C. Roger

Cohomologie (p,q) des feuilletages et applications

Astérisque, tome 116 (1984), p. 195-213
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__195_0>

COHOMOLOGIE (p,q) DES FEUILLETAGES ET APPLICATIONS.

C. Roger

1. GÉNÉRALITÉS

Soit V une variété différentiable de dimension (m + n) munie d'un feuilletage de codimension n et de classe C^∞.

Le fibré tangent et le fibré normal à $\mathcal{F}$ seront notés $\tau(\mathcal{F})$ et $\nu(\mathcal{F})$ respectivement. On a alors les décompositions suivantes :

$$T(V) = \tau(\mathcal{F}) \oplus \nu(\mathcal{F}) \qquad T^*(V) = \tau^*(\mathcal{F}) \oplus \nu^*(\mathcal{F})$$

$$\Lambda^k(V) = \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p\leq n, q\leq m}} \Lambda^p \nu^*(\mathcal{F}) \otimes \Lambda^q \tau^*(\mathcal{F})$$

On pose alors par définition : $\Lambda^{p,q}(V) = \Lambda^p \nu^*(\mathcal{F}) \otimes \Lambda^q \tau^*(\mathcal{F})$.

Ce sont les formes pures de type (p,q) sur la variété feuilletée $(V,\mathcal{F})$.

Si on se place dans un ouvert distingué pour avec un système de coordonnées locales $(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)$, $\nu^*(\mathcal{F})$ est engendré par $d x_1,\dots,d x_n$; $\tau^*(\mathcal{F})$ est engendré par des formes $\theta_1,\dots,\theta_m$ où $\theta_j = dy_j + \sum_{i=1}^{n} t_i^j \, d x_i$ où les t_i^j sont des fonctions.

Une forme pure de type (p,q) s'écrit alors

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq m}} \omega_{i_1,\ldots,i_p\; j_1,\ldots,j_q}\, d x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d x_{i_p} \wedge \theta_{j_1} \wedge \ldots \wedge \theta_{j_q}$$

Il est alors facile de voir que la différentielle extérieure se décompose en une somme d'applications homogènes pour le bidegré : $d = d' + d'' + \partial$, d' d'' et ∂ étant de bidegrés (0,1), (1,0) et (2,-1) respectivement.

Si f est une fonction, $df = d'f + d''f$ et $d\theta_j = d'\theta_j + \partial\theta_j$ pour $j = 1 \ldots m$. On remarque que ∂ est identiquement nulle si le feuilletage admet un feuilletage supplémentaire.

On déduit de la relation $d^2 = 0$: $d''\partial + \partial d'' = 0$ $\partial^2 = 0$ $d'd'' + d''d' = 0$, $d''^2 + d'\partial + \partial d' = 0$, $d'^2 = 0$.

Pour tout p compris entre 0 et n, on a donc un complexe :

$$\Lambda^{p,o}(V) \xrightarrow{d'} \Lambda^{p,1}(V) \xrightarrow{d'} \ldots \quad \Lambda^{p,m-1}(V) \xrightarrow{d'} \Lambda^{p,m}(V) \to 0$$

La cohomologie (p,q) de la variété V est alors le $q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de ce complexe, noté $H^{p,q}(V)$. (*)

Ces groupes ont été définis et étudiés pour la première fois par Bruce REINHART en 1957 ([20]).

On peut alors définir les faisceaux des p-formes feuilletées Ω^p (que certains auteurs appellent "basiques"), pour $0 \leq p \leq n$.

Pour tout ouvert $U \subset V$, $\Omega^p(U) = \{\omega \in \Lambda^{p,o}(U) / d'\omega = 0\}$

Dans un système de coordonnées locales du type ci-dessus, ω est une section locale de Ω^p si $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n.} \omega_{i_1,\ldots i_p}(x_1,\ldots,x_n) d x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d x_{i_p}$

Si p = 0, on a les fonctions feuilletées, qui sont donc localement constantes sur les feuilles.

Pour tout $0 \leq p \leq n$, les faisceaux des formes pures de type (p,q) constituent une résolution du faisceau Ω^p par des faisceaux fins.

$$0 \to \Omega^p \to \Lambda^{p,0} \xrightarrow{d'} \Lambda^{p,1} \quad \ldots\ldots \quad \Lambda^{p,m} \to 0$$

D'où le résultat suivant dû à I-Vaisman [23].

(*) ces groupes de cohomologie sont indépendants du choix de la décomposition $T(V) = \mathcal{T}(\mathcal{F}) \oplus \mathcal{V}(\mathcal{F})$

Théorème : $H^{p,q}(V) = H^q(V; \Omega^p)$

D'autre part pour une forme feuilletée ω, on a $d\omega = d''\omega$. Le complexe des formes feuilletées est donc une résolution du faisceau constant :

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^o \to \Omega^1 \ldots \to \Omega^n \to 0$$

D'où la suite spectrale de Hodge (appelée ainsi par analogie avec le cas analytique complexe) $E_1^{p,q} = H^{p,q}(V)$ convergeant vers la cohomologie de De Rham de V.

Les faisceaux Ω^p n'étant pas en général acycliques, cette suite spectrale n'est pas triviale.

Dans le cas où $n = 1$, on a simplement une suite exacte longue. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage simple induit par une submersion $f : V \to B$, les faisceaux Ω^p sont les images réciproques par f des faisceaux de formes différentielles sur B, et la suite spectrale est alors la suite spectrale de Leray de la submersion f.

Ces cohomologies ont été retrouvées indépendamment par divers auteurs (Sarkaria, Rummler [22]).

Dans [22] l'auteur définit pour un feuilletage de codimension n, la cohomologie "relative" $H^*_{\mathcal{F}}(V)$.

Il est facile de voir que l'on a $H^{n+r}_{\mathcal{F}}(V) = E_2^{n,r}$

Les groupes $E_2^{p,o}$ sont parfois appelés groupes de cohomologie "basiques" (voir par exemple Molino [18]) : dans le cas d'un feuilletage simple, ce sont simplement les groupes de cohomologie de la base.

Il est facile de voir que la cohomologie (p,q) est multiplicative : le produit extérieur des formes induit un cup-produit :

$$H^{p,q}(V) \times H^{p',q'}(V) \longrightarrow H^{p+p',q+q'}(V)$$

Cette multiplication a été utilisée par certains auteurs (Rummler [22], Kamber [14] pour mettre en dualité la cohomologie basique $E_2^{p,o}$ et les groupes $E_2^{o,q}$)

On peut également considérer la cohomologie (p,q) à supports compacts : Ω_c^p est le faisceau des p formes qui s'écrivent localement sous la forme $f^*(\omega)$ où f est une application distinguée du feuilletage et ω une p forme à support compact de $\mathbb{R}^n$.

On pose alors $H_c^{p,q}(V) = H^q(V, \Omega_c^p)$ et on a une suite spectrale analogue.

Ce point de vue a été utilisé par Haefliger dans [10] et se trouve implicitement dans les travaux de A. Connes [3] (voir plus loin).

Il faut signaler en outre que les techniques considérées ici s'adaptent au cadre de la théorie des Q-atlas et des Q-F atlas transverses (voir R. Barre [1], J. Pradines [19], C. Cumenge [4]).

Les fibrés feuilletés :

Les fibrés feuilletés ont été introduits pour la première fois par P. Molino ([18]) par des méthodes de connexions; dans le cadre de cet article, on peut définir un G.fibré feuilleté (G étant un groupe de Lie) comme donné par un 1-cocycle de fonctions feuilletées à valeurs dans G. Les fibrés vectoriels associés à un G fibré feuilleté sont appelés fibrés vectoriels feuilletés. Si E est un fibré vectoriel feuilleté de base V, son espace total est muni naturellement d'un feuilletage de dimension m, dont les feuilles sont des revêtements des feuilles de $\mathcal{F}$.

Si L est une feuille de $\mathcal{F}$, alors la restriction du fibré à L $E_{|L} \to L$ est un fibré plat, le cocycle de définition étant localement constant sur L.

Exemple fondamental :

Considérons un cocycle définissant le feuilletage $\mathcal{F}$ sur V : on a un recouvrement de V par des ouverts U_i, des submersions $f_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n$, des difféomorphismes locaux $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \subset V_j \longrightarrow f_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$ vérifiant

$f_i(x) = \gamma_{ij}(f_j(x))$. On peut lui associer le 1-cocycle suivant :

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

$g_{ij}(x) = D_{f_{j(x)}} \gamma_{ij}$. Le fibré vectoriel associé est alors $\nu(\mathcal{F})$ le fibré normal au feuilletage.

Si on a un fibré vectoriel feuilleté E, on peut considérer les p formes feuilletées à valeurs dans E, et les groupes de cohomologie qui s'en déduisent :

$$H^{p,q}(V;E) = H^q(V; \Omega^p(E)).$$

Dans cet ordre d'idées, le groupe $H^{0,1}(V)$ peut s'interpréter comme le groupe des classes d'équivalence de fibrés en droites feuilletés et orientés (c'est le groupe de Picard du féuilletage, voir [21] chap. III).

La suite spectrale de Leray en cohomologie (p,q) :

Nous allons d'abord définir les fibrés dans la catégorie des variétés feuilletées.

Soit V une variété de dimension n munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension p. On considère le groupe des difféomorphismes de V vérifiant $f^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et on note $D_{\mathcal{F}}(V)$ la composante connexe de l'identité dans ce groupe. Si on a une variété M de dimension m munie d'un feuilletage $\mathcal{F}'$ de codimension q et sur cette variété un 1-cocycle de fonctions feuilletées à valeurs dans le groupe $D_{\mathcal{F}}(V)$, alors l'espace total E du fibré de fibre V et de base M est muni naturellement d'un feuilletage $\overline{\mathcal{F}}$ de codimension (p+q).

Indiquons brièvement la construction de ce feuilletage :

Soient (V_k, h_k) $h_k : V_k \to \mathbb{R}^p$ des cartes pour

(V_i, f_i) $f_i : U_i \to \mathbb{R}^q$ des cartes pour '

$g_{ij} : U_i \cap U_j \to D_{\mathcal{F}}(V)$ le 1-cocycle feuilleté.

E est alors obtenu à partir de la somme disjointe des $U_i \times V$ quotientée par les identifications

$$(x,y) = (x, g_{ij}(x).y) \text{ si } x \in U_i \cap U_j$$

Pour tout i, $U_i \times V$ est recouvert par les $U_i \times V_k$ et les submersions $f_i \times h_k : U_i \times V_k \to \mathbb{R}^{q+p}$ déterminent un feuilletage de codimension (q+p) sur $U_i \times V$, soit $\mathcal{F}_i$.

L'application $(x,y) \to (x,g_{ij}(x).y)$ de $U_i \cap U_j \times V$ dans lui-même conjugue $\mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j \times V}$ $\mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j \times V}$ grâce au fait que g_{ij} est localement constante sur les feuilles et $g_{ij}(x) \in D_{\mathcal{F}}(V)$.

Le problème est alors de calculer la cohomologie (p,q) de E à partir des cohomologies (p,q) de M et de V.

Soit Ω^r le faisceau des r-formes feuilletées sur E, $V \to E \xrightarrow{\pi} M$ le fibré considéré. Nous allons étudier la suite spectrale de Leray de cette fibration pour le faisceau Ω^r. On a :

$$E_2^{u,v} = H^u(M, R^v\pi_*(\Omega^r)) \Longrightarrow H^{u+v}(E;\Omega^r) = H^{r,u+v}(E)$$

Le faisceau dérivé $R^v \pi_*(\Omega^r)$ vérifie :

$$R^v \pi_*(\Omega^r)(U) = H^v(\pi^{-1}(U);\Omega^r)$$

Si U est un ouvert trivialisant pour le fibré E, on a $\pi^{-1}(U) = U \times V$ et le feuilletage induit est un feuilletage produit. Il est alors clair que le faisceau Ω^r se décompose sur l'espace produit :

$$\Omega^r = \bigoplus_{r_1+r_2=r} \Omega_1^{r_1} \hat{\oplus} \Omega_2^{r_2}$$

$\Omega_1^{r_1}$ désignant les r_1 formes feuilletées sur U et $\Omega_2^{r_2}$ les r_2 formes feuilletées sur V.

D'où : $H^v(\pi^{-1}(U),\Omega^r) = \bigoplus_{\substack{v_1+v_2=v\\ r_1+r_2=r}} H^{v_1}(U,\Omega_1^{r_1}) \otimes H^{v_2}(V,\Omega_2^{r_2})$

Si de plus U est un ouvert distingué pour le feuilletage $\mathcal{F}'$, on a :

$$H^{v_1}(U,\Omega_1^{r_1}) = 0 \text{ pour } V_1 > 0$$

$$H^o(U,\Omega_1^{r_1}) = \Omega_1^{r_1}(U) \text{ et donc :}$$

$$H^v(\pi^{-1}(U);\Omega^r) = \bigoplus_{r_1+r_2=r} \Omega_1^{r_1}(U;H^{r_2,v}(V))$$

Tout point de M ayant un système fondamental de voisinages distingués pour $\mathcal{F}'$ et trivialisant pour le fibré, on peut déterminer la fibre du faisceau $R^v\pi_*(\Omega^r)$:

$$R^v\pi_*(\Omega^r)(x) = \bigoplus_{r_1+r_2=r} \Omega^{r_1}(x) \otimes H^{r_2,q}(V)$$

On peut donc écrire :

$$E_2^{u,v} = \bigoplus_{r_1+r_2=r} H^{r_1,u}(M,H^{r_2,v}(V)) \Rightarrow H^{r,u+v}(E)$$

Dans le cas particulier où r = o, on aura :

$$H^{o,u}(M,H^{o,v}(V)) \Rightarrow H^{o,u+v}(E)$$

Le soin de détailler les cas particuliers suivant les valeurs respectives de p et de q est laissé au lecteur (Al. Kaceimi [13] a traité l'un de ces cas).

Exemples de calculs explicites :

Ces groupes sont en général difficiles à calculer explicitement (hormis quelques cas triviaux) et ce sont souvent des espaces vectoriels de dimension infinie sur $\mathbb{R}$. Il faut remarquer ici que les $H^{p,q}(V)$ sont des invariants fins du feuilletage $\mathcal{F}$; ils sont invariants par conjugaison, mais non en général par homotopie.

Soit $V = \mathbb{T}^2$ et $\mathcal{F}_\alpha$ le feuilletage par des droites de pente irrationnelle α. On a alors les résultats suivants :

1. Si α n'est pas un nombre de Liouville alors

   $H^{o,1}(V) = H^{1,1}(V) = \mathbb{R}$ (Heitsch [12])

2. Si α est un nombre de Liouville alors $H^{o,1}(V) \simeq H^{1,1}(V)$ est un espace vectoriel de dimension infinie (voir [21] ch.III)

3. Si on calcule avec des formes différentielles de classe C^r pour $r \geq 2$ (le groupe $H^{o,1}(V)$ correspondant classifie alors les fibrés en droites feuilletés de classe C^r) alors $H^{o,1}(V)$ est de dimension infinie quel que soit α irrationnel (voir [21] ch.III)

Le lecteur friand d'exemples explicites pourra se reporter aux travaux d'El Kaceimi [13] et de X. Masa.

2. DÉFORMATIONS INFINITÉSIMALES DES FEUILLETAGES

L'étude des déformations infinitésimales des structures géométriques a été inaugurée par Kodaira et Spencer [15] les premiers exemples concernant les feuilletages sont dus à Heitsch ([12]). R. Hamilton [11] a mis au point une théorie générale permettant de traiter de la déformation des feuilletages. Nous rappelons brièvement ces constructions.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie soit $G^m(E)$ la grassmannienne des m plans de E. On peut alors construire un fibré vectoriel $I\,G^m(E) \to G^m(E)$ dont la fibre en $B \in G^m(E)$ est l'espace $\Lambda^2(B;E/B)$ des applications bilinéaires alternées : $B \times B \to E/B$.

Soit maintenant $G^m(TV) \to V$ le fibré en grassmanniennes sur V. On peut alors faire la construction ci-dessus pour chacune des fibres $G^m(T_xV)$ et on obtient ainsi un fibré : $I\,G^m(TV) \to V$.

On notera $\mathcal{S}^m(V)$ la variété de Fréchet des sections C^∞ de ce fibré : si $S \in \mathcal{S}^m(V)$, alors pour tout $x \in V$, $s(x)$ est une application bilinéaire alternée de $B_x \times B_x$ dans $T_xV/_{B_x}$ où B_x est un m-plan de T_xV.

On notera $\mathcal{G}^m(V)$ la variété des sections de $G^m(TV)$.

On peut définir maintenant une application différentiable :

$$Q : \mathcal{G}^m(V) \longrightarrow \mathcal{S}^m(V)$$

$Q(S)(x)$ pour $S \in \mathcal{G}^m(V)$ et $x \in V$ étant l'application bilinéaire de $S(x) \times S(x)$ dans $T_xV/_{S(x)}$ donnée par :

$$Q(S)(x)(X,Y) = [X,Y] \bmod S(x)$$

$$Z : \mathcal{G}^m(V) \longrightarrow \mathcal{S}^m(V) \quad \text{la section nulle}$$

Il est maintenant naturel de définir l'espace des feuilletages de dimension m sur V $\mathcal{F}^m(V)$, par :

$$\mathcal{F}^m(V) = \{ S \in \mathcal{G}^m(V) / Z(S) = Q(S) \}$$

On va s'intéresser aux feuilletages de V modulo conjugaison; si $\mathcal{F}$ est un feuilletage fixé et $\mathcal{D}(V)$ le groupe des difféomorphismes de V, on a l'application :

$$P : \mathcal{D}(V) \longrightarrow \mathcal{G}^m(V) \qquad P(f) = f^*(\mathcal{F})$$

le feuilletage conjugué de $\mathcal{F}$ par le difféomorphisme f.

D'où le <u>complexe de déformation non linéaire de $\mathcal{F}$</u>

$$\mathcal{D}(V) \xrightarrow{P} \mathcal{G}^m(V) \underset{Z}{\overset{Q}{\rightrightarrows}} \mathcal{S}^m(V)$$

qui vérifie $\operatorname{Im} P \subset \ker Q = \mathcal{F}^m(V)$

La stabilité différentiable de $\mathcal{F}$ est alors équivalente à l'exactitude de cette suite au voisinage de $\mathcal{F}$.

En considérant les espaces tangents à ces variétés de Fréchet et les applications linéaires tangentes, on obtient le <u>complexe de déformation linéarisé</u> :

$$T_{Id}\mathcal{D}(V) \xrightarrow{T_{Id}P} T_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^m(V) \xrightarrow{T_{\mathcal{F}}Q - T_{\mathcal{F}}Z} T_{Z(\mathcal{F})}\mathcal{S}^m(V)$$

On peut identifier ces espaces tangents à des objets connus

$T_{Id}\mathfrak{D}(V) = \mathfrak{A}(V)$ l'algèbre de Lie des champs tangents à V

$T_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^m(V) = \Lambda^1(\tau(\mathcal{F}); TV_{/\tau(\mathcal{F})}) = \Lambda^{o,1}(\nu(\mathcal{F}))$

$T_{Z(\mathcal{F})}\mathcal{S}^m(V) = \Lambda^2(\tau(\mathcal{F}); TV_{/\tau(\mathcal{F})}) = \Lambda^{o,2}(\nu(\mathcal{F}))$

Il est alors facile de voir que l'on a $T_{Id}P = d'o\,\pi$ où $\pi : \mathfrak{A}(V) \longrightarrow \Lambda^{o,o}(\nu(\mathcal{F}))$ est la projection naturelle sur le fibré normal, et que $T_{\mathcal{F}}Q - T_{\mathcal{F}}Z = d'$.

Le complexe linéarisé s'écrit donc :

$$\mathfrak{A}(V) \xrightarrow{\pi} \Lambda^{o,o}(\nu(\mathcal{F})) \xrightarrow{d'} \Lambda^{o,1}(\nu(\mathcal{F})) \xrightarrow{d'} \Lambda^{o,2}(\nu(\mathcal{F}))$$

L'obstruction à la stabilité de $\mathcal{F}$, linéarisée, est donc le groupe de cohomologie $H^{o,1}(V;\nu(\mathcal{F}))$. Ce groupe peut s'interpréter comme l'espace tangent en $\mathcal{F}$ à la "variété" des feuilletages modulo conjugaison, ou encore comme l'espace des déformations infinitésimales de $\mathcal{F}$.

R. Hamilton donne ensuite des conditions analytiques suivant lesquelles la nullité de $H^{o,1}(V;\nu(\mathcal{F}))$ implique la stabilité du feuilletage : il montre en particulier qu'un feuilletage dont l'espace des feuilles est séparé et dont la feuille générique vérifie $H^1(L;\mathbb{R}) = 0$ est stable (théorème de Reeb-Thurston global). Une autre application des méthodes de Hamilton est due à N. Desolneux-Moulis [5].

A. Lichnérowicz ([16]) a étudié les déformations infinitésimales de l'algèbre de Lie $T(\mathcal{F})$ des champs de vecteurs tangents au feuilletage. D'après la théorie générale des déformations du crochet d'une algèbre de Lie A (due à Gerstenhaber), le groupe de cohomologie $H^2(A;A)$ classifie les déformations infinitésimales de la structure de A. Lichnérowicz a calculé $H^2(T(\mathcal{F}); T(\mathcal{F}))$: le groupe $H^{o,1}(V;\nu(\mathcal{F}))$ est en facteur direct dans ce groupe.

Ce résultat peut être généralisé en s'inspirant des techniques de Gelfand, Fuks et Lozik ([7], [17]) pour étudier la cohomologie des algèbres de Lie des champs tangents à une variété : on l'obtient comme limite d'une suite spectrale faisant intervenir la cohomologie de la variété et la cohomologie de l'algèbre formelle associée à l'algèbre de Lie des champs tangents. Dans le cas de $T(\mathcal{F})$ l'algèbre formelle associée est la suivante :

$$\mathfrak{A}^m_{m+n} = \left\{ \sum_{i=1}^{m+n} f_i(x_1,\dots,x_{m+n}) \frac{\partial}{\partial x_i} \;/\; f_i \in \mathbb{R}[[x_1,\dots,x_{m+n}]],\ f_i = o \text{ pour } i > m. \right\}$$

Soit $\mathcal{A}^m_{m+n}(o) \subset \mathcal{A}^m_{m+n}$ la sous algèbre d'isotropie.

Elle opère naturellement sur $\mathbb{R}^m$ via sa partie linéaire : on notera $\underline{\mathbb{R}}^m$ le $\mathcal{A}^m_{m+n}(o)$-module obtenu.

La suite spectrale convergeant vers la cohomologie de $T(\mathcal{F})$ à coefficients dans elle même est alors la suivante :

$$E_2^{p,q} = H^p(V;\Omega^o) \otimes H^q(\mathcal{A}^m_{m+n}(o);\ \underline{\mathbb{R}}^m)$$

On peut calculer ces groupes dans les basses dimensions, ce qui permet de retrouver les résultats de Lichnérowicz

$$H^o(\mathcal{A}^m_{m+n}(o);\ \underline{\mathbb{R}}^m) = 0 \qquad H^1(\mathcal{A}^m_{m+n}(o);\ \underline{\mathbb{R}}^m) = \mathbb{R}^n$$

D'où $H^2(T(\mathcal{F});\ T(\mathcal{F})) = E_2^{1,1} \oplus \operatorname{Ker}(E_2^{o,2} \longrightarrow E_2^{2,1})$ avec

$$E_2^{1,1} = H^1(V;\ \Omega^o(\nu(\mathcal{F}))) = H^{o,1}(V;\nu(\mathcal{F})).$$

3. COHOMOLOGIE (p,q), ESPACES CLASSIFIANTS ET CLASSES CARACTÉRISTIQUES

La cohomologie (p,q) étant évidemment fonctorielle pour les applications transverses aux feuilletages, il est légitime de se demander si on peut construire une cohomologie universelle sur l'espace classifiant $B\Gamma_n$ des feuilletages de codimension n. On peut étendre le problème et construire une théorie de coefficients pour les cohomologies des espaces classifiants de groupoïdes (voir [9] et [21]).

Soit Γ_n le groupoïde des germes de difféomorphismes de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ et

$\Gamma_n \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}^n$ les projections source et but. Si F est un faisceau sur $\mathbb{R}^n$, F_x désignant les germes de sections de F en x, on dira que F est un Γ_n-faisceau si pour tout germe $\gamma \in \Gamma_n$ on a un isomorphisme :

$$\gamma_* : F_{\alpha(\gamma)} \longrightarrow F_{\beta(\gamma)} \quad \text{vérifiant } (\gamma_1 \circ \gamma_2)_* = \gamma_{1_*} \circ \gamma_{2_*}$$

et $Id_* = Id$.

Si $\mathcal{F}$ est une Γ_n-structure sur la variété V, on peut aisément construire le faisceau image réciproque $\mathcal{F}^*(F)$.

<u>Exemple</u> : Si Ω^p désigne le faisceau des p formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$, alors le changement de variables $\gamma_* : \Omega^p_{\alpha(\gamma)} \longrightarrow \Omega^p_{\beta(\gamma)}$ munit ^{p} d'une structure de Γ_n-faisceau. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage, $\mathcal{F}^*(\Omega^p)$ est alors le faisceau des p formes différentielles feuilletées sur V.

On peut définir une théorie cohomologique $H^*(B\Gamma_n;F)$ (par les méthodes de l'algèbre homologique, voir [21]) qui a les bonnes propriétés de fonctorialité : il existe un morphisme induit $\mathcal{F}^* : H^*(B\Gamma_n;F) \longrightarrow H^*(V;\mathcal{F}^*(F))$.

Si F est un faisceau constant muni d'une action triviale, on retrouve la cohomologie usuelle de $B\Gamma_n$. Dans le cas particulier des formes feuilletées, $\mathcal{F}^*$ induit un morphisme de suites spectrales :

$$\begin{array}{ccc}
H^q(B\Gamma_n;\Omega^p) & \longrightarrow & H^{p,q}(V) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
H^{p+q}(B\Gamma_n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^{p+q}(V,\mathbb{R})
\end{array}$$

La relation entre les groupes de cohomologie (p,q) et les classes caractéristiques du feuilletage a été mise en évidence dans un cas particulier par P. Molino ([18]), puis en toute généralité dans le travail fondamental de F. Kamber et P. Tondeur (voir par exemple [14]).

Nous rappelons ici brièvement les principaux résultats de ce travail (le langage et les techniques utilisées sont toutefois différents de ceux de [14]) et de celui de l'auteur concernant l'espace classifiant $B\Gamma_n$([21] chapitre IV).

Les classes caractéristiques de Bott-Haefliger proviennent de deux types de classes.

- <u>Classes de type base</u> :

L'invariant fondamental est celui défini par Molino dans [18] que nous appellerons classe d'Atiyah-Molino. Si E est un fibré vectoriel feuilleté, et $\mathcal{G}\ell(E)$ le fibré en algèbres de Lie associé, la classe d'Atiyah-Molino am(E) est un élément du groupe $H^{1,1}(V;\mathcal{G}\ell(E))$. La construction donnée par Molino consiste à prendre sur E une connexion adaptée au feuilletage; am(E) est alors la classe de cohomologie de la partie de type (1,1) de la forme de courbure de cette connexion ([18] p.205).

Dans le cas particulier des feuilletages de codimension 1, la suite spectrale de Hodge se réduit à la suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H^1(V;\mathbb{R}) \longrightarrow H^{o,1}(V;\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} H^{1,1}(V;\mathbb{R}) \longrightarrow H^2(V;\mathbb{R}) \to \cdots$$

Alors $H^{o,1}(V;\mathbb{R}) = H^{o,1}(V,\mathbb{R}_+^*)$ (via le logarithme) n'est autre que le groupe de Picard du feuilletage. On peut montrer alors que pour un fibré en droites E, $\varphi\,[E] = \mathrm{am}\,[E]$ et $\mathrm{am}(E_1 \otimes E_2) = \mathrm{am}(E_1) + \mathrm{am}(E_2)$ ([21] chapitre III).

La classe d'Atiyah-Molino est alors la seule obstruction à la platitude du fibré.

Si $E = \nu(\mathcal{F})$, on a alors la classe d'Atiyah-Molino du feuilletage, $\mathrm{am}(\mathcal{F})$, qui est dans $H^{1,1}(V;\mathfrak{gl}(\nu(\mathcal{F})))$. Pour tout $p \leq n$, la multiplicativité de la cohomologie (p,q) permet de définir $\mathrm{am}(\mathcal{F})^p \in H^{p,p}(V;\otimes\mathfrak{gl}(\nu(\mathcal{F})))$. Si Φ est un polynome invariant de degré p dans $I^p(GL(n))$, on pose :

$$\mathrm{am}_\Phi(\mathcal{F}) = \Phi^*(\mathrm{am}(\mathcal{F})^p) \in H^{p,p}(V)$$

On obtient ainsi les classes caractéristiques du type base :
$\Phi \longrightarrow \mathrm{am}_\Phi(\mathcal{F})$ est un homomorphisme de $I^*(GL(n))$ dans $H^{**}(V)$. L'image de $\mathrm{am}_\Phi(\mathcal{F})$ dans le terme $E_\infty^{p,p}$ de la suite spectrale de Hodge donne la partie de type (p,p) de la classe de Pontryagin correspondant à Φ par l'homomorphisme de Chern-Weil.

Toutes ces classes de type base existent au niveau universel. L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ induit naturellement un Γ_n-faisceau par l'action $\gamma.a = \mathrm{Ad}(D(\gamma)).a$; on a donc le groupe de cohomologie $H^{1,1}(B\Gamma_n;\mathfrak{gl}(n))$ qui contient la classe d'Atiyah-Molino universelle. On peut donner une description très explicite de celle-ci en termes de cochaînes ou d'extensions de faisceaux (voir [21], chapitre IV)

- Classes de type fibre :
Ce sont des classes de $H^{o,*}(V)$, qui proviennent de la cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n)$.

On peut définir une classe $[C] \in H^{o,1}(V;\ GL(n))$: dans les cochaines associées à un recouvrement $\mathcal{U}$: $\{U_i\}$ de V, d'un 1 cocycle (γ_{ij}) définissant le feuilletage, cette classe est celle du cocycle $C \in C^1(\mathcal{U};\Omega^o(GL(n)))$ vérifiant

$$C_{ij}(x) = D_{f_j(x)}\gamma_{ij}(x) \quad \text{pour } x \in U_i \cap U_j.$$

On peut alors construire un homomorphisme caractéristique :

$$C : H^*(\mathfrak{gl}(n),\ O(n)) \longrightarrow H^{o,*}(V)$$

Un théorème bien connu de Van Est montre que $H^*(\mathfrak{gl}(n),O(n)) = H^*_c(GL(n))$, la cohomologie continue du groupe de Lie $GL(n)$. Si u est une classe de $H^q(\mathfrak{gl}(n),O(n))$, on notera encore u la cochaine continue $GL(n)^q \to \mathbb{R}$ qui lui correspond par l'isomorphisme de Van Est.

On fait alors le produit de la classe $[C]$ par elle même q fois, on obtient $[C]^q$ dans $H^{o,q}(V;GL(n)^q)$; u induit alors $u_*[C]^q$ dans $H^{o,q}(V)$. On pose par définition :

$$C(u) = u^*([C]^q)$$

Cet homomorphisme existe aussi au niveau universel, de telle façon que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^{o,q}(V) & & H^{o,q}(B\Gamma_n) \arrow[ll] \\ & H^q(\mathfrak{gl}(n),O(n)) \arrow[ul, "C"] \arrow[ur, "\bar{C}"'] & \end{tikzcd}$$

Ces classes de type fibre peuvent se restreindre à une feuille et donnent alors les invariants du fibré normal restreint à une feuille qui est un fibré plat.

Les classes de Bott-Haefliger du feuilletage proviennent de la cohomologie de l'algèbre $WO(n)$ (voir [2]). Une suite spectrale converge vers cette cohomologie :

$$E_1^{p,p+q} = H^q(\mathfrak{gl}(n),O(n)) \otimes I^p(GL(n)) \Rightarrow H^*(WO(n))$$

La classe provenant de $u_i \otimes c_j$, pour $u_i \in H^q(\mathfrak{gl}(n);O(n))$ et $c_j \in I^p(GL(n))$ est notée $u_i\, c_j$. J. Vey a déterminé une base de $H^*(WO(n))$ en terme des $u_i\, c_j$ (voir [8]).

On peut alors démontrer le résultat suivant ([14] et [21] chapitre IV pour le cas universel).

<u>Théorème</u> : La classe de Bott-Haefliger correspond à $u_i\, c_j$ dans $H^{2p+q}(V;\mathbb{R})$ provient par la suite spectrale de Hodge de la classe $C(u_i).a\,m_{[c_j]}(\mathcal{F}) \in H^{p,p+q}(V)$. Un résultat analogue est valable pour le classifiant $B\Gamma_n$.

Remarque 1 : Tous ces résultats peuvent s'étendre au cas des classes caractéristiques d'un fibré vectoriel feuilleté quelconque sur V, ou encore au cas des Γ-feuilletages pour des groupoïdes plus généraux : Dans [21], le cas de $\overline{\Gamma}_n$ (correspondant aux feuilletages à fibré normal trivialisé) est traité en détail.

Remarque 2 : Il n'est pas difficile de montrer que l'application

$C : H_c^*(GL(n)) \longrightarrow H^{o,*}(B\Gamma_n)$ est injective : c'est une conséquence du théorème de Matsushima sur l'injectivité de la cohomologie continue dans la cohomologie discrète d'un groupe de Lie réductif. On en déduit alors que les classes $u_i\ c_j$ sont toutes non triviales au niveau de $E_1^{p,p+q} = H^{p,p+q}(B\Gamma_n)$. D. Fuks ([6]) et J. Petro ont annoncé une démonstration de l'injectivité de l'homomorphisme caractéristique : $H^*(WO(n)) \longrightarrow H^*(B\Gamma_n)$.

3. LES C*ALGÈBRES DES FEUILLETAGES ET LES FIBRES FEUILLETES :

Dans ses travaux sur les feuilletages, A. Connes utilise la théorie des algèbres normées pour avoir une définition raisonnable de l'algèbre des fonctions sur l'espace quotient d'un feuilletage (il est bien connu que dans de nombreux cas il n'existe pas de fonctions continues non constantes sur l'espace des feuilles).

Rappelons la construction de la C^*-algèbre de Connes ([3]).

On considère le groupoïde l'holonomie du feuilletage, noté G (cet objet a été introduit pour la première fois par Ch. Ehresmann) : un élément de G est un chemin γ contenu dans une feuille, d'origine $x = S(\gamma)$ et d'extrémité $y = r(\gamma)$. Deux chemins γ et γ' de mêmes origines et extrémités étant équivalents dans G si le lacet $\gamma^{-1} \circ \gamma'$ a une holonomie triviale.

G est une variété différentiable de dimension $(2m + n)$.

Pour une feuille L et un point x fixé dans L, la projection :

$r : G_x = \{\gamma \in G \ /\ s(\gamma) = x\} \to L$ n'est autre que le revêtement d'holonomie de la feuille L. On notera parfois $G_x = \tilde{L}$.

Le groupe d'holonomie du feuilletage en x est alors $G_x^x = r^{-1}(x) \cap S^{-1}(x)$.

On définit ensuite les demi-densités sur G : pour $x \in V$ $\Omega_x^{1/2}$ est l'espace des applications $\Lambda^m\ \tau_x(\mathcal{F}) \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}$ vérifiant $\rho(\lambda v) = |\lambda|^{1/2}\ \rho(v)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$\Omega_\gamma^{1/2} = \Omega_x^{1/2} \otimes \Omega_y^{1/2}$.

On considère l'espace $C^\infty_c(G,\Omega^{1/2})$ des fonctions à support compact sur G à valeurs dans les demi densités.

L'opération $(f * g)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1)g(\gamma_2)$ définit un produit de convolution et l'involution donnée par $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$ fait de $C^\infty_c(G,\Omega^{1/2})$ une algèbre complexe involutive.

Pour tout point $x \in V$, L étant la feuille passant par x, on va définir une représentation :

$$\pi_x : C^\infty_c(G,\Omega^{1/2}) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(G_x))$$

Pour $f \in C^\infty_c(G,\Omega^{1/2})$ et $\xi \in L^2(G_x)$, $\gamma \in G_x$, on pose :

$$\pi_x(f)(\xi)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1)\,\xi(\gamma_2).$$

On vérifie aisément que

$$\pi_x(f)(\xi) \in L^2(G_x) \quad \text{et que} \quad \pi_x(f_1 * f_2) = \pi_x(f_1) \circ \pi_x(f_2)$$

Un élément $\gamma \in G$ de source x et d'extrémité y induit une isométrie naturelle $L^2(G_x) \to L^2(G_y)$ et un isomorphisme entre π_x et π_y. La C^*algèbre du feuilletage, notée $C^*(V,\mathcal{F})$ est alors obtenue par complétion de $C^\infty_c(G,\Omega^{1/2})$ pour la norme

$\| f \| = \sup_{x \in V} \|\pi_x(f)\|$. Dans le cas d'un feuilletage simple $C^*(V,\mathcal{F})$ s'identifie à $C_o(B) \otimes \mathcal{K}$ où $C_o(B)$ est la C^*algèbre des fonctions continues à valeurs complexes nulles à l'infini sur B, et $\mathcal{K}$ est la C^*algèbre des opérateurs compacts (voir [3] p. 42). $C^*(V,\mathcal{F})$ est donc un bon substitut de l'algèbre des fonctions sur l'espace des feuilles.

Nous allons montrer maintenant comment les fibrés feuilletés fournissent des modules projectifs sur cette C^*algèbre : heuristiquement, un fibré feuilleté est une représentation linéaire du groupoïde d'holonomie; les sections de ce fibré donnent donc un module sur l'algèbre des fonctions sur le groupoïde d'holonomie.

Soit $E \to V$ un fibré feuilleté complexifié et $\mathbb{E}$ sa fibre type.

Pour toute feuille L, $E_{|L} \to L$ est alors un fibré vectoriel plat de fibre $\mathbb{E}$ et de groupe structural le groupe d'holonomie G^x_x via la représentation

$$\varphi_E : G_x^x \to GL(\mathbb{E})(x \in L \text{ quelconque})$$

Si on relève ce fibré sur le revêtement d'holonomie par la projection $r : G_x \to L$, il se trivialise : $r^*(E|_L) \approx G_x \times \mathbb{E}$. Ceci permet d'interpréter l'espace $S(L,E)$ des sections L^2-intégrables du fibré E restreint à la feuille L, en terme des fonctions sur G_x. Plus précisément, on a une action de G_x^x sur l'espace $L^2(G_x,\mathbb{E})$ définie par :

$$f \in L^2(G_x,\mathbb{E}),\ g \in G_x^x,\ \gamma \in G_x, \text{ alors } g.f(\gamma) = \varphi_E(g).f(\gamma g^{-1})$$

On a d'autre part une action de $C_c(G,\Omega^{1/2})$ sur $L^2(G_x,\mathbb{E})$ définie comme ci-dessus par :

$$\pi_x(h)(f)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} h(\gamma_1) f(\gamma_2)$$

Un calcul simple permet alors d'établir que les représentations π_x commutent à l'action de G_x^x et induisent donc une représentation :

$$\pi_x : C_c^\infty(G,\Omega^{1/2}) \to \mathcal{L}\ (S(L,E))$$

Si on a un élément γ de source x et de but y, il induit des isomorphismes canoniques $G_y \to G_x$ donné par $\eta \to \eta \circ \gamma$ et $G_y^y \to G_x^x$ donné par $\theta \to \gamma \circ \theta \circ \gamma^{-1}$. Au fibré feuilleté E est associé une représentation $\varphi_E(\gamma) \in GL(\mathbb{E})$.

On en déduit un isomorphisme :

$$T_\gamma : L^2(Gx;\mathbb{E}) \to L^2(Gy;\mathbb{E})$$

défini par $T_\gamma(f)(\eta) = \varphi_E(\gamma).[f(\eta.\gamma^{-1})]$

Cet isomorphisme commute à la représentation π_x :

on a $T_\gamma \circ \pi_x = \pi_y \circ T_\gamma$

Il commute également à l'action des groupes d'holonomie :

$$T_\gamma(g.f) = (\gamma \circ g \circ \gamma^{-1}).T_\gamma f \text{ pour } f \in L^2(Gx;\mathbb{E}) \text{ et } g \in G_x^x.$$

Ceci nous donne un isomorphisme canonique, noté encore T_γ :

$$T_\gamma : \operatorname{Inv}_{G_x^x} L^2(Gx;\mathbb{E}) \longrightarrow \operatorname{Inv}_{G_y^y} L^2(Gy;\mathbb{E})$$

On a donc défini à partir du fibré feuilleté E, un champ d'espaces de Hilbert sur la variété feuilletée (V,) (au sens de [3] p. 56) : l'espace de Hilbert associé à chaque feuille L est S(L,E). On obtient donc un C^*-module, noté $\tilde{E}$, sur la C^*algèbre $C^*(V,)$.

Dans le cas où le feuilletage $\mathfrak{F}$ admet une mesure transverse invariante, le groupe d'holonomie G_x^x est moyennable ce qui permet de définir une projection :

$$\Pi_x : L^2(G_x;\mathbb{E}) \longrightarrow L^2(G_x,\mathbb{E})$$

$$\Pi_x(f)(\gamma) = \int_{G_x^x} \varphi_E(g).f(\gamma g^{-1})d\mu_x$$ où μ_x est la mesure

invariante sur G_x^x. Alors $\mathrm{Im}(\Pi_x) = S(L,E)$ et $\Pi_x^2 = \mathrm{Id}$.

Les applications Π_x déterminent donc un projecteur sur la C^*algèbre $C^*(V,\mathfrak{F})$, d'où un élément du groupe de K-théorie $K_o(C^*(V;\mathfrak{F}))$. On peut donc interpréter géométriquement ce dernier groupe : il contient le groupe de Grothendieck engendré par les fibrés vectoriels feuilletés, au moins quand le feuilletage possède une mesure transverse.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. BARRE : De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques. Ann. Inst. Fourier, 23 (1973).

2. R. BOTT : Lectures on characteristic classes and foliations. Lectures Notes in Mathematics n° 279.

3. A. CONNES : A Survey of foliations and operator algebras. Preprint IHES. Janvier 1981.

4. C. CUMENGE : Cohomologie de l'espace des feuilles d'un feuilletage. Thèse de 3me cycle, Univ. Paul Sabatier (1981).

5. N. DESOLNEUX-MOULIS : Familles à un paramètre de feuilletages proches d'une fibration. Astérisque 80, pp. 77 à 84.

6. D. FUKS : Comp-Rendus de l'Académie des Sciences.

7. I. GELFAND et D. FUKS : Cohomologies of the Lie Algebra of vector fields on a manifold. Funct. Anal. 4 (1970).

8. C. GODBILLON : Cohomologies d'algèbres de Lie de champs formels. Séminaire Bourbaki (1972).

9. A. HAEFLIGER : Differentiable Cohomology. Cours donné au CIME (1976).

10. A. HAEFLIGER : Some remarks on foliations with minimal leaves. Journal Diff. Geometry 15 (1980) pp. 269-284.

11. R. HAMILTON : Deformation theory of foliations. Preprint Cornell University (1977).

12. L.HEITSCH : A Cohomology for foliated manifolds.
Bulletin A.M.S.

13. Al. KACEIMI : Thèse de 3me cycle, Lille 1980.

14. F. KAMBER et P. TONDEUR : Foliated bundles and characteristic Classes.
Lecture Notes in Mathematics n° 493.

15. KODAIRA et D. SPENCER : Multifoliate structures.
Annals of Mathematics 74, n° 1 (1961).

16. A. LICHNEROWICZ : Algèbres de Lie attachées à un feuilletage.
Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. 1 (pp. 45 à 76).

17. M. LOZIK : On cohomologies of Lie algebras of vector fields with non trivial coefficients. Funct. Anal. 6 (1972).

18. P. MOLINO : Feuilletages et classes caractéristiques.
Symposia mathematica, Vol. X (1972).

19. J. PRADINES : Sur l'équivalence transverse des feuilletages. Journées de géométrie transverse, Paris VII (1979).

20. B. REINHART : Foliated manifolds with bundle-like metrics.
Annals of Maths. 69 (1959).

21. C. ROGER : Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages. Thèse, Université de Paris XI (1976).

22. H. RUMMLER : Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts.
Comment. Math. Helv. 54 (1979).

23. I. VAISMAN : Cohomology and differential forms.
Dekker.

C. Roger
Faculté des Sciences
Mathématiques
Ile du Saulcy

57000 METZ
