ est induit par $\varphi(x) \mapsto \psi_q(G(x)qG(x)^{-1}\varphi(x^q)) = q\varphi(x)$; comme $\underline{W}'$ est de dimension finie, on obtient la relation (3.4.1).

C. Cohomologie analytique duale.

Bien que la proposition suivante reste valable sous les conditions plus générales de (3.1), nous suivrons l'exposé de Robba, et resterons sous les hypothèses de (3.3). On a donc $\mathcal{L} = f^*\mathcal{L}_\psi \otimes h^*\mathcal{K}_{1/q-1}$; en posant

$$\ell = \frac{d}{dx} - \pi\tilde{f}' + \frac{1}{q-1}\frac{\tilde{h}'}{\tilde{h}} ,$$

$\mathcal{L}$ est défini par le module à connexion $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, \ell dx)$ sur un voisinage A_ε de A. Soit d'autre part $\underline{K}'$ l'espace de cohomologie dual de $\underline{W}'$ défini en [21, 8.2] ; nous en rappellerons la construction plus bas.

(3.5) PROPOSITION. Avec les notations précédentes, K' s'identifie canoniquement à l'espace de cohomologie rigide à support propre $H^1_c(X/K, \mathcal{L})$.

Soit $\varepsilon < 1$, $\varepsilon \neq 0$, tel que $\mathcal{L}$ soit défini sur A_ε par $(\mathcal{O}_{\tilde{P}}, \ell dx)$. Posons $B_\varepsilon = A_\varepsilon - A$; alors, en prenant ε assez près de 1, on peut supposer que B_ε est réunion disjointe de couronnes C_i (resp. C_∞) définies par les inégalités $\varepsilon \leqslant |x-c_i| < 1$ (resp. $1 < |x| \leqslant \varepsilon^{-1}$), où les c_i ont pour spécialisation les points a_i de $\mathbb{A}^1_k - X$.

Par construction, la cohomologie à support propre de X à coefficients dans $\mathcal{L}$ est donnée par les espaces de cohomologie $H^i_A(A_\varepsilon, \mathcal{L} \otimes \Omega^\cdot_{A_\varepsilon})$, où, pour tout faisceau abélien E sur A_ε, on pose $\Gamma_A(A_\varepsilon, E) = \mathrm{Ker}(\Gamma(A_\varepsilon, E) \longrightarrow \Gamma(B_\varepsilon, E))$. Si on note i l'inclusion de B_ε dans A_ε, les faisceaux $R^q i_* i^* E$ sont nuls lorsque E est un $\mathcal{O}_{A_\varepsilon}$-module cohérent et $q \geqslant 1$, car, pour tout affinoïde $V \subset A_\varepsilon$, $V \cap B_\varepsilon$ est quasi-Stein, et $H^q(V \cap B_\varepsilon, E) = 0$ pour $q \geqslant 1$ [14, 2.4] ; le complexe de cohomologie locale $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_A(E)$ s'identifie alors au complexe $E \longrightarrow i_* i^* E$ (en degrés 0,1). De même, on a alors $H^q(A_\varepsilon, E) = H^q(B_\varepsilon, E) = 0$ pour $q \geqslant 1$. Les $H^i_A(A_\varepsilon, \mathcal{L} \otimes \Omega^\cdot_{A_\varepsilon})$ sont donc les espaces de cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe

$$\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{L} \otimes \Omega^\cdot_{A_\varepsilon}) \longrightarrow \Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{L} \otimes \Omega^\cdot_{A_\varepsilon}) . \tag{3.5.1}$$

Comme $\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) \longrightarrow \Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$ est injective, $H^0_c(X/K, \mathcal{L})$ est nul, et $H^1_c(X/K, \mathcal{L})$ est le noyau de l'application

$$\Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})/\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) \xrightarrow{\bar{\ell}} \Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})/\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$$

déduite de ℓ par passage au quotient.

Puisque B_ε est réunion disjointe des C_i et de C_∞, on a

$$\Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) = (\bigoplus_i \Gamma(C_i, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})) \oplus \Gamma(C_\infty, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) ;$$

$\Gamma(C_i, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$ est l'ensemble des séries $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{i,j}(x-c_i)^j$ convergentes pour $\varepsilon \leqslant |x-c_i| < 1$, tandis que $\Gamma(C_\infty, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$ est l'ensemble des séries

$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_{\infty,j} x^j$ convergentes pour $1 < |x| \leq \varepsilon^{-1}$. Soient $P_i : \Gamma(C_i, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) \longrightarrow \Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$, $P_\infty : \Gamma(C_\infty, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) \longrightarrow \Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$ les applications K-linéaires définies par

$$P_i\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_{i,j}(x-c_i)^j\Big) = \sum_{j<0} \alpha_{i,j}(x-c_i)^j ,$$

$$P_\infty\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_{\infty,j} x^j\Big) = \sum_{j\geq 0} \alpha_{\infty,j} x^j ,$$

et $\gamma_+ := P_\infty + \sum_i P_i : \Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) \longrightarrow \Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$. Il résulte de la décomposition de Mittag-Leffler [11, I.1.3] que γ_+ est une rétraction K-linéaire de $\Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$ sur $\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$. Soient $\hat{R}$ le noyau de γ_+, $\gamma_- : \Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) \longrightarrow \hat{R}$ le projecteur associé à γ_+ ; $\hat{R} = (\bigoplus_i \hat{R}_i) \oplus \hat{R}_\infty$, où $\hat{R}_i$ est l'ensemble des séries $\sum_{j\geq 0} \alpha_{i,j}(x-c_i)^j$ convergentes pour $|x-c_i| < 1$ et $\hat{R}_\infty$ l'ensemble des séries $\sum_{j<0} \alpha_{\infty,j} x^j$ convergentes pour $|x| > 1$. En particulier, $\hat{R}$ est indépendant du choix de ε, et on peut remplacer $\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$ et $\Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$ par leurs limites inductives pour $\varepsilon \xrightarrow{<} 1$ comme dans [21]. Si j est l'injection de $\hat{R}$ dans $\Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$, $\underline{K}'$ est par définition le noyau de l'application composée $\gamma_- \circ (\ell x) \circ j$.

La multiplication par x étant bijective sur $\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$ et $\Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})$ pour ε assez près de 1 (rappelons que x est supposé inversible sur X), on obtient un isomorphisme

$$H^1_c(X/K, \mathcal{L}) \xrightarrow[\sim]{x^{-1}} \mathrm{Ker}(\Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})/\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) \xrightarrow{\overline{\ell x}} \Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})/\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})) .$$

D'autre part, on déduit de γ_- un isomorphisme K-linéaire

$$\gamma : \Gamma(B_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon})/\Gamma(A_\varepsilon, \mathcal{O}_{A_\varepsilon}) \xrightarrow{\sim} \hat{R} ,$$

qui induit un isomorphisme $\mathrm{Ker}(\overline{\ell x}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\gamma(\overline{\ell x})\gamma^{-1})$. Comme $\gamma(\overline{\ell x})\gamma^{-1} = \gamma_-(\ell x) j$, la proposition en résulte.

(3.6) A titre d'exercice, nous laissons le lecteur vérifier que, dans l'isomorphisme précédent, l'action de Frobenius par fonctorialité sur $H^1_c(X/K, \mathcal{L})$ s'identifie à celle que définit Robba sur $\underline{K}'$ en [21, 8.3] .

(3.7) Remarque : Compte tenu de (3.5.1), l'homomorphisme canonique de la cohomologie à support propre dans la cohomologie sans supports

$$H^1_c(X/K,\mathcal{L}) \longrightarrow H^1_{rig}(X/K,\mathcal{L}) \tag{3.7.1}$$

est l'homomorphisme du serpent défini par la suite exacte de complexes de longueur 1

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(A_\varepsilon,\mathcal{O}_{A_\varepsilon}) & \longrightarrow & \Gamma(B_\varepsilon,\mathcal{O}_{B_\varepsilon}) & \longrightarrow & \Gamma(B_\varepsilon,\mathcal{O}_{B_\varepsilon})/\Gamma(A_\varepsilon,\mathcal{O}_{A_\varepsilon}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \ell} & & \downarrow{\scriptstyle \ell} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\ell}} & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(A_\varepsilon,\mathcal{O}_{A_\varepsilon}) & \longrightarrow & \Gamma(B_\varepsilon,\mathcal{O}_{B_\varepsilon}) & \longrightarrow & \Gamma(B_\varepsilon,\mathcal{O}_{B_\varepsilon})/\Gamma(A_\varepsilon,\mathcal{O}_{A_\varepsilon}) & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

L'isomorphisme de (3.2), composé avec la multiplication par x^{-1}, identifie $H^1_{rig}(X/K,\mathcal{L})$ au conoyau de ℓx sur $\Gamma(A_\varepsilon,\mathcal{O}_{A_\varepsilon})$. En identifiant d'autre part $H^1_c(X/K,\mathcal{L})$ au noyau de ℓx sur $\Gamma(A_\varepsilon,\mathcal{O}_{A_\varepsilon})/\Gamma(B_\varepsilon,\mathcal{O}_{B_\varepsilon})$ comme en (3.5), on voit immédiatement que (3.7.1) s'identifie à l'application $\hat{D}_F$ de [21, 8.4] utilisée par Robba pour définir la "structure symplectique" sur ses espaces de cohomologie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ADOLPHSON, S. SPERBER, *Twisted Kloosterman sums and p-adic Bessel functions*, Amer. J. Math., à paraître.

[2] P. BERTHELOT, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique* p, Journées d'analyse p-adique (Luminy 1982), G.E.A.U. 81-82, fasc. 3, Secrétariat Math. I.H.P., Paris.

[3] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, en préparation.

[4] M. BOYARSKY, *p-adic gamma function and Dwork cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc, 257 (1980), 359-369.

[5] P. DELIGNE, *Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques*, in SGA $4^{1/2}$, Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag (1977).

[6] B. DWORK, *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math., 82 (1960), 631-648.

[7] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface*, Publ. Math. I.H.E.S., 12 (1962), 5-68.

[8] B. DWORK, *On the rationality of zeta functions and L-series*, Proc. Conf. on local fields (Driebergen 1966), 40-55, Springer-Verlag (1967).

[9] B. DWORK, *Bessel functions as p-adic functions of the argument*, Duke Math. J., 41 (1974), 711-738.

[10] B. DWORK, *Lectures on p-adic differential equations*, Grundlehren der Math. Wiss., 253, Springer-Verlag (1982).

[11] J. FRESNEL, M. VAN DER PUT, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progress in Math., 18, Birkhäuser (1981).

[12] N. KATZ, *On the differential equations satisfied by period matrices*, Publ. Math. I.H.E.S., 35 (1968), 71-106.

[13] N. KATZ, *Sommes exponentielles*, Astérisque, 79 (1980).

[14] R. KIEHL, *Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Inventiones Math., 2 (1967), 256-273.

[15] N. KOBLITZ, p-*adic analysis : a short course on recent work*, London Math. Soc. Lecture notes series, 46, Cambridge Univ. Press (1980).

[16] S. LANG, *Cyclotomic fields* II, Graduate texts in Math., 69, Springer-Verlag (1980).

[17] W. MESSING, *On the nilpotence of the hypergeometric equation*, J. Math. Kyoto Univ., 12 (1972), 369-383.

[18] P. MONSKY, p-*adic analysis and zeta functions*, Lectures in Math., Kyoto Univ., 4, Kinokuniya Bookstore Co. (1970).

[19] M. RAYNAUD, *Géométrie analytique rigide*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 39-40 (1974), 319-327.

[20] D. REICH, *A* p-*adic fixed point formula*, Amer. J. Math., 91 (1969), 835-850.

[21] P. ROBBA, *Index of* p-*adic differential operators* III. *Application to twisted exponential sums*, dans ce volume.

[22] S. SPERBER, p-*adic hypergeometric functions and their cohomology*, Duke Math. J., 44 (1977), 535-589.

Pierre BERTHELOT
Université de Rennes I
U.E.R. Mathématiques et Informatique
Campus de Beaulieu

35042 RENNES CEDEX

(FRANCE)