A. HAEFLIGER
QUACH NGOC DU

**Appendice : Une présentation du groupe fondamental d'une Orbifold**

*Astérisque*, tome 116 (1984), p. 98-107
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__98_0>

## APPENDICE : UNE PRÉSENTATION DU GROUPE FONDAMENTAL D'UNE ORBIFOLD

par A. Haefliger et Quach Ngoc Du

Le but de cet appendice est de donner une présentation du groupe fondamental $\pi_1(Q)$ (noté aussi $\pi_1(BQ)$ dans 4.2.1.) d'une orbifold $Q$ par générateurs et relations en terme du groupe fondamental de la partie régulière $Q_{(o)}$ de $Q$ et d'informations provenant des strates de codimension un et deux. On suppose l'espace topologique sous-jacent à $Q$ connexe et à base dénombrable.

A.1.1. Le groupe fondamental. Choisissons un point base $x_o$ dans la partie régulière $Q_{(o)}$ de $Q$. Par définition les éléments de $\pi_1(Q,x_o)$ sont les classes d'homotopie (avec point base fixé en $x_o$) des $\Gamma_Q$-structures sur le cercle $S^1$, où $\Gamma_Q$ est un groupoïde associé à $Q$ comme dans 4.1.

Chaque élément de $\pi_1(Q,x_o)$ est représenté par une "application continue" de l'intervalle $[0,1]$ dans $Q$, appliquant les extrémités sur $x_o$, c'est-à-dire un élément $c$ de $H^1([0,1],\Gamma_Q)$ dont la restriction aux extrémités est l'élément représenté par l'application constante sur $x_o$. Concrètement, $c$ est déterminé par un partage $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_k = 1$, des applications continues $c_r$ de chaque intervalle $[t_r, t_{r+1}]$ dans des voisinages uniformisants $\tilde{U}_r$ et, pour chaque entier $r$ entre 0 et $k$, par un élément $\gamma_r \in \Gamma_Q$ de source $c_{r-1}(t_r)$ et but $c_r(t_r)$ de sorte que les germes en $t_r$ de $c_r$ et de $\gamma_r c_{r-1}$ soient égaux; on suppose aussi que $c_o(0) = x_o = c_{k-1}(1)$. Il ne faut pas oublier que les éléments $\gamma_r$ font partie de la donnée de $c$. On laisse au lecteur le soin d'expliciter comment décrire concrètement une homotopie entre deux lacets $c$ et $c'$ en terme d'un partage du produit $[0,1]\times[0,1]$ en petits rectangles.

En fait par position générale, on peut toujours choisir un représentant $c$ qui ne coupe que les strates de codimension un et transversalement; on peut de même se restreindre aux homotopies qui ne coupent que les strates de codimension un et deux transversalement.

Rappelons le fait fondamental que si l'orbifold $Q$ est le quotient d'une variété simplement connexe $\tilde{Q}$ par un groupe $\Gamma$ opérant de manière proprement discontinue sur $\tilde{Q}$, alors $\pi_1(Q,x_o)$ est isomorphe à $\Gamma$. Tout lacet en $x_o$ se relève en un chemin au sens ordinaire dans $\tilde{Q}$.

A.1.2. Les strates de codimension un et deux.

Toute strate de codimension un de $Q$ est localement l'image par une projection uniformisante $\pi : \tilde{U} = R^n \to U = \tilde{U}/\Gamma$ de la sous-variété des points fixes du groupe $\Gamma$ engendré par la symétrie $s : (x_1,x_2,\ldots,x_n) \mapsto (-x_1,x_2,\ldots,x_n)$ par rapport à l'hyperplan $x_1 = 0$.

Nous distinguerons deux espèces de strates de codimension deux. Celles de première espèce sont localement l'image par $\pi : \tilde{U} \to U = \tilde{U}/\Gamma$ de la sous-variété $x_1 = x_2 = 0$ des points fixes du groupe $\Gamma$ engendré par une rotation d'ordre $k$ de $R^n$ laissant fixe le sous-espace $x_1 = x_2 = 0$.

Celles de deuxième espèce sont localement l'image de la sous-variété $x_1 = x_2 = 0$ des points fixes du groupe diédral $\Gamma$ engendré par cette rotation d'ordre $k$ et la symétrie $s$. Dans ces deux cas, l'entier $k$ sera appelé l'ordre de la strate considérée.

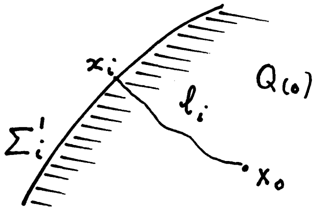
L'espace topologique sous-jacent à la réunion des strates de codimension 0 et 1 est naturellement une variété différentiable à bord dont l'intérieur est formé de la partie régulière de $Q$ et dont le bord est la réunion des strates de codimension un. Si l'on ajoute à cet espace topologique les strates de codimension deux de deuxième espèce, on obtient une variété différentiable $\hat{Q}_{(1)}$ avec un bord présentant une arête le long des strates de codimension deux (corner reflector). L'inclusion de $Q_{(o)}$ dans $\hat{Q}_{(1)}$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux (au sens ordinaire) de sorte que les éléments de $\pi_1(Q_{(o)},x_o)$ pourront aussi être représentés par des lacets dans $\hat{Q}_{(1)}$.

A.1.3. Les générateurs associés aux strates de codimension un.

Pour chaque strate $\Sigma_i^1$ de codimension un, on peut choisir un voisinage $U_i$ qui est isomorphe au quotient de $\Sigma_i^1 \times \mathbb{R}$ par la symétrie

$(x,t) \mapsto (x,-t)$. On peut aussi s'arranger pour que $U_i$ contienne $x_o$ qui aura alors les coordonnées $(x_i, \pm t_i)$ dans $\Sigma_i^1 \times \mathbb{R}$. Alors $\sigma_i$ sera représenté par le chemin linéaire $c_i$ qui relie $(x_i,-t_i)$ à $(x_i,+t_i)$ (ou vice-versa). L'élément $\sigma_i$ est d'ordre 2 et non trivial.

Désignons par $\ell_i$ le chemin dans l'espace topologique $\hat{Q}_{(1)}$ (cf. A.1.2) issu de $x_o$ et aboutissant au point $x_i$ de $\Sigma_i^1$, image du segment $\{x_i\}x[-t_i,0]$ par la projection de $\Sigma_i^1 \times \mathbb{R}$ dans $\hat{Q}_{(1)}$. Ainsi la projection de $c_i$ dans $Q_{(1)}$ est le chemin $\ell_i^{-1}\ell_i$.




A.1.4. <u>Enoncé du théorème de présentation</u>.

Le <u>groupe fondamental</u> $\pi_1(Q,x_o)$ de l'orbifold connexe Q <u>est engendré par les éléments du groupe fondamental</u> $\pi_1(Q_{(o)},x_o)$ de la partie régulière $Q_{(o)}$ de Q <u>et par les éléments</u> $\sigma_i$ attachés à chaque strate de $\Sigma_i^1$ de codimension un (cf. A.1.3.).

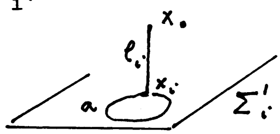
Les <u>relations</u> sont celles de $\pi_1(Q_{(o)},x_o)$ et les suivantes correspondant aux types des strates :

I) Pour chaque strate $\Sigma_i^1$ de codimension un

$$\sigma_i^2 = 1$$

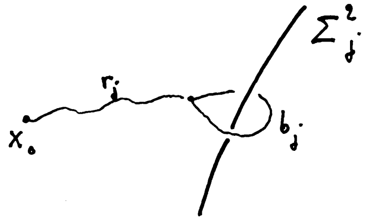
et pour tout élément $\alpha$ de $\pi_1(Q_{(o)},x_o)$ représenté par un lacet de la forme $\ell_i^{-1} a\, \ell_i$, où a est un lacet dans $\Sigma_i^1$ en $x_i$, on a

$$\alpha\sigma_i = \sigma_i\alpha$$



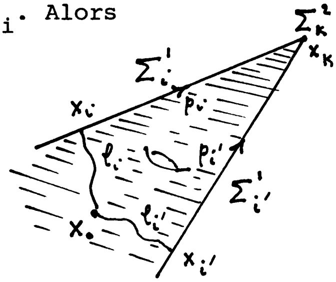

$II_1$) Pour toute strate $\Sigma_j^2$ de première espèce de codimension 2 et d'ordre $n_j$, choisissons un élément $\beta_j$ de $\pi_1(Q_{(o)},x_o)$ représenté par un lacet de la forme $r_j^{-1} b_j r_j$, où $r_j$ est un chemin d'origine $x_o$ et d'extrémité le point base d'un lacet $b_j$ qui fait une fois le tour d'une fibre d'un voisinage tubulaire de $\Sigma_j^2$. Alors

$$\beta_j^{n_j} = 1$$




II$_2$) Pour toute strate $\Sigma_k^2$ de codimension 2 de deuxième espèce d'ordre $n_k$, choisissons un point $x_k \in \Sigma_k^2$ et dans les deux strates $\Sigma_i^1$ et $\Sigma_i^1$, de codimension 1 adjacentes à $\Sigma_k^2$ (elles peuvent être égales), choisissons des chemins $p_i$ et $p_i$, reliant $x_i$ et $x_i$, à $x_k$ (et arrivant en $x_k$ de deux côtés différents). Soit $\gamma_k$ l'élément de $\pi_1(Q_{(o)}, x_o)$ représenté par le chemin $\ell_i^{-1} p_i^{-1} p_i \ell_i$. Alors

$$(\sigma_i \gamma_k \sigma_i \gamma_k^{-1})^{n_k} = 1$$




Ce théorème sera démontré au § 3. Dans le § 2, nous décrivons la structure du voisinage d'une strate en toute généralité, bien que nous ayons besoin de considérer seulement les strates de codimension un et deux.

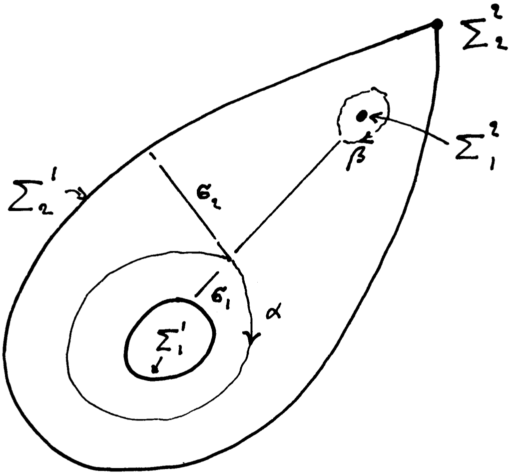
A.1.5. <u>Exemple</u>. Soit $Q$ l'orbifold de dimension deux dont l'espace topologique sous-jacent est représenté dans la figure ci-dessous. On a deux strates $\Sigma_1^1$ et $\Sigma_2^1$ de codimension un, une strate $\Sigma_1^2$ de codimension deux de première espèce d'ordre $n$ et une strate $\Sigma_2^2$ de codimension deux de deuxième espèce d'ordre $m$. La partie régulière est un disque percé de deux trous; son groupe fondamental est le groupe libre engendré par les éléments $\alpha$ et $\beta$ comme dans la figure.

On a les relations suivantes

$$\mathrm{I} : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1 \quad , \quad \alpha\sigma_1 = \sigma_1\alpha$$

$$\mathrm{II}_1 : \beta^n = 1$$

$$\mathrm{II}_2 : (\sigma_2\gamma\sigma_2\gamma^{-1})^m = 1 \quad \text{où} \quad \gamma = \beta^{-1}\alpha^{-1}$$




Si $m > 1$ ou $n > 1$, on peut mettre sur Q une infinité de structures hyperboliques (paramétrées par 3 nombres réels, cf. Thurston [18], 13,27). Alors Q est le quotient du plan hyperbolique par des sous-groupes d'isométries isomorphes à $\pi_1(Q)$.

A.2. <u>Voisinage d'une strate de type</u> $\Gamma$.

A.2.1. Soit $\Gamma$ un groupe fini d'isométries de la boule unité $D^q$ dans $\mathbb{R}^q$ (avec la métrique euclidienne) tel que 0 soit le seul point fixe commun à tous les éléments de $\Gamma$. Le quotient $D^q/\Gamma$ est naturellement une orbifold et l'image de l'origine est une strate de dimension 0 de type $\Gamma$. On peut soit considérer le disque ouvert ou le disque fermé $D^q$; dans le deuxième cas, $D^q/\Gamma$ peut être considéré comme une orbifold à bord, le bord étant l'orbifold sphérique $S^{q-1}/\Gamma$.

Les isométries de $D^q$ qui appliquent les orbites de $\Gamma$ dans les orbites de $\Gamma$ forment un groupe $N(\Gamma)$ qui est le normalisateur de $\Gamma$ dans le groupe des isométries $0(q)$ de $D^q$. C'est un sous-groupe fermé de $0(q)$ dont la composante connexe de l'identité est formée d'éléments qui commutent avec tout élément de $\Gamma$. Par passage aux quotients, on obtient un isomorphisme de $N(\Gamma)/\Gamma$ sur le groupe des isométries $\mathrm{Iso}(D^q/\Gamma)$ de l'orbifold $D^q/\Gamma$ (ou de $S^{q-1}/\Gamma$). Par définition, une isométrie de $D^q/\Gamma$ est un homéomorphisme qui se relève localement suivant une isométrie de $D^q$ et il est facile de voir qu'un tel homéomorphisme se relève globalement suivant une isométrie de $D^q$.

Par exemple, si $\Gamma$ est engendré par une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'ordre n, alors $N(\Gamma)/\Gamma$ est isomorphe à $O(2)$; on peut se représenter $D^2/\Gamma$ comme un cône circulaire dans $\mathbb{R}^3$. Si $\Gamma$ est le groupe diédral d'ordre 2n, alors $N(\Gamma)/\Gamma$ est cyclique d'ordre 2; dans ce cas $D^2/\Gamma$ est un secteur d'angle au sommet $\pi/n$ et la seule isométrie non triviale est une symétrie autour de la bissectrice.

On dira qu'une strate de dimension n est de type $\Gamma$ si le groupe d'isotropie qui lui est attaché est conjugué à une suspension de $\Gamma$, c'est-à-dire est conjugué au sous-groupe de $O(n+q)$ qui opère par l'identité sur le premier facteur de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ et comme $\Gamma$ sur le deuxième facteur.

A.2.2. Proposition. Toute strate $\Sigma$ de type $\Gamma$ admet un voisinage tubulaire T muni d'une projection $p : T \to \Sigma$ qui en fait un fibré localement trivial de base $\Sigma$, de fibre F isomorphe à l'orbifold $D^q/\Gamma$ et groupe structural $N(\Gamma)/\Gamma = \mathrm{Iso}(D^q/\Gamma)$.

Cela signifie qu'il existe un recouvrement de $\Sigma$ par des ouverts $V_i$ et des isomorphismes d'orbifolds $\varphi_i$ de $p^{-1}(V_i)$ sur $V_i \times D^q/\Gamma$ se projetant sur l'identité de $V_i$; de plus les changements de cartes $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ sont des automorphismes de $(V_i \cap V_j) \times D^q/\Gamma$ de la forme $(v,z) \mapsto (v, g_{ji}(v)z)$, où $g_{ji}(v)$ est un élément de $N(\Gamma)/\Gamma$ dépendant différentiablement de v.

A.2.3. Démonstration. Soit $\Sigma$ une strate de type $\Gamma$ d'une orbifold Q. Chaque point de Q possède un voisinage U qui est isomorphe au quotient de $W \times \mathbb{R}^q$ par $\Gamma$ opérant trivialement sur l'ouvert W de $\Sigma$ et par isométrie euclidienne sur $\mathbb{R}^q$, la projection $\pi : W \times \mathbb{R}^q \to W \times \mathbb{R}^q/\Gamma = U$ appliquant $(w,0)$ sur w.

On peut toujours construire sur Q une métrique riemannienne (c'est-à-dire une métrique riemannienne sur $\widetilde{Q} = \amalg \widetilde{U}_i$ invariante par $\Gamma_Q$, cf. § 4.1). Une telle métrique induit sur $W \times \mathbb{R}^q$ une métrique riemannienne g invariante par $\Gamma$. La projection p d'un voisinage T assez petit de $\Sigma$ appliquera un point de T sur le point de $\Sigma$ le plus proche.

Pour tout point de W on peut trouver un voisinage relativement compact $V \in W$, et pour tout $v \in V$ une base orthonormale de l'espace normal $N_v$ à $W \times \{0\}$ au point (v,0) dépendant différentiablement de v de sorte que l'application linéaire $\ell_v$ de $\mathbb{R}^q$ dans $N_v$ déterminée par cette base soit une isométrie $\Gamma$-équivariante. Soit alors h l'application de $V \times D^q_\varepsilon$, où $D^q_\varepsilon$ est le disque de rayon $\varepsilon$, dans $W \times R^q$ qui applique (v,z) sur l'extrémité de la géodésique de vecteur initial $\ell_v(z)$. Cette application est $\Gamma$-équivariante et le composé de h avec la projection $\pi$ est une application uniformisante $\pi_v$ sur un ouvert $V^\varepsilon$ de Q; sur cet ouvert la projection p sera définie par $p(\pi_V(v,z)) = \pi_V(v,o) = v$.

La construction analogue pour un ouvert V' de $\Sigma$ donnerait une application uniformisante $\pi_{V'}$ de $V' \times D^q_\varepsilon$, sur un ouvert $V'^{\varepsilon'}$. Pour $v \in V \cap V'$, il existe une isométrie $g_{VV'}(v)$ de $R^q$ telle que $\pi_{V'}(v,z) = \pi_V(v, g_{VV'}(v)z)$. Comme cette isométrie respecte les orbites de $\Gamma$, elle appartient à $N(\Gamma)$ et sa classe modulo $\Gamma$ est bien définie.

Pour obtenir T, on choisit un recouvrement localement fini $V_i$ de $\Sigma$ et des applications uniformisantes $\pi_{V_i} : V_i \times D^q_i \to V_i^{\varepsilon_i}$ construites comme ci-dessus. Soit f une fonction de classe $C^\infty$ strictement positive sur $\Sigma$ telle que $f(v) < \varepsilon_i$ si $v \in V_i$. Soit $\widetilde{\pi}_{V_i}$ l'application de $V_i \times D^q$ dans Q définie par $\widetilde{\pi}_{V_i}(v,z) = \pi_{V_i}(v, f(v)z)$. Alors T sera la réunion des images des $\widetilde{\pi}_{V_i}$. On aura encore $\widetilde{\pi}_{V_j}(v,z) = \widetilde{\pi}_{V_i}(v, g_{V_iV_j}(v)z)$, où $g_{V_iV_j}(v) \in N(\Gamma)$.

A.2.4. Remarque. D'après ce qui précède, il est facile de voir qu'il y a une correspondance bijective entre classes d'isomorphisme de germes de voisinage d'une strate $\Sigma$ de type $\Gamma$ et classes d'isomorphisme de fibrés principaux de base $\Sigma$ et groupe structural $N(\Gamma)/\Gamma$.

A.2.5. Remarque. Pour calculer le groupe fondamental de T, on peut appliquer la suite exacte d'homotopie du fibré $p : T \to \Sigma$

$$\pi_2(\Sigma) \to \pi_1(D^q/\Gamma) \to \pi_1(T) \to \pi_1(\Gamma) \to 1$$

qui peut s'établir soit directement, soit en remarquant que le classifiant BT (au sens de 4.2.2) est un fibré localement trivial de base $\Sigma$ et fibre $B(D^q/\Gamma) \approx B\Gamma$.

Si le fibré principal associé à T est classé par une application $f : \Sigma \to B(N(\Gamma)/\Gamma)$, l'homomorphisme $\pi_2(\Sigma) \to \pi_1(D^q/\Gamma) = \Gamma$ est le composé des homomorphismes

$$\pi_2(\Sigma) \xrightarrow{f_*} \pi_2(B(N(\Gamma)/\Gamma) = \pi_1(N(\Gamma)/\Gamma) \to \Gamma$$

où le deuxième homomorphisme classe le revêtement $N(\Gamma) \to N(\Gamma)/\Gamma$.

Le revêtement universel de l'orbifold T sera une orbifold partout régulière si et seulement si l'homomorphisme $\pi_2(\Sigma) \to \pi_1(D^q/\Gamma)$ est trivial.

## A.3. Démonstration du théorème.

L'inclusion de la réunion $Q_{(2)}$ des strates de codimension 0,1 ou 2 dans Q induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux comme on le voit immédiatement par position générale. On peut donc supposer qu'il n'y a pas de strate de codimension supérieure à deux.

Suivant une suggestion de Nathan Habegger, nous allons démontrer le théorème par récurrence sur le nombre de strates en utilisant le théorème de Van Kampen: si Q est la réunion de deux ouverts connexes $Q^1$ et $Q^2$ dont l'intersection est connexe, et si $x_o$ est un point base dans $Q^1 \cap Q^2$, alors $\pi_1(Q,x_o)$ est le produit libre de $\pi_1(Q^1,x_o)$ et de $\pi_1(Q^2,x_o)$ amalgamé par les homomorphismes de $\pi_1(Q^1 \cap Q^2,x_o)$ dans les $\pi_1(Q^i,x_o)$ induits par les inclusions dans $Q^1$ et $Q^2$. La démonstration est la même que dans le cas classique. D'ailleurs en suivant la construction de 4.2.2, on a $BQ = BQ^1 \cup BQ^2$ et $B(Q' \cap Q^2) = BQ^1 \cap BQ^2$ de sorte que l'on peut appliquer directement le théorème de Van Kampen usuel.

Supposons d'abord que Q soit réunion de $Q_{(o)}$ et de strates de codimension un. Soit $\Sigma_i^1$ une strate de codimension un et supposons par récurrence le théorème vrai pour $Q-\Sigma_i^1$. Soit T un voisinage tubulaire ouvert de $\Sigma_i^1$ contenant $x_o$ comme dans A.1.3. On a $T \cap (Q-\Sigma_i^1) = \Sigma_i^1 \times ]0,\infty[$. Comme T est le quotient de $\Sigma_i^1 \times \mathbb{R}$ par la symétrie $(x,t) \to (x,-t)$, alors $\pi_1(T) = \pi_1(\Sigma_i^1) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est égal à $\sigma_i$ (cf. A.1.3) et il commute avec tout élément de $\pi_1(\Sigma_i^1)$. D'autre part l'inclusion de $T-\Sigma_i^1$ dans T induit une inclusion de $\pi_1(T-\Sigma_i^1)$ sur le facteur $\pi_1(\Sigma_i^1)$ de $\pi_1(T)$. En appliquant Van Kampen, il en résulte bien que $\pi_1(Q)$ est engendré par $\pi_1(Q-\Sigma_i^1,x_o)$ et $\sigma_i$ avec les relations de type I.

Supposons maintenant que Q soit réunion de strates de codimension 0, 1 et 2 et soit $\Sigma_j^2$ une strate de codimension 2 de première espèce d'ordre $n_j$; elle est donc de type $\Gamma$, où $\Gamma$ est le groupe engendré par une rotation de $R^2$ d'ordre $n_j$. Soit T un voisinage tubulaire de $\Sigma_j^2$ comme dans le paragraphe 2; on peut supposer que T contient le point base $x_o$. Soit $\beta_j$ l'élément de $\pi_1(Q-\Sigma_j^2,x_o)$ représenté par un lacet $b_j$ faisant une fois le tour d'une fibre de T (il sera égal à un conjugué de l'élément $\beta_j$ considéré dans A.1.4 sous $II_1$). On veut montrer que $\pi_1(Q,x_o)$ est le quotient de $\pi_1(Q-\Sigma_j^2,x_o)$ par le sous-groupe normal engendré par $\beta_j^{n_j}$ (relation $II_1$). En appliquant le théorème de Van Kampen, il suffit de vérifier que l'application de $\pi_1(T-\Sigma_j^1,x_o)$ dans $\pi_1(T,x_o)$ induite par l'injection de $T-\Sigma_j^2$ dans T est surjective et que son noyau est engendré par $\beta_j^{n_j}$ (où $\beta_j$ désigne l'élément de $\pi_1(T-\Sigma_j^2)$ représenté par $b_j$). Cela résulte de la commutativité du diagramme ci-dessous, où les suites horizontales sont des suites exactes d'homotopie de fibrés (cf. A.2.5) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_2(\Sigma_j^2) & \longrightarrow & \pi_1(D^2-\{o\}/\Gamma) & \longrightarrow & \pi_2(T-\Sigma_j^2) & \longrightarrow & \pi_1(\Sigma_j^2) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\pi_2(\Sigma_j^2) & \to & \pi_1(D^2/\Gamma) & \longrightarrow & \pi_1(T) & \longrightarrow & \pi_1(\Sigma_j^2) & \to & 1
\end{array}$$

car la deuxième flèche verticale est isomorphe à la projection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$.

Supposons enfin que $\Sigma_k^2$ soit une strate de codimension deux de deuxième espèce d'ordre $n_k$. Dans ce cas $\Gamma$ est le groupe diédral d'ordre $2n_k$. On considère un voisinage tubulaire T ouvert de la strate comme dans le § 2 et on peut supposer que le point base $x_o$ se trouve dans la fibre au-dessus du point $x_k$ choisi dans $\Sigma_k^2$ (cf. A.1.4, relation $II_2$). On a le diagramme commutatif :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\pi_2(\Sigma_k^2, x_k) & \rightarrow & \pi_1(D^2-\{o\}/\Gamma, x_o) & \rightarrow & \pi_1(T-\Sigma_k^2, x_o) & \rightarrow & \pi_1(\Sigma_k^2, x_k) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\pi_2(\Sigma_k^2, x_k) & \rightarrow & \pi_1(D^2/\Gamma, x_o) & \longrightarrow & \pi_1(T, x_o) & \longrightarrow & \pi_1(\Sigma_k^2, x_k) & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

Le groupe $\pi_1(D^2/\Gamma)$ est isomorphe à $\Gamma$, alors que $\pi_1(D^2-\{0\}/\Gamma)$ est le groupe diédral infini engendré par deux générateurs $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\sigma}_{i'}$ d'ordre 2 représentés par des lacets $\tilde{\ell}_i^{-1}\tilde{\ell}_i$ et $\tilde{\ell}_{i'}^{-1}\tilde{\ell}_{i'}$ dans l'orbifold $D^2-\{0\}/\Gamma$ allant du point base $x_o$ aux strates $\Sigma_i^1$ et $\Sigma_{i'}^1$ de codimension un adjacentes à $\Sigma_k^2$, et retournant à $x_o$ (cf. A.1.3 et 1.4). Le groupe $\Gamma = \pi_1(D^2/\Gamma)$ est isomorphe au quotient de $\pi_1(D^2-\{0\}/\Gamma)$ par le sous-groupe engendré par $(\tilde{\sigma}_i\tilde{\sigma}_{i'})^{n_k}$. L'inclusion de la fibre $D^2-\{0\}/\Gamma$ dans $Q-\Sigma_k^2$ fait correspondre à $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\sigma}_{i'}$ des conjugués $\gamma_i\sigma_i\gamma_i^{-1}$ et $\gamma_{i'}\sigma_{i'}\gamma_{i'}^{-1}$ des éléments $\sigma_i$ et $\sigma_{i'}$ choisis dans 1.4. D'après Van Kampen, $\pi_1(Q, x_o)$ est le quotient de $\pi_1(Q-\Sigma_k^2, x_o)$ par le sous-groupe normal engendré par $(\gamma_i\sigma_i\gamma_i^{-1}\gamma_{i'}\sigma_{i'}\gamma_{i'}^{-1})^{n_k} = 1$, relation équivalente à $(\sigma_i\gamma\sigma_{i'}\gamma^{-1})^{n_k} = 1$, où $\gamma = \gamma_i^{-1}\gamma_{i'}$, est l'élément décrit en A.1.4, $II_2$.