Astérisque

ANDRÉ HAEFLIGER

Groupoides d'holonomie et classifiants

Astérisque, tome 116 (1984), p. 70-97

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__70_0>

GROUPOIDES D'HOLONOMIE ET CLASSIFIANTS

par André HAEFLIGER

Le but de cet exposé est de passer en revue les diverses notions de groupoïdes d'holonomie associés à un feuilletage, car ils déterminent la structure transverse, et de comparer leurs espaces classifiants. Il s'agit d'un article d'exposition qui ne prétend pas apporter de résultats essentiellement nouveaux. Par la même occasion nous espérons ainsi donner une introduction à certains aspects topologiques de la théorie de A. Connes.

Une conversation avec G. Skandalis à la suite de mon exposé a été très utile pour améliorer la présentation de l'équivalence de deux groupoïdes topologiques donnée au § 2.2.

1. Groupoïdes d'holonomie d'un feuilletage

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété X. On peut lui associer divers groupoïdes d'holonomie, essentiellement introduits déjà par C. Ehresmann.

1.1. Le groupoïde d'holonomie $\mathcal{G}$ ou le graphe de $\mathcal{F}$

C'est celui qui est utilisé par A. Connes ([3], voir aussi un papier à paraître de Winkelkemper). C'est un groupoïde topologique dont l'espace des unités est X. Ses éléments sont représentés par des triples (x,c,y), où x et y appartiennent à une même feuille L de $\mathcal{F}$ et c est un chemin continu dans L reliant y à x; deux tels chemins sont équivalents s'ils déterminent la même holonomie. Un voisinage de (x,c,y) est formé des éléments représentés par les triples (x',c',y'), où c' est un chemin voisin de c. Avec cette topologie $\mathcal{G}$ est une variété en général non séparée de dimension égale à la somme de la dimension de X et de la dimension des feuilles.

La projection source $\alpha : \mathcal{G} \to X$ (resp. but $\beta : \mathcal{G} \to X$) fait correspondre à (x,c,y) le point y (resp. x). Ces projections sont des submersions dont les fibres sont les revêtements d'holonomie des feuilles. Le composé $(x,c,y)(x',c',y')$ est défini si $x' = y$ et est alors représenté par $(x,c\cdot c',y')$.

1.2. <u>Le groupoïde d'holonomie transverse</u> Γ_T <u>associé à une transversale complète T</u>

T est une variété de dimension égale à la codimension des feuilles, munie d'une immersion $j : T \to X$ transverse aux feuilles et dont l'image rencontre chaque feuille au moins une fois (c'est pour cela qu'on l'appelle complète).

Les éléments de Γ_T sont représentés par les triples (x,c,y) où c est un chemin reliant $j(y)$ à $j(x)$ dans une feuille, deux chemins étant équivalents s'ils déterminent la même holonomie. Autrement dit Γ_T est le sous-espace de $T \times G \times T$ formés des triples (x,y,g) tels que $j(x) = \beta(g)$ et $j(y) = \alpha(g)$.

Γ_T est une variété de dimension égale à la codimension de F, les projections source $\alpha : (x,g,y) \to y$ et but $\beta : (x,g,y) \to x$ sont localement des homéomorphismes.

Si $s : U \to \Gamma_T$ est une application continue d'un ouvert assez petit U de T qui est un relèvement de α, alors $\beta\cdot s$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de T. Les homéomorphismes locaux de ce type engendrent le <u>pseudogroupe d'holonomie transverse</u> de F associé à T. Le groupoïde des germes de ses éléments aux divers points de leur source, avec la topologie des germes, est isomorphe à Γ_T.

Signalons encore une autre version de Γ_T (cf. [8]). Le feuilletage F peut être défini par un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ et des submersions $f_i : U_i \to T_i$, où T_i est une variété de dimension égale à la codimension des feuilles, les f_i étant surjectifs à fibres connexes. Les f_i doivent vérifier la condition de compatibilité suivante : pour tout couple (i,j), il existe un homéomorphisme $g_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$ tel que $f_i = g_{ij} \cdot F_j$ sur $U_i \cap U_j$. Soit T l'union disjointe des T_i. Les homéomorphismes locaux g_{ij} engendrent un pseudogroupe de transformations de T, appelé le pseudogroupe d'holonomie de F associé au <u>cocycle de définition</u> (U_i,f_i,g_{ij}). On désignera aussi par Γ_T le groupoïde topologique des germes de ses éléments.

1.3. Isomorphismes locaux

Le groupoïde d'holonomie transverse Γ_T dépend du choix de la transversale T. Pour étudier cette dépendance, il est naturel d'introduire la notion d'isomorphisme suivante (cf. [8]).

Soient Γ et Γ' deux groupoïdes topologiques qui sont les groupoïdes des germes de pseudogroupes d'homéomorphismes locaux d'espaces topologiques T et T' respectivement. On dira que Γ est localement isomorphe à Γ' s'il existe un sous-espace ouvert ϕ de l'espace des germes d'homéomorphismes d'ouverts de T sur ouverts de T', les projections source et but étant des surjections de ϕ sur T et T' respectivement. De plus

$$\phi\ \Gamma\ \phi^{-1} = \Gamma' \quad \text{et} \quad \phi^{-1}\ \Gamma'\ \phi = \Gamma$$

c'est-à-dire, si φ_1 et φ_2 sont deux germes dans ϕ tels que la source de φ_2 soit la source de $\gamma \in \Gamma$ et la source de φ_1 soit le but de γ, alors $\varphi_1\gamma\varphi_2^{-1} \in \Gamma'$, et vice versa.

Par exemple, si U est un ouvert de T rencontrant chaque orbite de Γ, alors Γ est localement isomorphe au sous-groupoïde formés des éléments de source et but dans U. Si Γ et Γ' sont les groupoïdes de germes de tous les homéomorphismes locaux de deux variétés T et T' de même dimension, alors ils sont localement isomorphes. Si G et G' sont des groupes de Lie localement isomorphes, alors les groupoïdes des germes des éléments de G et G' opérant sur eux-mêmes par translation à gauche, sont localement isomorphes.

Il est immédiat de vérifier que les groupoïdes d'holonomie transverse associés à diverses transversales complètes ou à un cocycle de définition de $\mathcal{F}$ sont localement isomorphes entre eux. Par groupoïde d'holonomie transverse de $\mathcal{F}$, on entendra un représentant dans la classe d'isomorphie locale de ces groupoïdes. On peut tirer profit de cette liberté pour choisir un représentant particulièrement simple.

1.4. Exemples

Soit F un feuilletage sur X tel que le feuilletage $\tilde{F}$ induit sur un revêtement galoisien $\tilde{X}$ de X de groupe de Galois H soit donné par une submersion de $\tilde{X}$ sur l'espace des feuilles $\tilde{T}$ de $\tilde{F}$ (qui sera une variété en général non séparée même dans le cas analytique).

Cette situation est vérifiée dans plusieurs cas : feuilletages analytiques de codimension un (cf. [5]), feuilletage transverse à un fibré à fibre compact T (dans ce cas H est le groupe d'holonomie de la connexion plate associée), etc.

Comme H opère sur $\tilde{X}$ en préservant $\tilde{F}$, il opère sur l'espace des feuilles $\tilde{T}$. Un représentant du groupoïde d'holonomie est le groupoïde des germes des éléments de H aux points de $\tilde{T}$.

Un exemple classique de cette situation est le cas d'un feuilletage F muni d'une (G,T)-structure transverse. Ici G est un groupe d'homéomorphisme d'une variété T tel que, si la restriction d'un élément g de G à un ouvert est l'identité, alors g est l'identité. Alors F est défini par des submersions $f_i : U_i \to T$ telles qu'il existe des éléments g_{ij} de G avec $f_i = g_{ij} \circ F_j$ sur $U_i \cap U_j$. On sait (Ehresmann) qu'il existe une submersion D d'un revêtement galoisien $\tilde{X}$ de X dans T (le développement) définissant sur $\tilde{X}$ le feuilletage induit de F avec sa (G,T)-structure transverse. De plus il existe un homomorphisme injectif H du groupe de Galois H de X dans G tel que D soit équivariant. Le sous-groupe H' de G image de H par H est appelé d'habitude le groupe d'holonomie de F. Le groupoïde des germes des éléments de H' aux divers points de T est localement isomorphe au groupoïde d'holonomie de F seulement si le développement induit un isomorphisme de $\tilde{T}$ sur T. Ce sera le cas par exemple si X est compact, T simplement connexe et G préserve une métrique riemanienne sur T. (cf. Thurston [18] ou Blumenthal [1]).

Un cas particulier classique est celui où F est donné sur une variété compacte par une 1-forme fermée ω. Sa classe de cohomologie définit un homomorphisme du groupe fondamental de X dans R dont l'image est le groupe des périodes de ω. Le groupoïde d'holonomie est localement isomorphe au groupoïde des germes aux points de R des translations par les périodes.

Problème. Etant donné un pseudogroupe de transformations d'une variété T de génération finie (dans le sens de J. Plante par exemple, cf. [11]), quand est-il localement isomorphe au pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage sur une variété compacte ?

Par exemple prenons le cas du pseudogroupe engendré par un groupe H de génération finie opérant effectivement sur une variété T, et dont toutes les orbites rencontrent un compact de T.

Si T est compact, il suffit de prendre un feuilletage transverse à une fibration de fibre T et dont l'holonomie est une surjection du groupe fondamental de la base sur H.

Prenons le cas où H est un sous-groupe de génération finie d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N, opérant sur N par translation à gauche. On sait (Malcev) qu'il existe un groupe de Lie nilpotent N' contenant H comme sous-groupe discret cocompact et un homomorphisme h de N' sur N qui est l'identité sur H, et qui est surjectif s'il existe un compact de N rencontrant toutes les orbites de H. La solution s'obtient en faisant le quotient par H du feuilletage de N' par les classes modulo le noyau de h.

Qu'en est-il si N est supposé seulement résoluble ?

1.5. Propriétés et structures transverses

Par définition une notion ou une propriété d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur X est dite transverse si elle peut se définir ou se lire sur n'importe quel représentant de la classe d'isomorphisme local d'un pseudogroupe d'holonomie transverse Γ_T de $\mathcal{F}$.

Par exemple il est clair qu'on a une bijection entre feuilles de $\mathcal{F}$ et orbites du groupoïde Γ_T; elle applique une feuille fermée (resp. localement partout dense, propre ou exceptionnelle) sur une orbite fermée (resp. localement partout dense, propre ou exceptionnelle). Ainsi par exemple la propriété pour une feuille d'être fermée est une propriété transverse. De même si X est compacte, on pourrait voir que les propriétés de croissance des feuilles sont des propriétés transverses (cf.[11]). Dans la correspondance ci-dessus, les groupes d'holonomie des feuilles correspondent aux groupes d'isotropie des points de T. La notion de composante de Novikov pour un feuilletage de codimension un est une notion transverse.

Une structure transverse d'un feuilletage $\mathcal{F}$ est une structure sur une transversale complète T invariante par le pseudogroupe d'holonomie (par exemple une structure différentiable ou analytique, une métrique riemanienne, etc.).

Dès le début de la théorie des feuilletages, on a réalisé que les propriétés transverses étaient les plus importantes. Ainsi la plupart des théorèmes sur les variétés feuilletées sont du type suivant : une certaine propriété transverse implique une propriété de $\mathcal{F}$.

Par exemple le théorème de stabilité de Reeb affirme que si une feuille compacte a un groupe d'holonomie fini, alors toutes les feuilles voisines sont aussi compactes. L'existence d'une structure transverse analytique pour un feuilletage de codimension un sur une variété compacte X implique l'existence d'un élément d'ordre infini dans $\pi_1(X)$. (cf. [5]). L'existence d'une métrique riemanienne transverse pour un feuilletage sur une variété compacte implique que toutes les feuilles ont un revêtement d'holonomie commun (cf. Reinhardt [13]). Citons encore le théorème remarquable de Sacksteder (cf. [14]) qui affirme que sur une variété compacte un feuilletage de classe C^2 sans holonomie est topologiquement conjugué à un feuilletage donné par une forme fermée. En fait la conclusion essentielle est que le groupoïde d'holonomie est le groupoïde des germes aux points du cercle d'un groupe abélien de difféomorphismes du cercle.

Au groupoïde d'holonomie transverse Γ_T d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur X est associé, son espace classifiant $B\Gamma_T$ (cf. § 3) et une application continue de X dans $B\Gamma_T$. Les groupes d'homotopie, d'homologie ou de cohomologie de cet espace classifiant sont des invariants de la structure transverse.

Soit $B\Gamma_q$ le classifiant du groupoïde topologique des germes de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^q$, où q est la codimension de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ est différentiable, on a un diagramme commmutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[drr] & & \\ B\Gamma_T \arrow[rr] & & B\Gamma_q \end{tikzcd}$$

Les classes caractéristiques du feuilletage $\mathcal{F}$, par exemple l'invariant de Godbillon-Vey, proviennent de classes universelles définies dans la cohomologie de $B\Gamma_q$; elles transitent donc à travers la cohomologie de $B\Gamma_T$ et proviennent ainsi d'invariants transverses.

Par exemple dans le cas d'un feuilletage sans holonomie de codimension un, comme plus haut, le théorème de Sacksteder implique que le classifiant de Γ_T est un fibré en cercle sur un tore avec un feuilletage $\mathcal{F}_T$ transverse aux fibres. L'invariant de Godbillon-Vey de $\mathcal{F}$ provient de l'invariant de Godbillon-Vey de $\mathcal{F}_T$ qui est nul d'après un théorème d'Herman [9] ou Wallet [19]. Donc l'invariant de Godbillon-Vey de $\mathcal{F}$ est nul. C'est essentiellement la démonstration de Mizutani-Tsuboï [10]. Il semble bien que l'on ait une situation analogue dans les cas plus généraux où l'on montre l'annulation de l'invariant de Godbillon-Vey.

Signalons que l'on peut définir la cohomologie de Γ_T à valeur dans un faisceau sur lequel opère Γ_T directement sans passer par une construction de l'espace classifiant. Cette définition généralise à la fois la cohomologie d'un espace à valeur dans un faisceau et la cohomologie des groupes discrets (pour plus de détails, cf. [7]). Certains éléments de cette cohomologie apparaissent comme obstruction à la construction de certaines structures géométriques sur $\mathcal{F}$ (cf. [7] et [8]).

D'ailleurs la formule de Thurston pour l'invariant de Godbillon-Vey qui intervient dans tous les calculs s'exprime précisément dans ce cadre. C'est le 2-cocycle sur Γ_T à valeur dans les 1-formes sur T qui associe à deux germes composables g et h la 1-forme égale à $d\log g'(hy) \cdot \log h'(y)$ sur T (identifié à une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$).

2. Γ structures et fibrés Γ-principaux

Dans ce paragraphe, Γ désigne un groupoïde topologique, U l'espace de ses unités, α et β les projections "source" et "but" de Γ sur U.

2.1. Définition de $H^1(X,\Gamma)$

2.1.1. Soit Y un espace topologique, et soit $\{Y_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de Y. Un 1-cocycle à valeur dans Γ défini sur le recouvrement $\{Y_i\}$ est la donnée pour chaque couple (i,j) d'une application continue $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \to \Gamma$ de sorte que si $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, alors $\gamma_{ij}(x)$ est composable avec $\gamma_{jk}(x)$ et $\gamma_{ik}(x) = \gamma_{ij}(x)\gamma_{jk}(x)$. Si $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est un autre recouvrement ouvert de Y et $\gamma_{\alpha\beta}$ est un 1-cocycle défini sur $\{Y_\alpha\}$, alors il est cohomologie au 1-cocycle γ_{ij} si ces deux cocycles sont la restriction d'un 1-cocycle à valeur dans Γ défini sur la réunion de ces deux recouvrements. L'ensemble des classes de cohomologie des 1-cocycles à valeur dans Γ est noté $H^1(Y,\Gamma)$ et ses éléments sont appelés des Γ-structures sur Y dans [5].

Une application continue $f : Y' \to Y$ induit une application $f^* : H^1(Y,\Gamma) \to H^1(Y',\Gamma)$ faisant correspondre à la classe du 1-cocycle γ_{ij} défini sur le recouvrement $\{Y_i\}$ la classe du 1-cocycle $\gamma_{ij} \circ f$ défini sur le recouvrement $\{f^{-1}Y_i\}$ de Y'.

Un feuilletage F de codimension q sur une variété X peut être considérée comme une Γ-structure particulière, où Γ est le groupe des germes de difféomorphismes locaux de R^q, représentée par un 1-cocycle sur un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ tel que les $f_i = \gamma_{ii}$: $U_i \to R^q \subset \Gamma$ soient des submersions. La notion plus générale de Γ-structure a été introduite pour pouvoir toujours définir les images réciproques par les applications continues $f : Y' \to Y$. Typiquement la donnée de la Γ-structure induite sur une feuille L de F par l'inclusion de L dans X est équivalente à la donnée de l'holonomie de L.

Dans la terminologie de A. Connes, un élément de $H^1(Y,G)$, où G est le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage F défini sur X, est une application continue de Y dans l'espace des feuilles de F.

Dans le cas particulier où les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les fibres d'une submersion de X sur B, les éléments de $H'(Y,\mathcal{G})$ correspondent bien aux applications continues de Y dans l'espace des feuilles B.

2.1.2. A tout feuilletage $\mathcal{F}$ sur X est associé canoniquement un élément de $H^1(X,\mathcal{G})$. Il est représenté par le cocycle défini sur le recouvrement ouvert de X formé du seul ouvert X et qui est donné par l'identité de X sur $X \subset \mathcal{G}$ considéré comme espace des unités de $\mathcal{G}$.

De même si Γ_T est le groupoïde d'holonomie transverse défini par des submersions surjectives $f_i : U_i \to T_i$ à fibres connexes comme à la fin de 1.2, les applications $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \Gamma_T$ telles que $f_i(x) = g_{ij}(x) f_j(x)$ forment un 1-cocycle (appelé 1-cocycle de définition de $\mathcal{F}$) qui représente un élément de $H^1(X,\Gamma_T)$.

Le but du § 2 est de montrer que pour tout espace topologique Y, on a une bijection naturelle entre $H^1(Y,\mathcal{G})$ et $H^1(Y,\Gamma_T)$. Il en résultera que les espaces classifiants correspondants ont le même type d'homotopie dans un sens fort (cf. § 3).

2.2. <u>Fibrés Γ-principaux</u>

Comme dans le cas classique des groupes topologiques, les éléments de $H^1(Y,\Gamma)$ correspondent bijectivement aux classes d'iomorphie de fibrés Γ-principaux sur Y. Nous allons d'abord rappeler cette correspondance.

2.2.1. <u>Notation</u>. Si A et B sont des espaces topologiques munis d'applications continues $f : A \to U$ et $g : B \to U$, alors $A \times_U B$ désigne le sous-espace du produit $A \times B$ formé des couples (a,b) tels que $f(a) = g(b)$, muni de la projection $(a,b) \to f(a) = g(b)$ dans U.

Une <u>action à droite</u> de Γ sur un espace Z relativement à une application continue $q : Z \to U$, est une application continue $Z \times_U \Gamma \to Z$ (où γ est muni de la projection but sur U) telle que, si l'image de (z,γ) est notée $z.\gamma$, $(z.\gamma).\gamma' = z.(\gamma\gamma')$, $z.u = z$ si u est une unité et $q(z.\gamma) = \alpha(\gamma)$.

On définit de manière analogue une action à gauche.

2.2.2. Un <u>fibré Γ-principal</u> E de base un espace Y est un espace topologique muni d'une application continue $p : E \to Y$ et d'une action à droite de Γ sur E relativement à une application continue $q : E \to U$. On suppose que Γ opère simplement transitivement dans les fibres de p et que la condition de trivialité locale suivante est satisfaite. Il existe un recouvrement ouvert $\{Y_i\}$ de Y, des sections locales continues $s_i\ U_i \to E$ de p et des homéomorphismes Γ-équivariants $h_i : p^{-1}(Y_i) \to Y_i \times_U \Gamma$ se projetant sur l'identité de Y_i. Ici Y_i est muni de l'application continue $f_i = q \circ s_i$ dans U et γ opère sur (y,γ') par $(y,\gamma')\cdot\gamma = (y,\gamma'\gamma)$.

Les s_i définissent un 1-cocycle γ_{ij} sur le recouvrement $\{Y_i\}$ de Y à valeur dans Γ, où $\gamma_{ij}(x)$ est l'unique élément de Γ tel que $s_j(y) = s_i(y)\gamma_{ij}(y)$. Le choix d'un autre recouvrement et d'autres sections locales conduirait à un cocycle cohomologue.

Réciproquement, étant donné un 1-cocycle $\gamma_{ij} : Y_i \cap Y_j \to \Gamma$, on peut construire un fibré Γ-principal E avec des sections locales s_i qui redonnent le cocycle. On obtient E comme quotient de l'union disjointe de $Y_i \times_U \Gamma$ par la relation d'équivalence qui identifie $(y_i,g_i) \in Y_i \times_U \Gamma$ à $(y_j,g_j) \times Y_j \times_U \Gamma$ si $y_i = y_j = y$ et $g_j = \gamma_{ji}(y)g_i$.

2.2.3. De cette manière on obtient une bijection entre classes d'isomorphismes de fibrés Γ-principaux de base Y et éléments de $H^1(Y,\Gamma)$.

Par exemple avec les notations de 2.1.2, à la G-structure canonique définie par F correspond G lui-même considéré comme fibré G-principal sur X avec la projection but. Si F est donné par un cocycle de définition à valeur dans Γ_T, le fibré Γ_T-principal correspondant est formé de tous les germes d'applications de X dans T obtenus en composant les f_i avec les éléments de Γ_T.

2.3. <u>Equivalence entre groupoïdes</u>.

On pourrait voir directement que l'homomorphisme naturel de Γ_T dans G (cf. 1.2) induit une bijection de $H^1(Y,\Gamma_T)$ sur $H^1(Y,G)$. L'idée de définir une relation d'équivalence entre groupoïdes topologiques analogue à l'équivalence au sens de Morita m'a été indiquée par G. Skandalis et c'est cette présentation que nous suivrons ici.

2.3.1. Soient Γ et Γ' des groupoïdes topologiques avec espaces d'unités U et U' respectivement. Soit ϕ un espace topologique muni d'applications continues $p : \phi \to U$ et $q : \phi \to U'$ et supposons que Γ opère à gauche sur ϕ relativement à p et Γ' à droite sur ϕ relativement à q, ces deux actions commutant entre elles.

Définition. On dit que ϕ définit un homomorphisme (généralisé) de Γ dans Γ' si ϕ est un fibré Γ'-principal de base U et de projection p.

Un homomorphisme ϕ induit, pour tout espace topologique Y, une application $H^1(\phi) : H^1(Y,\Gamma) \to H^1(Y,\Gamma')$ fonctorielle en Y. Cette application fait correspondre à la classe d'isomorphie d'un fibré Γ-principal E sur U la classe d'isomorphie du fibré Γ'-principal $E' = E \times_{\Gamma} \phi$ sur Y (cf. 2.2.4).

En terme de cocycles, la correspondance est construite comme suit. Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de U et des sections locales $s_\alpha : U_\alpha \to \phi$ de p. Tout élément de $H^1(Y,\Gamma)$ peut être représenté par un cocycle $\gamma_{ij} : Y_i \cap Y_j \to \Gamma$ tel que l'image de $\gamma_{ii} : Y_i \to U$ soit contenue dans un ouvert $U_{\tau i}$. L'élément correspondant de $H^1(Y,\Gamma')$ sera représenté par le cocycle $\gamma'_{ij} : Y_i \cap Y_j \to \Gamma'$ défini par la relation

$$\gamma_{ij}(y)\; s_{\tau j}(\gamma_{jj}(y)) = s_{\tau i}(\gamma_{ii}(y))\gamma'_{ij}(y) .$$

Exemple. Soit $h : \Gamma \to \Gamma'$ un homomorphisme continu au sens habituel, c'est-à-dire une application continue de Γ dans Γ', se projetant suivant une application continue $h_o : U \to U'$ commutant avec les projections source (resp. but) et telle que $h(\gamma_1\gamma_2) = h(\gamma_1)h(\gamma_2)$. On prend alors pour ϕ le produit fibré $U \times_{U'} \Gamma'$, où U est muni de l'application $h_o : U \to U'$.

2.3.2. Soit ϕ comme dans la définition précédente. Désignons par ϕ^o le même espace topologique ϕ muni des mêmes applications p et q dans U et U', mais cette fois Γ et Γ' opérant à droite et à gauche respectivement en posant

$$\varphi\cdot\gamma = \gamma^{-1}\cdot\varphi \qquad \text{et} \qquad \gamma'\cdot\varphi = \varphi\cdot\gamma'^{-1} .$$

Définition. On dit que ϕ définit une équivalence de Γ sur Γ' si ϕ^o est aussi un fibré Γ-principal sur U' de projection q.

2.3.3. Proposition. Une équivalence ϕ de Γ sur Γ' induit une bijection de $H^1(Y,\Gamma)$ sur $H^1(Y,\Gamma')$ fonctorielle en Y.

ϕ^o définit une application $H^1(\phi^o)$ de $H^1(Y,\Gamma')$ dans $H^1(Y,\Gamma)$ inverse de $H^1(\phi)$. En effet si E est un fibré Γ-principal de base Y, alors $(E \times_{\Gamma}\phi)\times_{\Gamma'}\phi^o$ est canoniquement isomorphe à E, car $\phi\times_{\Gamma'}\phi^o$ est canoniquement isomorphe à Γ par l'application qui fait correspondre à la classe de (φ_1,φ_2) l'unique élément $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma^{-1}\varphi_1 = \varphi_2$. De même $\phi^o \times_{\Gamma}\phi$ est canoniquement isomorphe à Γ'.

Exemple : Si Γ et Γ' sont deux groupoïdes topologiques formés de germes d'homéomorphismes locaux des espaces T et T', alors l'espace ϕ qui définit un isomorphisme local de Γ et Γ' considéré en 1.3 définit une équivalence de Γ sur Γ'.

2.3.4. Corollaire. Soit F un feuilletage sur X et soit G le groupoïde d'holonomie de F (cf. 1.1) et Γ_T le groupoïde d'holonomie transverse défini par une transversale complète T (cf. 1.2). Alors l'homomorphisme naturel $\Gamma_T \to G$ induit une bijection de $H^1(Y,\Gamma_T)$ sur $H^1(Y,G)$ pour tout espace Y.

En effet, soit $j : T \to X$ l'immersion de T dans X. Posons $\phi = T \times_X G$ le sous-espace de T formé des couples (t,g) tels que $j(t) = \beta(g)$. C'est évidemment un fibré G-principal sur T, et aussi un fibré Γ_T-principal sur X. Donc ϕ définit une équivalence de Γ_T sur G.

3. Classifiants de groupoïdes topologiques

3.1. Le classifiant de Milnor

Sur un espace topologique Y, une Γ-structure est numérable si elle peut être définie par un 1-cocycle défini sur un recouvrement ouvert numérable $\{Y_i\}$ de Y, c'est-à-dire tel qu'il existe une partition de l'unité λ_i telle que $\lambda_i^{-1}]0,1]\subset U_i$. C'est toujours le cas si Y est paracompact.

3.1.1. Théorème (Buffet - Lor [2] et [6]). La construction du joint infini de Milnor donne un fibré Γ-principal universel $E\Gamma \to B\Gamma$, défini par une Γ-structure ω numérable universelle dans la sens suivant. Pour tout espace topologique Y et toute Γ-structure numérable α sur Y, il existe une application continue $f : Y \to B\Gamma$ telle que $f^*(\omega) = \alpha$. Si f_o et f_1 sont deux applications continues de Y dans $B\Gamma$ telles que $f_o^*(\omega) = f_1^*(\omega) = \alpha$, alors il existe une homotopie f_t reliant f_o à f_1 telle que $f_t^*(\omega) = \alpha$, pour tout t.

De ce théorème et de la proposition 2.3.3, on déduit le théorème suivant.

3.1.2. Théorème. Pour toute équivalence ϕ de Γ sur Γ', il existe une application continue $f : B\Gamma \to B\Gamma'$ et une application continue $f' : B\Gamma' \to B\Gamma$ telle que $f^*\omega = \omega'$ et $f'^*\omega = \omega'$. De plus $f' \circ f$ est relié à l'identité de $B\Gamma$ par une homotopie h_t telle que $h_t^*(\omega) = \omega$ pour tout t. Il en est de même pour $f \circ f'$.

3.1.3. Corollaire. Les classifiants BG et $B\Gamma_T$ des divers groupoïdes d'holonomie associés à un feuilletage F (cf. § 1) sont tous homotopiquement équivalents (dans le sens strict précédent).

3.1.4. Corollaire. L'application i de X dans BG classifiant G comme fibré G-principal sur X (cf. 2.1.2) est homotopiquement équivalente à la projection $EG \to BG$.

En effet, d'une manière générale, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E\Gamma \arrow[d] \arrow[r, "q"] & U \arrow[dl, "i"] \\ B\Gamma & \end{tikzcd}$$

où q est l'application relativement à laquelle Γ opère sur $E\Gamma$ et i est telle que $i^{-1}(E\Gamma)$ est isomorphe à Γ comme fibré principal sur U. L'application q est une équivalence d'homotopie, comme on peut le vérifier directement ou en appliquant la propriété universelle.

3.1.5. Corollaire. Supposons que la projection but du groupoïde d'holonomie G de F sur X soit une fibration localement triviale (sa fibre est isomorphe au revêtement d'holonomie L commun à toutes les feuilles), alors l'application i de X dans BG est homotopiquement équivalente à une fibration localement triviale de base BG et fibre L.

En effet, dans ce cas $EG \to BG$ est une fibration localement triviale de fibre L, car c'est vrai pour tout fibré G-principal.

L'hypothèse de 3.15 est vérifiée dans plusieurs cas particuliers intéressants. Par exemple

a) X est compacte et F possède une métrique riemannienne transverse (cf. Reinhardt [13]).

b) les feuilles de F sont transverses aux fibres d'une fibration compacte et le feuilletage est analytique.

c) les feuilles de F sont les trajectoires d'un flot sans orbite fermée (ou plus généralement tel que le groupe d'holonomie de toute orbite fermée est infini).

Comme A. Connes l'a remarqué dans [3], dans ce dernier cas X a le même type d'homotopie que BG, car L est contractile.

Lorsque le revêtement d'holonomie commun L n'est pas contractile, on peut considérer la suite exacte de la fibration $EG \to BG$ ou sa suite spectrale. Au § 4, nous considèrerons le cas des fibrés de Seifert.

3.2. Fibré Γ-principal k-universel

3.2.1. Définition. (cf. Steenrod [17], p. 101). Un fibré Γ-principal est dit k-universel si pour tout complexe simplicial K de dim. $\leq k$, tout sous-complexe L de K et tout fibré Γ-principal E' sur K, alors tout homomorphisme de la restriction de E' à L dans E s'étend en un homomorphisme de E' dans E. L'espace de base B, muni de la Γ-structure ε définissant E, est appelé k-classifiant pour Γ.

Il résulte de cette définition que, si f_o et f_1 sont des applications continues d'un complexe K de dimension $\leq k-1$ dans B telles que $f_o^*(\varepsilon) = f_1^*(\varepsilon)$, alors il existe une homotopie $f_t : K \to B$ telle que $f_t^{"}(\varepsilon) = f_o^*(\varepsilon)$. Toute application de B dans un classifiant $B\Gamma$ de Γ induisant ε est k-connexe.

3.2.2. Définition. Une application continue q d'un espace E dans un espace U est appelée une submersion si, pour tout point e de E, il existe un voisinage ouvert P de e dans $q^{-1}(q(e))$, un voisinage ouvert V de q(e) et un homéomorphisme h de $V \times P$ sur un voisinage ouvert de e tel que $q\, h(v,p) = v$ et $h(q(e),p) = p$. Un tel voisinage est appelé un voisinage produit.

3.2.3. Théorème. Soit $p : E \to B$ un fibré Γ-principal et soit $q : E \to U$ l'application relativement à laquelle Γ opère sur E. Si q est une submersion surjective à fibres (k-1)-connexes, alors le fibré E est k-universel.

Ce théorème est l'analogue du théorème démontré par Steenrod dans [17], p. 101. Sa démonstration est renvoyée en 3.3. Remarquons que l'hypothèse de connexité des fibres est nécessaire pour que E soit k-universel.

3.2.4. Corollaire. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété X tel que les revêtements d'holonomie des feuilles soient (k-1)-connexes. Alors le groupoïde d'holonomie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, considéré comme un fibré $\mathcal{G}$-principal de base X par la projection but est k-universel. Ainsi l'espace X lui-même est k-classifiant et l'application i de X dans $B\mathcal{G}$ est k-connexe.

Le corollaire résulte du théorème car l'application source $\alpha : \mathcal{G} \to X$ (qui joue le rôle de q) est une submersion surjective. Dans l'énoncé du théorème, nous n'avons pas fait d'hypothèse de séparation sur E.

Comme les feuilles sont toujours connexes, l'application $X \to BG$ induit toujours une surjection des groupes fondamentaux. Elle sera 2-connexe si et seulement si l'homomorphisme d'holonomie de chaque feuille est injectif.

3.2.5. Exemples. Dans le feuilletage de Reeb sur S^3, les revêtements d'holonomie des feuilles sont tous contractiles. Donc S^3 est un classifiant pour le groupoïde d'holonomie. La même remarque s'applique à un feuilletage par des courbes ou des surfaces autre que la sphère ou le plan projectif, tel que l'holonomie de chaque feuille soit une représentation injective du groupe fondamental de cette feuille.

D'une manière générale, dans le cas d'un groupoïde Γ de germes d'homéomorphismes d'un espace U, on peut penser au classifiant $B\Gamma$ comme à un espace muni d'un feuilletage F dont les revêtements d'holonomie des feuilles sont contractiles et dont le groupoïde d'holonomie transverse est localement isomorphe à Γ. En effet si la projection $q : E\Gamma \to U$ est une submersion, ses fibres peuvent être considérées comme les feuilles d'un feuilletage sur $E\Gamma$, invariant par l'action de Γ qui opère sur $E\Gamma$ par germes d'homéomorphismes. On obtient donc sur $B\Gamma$ un feuilletage dont les revêtements d'holonomie sont les fibres de q et sont contractiles. Les homotopies $f_t : Y \to B\Gamma$ telles que $f_t^*(\omega) = f_0^*(\omega)$, où ω est la Γ-structure universelle sur $B\Gamma$ (c'est-à-dire F), sont celles qui déplacent les points le long des feuilles seulement.

Reprenons l'exemple 1.4 d'un feuilletage F sur X tel que le feuilletage induit sur un revêtement galoisien de X de groupe H soit donné par une submersion dans l'espace des feuilles $\tilde{T}$. On a vu que H opère sur $\tilde{T}$. Supposons que H opère effectivement et de manière analytique. Un classifiant du groupoïde d'holonomie transverse de F est le fibré de fibre $\tilde{T}$ associé au fibré universel du groupe discret H. Le feuilletage sur le classifiant est obtenu en prenant sur $\tilde{T}$ la topologie discrète (comparer avec Van Est [4]).

3.3. Démonstration du théorème 3.2.3.

Il se déduit facilement de la proposition suivante, qui est bien connue lorsque q est une fibration localement triviale (à comparer avec l'appendice de l'article [16] de G. Segal).

3.3.1. Proposition k. Soit K un complexe simplicial de dimension $\leq k$ et soit L un sous-complexe. Soit $q : E \to K$ une submersion surjective à fibres (k-1)-connexes. Alors toute section continue f_L de q au-dessus de L s'étend suivant une section continue au-dessus de K.

Montrons que cette proposition implique le théorème. Soit $p' : E' \to B'$ un fibré Γ-principal soit $q' : E' \to U$ l'application relativement à laquelle Γ opère sur E'. Les homomorphismes h de fibrés Γ-principaux $E' \to E$ correspondent bijectivement aux sections continues du fibré associé $E' \times_\Gamma E$ de base B' (cf. 2.2.4; on considère que opère à gauche sur E par $\gamma.e = e.\gamma^{-1}$).

Si $s : V \to E'$ est une section de p' au-dessus d'un ouvert V de B, alors la restriction de $E' \times_\Gamma E$ au-dessus de V est isomorphe à $V \times_U E$, l'image réciproque de $q : E \to U$ par l'application $q \circ s$. Donc si q est une submersion à fibres (k-1)-connexes, il en sera de même pour la projection du fibré associé sur B' dont il s'agit de construire une section. Pour cela, on pourra appliquer la proposition.

La proposition (k) elle-même est une conséquence immédiate du lemme suivant énoncé de façon commode pour une démonstration par récurrence.

3.3.2. Lemme (k,n). Soit I^n le cube de dimension n et soit q une submersion surjective de E sur I^n à fibres (k-1)-connexes. Soit f_o une application continue de $\partial(I^n \times I^m)$ dans E telle que $qf_o(x,y) = x$. Si $n+m \leq k$, il existe une application continue $f : I^n \times I^m \to E$ prolongeant f_o et telle que $qf(x,y) = x$.

Montrons que le lemme (k,n), avec m = 0, implique la proposition (k). Soit K^r l'union de L et des simplexes de K de dimension $\leq r$. Supposons par récurrence sur r qu'il existe une section continue f_r au-dessus de K^r prolongeant f_o. Pour construire une section f_{r+1}

au-dessus de K^{r+1} prolongeant f_r, il suffit d'appliquer le lemme (k,r+1) à chaque simplexe de dimension r+1 de $K - L$ (un simplexe est homéomorphe à un cube).

Pour démontrer le lemme, nous aurons besoin du sous-lemme suivant où seule l'hypothèse que q est une submersion intervient.

3.3.3. <u>Sous-lemme</u>. <u>Soit</u> q <u>une submersion de E dans une complexe simplicial K et soit</u> f_o <u>une section continue de q au-dessus d'un sous-complexe L de K. Alors</u> f_o <u>s'étend suivant une section au-dessus d'un voisinage de L dans K</u>.

Le sous-lemme est clair si $f_o(L)$ est contenu dans un voisinage produit $h(V \times P)$, où V est un voisinage de L dans K. En effet f_o est de la forme $f_o(x) = h(x,f'_o(x))$. Soit ρ une rétraction continue sur L d'un voisinage W de L dans V; on définit f sur W par $f(w) = h(w,f'_o(\rho w))$.

En général on peut trouver une suite croissante de sous-polyèdres $L_1 \subset L_2 \subset \ldots$ de L dont la réunion est L de sorte que $f_o(\overline{L_i - L_{i-1}})$ soit contenu dans un voisinage produit $h_i(V_i \times P_i)$. Supposons construite une section f_{i-1} au-dessus d'un sous-polyèdre K_{i-1} contenant L et un voisinage de L_{i-1} dans K. Choisissons un sous-polyèdre W_i de K qui est un voisinage de $\overline{L_i - L_{i-1}}$, qui est contenu dans V_i et assez petit pour que $f_{i-1}(W_i \times K_{i-1}) \subset h_i(V_i \times P_i)$.

On peut construire une section g'_i au-dessus d'un voisinage W'_i de $W_i \cap K_{i-1}$ qui étend $f_{i-1}|W_i \cap K_{i-1}$ comme dans le début de la démonstration. La restriction g''_i de g'_i à un voisinage polyédral W''_i assez petit de $\overline{L_i - L_{i-1}}$ coïncide avec f_{i-1} sur $W''_i \cap K_{i-1}$. On pose $K_i = K_{i-1} \cup W''_i$ et on définit f_i égal à f_{i-1} sur K_{i-1} et à g''_i sur W''_i.

3.3.4. <u>Démonstration du lemme (k,n)</u>. Supposons le lemme (k-1,n) démontré pour $n \leq k-1$. Le lemme (k,0) est évident par l'hypothèse de connectivité. Supposons par récurrence que le lemme (k,r) est vrai pour $r \leq n-1$.

Pour tout $x \in I^n$, l'application f_o restreinte à $\{x\} \times \partial I^m$ s'étend suivant une application continue de $\{x\} \times I^m$ par hypothèse de connectivité. Par le sous-lemme, on peut même trouver un voisinage V de x dans I^n et une application de $V \times I^m$ dans E dont la restriction à $V \times \partial I^m$ est égale à celle de f_o et qui applique $\{v\} \times I^m$ dans $q^{-1}(v)$ pour tout $v \in V$.

On peut donc construire une subdivision en cubes I^n assez petits pour qu'il existe une application g_i de $I_i^n \times I^m$ dans E dont la restriction à $I_i^n \times \partial I^m$ est égale à celle de f_o et qui applique les tranches $\{v\} \times I^m$ dans $q^{-1}(v)$.

Soit S la réunion des faces de dimension $\leq n-1$ des cubes I_i^n. On peut trouver une application f' de $K = S \times I^m \cup I^n \times \partial I^m$ dans E telle que $qf'(s,y) = s$ et qui étende f_o. Il suffit pour cela d'appliquer la proposition $(k-1)$ au fibré sur K image réciproque de E par la projection de K sur I^n.

Pour chaque petit cube I_i^n, construisons une application continue h_i de $Q = \partial(I_i^n \times I^m) \times I \quad I_i^n \times I^m \times \{1\}$ dans E telle que

a) $qh_i(x,y_1t) = x$

b) $h_i(x,y,0) = f'(x,y)$ pour $(x,y) \in \partial(I_i^n \times I^m)$

c) $h_i(x,y,1) = g_i(x,y)$ pour $(x,y) \in I_i^n \times I^m$

d) $h_i(x,y,t) = h_i(x,y,0)$ pour $(x,y) \in I_i^n \times \partial I^m$.

Les conditions b), c) et d) définissent h_i sauf sur $\partial I_i^n \times I^m$. On construit successivement h_i sur le produit par I^m des faces de dimension r de ∂I_i^n en utilisant le lemme (k,r).

D'après le sous-lemme, on peut étendre h_i en une application h_i' dans E d'un voisinage W de Q dans $I_i^n \times I^m \times I$ vérifiant toujours $qh_i'(x,y,t) = x$.

Soit ρ une rétraction de la boîte pleine sur la boîte ouverte Q telle que l'image de ρ soit contenue dans W et que ρ commute avec la projection sur I_i^n. On obtiendra une application continue de $I_i^n \times I^m$ dans E étendant f' restreinte à $\partial(I_i^n \times I^m)$ en composant l'inclusion de $I_i^n \times I^m$ dans $I_i^n \times I^m \times \{0\}$ avec h_i'.

4. Exemples des V-variétés ou orbifolds

4.1. Fibrés de Seifert généralisés et orbifolds

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété différentiable X dont les feuilles sont les fibres d'un fibré de Seifert généralisé de fibre générique une variété compacte L. Cela signifie que toutes les feuilles sont compactes et admettent L comme revêtement d'holonomie commun.

Pour chaque feuille L_o, il existe une boule ouverte $\tilde{U}$ dans $\mathbb{R}^q$, un groupe fini G et un voisinage saturé V de L_o isomorphe au quotient de $\tilde{U} \times L$ par une action diagonale de G opérant sur U effectivement par difféomorphismes et sur L par translations de revêtement. Les feuilles de V correspondent aux quotients des $\{u\} \times L$ et leurs groupes d'holonomie sont isomorphes aux sous-groupes de G laissant fixe les points u correspondants. L'espace des feuilles de V est isomorphe au quotient U de $\tilde{U}$ par G.

Il en résulte que l'espace des feuilles Q de $\mathcal{F}$ est muni d'une structure naturelle de V-variété au sens de Satake [15] ou d'orbifold de dimension q, suivant la terminologie de Thurston [18], chap. 13.

La structure de V-variété sur Q est donnée par un recouvrement ouvert U_i, chaque U_i étant le quotient d'une boule $\tilde{U}_i$ de $\mathbb{R}^q$ par un groupe fini G_i de difféomorphismes. La projection $\pi_i : \tilde{U}_i \to U_i = \tilde{U}_i/G_i$ est appelée une application uniformisante. Si $\tilde{u}_i$ et $\tilde{u}_j$ sont des points de $\tilde{U}_i$ et $\tilde{U}_j$ tels que $\pi_i(\tilde{u}_i) = \pi_j(\tilde{u}_j)$, on suppose qu'il existe un difféomorphisme g_{ji} d'un voisinage de $\tilde{u}_i$ sur un voisinage de $\tilde{u}_j$ tel que $\pi_j \circ g_{ji} = \pi_i$ au voisinage de $\tilde{u}_i$ (le germe de g_{ji} en $\tilde{u}_i$ est bien défini par cette condition).

Ainsi se donner une structure de V-variété sur Q revient à se donner sur la réunion disjointe $\tilde{Q}$ des $\tilde{U}_i$ le groupoïde Γ_Q des germes de difféomorphismes engendré par les germes des éléments des G_i et ceux des g_{ji}.

Il est donc naturel de considérer une structure d'orbifold ou de V-variété sur un espace topologique Q comme la donnée d'un groupoïde Γ_Q de germes de difféomorphismes d'une variété $\tilde{Q}$ ayant la propriété que localement Γ_Q est formé des germes des éléments d'un groupe fini de difféomorphismes, et d'un isomorphisme de l'espace des orbites de Γ_Q sur Q. Le groupoïde Γ_Q n'est défini qu'à isomorphisme local près au sens du § 1.

Si la V-variété Q est l'espace des feuilles de F, alors Γ_Q est le groupoïde d'holonomie transverse de F. D'ailleurs toute V-variété peut être obtenue de cette manière (voir plus bas).

A tout point $x \in Q$ est associé une classe de conjugaison $\{G_x\}$ d'un sous-groupe fini du groupe linéaire $Gl(q,R)$: si $\pi : \tilde{U} \to U = \tilde{U}/G$ est une application uniformisante et $\tilde{x}$ est tel que $\pi(\tilde{x}) = x$, alors on associe à x la classe de conjugaison du sous-groupe de $Gl(q,R)$ formé des différentielles en $\tilde{x}$ des éléments de G fixant $\tilde{x}$. Ceci permet de définir sur Q une stratification différentiable naturelle. Les strates sont les composantes connexes des classes d'équivalence définies par la relation : $x \sim y$ si $\{G_x\} = \{G_y\}$.

La V-variété Q est orientable (resp. localement orientable) si Γ_Q préserve une orientation de $\tilde{Q}$ (resp. une orientation locale). Une V-variété localement orientable n'a pas de strate
un.

Les notions géométriques sur Q telles que métrique riemannienne, formes différentielles, fibrés, etc. correspondent aux notions analogues sur $\tilde{Q}$ invariante par Γ_Q (cf. Satake [15]). Par exemple le fibré tangent à Q est le fibré tangent à $\tilde{Q}$ sur lequel Γ_Q opère par la différentielle. Le fibré des repères sur Q correspond au fibré $Gl(q,R)$-principal des repères sur $\tilde{Q}$ sur lequel Γ_Q opère librement. Le quotient est un fibré de Seifert de base Q et de fibre générique $Gl(q,R)$.

Les propriétés homotopiques de l'orbifold Q s'expriment le plus naturellement à l'aide du classifiant BQ du groupoïde Γ_Q. Le but de ce paragraphe est d'illustrer ce fait à l'aide de quelques exemples.

4.2. Propriétés homotopiques du classifiant BQ

4.2.1. Les groupes d'homotopie de BQ. Les groupes d'homotopie de l'orbifold Q sont par définition les groupes d'homotopie de BQ. Cette définition coïncide avec celle de Van Est (voir son exposé à ce colloque). En particulier il est facile de vérifier que le groupe fondamental ainsi défini est le même que celui défini par Thurston ([18], chap. 13) qui utilise la notion de revêtement universel.

A toute orbifold Q on peut faire correspondre son revêtement d'orientation $\hat{Q}$ à deux feuillets; les strates de $\hat{Q}$ sont de codimension ≥ 2. On peut donner une présentation de $\pi_1(BQ)$ en terme du groupe fondamental de la partie régulière de Q et des strates de codimension un et deux (cf. Thurston [18] ou l'exposé de Van Est à ce colloque lorsqu'il n'y a pas de strates de codimension un).

D'une manière générale, posons $Q_{(n)}$ l'ouvert de Q qui est réunion des strates de codimension $\leq n$. C'est naturellement une sous-orbifold de Q. Par position générale, en utilisant la définition de $\pi_i(BQ)$ comme classes d'homotopie des Γ_Q-structures avec point base sur la sphère S^i, on vérifie que : <u>L'application</u> $BQ_{(n)} \to BQ$ <u>induite par l'inclusion induit un homomorphisme de</u> $\pi_i(BQ_{(n)}) \to \pi_i(BQ)$ <u>qui est un isomorphisme pour</u> $i < n$ <u>et une surjection pour</u> $i = n$.

4.2.2. Construction explicite de BQ. Nous allons construire un modèle pour BQ qui sera un fibré de Seifert généralisé de base Q dont la fibre générique est contractile (mais de dimension infinie si Q n'est pas une variété), ce qui est bien en accord avec les considérations de 3.2.5. La fibre au-dessus d'un point x de Q sera isomorphe au classifiant BG_x du sous-groupe fini G_x associé à x.

Soit N un entier positif et soit $L^{(N)}$ la variété de Stiefel $GL(q+N)/Gl(N)$; c'est un fibré $Gl(q)$-principal N-universel. Soit $EQ^{(N)}$ le fibré sur $\tilde{Q}$ associé au fibré $Gl(q)$-principal $\tilde{P}$ des repères sur $\tilde{Q}$ et de fibre $L^{(N)}$. Le groupoïde Γ_Q opère librement sur $\tilde{P}$, donc aussi sur $EQ^{(N)}$. Soit $BQ^{(N)}$ le quotient de $EQ^{(N)}$ par cette action, p la projection de $EQ^{(N)}$ sur $BQ^{(N)}$ et q sa projection sur Q. Comme $EQ^{(N)}$ est un fibré Γ_Q-principal sur $BQ^{(N)}$ à fibre (N-1)-connexe, $BQ^{(N)}$ est un N-classifiant pour Γ_Q d'après 3.2.3. De plus $BQ^{(N)}$ est une projection de BQ sur Q qui donne un fibré de Seifert de base Q à fibre générique contractile.

Désignons par $|Q|$ l'espace topologique sous-jacent à Q.

4.2.3. Proposition. L'application $p : BQ \to |Q|$ induit un isomorphisme en cohomologie rationnelle.

Cela résulte de ce que la suite spectrale de Leray de l'application p est triviale. En effet le faisceau sur Q défini par le préfaisceau $U \to H^*(p^{-1}(U), \mathbb{Q})$ est nul en degré positif et isomorphe à $\mathbb{Q}$ en degré 0, car si $p^{-1}(U) = \tilde{U} \times_G L$, alors $H^*(p^{-1}(U)) = H^*(\tilde{U} \times L)^G = H^*(\tilde{U})$ puisque $L = \lim L^{(N)}$ est contractile.

Le même argument montre que p induit un isomorphisme en cohomologie à coefficient dans un corps de caractéristique première à l'ordre des groupes de stabilité G_i.

4.2.4. Classe fondamentale. L'espace topologique sous-jacent à une V-variété Q localement orientable est une variété homologique rationnelle. Toute orientation de Q définit donc une classe fondamentale dans l'homologie rationnelle de Q en dimension q. Sa restriction à un ouvert U de Q quotient de $\tilde{U}$ par G est l'image de la classe fondamentale de $\tilde{U}$ divisée par l'ordre de G.

Par l'isomorphisme ci-dessus, cette classe fondamentale est l'image d'une classe d'homologie rationnelle de dimension q de BQ qui sera notée [Q].

La cohomologie réelle de Q (ou de BQ) est isomorphe à la cohomologie de de Rham de Q, calculée à l'aide des formes différentielles sur Q, c'est-à-dire des formes différentielles sur Q invariantes par Γ_Q. En effet le faisceau des germes de formes différentielles sur Q est une résolution fine du faisceau constant $\mathbb{R}$.

4.2.5. Exemple. Prenons le cas d'une orbifold Q de dimension 2 dont l'espace topologique sous-jacent est une surface compacte S orientée de genre g, ayant une strate de codimension 0, à savoir le complémentaire dans S d'un nombre fini de points $p_1, \ldots, p_k$ qui forment les strates de codimension 2. Au voisinage de p_i, Q est le quotient d'un disque dans $\mathbb{R}^2$ par l'action d'un groupe fini de rotations C_{n_i} d'ordre n_i.

Le type d'homotopie de BQ est décrit comme suit. Au bouquet $\vee BC_{n_i}$ des espaces classifiants BC_{n_i} pour les groupes cycliques C_{n_i}, on attache une surface de genre g percée d'un trou à l'aide d'une application de son bord dont la classe d'homotopie est la somme des générateurs des $\pi_1(BC_{n_i})$.

On voit par exemple que $H_2(BQ;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et que l'application de $H_2(BQ;\mathbb{Z})$ dans $H_2(S;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est la multiplication par le p.p.c.m. μ des n_i. Ainsi μ fois la classe fondamentale donne un générateur de $H_2(BQ;Z)$.

Pour $r > 2$, $H_r(BQ;\mathbb{Z})$ est nul pour r pair et isomorphe à la somme des C_{n_i} pour r impair.

Lorsque $g = 0$, BQ est simplement connexe si $k = 1$ ou si $k = 2$ et n_1 est premier à n_2.

4.3. Classes caractéristiques

Par définition, pour un groupe de Lie G, un fibré G-principal $\tilde{P}$ sur Q est un fibré G-principal P sur Q muni d'une action de Γ_Q (qui commute avec l'action à droite de G).

On peut toujours construire une connexion sur P invariante par l'action de Γ_Q. Soit I(G) l'algèbre des polynômes sur l'algèbre de Lie de G invariante par l'action adjointe de G. La construction de Chern-Weil fait correspondre à tout élément de I(G) une forme différentielle sur $\tilde{Q}$ construite à l'aide de la courbure de cette connexion, invariante par Γ_Q. On obtient donc un homomorphisme de I(G) dans la cohomologie de de Rham de Q (cf. 4.2.3), donc un homomorphisme caractéristique

$$I(G) \to H^*(Q;\mathbb{R}) .$$

D'autre part au fibré P sur Q correspond un fibré G-principal $\bar{P}$ au sens ordinaire sur BQ : avec les notations de 4.2.2, $\bar{P}$ est le quotient par l'action de Γ_Q du fibré sur EQ image réciproque de $\tilde{P}$ par la projection de EQ sur $\tilde{Q}$. Ses classes caractéristiques sont des éléments de la cohomologie de BQ.

Via l'isomorphisme entre la cohomologie réelle de BQ et Q, ces deux notions de classes caractéristiques se correspondent.

Plus précisément, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I(G) & \longrightarrow & H^*(Q;\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(BG;\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^*(BQ;\mathbb{R}) \end{array}$$

où la flèche horizontale du bas est induite par l'application classifiante du fibré P, la première flèche verticale est l'homomorphisme de Chern-Weil universel (c'est un isomorphisme si G est compact) et la deuxième flèche verticale est l'isomorphisme 4.2.3.

En effet une connexion Γ_Q-invariante sur $\tilde{P}$ donne une connexion sur le fibré $P^{(N)}$ sur $BQ^{(N)}$, quotient par l'action de Γ_Q du fibré sur $EQ^{(N)}$ image inverse de $\tilde{P}$ par la projection sur $\tilde{Q}$. Les images des éléments de I(G) par la construction de Chern-Weil sont les formes différentielles basiques sur le fibré de Seifert $BQ^{(N)}$ qui correspondent aux formes différentielles invariantes sur Q construites précédemment.

4.3.2. Caractéristique d'Euler d'une orbifold

Pour une orbifold compacte Q, Satake a défini dans [15] une caractéristique d'Euler $\chi(Q)$. C'est le nombre rationnel

$$\chi(Q) = \sum_S (-1)^{\dim S} \chi(S)/|G_S|$$

où S parcourt les strates de Q et $|G_S|$ est l'ordre du groupe correspondant à la strate S. De plus, Satake a démontré l'analogue de la formule de Gauss-Bonnet pour les orbifolds.

Les considérations qui précèdent montrent que $\chi(Q)$ est égal à l'évaluation sur la classe fondamentale $[Q]$ (cf. 4.2.4) de la classe d'Euler entière du fibré sur BQ correspondant au fibré tangent de Q (on suppose Q orientée pour simplifier).

Les nombres de Pontryagin de Q peuvent aussi être obtenu de cette manière; on voit donc que ce sont des nombres rationnels.

4.3.3. Caractéristique d'Euler d'un fibré de Seifert classique

En général les fibrés de Seifert généralisés X de base Q et fibre générique L correspondent aux fibrés sur $\tilde{Q}$ de fibre L muni d'une action libre de Γ_Q. Le fibré correspondant de fibre L sur BQ a son espace total homotopiquement équivalent à X (cf. 3.1.5).

Prenons le cas d'un fibré de Seifert classique X en cercles orientés de base une orbifold orientée Q de dimension 2 comme dans l'exemple 4.2.4. On peut lui associer un nombre rationnel obtenu en évaluant la classe d'Euler $e \in H^2(BQ;\mathbb{Z})$ du fibré en cercle correspondant sur BQ sur la classe fondamentale $[Q]$ de Q. Ce nombre coïncide avec la caractéristique d'Euler définie par Thurston dans [18], Chap. 13.

La classe d'Euler entière e redonne également les invariants de Seifert des fibres exceptionnelles. En effet, au-dessus d'un point de Q correspondant à une fibre exceptionnelle de X de multiplicité n, la fibre de $BQ \to Q$ est isomorphe au classifiant BC_n du groupe cyclique d'ordre n. La restriction de e à cette fibre donne un élément de $H^2(BC_n;\mathbb{Z})$ égal à un multiple m du générateur qui permet de calculer l'invariant de Seifert de la fibre exceptionnelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.A. Blumenthal, Transversely homogeneous foliations, Ann. Inst. Fourier 25 (1979), 143-158.

[2] J.P. Buffet et J.C. Lor, Une construction d'un universel pour une classe assez large de Γ-structures, C.R. Adad. Sc. Paris 270 (1970), 640-642.

[3] A. Connes, A survey of foliations and operator algebras, preprint, I.H.E.S., 1981.

[4] W.T. Van Est, Sur le groupe fondamental des schémas analytiques de variétés à une dimension, Ann. Inst. Fourier 30 (1980), 45-77.

[5] A. Haefliger, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comm. Math. Helv. 32 (1958), 248-329.

[6] ------------, Homotopy and Integrability, Manifolds, Amsterdam, Springer Lecture notes, 197 (1970), 133-163.

[7] ------------, Differentiable cohomology, Cours donné au CIME, 1976.

[8] ------------, Some remarks on foliations with minimal leaves J. of differential geometry, 15 (1980), 269-284.

[9] M.R. Herman, The Godbillon-Vey invariant of foliations by planes of T^3, Geometry and Topology, Conf. Rio de Janeiro, Springer Lecture Notes 597 (1976), 294-307.

[10] T. Mizutani and T. Tsuboï, The Godbillon-Vey class of codimension one foliations without holonomy, Topology 19 (1980), 45-55.

[11] J. Plante, Foliations with measure preserving holonomy, Ann. of Math. 102 (1975), 327-361.

[12] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Act. Scient. et Ind., Hermann, Paris (1952).

[13] B. Reinhart, Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math. 69 (1959), 119-132.

[14] R. Sacksteder, Foliations and Pseudogroups, Amer. J. Math., 87 (1965), 79-102.

[15] I. Satake, The Gauss-Bonnet Theorem for V-manifolds, J. of the Math. Soc. of Japan 9 (1957), 464-492.

[16] G. Segal, Classifying spaces related to foliations, Topology 17 (1978), 367-382.

[17] N. Steenrod, The topology of Fiber Bundles, Princeton University Press, 1951.

[18] W. Thurston, The Geometry and Topology of Three-Manifolds. Mimeographed notes, Princeton University.

[19] G. Wallet, Nullité de l'invariant de Godbillon-Vey d'un tore, C.R. Acad. Sc., Paris, 283 (1976), 821-823.

André HAEFLIGER

Université de Genève

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 GENEVE 24