Astérisque

JOSIANE LEHMANN-LEJEUNE

Cohomologies sur le fibré transverse à un feuilletage

Astérisque, tome 116 (1984), p. 149-179

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__149_0>

COHOMOLOGIES SUR LE FIBRÉ TRANSVERSE À UN FEUILLETAGE

Josiane LEHMANN-LEJEUNE

INTRODUCTION

On sait l'intérêt porté actuellement à la suite des travaux de Gelfand-Fuks à la cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres de Lie. Soit L une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie ; les k-cochaînes C sur L sont les applications k-linéaires alternées de L^k dans L, les 0-cochaînes s'identifiant aux éléments de L ; on définit l'opérateur cobord ∂ en posant :

$$\partial C(X_o,\dots,X_k) = \sum_{0\leqslant i\leqslant k} (-1)^i \left[X_i, C(X_o,..,\hat{X}_i,\dots,X_k)\right]$$

$$+ \sum_{0\leqslant i<j\leqslant k} (-1)^{i+j} C(\left[X_i,X_j\right],X_o,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)$$

où $X_i \in L$, $0 \leqslant i \leqslant k$ et $\hat{}$ désigne l'omission. On définit les espaces de cohomologie correspondants $H^k(L)$; les 1-cocycles sont les dérivations de L, i.e. les applications D de L dans L telles que, quels que soient X et $Y \in L$:

$$D(\left[X,Y\right]) = \left[D(X),Y\right] + \left[X,D(Y)\right] ;$$

les 1-cocycles exacts sont les dérivations intérieures i.e. les applications de L dans $L : X \to \left[Y,X\right]$ où $Y \in L$.

Dans [7], A. LICHNEROWICZ a considéré l'algèbre de Lie L_F des automorphismes infinitésimaux d'un feuilletage F sur une variété W, i.e. l'algèbre de Lie des champs de vecteurs X sur W tels que, pour tout champ de vecteurs Y tangent aux feuilles, $\left[X,Y\right]$ est encore tangent aux feuilles et a montré en particulier que, quel que soit le feuilletage, $H^1(L_{\mathcal{F}}) = 0$.

Dans cet article, on définit sur le fibré transverse V à un feuilletage de codimension p sur une variété W, une structure 0-déformable (cf. [4]) J de rang p telle que $J^2 = 0$ et, quels que soient les champs de vecteurs X et Y sur V, $[JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] + J^2[X,Y] = 0$. Pour tout ouvert Ω de V, on considère $L_J(\Omega)$, algèbre de Lie des champs de vecteurs X sur Ω tels que la dérivée de Lie de J par rapport à X soit nulle. i.e., pour tout champ de vecteurs Y sur $\Omega, [X,JY] = J[X,Y]$; dans $L_J(\Omega)$, on retrouve les relevés canoniques dans V des automorphismes infinitésimaux du feuilletage sur W.

Pour tout $x \in V$, il existe un ouvert $U \ni x$ tel que $\dim H^1(L_J(U)) = 1$ (théorème 4). Lorsque le feuilletage est une fibration, $\dim H^1(L_J(V)) = 1$ (théorème 7). Lorsque W est le tore T^2 feuilleté par des droites à pente irrationnelle α, $\dim H^1(L_J(V)) = 4$, (théorème 8). Les démonstrations des théorèmes font apparaître que la dimension de $H^1(L_J(V))$ est d'autant plus grande qu'il y a, sur W, peu d'automorphismes infinitésimaux du feuilletage, définis globalement sur W, transverses aux feuilles.

Dans la dernière partie, on rappelle l'existence, comme pour toute structure 0-déformable, d'un opérateur de cohomologie d_J sur les formes différentielles sur V à valeurs scalaires.

I - ALGÈBRES DE LIE SUR LE FIBRÉ TRANSVERSE À UN FEUILLETAGE

Soit W une variété, connexe, paracompacte, de dimension m et de classe C^∞. Tous les éléments introduits sont supposés de classe C^∞.

On suppose W munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension p ; on note V le fibré transverse à $\mathcal{F}$, $T(V)$ (resp. $T(W)$) le fibré tangent à V (resp. W), π l'application canonique de V sur W , π' l'application linéaire tangente, π_1 la projection canonique de $T(W)$ sur V.

Soient $x \in V$ et $y = \pi(x)$; la fibre de V au-dessus de y est un espace vectoriel V_y dont l'espace tangent en x, T_xV_y , est isomorphe à V_y par un isomorphisme canonique $j_x : V_y \to T_x(V_y)$.

On définit un champ de vecteurs Z sur V et une 1-forme J sur V à valeurs dans $T(V)$ en posant, pour tout $x \in V$ et pour tout champ de vecteurs X sur V :

$$(1) \qquad Z_x = j_x(x) \ , \qquad (JX)_x = j_x(\pi_{1y}(\pi'_x(X_x))) \ .$$

On vérifie immédiatement que $J^2 = 0$ et que J est partout de rang p.

Considérons, sur W, un ouvert $\hat{U}$ (resp. $\hat{U}'$) de coordonnées locales $(u_1,\ldots,u_m)$ (resp. $(u'_1,\ldots,u'_m)$) adaptées au feuilletage ; on suppose $\hat{U}$ et $\hat{U}'$ difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^m$ et $\hat{U}\cap\hat{U}'\neq\emptyset$. Alors on a, dans $\hat{U}\cap\hat{U}'$:

$$u'_i = f_i(u_1,\ldots,u_p) \quad \text{où} \quad 1\leq i\leq p\ , \quad u'_{p+j} = f_{p+j}(u_1,\ldots,u_m) \quad \text{où} \quad 1\leq j\leq m-p\ ,$$

$$\partial_i = \sum_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k \partial'_k + \sum_{1\leq h\leq m-p} \partial_i f_{p+h}\partial'_{p+h} \quad \text{où} \quad 1\leq i\leq p\ ,$$

$$\partial_{p+j} = \sum_{1\leq h\leq m-p} \partial_{p+j} f_{p+h}\partial'_{p+h} \quad \text{où} \quad 1\leq j\leq m-p\ ,\text{(on a posé } \partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}) .$$

A $\hat{U}$ (resp. $\hat{U}'$) correspond sur $T(W)$ un ouvert $\hat{\hat{U}}$ (resp. $\hat{\hat{U}}'$) de coordonnées locales $(u_1,\ldots,u_{2m})$ (resp. $(u'_1,\ldots,u'_{2m})$) difféomorphe à $\hat{U}\times\mathbb{R}^m$ (resp. $\hat{U}'\times\mathbb{R}^m$) : si X est un champ de vecteurs sur W définie dans $\hat{U}\cap\hat{U}'$, on a :

$$X = \sum_{1\leq\alpha\leq m} u_{m+\alpha}\,\partial_\alpha = \sum_{1\leq\beta\leq m} u'_{m+\beta}\,\partial'_\beta$$

où $\quad u'_{m+k} = \sum_{1\leq i\leq p} u_{m+i}\,\partial_i f_k \quad$ pour $\quad 1\leq k\leq p$,

$$u'_{m+p+h} = \sum_{1\leq\alpha\leq m} u_{m+\alpha}\,\partial_\alpha f_{p+h} \quad \text{pour} \quad 1\leq h\leq m-p\ .$$

Ensuite à $\hat{U}$ (resp. $\hat{U}'$), on associe sur V un ouvert $U = \pi^{-1}(\hat{U}) = \pi_1(\hat{\hat{U}})$, (resp. $U' = \pi^{-1}(\hat{U}') = \pi_1(\hat{\hat{U}}')$) de coordonnées locales $(u_1,\ldots,u_{m+p})$ (resp. $(u'_1,\ldots,u'_{m+p})$), difféomorphe à $\hat{U}\times\mathbb{R}^p$ (resp. $\hat{U}'\times\mathbb{R}^p$) ; dans $U\cap U'$, on a :

$$(2)\left\{\begin{array}{l}
u'_i = f_i(u_1,\ldots,u_p) \quad \text{où} \quad 1\leq i\leq p, \quad u'_{p+j} = f_{p+j}(u_1,\ldots,u_m) \quad \text{où} \quad 1\leq j\leq m-p\ ,\\
u'_{m+i} = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\,\partial_k f_i \quad \text{où} \quad 1\leq i\leq p\ ,\\
\partial_i = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k\partial'_k + \sum_{1\leq h\leq m-p} \partial_i f_{p+h}\partial'_{p+h} + \sum_{1\leq k,t\leq p} u_{m+k}\,\partial_i\partial_k f_t\partial'_{m+t} \quad \text{où} \quad 1\leq i\leq p\ ,\\
\partial_{p+j} = \displaystyle\sum_{1\leq h\leq m-p} \partial_{p+j} f_{p+h}\partial'_{p+h} \quad \text{où} \quad 1\leq j\leq m-p\ ,\\
\partial_{m+i} = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k\partial'_{m+k} \quad \text{où} \quad 1\leq i\leq p\ .
\end{array}\right.$$

Dans U (resp. U'), on a :

$$(3)\left\{\begin{array}{l}
J\partial_i = \partial_{m+i} \quad \text{pour} \quad 1\leq i\leq p, \quad J\partial_{p+f} = 0 \quad \text{pour} \quad 1\leq f\leq m\ ,\\
(\text{resp.} \quad J\partial'_k = \partial'_{m+k} \quad \text{pour} \quad 1\leq k\leq p, \quad J\partial'_{p+s} = 0 \quad \text{pour} \quad 1\leq s\leq m)\ ,\\
Z_{|U} = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq p} u_{m+i}\partial_{m+i} \quad (\text{resp.} \quad Z_{|U'} = \sum_{1\leq k\leq p} u'_{m+k}\partial'_{m+k})\ .
\end{array}\right.$$

Désormais, on ne considérera sur V que des ouverts de coordonnées locales de ce type $U = \pi^{-1}(\hat{U})$, "ouverts de coordonnées locales adaptées" ; U est le fibré transverse au feuilletage restreint à $\hat{U}$; les coordonnées $u_1,\dots,u_p$ correspondent à des intégrales premières du feuilletage.

On vérifie immédiatement que, quels que soient les champs de vecteurs X et Y sur V, on a :

$$(4) \qquad [JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y] + J^2[X,Y] = 0 \ .$$

Soit Ω un ouvert de V ; on désigne par $L_J(\Omega)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs X définis dans Ω tels que la dérivée de Lie $L(X)J$ soit nulle (i.e. des automorphismes infinitésimaux de la structure), soit, pour tout champ de vecteurs Y sur Ω :

$$(5) \qquad [X,JY] = J[X,Y] \ .$$

Soient U un ouvert de coordonnées locales adaptées $(u_1,\dots,u_{m+p})$ et $X \in L_J(U)$; posons $X = \sum_{1\leq i\leq p} X_i\partial_i + \sum_{1\leq j\leq m-p} X_{p+j}\partial_{p+j} + \sum_{1\leq k\leq p} X_{m+k}\partial_{m+k}$; de (3) et (5), on déduit, en considérant $Y = \partial_k$, $1 \leq k \leq p$, puis $Y = \partial_{p+\ell}$, $1 \leq \ell \leq m-p$, que :

$$(6) \qquad \partial_{m+k}X_i = \partial_{m+k}X_{p+j} = 0 \ , \ \partial_k X_i = \partial_{m+k}X_{m+i} \ , \ \partial_{p+\ell}X_i = 0$$

où $1 \leq i,k \leq p$, $1 \leq j,\ell \leq m-p$.

On en déduit immédiatement que, pour tout ouvert Ω de V :

LEMME 1.- X <u>appartient à</u> $L_J(\Omega)$ <u>si et seulement si, pour tout ouvert</u> U <u>de coordonnées locales adaptées</u> $(u_1,\dots,u_{m+p})$ <u>tel que</u> $\Omega \cap U \neq \emptyset$, $X_{|\Omega\cap U}$ <u>est somme (finie) de champs de vecteurs sur</u> $\Omega \cap U$ <u>d'un des 3 types suivants</u> :

$$(7)\begin{cases} 1) & X_i(u_1,\dots,u_p)\partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k X_i \partial_{m+i} \quad \underline{\text{où}} \quad 1 \leq i \leq p \ , \\ 2) & X_{p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j} \quad \underline{\text{où}} \quad 1 \leq j \leq m-p \ , \\ 3) & X_{m+i}(u_1,\dots,u_m)\partial_{m+i} \quad \underline{\text{où}} \quad 1 \leq i \leq p \ . \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Les champs de vecteurs des types 1) et 2) sont les relevés dans le fibré transverse V des champs de vecteurs sur $\hat{U} \subset W$ qui sont des automorphismes infinitésimaux du feuilletage, i.e. des champs $\hat{X}$ sur $\hat{U}$ tels que, pour tout champ $\hat{Y}$ sur $\hat{U}$, tangent aux feuilles, $[\hat{X},\hat{Y}]$ est encore tangent aux feuilles ; les champs du type 2) correspondent aux automorphismes du feuilletage qui sont tangents aux feuilles.

Notons pour tout ouvert Ω de V :

$L(\Omega) = L_J(\Omega) \cap \operatorname{Ker} J_{|\Omega}$,

$L_2(\Omega)$ (resp. $L_3(\Omega)$) l'ensemble des champs de vecteurs $X \in L_J(\Omega)$ tels que, pour tout ouvert U de coordonnées locales adaptées vérifiant $\Omega \cap U \neq 0$, $X_{|\Omega \cap U}$ est du type 2 (resp. 3).

On vérifie immédiatement que, pour tout ouvert Ω de V :

LEMME 2.- $L_3(\Omega) = L_J(\Omega) \cap \operatorname{Im} J_{|\Omega}$,

$L(\Omega)$ <u>est un idéal de</u> $L_J(\Omega)$,

$L_3(\Omega)$ <u>est un idéal de</u> $L_J(\Omega)$ <u>et de</u> $L(\Omega)$,

$L_2(\Omega)$ <u>est une sous-algèbre de Lie de</u> $L(\Omega)$,

$[L_3(\Omega), L_3(\Omega)] = 0$,

$L(\Omega)$ <u>est somme directe de</u> $L_2(\Omega)$ <u>et</u> $L_3(\Omega)$,

<u>tout</u> $X \in L(\Omega)$ <u>se prolonge à l'ouvert</u> $\pi^{-1}(\pi(\Omega))$.

LEMME 3.- <u>Soient</u> Ω <u>un ouvert de</u> V <u>et</u> $X \in L_2(\Omega)$ (<u>resp</u>. $L_3(\Omega)$). <u>Pour tout</u> $x \in \Omega$, <u>le germe en</u> x <u>de</u> X <u>est le germe en</u> x <u>d'un</u> $X' \in L_2(V)$ (<u>resp.</u> $L_3(V)$).

Soient $x \in \Omega$, $\hat{U}$ un ouvert de W difféormorphe à un pavé de $\mathbb{R}^m$ tel que $y = \pi(x) \in \hat{U}$ et $\hat{U} \subset \pi(\Omega)$, et $\hat{H}$ une fonction sur W à support compact contenu dans $\hat{U}$, égale à 1 dans un voisinage de y ; à $\hat{H}$ correspond, sur V, une fonction $H = \hat{H} \circ \pi$ à support (non compact) contenu dans l'ouvert de coordonnées locales adaptées $U = \pi^{-1}(\hat{U})$, égale à 1 au voisinage de x.

Soit $X \in L_2(\Omega)$ (resp. $L_3(\Omega)$) ; X s'étend à $\pi^{-1}(\pi(\Omega)) \supset U$; dans U , X s'écrit :

$$X = \sum_{1 \leq j \leq m-p} X_{p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j} \quad (\text{resp. } X = \sum_{1 \leq i \leq p} X_{m+i}(u_1,\dots,u_m)\partial_{m+i}) \ ;$$

$$X' = H\Big(\sum_{1 \leq j \leq m-p} X_{p+j}\partial_{p+j}\Big) \ , \quad (\text{resp. } = H\Big(\sum_{1 \leq i \leq p} X_{m+i}\partial_{m+i}\Big)$$

appartient à $L_2(V)$ (resp. $L_3(V)$) et coïncide avec X au voisinage de x.

<u>Remarque</u> : Cette propriété n'est en général pas vraie pour $X \in L_J(U)$ de type 1, où U est un ouvert de coordonnées locales adaptées.

Soit $X \in L(V)$; son support ϕ est de la forme $\pi^{-1}(\hat{\phi})$ où $\hat{\phi}$ est un fermé de W ; on note $L^c(V)$ (resp. $L_2^c(V)$, $L_3^c(V)$) l'ensemble des $X \in L(V)$

(resp. $L_2(V)$, $L_3(V)$) dont le support $\phi = \pi^{-1}(\hat{\phi})$ est tel que $\hat{\phi}$ est compact.

THÉORÈME 1.- $L_2(V) = [L_2(V), L_2(V)]$, $L_2^c(V) = [L_2^c(V), L_2^c(V)]$

$L_3(V) = [L_2(V), L_3(V)]$, $L_3^c(V) = [L_2^c(V), L_3^c(V)]$

$L(V) = [L(V), L(V)]$, $L^c(V) = [L^c(V), L^c(V)]$

(ceci contient le théorème de A. Lichnerowicz [7], p. 64).

Soit $(\hat{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement de W par des ouverts de coordonnées locales à adhérence compacte et difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^m$, qu'on peut supposer centrés à l'origine ; d'après [3], théorème I p. 17, il existe un recouvrement ouvert de W, localement fini, plus fin, $(\hat{U}_\nu)_{\nu\in I}$ et une partition de I en une collection finie de sous-ensembles I_μ ($\mu = 1,\dots,r$) tels que, pour tout μ, les ouverts $\hat{U}_\nu$ où $\nu \in I_\mu$ sont deux à deux disjoints.

Soient $(\hat{\theta}_\nu)_{\nu\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\hat{U}_\nu)$ et $(\theta_\nu = \hat{\theta}_\nu \circ \pi)$ la partition de l'unité associée sur V.

Soit $X \in L_2(V)$ (resp. $L_3(V)$) ; posons, pour tout $\nu \in I$, $X_\nu = \theta_\nu X$; d'après (7) $X_\nu \in L_2(V)$ (resp. $L_3(V)$). Le support de X_ν est de la forme $\pi^{-1}(\hat{\phi}_\nu)$ où $\hat{\phi}_\nu$ est un compact de W inclus dans $\hat{U}_\nu$; il existe un ouvert $\hat{U}'_\nu$ de W, à adhérence compacte, tel que $\hat{\phi}_\nu \subset \hat{U}'_\nu \subset \overline{\hat{U}'_\nu} \subset \hat{U}_\nu$ et des fonctions C^∞ sur W, $\hat{\beta}_\nu$ et $\hat{\gamma}_\nu$ telles que $\hat{\beta}_\nu|_{\hat{\phi}_\nu} = 1$, $\operatorname{supp} \hat{\beta}_\nu \subset \hat{U}'_\nu$, $\hat{\gamma}_\nu|_{\overline{\hat{U}'_\nu}} = 1$, $\operatorname{supp} \hat{\gamma}_\nu \subset \hat{U}_\nu$; on pose $\beta_\nu = \hat{\beta}_\nu \circ \pi$, $\gamma_\nu = \hat{\gamma}_\nu \circ \pi$; comme $\hat{U}_\nu$ est contenu dans un $\hat{U}_\alpha$, $U_\nu = \pi^{-1}(\hat{U}_\nu)$ est contenu dans l'ouvert de coordonnées locales adaptées $U_\alpha = \pi^{-1}(\hat{U}_\alpha)$; on peut alors poser :

$$X_\nu = \sum_{1\leq j\leq m-p} X_{\nu,p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j} \quad , \quad (\text{resp. } X_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} X_{\nu,m+i}(u_1,\dots,u_m)\partial_{m+i}).$$

Posons, pour $1 \leq j \leq m-p$:

$$T_{\nu,p+j} = \beta_\nu \partial_{p+j} \ , \ Y_{\nu,p+j} = \beta_\nu\left(\int_0^{u_{p+j}} X_{\nu,p+j}(u_1,\dots,u_{p+j-1},t,u_{p+j+1},\dots,u_m)dt\right)\partial_{p+j} \ ,$$

$$(\text{resp. pour } 1 \leq i \leq p, \quad Y_{\nu,m+i} = \gamma_\nu\left(\int_0^{u_{p+1}} X_{\nu,m+i}(u_1,\dots,u_p,t,u_{p+2},\dots,u_m)dt\right)\partial_{m+i})$$

Les $2(m-p)$ (resp. p) champs de vecteurs sur V, à supports contenus dans U_ν, T_{p+j} , Y_{p+j} où $1 \leq j \leq m-p$, (resp. Y_{m+i} , où $1 \leq i \leq p$) appartiennent à $L_2^c(V)$, (resp. $L_3^c(V)$). On a :

$$\sum_{1\leq j\leq m-p} [T_{\nu,p+j}, Y_{\nu,p+j}] = \sum_{1\leq j\leq m-p} X_{\nu,p+j}\partial_{p+j} = X_\nu \ ,$$

(resp. $\sum_{1\leq i\leq p} [T_{\nu,p+1}, Y_{\nu,m+i}] = \sum_{1\leq i\leq p} X_{\nu,m+i}\partial_{m+i} = X_\nu)$.

Puisque, si ν et $\nu' \in I_\mu$, $U_\nu \cap U_{\nu'} = \emptyset$, on peut poser :

$$X_\mu = \sum_{\nu\in I_\mu} X_\nu \ ; \ \text{pour } 1 \leq j \leq m-p \ , \ T_{\mu,p+j} = \sum_{\nu\in I_\mu} T_{\nu,p+j} \ ,$$

$$Y_{\mu,p+j} = \sum_{\nu\in I_\mu} Y_{\nu,p+j} \ , \ (\text{resp. pour } 1 \leq i \leq p, \ Y_{\mu,m+i} = \sum_{\nu\in I_\mu} Y_{\nu,m+i})$$

et on a :

$$X_\mu = \sum_{1\leq j\leq m-p} [T_{\mu,p+j}, Y_{\mu,p+j}] \quad (\text{resp. } X_\mu = \sum_{1\leq i\leq p} [T_{\mu,p+1}, Y_{\mu,m+i}])$$

où les $T_{\mu,p+j}$, $Y_{\mu,p+j}$, $1 \leq j \leq m-p$, (resp. $Y_{\mu,m+i}$, $1 \leq i \leq p$) appartiennent à $L_2(V)$ (resp. $L_3(V)$) ; d'où le résultat, puisque $X = \sum_{1\leq\mu\leq r} X_\mu$.

Lorsque $X \in L_2^c(V)$, (resp. $L_3^c(V)$), il suffit de remarquer que le support de X ne rencontre qu'un nombre fini de U_ν ; notons B la partie finie de I telle que si $\nu \in I-B$, supp $X \cap U_\nu = \emptyset$; alors :

$$X = \sum_{\substack{1\leq j\leq m-p \\ \nu\in B}} [T_{\nu,p+j}, Y_{\nu,p+j}], \quad (\text{resp. } = \sum_{\substack{1\leq i\leq p \\ \nu\in B}} [T_{\nu,p+1}, Y_{\nu,m+i}]) \ .$$

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> $X \in L_2(V)$ <u>(resp.</u> $L_3(V)$) <u>tel que le support de</u> X <u>soit contenu dans un ouvert</u> Ω <u>vérifiant</u> $\Omega = \pi^{-1}(\pi(\Omega))$. <u>Alors</u> $X = \sum_i [T_i, Y_i]$ <u>où</u> $\sum_i$ <u>est une somme finie et les</u> T_i , $Y_i \in L_2(V)$ <u>et sont à support inclus dans</u> Ω , (<u>resp</u>. $X = \sum_i [T_i, Y_i]$ <u>où</u> $\sum_i$ <u>est une somme finie, les</u> $T_i \in L_2(V)$, $Y_i \in L_3(V)$, supp $T_i \subset \Omega$, supp $Y_i \subset \Omega$).

Les notations sont les mêmes que dans le théorème 1 ; alors $\hat{\phi}_\nu \subset \hat{U}_\nu \cap \hat{\Omega}$ où $\hat{\Omega} = \pi(\Omega)$; on peut donc imposer que $\overline{\hat{U}'_\nu} \subset \hat{U}_\nu \cap \hat{\Omega}$; alors, pour $1 \leq j \leq m-p$, les $T_{\nu,p+j}$ et $Y_{\nu,p+j}$ sont à support dans $U_\nu \cap \Omega$, (resp. pour $1 \leq i \leq p$, les $Y_{\nu,m+i}$ sont à support dans $U_\nu \cap \Omega$) ; puisque le recouvrement (U_ν) est localement fini, pour $1 \leq j \leq m-p$, supp $T_{\mu,p+j} = \bigcup_{\nu\in I_\mu}$ supp $T_{\nu,p+j} \subset \Omega$, supp $Y_{\mu,p+j}$ $= \bigcup_{\nu\in I_\mu}$ supp $Y_{\nu,p+j} \subset \Omega$, (resp. pour $1 \leq i \leq p$, supp $Y_{\mu,m+i} = \bigcup_{\nu\in I_\mu}$ supp $Y_{\nu,m+i} \subset \Omega$), d'où le résultat.

LEMME 4.- <u>Soit</u> $x \in U$, <u>ouvert de coordonnées locales adaptées</u> $(u_1,\dots,u_{m+p})$. <u>Pour tout</u> $X \in L_J(U)$ (resp. $L(U)$) <u>tel que</u> $j^3(X)(x) = 0$, (i.e. <u>le</u> 3-<u>jet en</u> x <u>de chaque composante de</u> X <u>sur les</u> ∂_i , $1 \leq i \leq m+p$, <u>est nul</u>) , <u>il existe</u> $Y_1,\dots,Y_q$, $T_1,\dots,T_q \in L_J(U)$ (<u>resp</u>. $L(U)$) <u>tels que</u> :

$$X = \sum_{1\leq i\leq q} [Y_i,T_i] \quad \text{et} \quad j^1(Y_i)(x) = j^1(T_i)(x) = 0 \qquad (\text{cf. } [8]) .$$

Il suffit, d'après le lemme 1, de démontrer le résultat pour X du type 1,2,3. On peut toujours supposer $u_s(x) = 0$, $1 \leq s \leq m+p$.

1) Considérons $X = X_i\partial_i + X_{m+i}\partial_{m+i}$, $Y = Y_i\partial_i + Y_{m+i}\partial_{m+i}$, $T = T_i\partial_i + T_{m+i}\partial_{m+i}$, où $1 \leq i \leq p$, $X_{m+i} = \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k X_i$, $Y_{m+i} = \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k Y_i$, $T_{m+i} = \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k T_i$.

Il suffit de prendre :

si $X_i = u_i^4\tilde{X}(u_1,\dots,u_p)$, $Y_i = u_i^2$, $T_i = u_i^2 \int_0^{u_i} \tilde{X}(u_1,\dots,u_{i-1},t,u_{i+1},\dots,u_p)dt$,

si $X_i = u_i^3u_k\tilde{X}$ où $k \neq i$, $1 \leq k \leq p$, $Y_i = u_iu_k$, $T_i = u_i \int_0^{u_i} t\,\tilde{X}(\dots,t,\dots)dt$,

si $X_i = u_i^2u_ku_s\tilde{X}$ où $1 \leq k,s \leq p$, $k \neq i$, $s \neq i$, $Y_i = u_iu_k$,

$$T_i = u_iu_s \int_0^{u_i} \tilde{X}(\dots,t,\dots)dt ,$$

si $X_i = u_iu_ku_su_f\tilde{X}$ où $1 \leq k,s,f \leq p$, $k \neq i$, $s \neq i$, $f \neq i$, $Y_i = u_ku_s$,

$$T_i = u_f \int_0^{u_i} t\,\tilde{X}(\dots,t,\dots)dt ,$$

si $X_i = u_ku_su_fu_h\tilde{X}$ où $1 \leq k,s,f,h \leq p$, $k \neq i$, $s \neq i$, $f \neq i$, $h \neq i$, $Y_i = u_ku_s$,

$$T_i = u_fu_h \int_0^{u_i} \tilde{X}(\dots,t,\dots)dt .$$

2) Considérons $X = A\partial_{p+j}$, $Y = B\partial_{p+j}$, $T = C\partial_{p+j}$ où $1 \leq j \leq m-p$, il suffit de prendre :

si $A = u_{p+j}^4\,\tilde{X}(u_1,\dots,u_m)$, $B = u_{p+j}^2$, $C = u_{p+j}^2 \int_0^{u_{p+j}} \tilde{X}(u_1,\dots,u_{p+j-1},t,u_{p+j+1},\dots)dt$,

si $A = u_{p+j}^3u_k\tilde{X}$, où $1 \leq k \leq m$, $k \neq p+j$, $B = u_{p+j}u_k$,

$$C = u_{p+j} \int_0^{u_{p+j}} t\,\tilde{X}(\dots,t,\dots)dt ,$$

si $A = u_{p+j}^2 u_k u_s \tilde{X}$, où $1 \leq k, s \leq m$, $k \neq p+j$, $s \neq p+j$, $B = u_{p+j} u_k$,

$$C = u_{p+j} u_s \int_0^{u_{p+j}} \tilde{X}(\ldots,t,\ldots)dt \ ,$$

si $A = u_{p+j} u_k u_s u_f \tilde{X}$, où $1 \leq k,s,f \leq m$, $k \neq p+j$, $s \neq p+j$, $f \neq p+j$, $B = u_k u_s$,

$$C = u_f \int_0^{u_{p+j}} t \ \tilde{X}(\ldots,t\ldots)dt \ ,$$

si $A = u_k u_s u_f u_h \tilde{X}$, où $1 \leq k,s,f,h \leq m$, $k \neq p+j$, $s \neq p+j$, $f \neq p+j$, $h \neq p+j$,

$$B = u_k u_s \ , \ C = u_f u_h \int_0^{u_{p+j}} \tilde{X}(\ldots,t,\ldots)dt \ .$$

3) Considérons $X = A\partial_{m+i}$, $T = C\partial_{m+i}$ où $1 \leq i \leq p$, $Y = B\partial_{p+j}$ où $1 \leq j \leq m-p$. Il suffit de prendre :

si $A = u_{p+j}^4 \tilde{X}(u_1,\ldots,u_m)$, $B = u_{p+j}^2$, $C = \int_0^{u_{p+j}} t^2 \ \tilde{X}(u_1,\ldots,u_{p+j-1},t,u_{p+j+1},\ldots,u_m)dt$,

si $A = u_{p+j}^3 u_f \tilde{X}$, où $1 \leq f \leq m$, $f \neq p+j$, $B = u_{p+j}^2$, $C = u_f \int_0^{u_{p+j}} t \ \tilde{X}(\ldots,t,\ldots)dt$,

si $A = u_f u_g u_h u_k \tilde{X}$, où $1 \leq f,g,h,k \leq m$, $h \neq p+j$, $k \neq p+j$, $B = u_f u_g$,

$$C = u_h u_k \int_0^{u_{p+j}} \tilde{X}(\ldots,t,\ldots)dt \ .$$

II - <u>ÉTUDE GÉNÉRALE DES DÉRIVATIONS</u>

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> D <u>une dérivation de</u> $L_J(V)$. <u>Alors</u> $D(L(V)) \subset L(V)$ <u>et</u> $D_{|L(V)}$ <u>est une dérivation de</u> $L(V)$.

D'après le théorème 1, pour tout $X \in L(V)$, on peut écrire $X = \sum_i [T_i,Y_i]$ où $\sum_i$ est une somme finie et les $T_i, Y_i \in L(V)$; puisque $L(V)$ est un idéal de $L_J(V)$, on en déduit que $D(X) = \sum_i ([D(T_i),Y_i] + [T_i,D(Y_i)])$ appartient à $L(V)$.

PROPOSITION 2.- <u>Pour toute dérivation</u> D <u>de</u> $L(V)$, <u>et pour tout</u> $X \in L(V)$, $\mathrm{supp}\, D(X) \subset \mathrm{supp}\, X$; <u>toute dérivation</u> D <u>de</u> $L(V)$ <u>est locale</u>.

Soient $X \in L(V)$ et ω un ouvert de V tel que $X_{|\omega} = 0$; posons $\Omega = \pi^{-1}(\pi(\omega))$; on a aussi $X_{|\Omega} = 0$. Pour tout $x \in \Omega$, il existe des ouverts Ω_1 et Ω_2 de V tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_i = \pi^{-1}(\pi(\Omega_i))$, $i = 1,2$, $\mathrm{supp}\, X \subset \Omega_1$, $x \in \Omega_2$; d'après le théorème 2, on peut écrire $X = \sum_i [T_i,Y_i]$ où les T_i, $Y_i \in L(V)$ et sont à support dans Ω_1 ; puisque $DX = \sum_i ([D(T_i),Y_i] + [T_i, D(Y_i)])$ on en déduit que $D(X)_{|\Omega_2} = 0$, puis $D(X)_{|\Omega} = 0$.

LEMME 5.- Soient U un ouvert de coordonnées locales adaptées, D une dérivation de $L_J(U)$ (resp. $L(U)$) et $x \in U$ tel que $j^3(X)(x) = 0$. Alors $D(X)(x) = 0$. (cf. [8]).

Ceci résulte immédiatement du lemme 4.

Dans toute la fin de cette partie, U désigne un ouvert de coordonnées locales adaptées.

On désigne par Δ l'application de $L(U)$ dans $L(U)$ définie par :

$$\Delta\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m-p} X_{p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j}\Big) = \Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m-p} \partial_{p+j}X_{p+j}\Big)\Big(\sum_{1\leqslant t\leqslant p} A_{m+t}\partial_{m+t}\Big) ,$$

$$\Delta\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant p} X_{m+i}\partial_{m+i}\Big) = 0 ,$$

où les A_{m+t} , $1 \leqslant t \leqslant p$, sont des applications C^∞ de U dans $\mathbb{R}$ qui ne dépendent que de $u_1,\dots,u_p$. On vérifie immédiatement que :

LEMME 6.- Δ est une dérivation de $L(U)$, qui n'est pas intérieure.

Posons dans U, $T = \sum_{1\leqslant t\leqslant p} \Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant p} B_t^i u_{m+i}\Big)\partial_{m+t}$ où les B_t^i sont des applications C^∞ de U dans $\mathbb{R}$ qui ne dépendent que de $u_1,\dots,u_p$; $T \notin L_J(U)$; on vérifie immédiatement que :

LEMME 7.- L'application de $L(U)$ dans $L(U)$: $X \to [T,X]$ est une dérivation de $L(U)$ qui n'est pas intérieure.

THEOREME 3.- Soit D une dérivation de $L(U)$; il existe Z_1, Z_2, $Z_3 \in L_J(U)$, de type 1,2,3 respectivement, Δ et T tels que, pour tout $X \in L(U)$:

$$D(X) = [Z_1,X] + [Z_2,X] + [Z_3,X] + \Delta(X) + [T,X] .$$

En particulier $\dim H^1(L(U)) = +\infty$. Z_1, Z_2, Δ, T sont déterminés de manière unique ; Z_3 n'est déterminé qu'à l'addition près de $\sum_{1\leqslant t\leqslant p} E_{m+t}\partial_{m+t}$ où les E_{m+t} sont fonctions de $u_1,\dots,u_p$ seulement.

1) Etudions d'abord l'unicité.

Supposons que, pour tout $X \in L(U)$, on ait aussi :

$$D(X) = [Z'_1,X] + [Z'_2,X] + [Z'_3,X] + \Delta'(X) + [T',X]$$

où Z'_1, Z'_2, $Z'_3 \in L_J(U)$ et sont de type 1,2,3 respectivement,

$$\Delta'\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m-p} X_{p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j}\Big) = \Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m-p} \partial_{p+j}X_{p+j}\Big)\Big(\sum_{1\leqslant t\leqslant p} A'_{m+t}\partial_{m+t}\Big) ,$$

$$\Delta'\Big(\sum_{1\leq i\leq p} X_{m+i}\partial_{m+i}\Big) = 0 ,$$

$$T' = \sum_{1\leq t\leq p}\Big(\sum_{1\leq i\leq p} B_t'^{\,i}\, u_{m+i}\Big)\,\partial_{m+t} ,$$

où les A'_{m+t} , $B_t'^{\,i}$, $1 \leq i, t \leq p$, sont des applications C^∞ de U dans $\mathbb{R}$ qui ne dépendent que de $u_1,\ldots,u_p$.

Posons :

$$Z_1 - Z_1' = \sum_{1\leq i\leq p} (a_i(u_1,\ldots u_p)\partial_i + (\sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k a_i)\partial_{m+i}),$$

$$Z_2 - Z_2' = \sum_{1\leq s\leq m-p} b_s(u_1,\ldots,u_m)\partial_{p+s} ,$$

$$Z_3 - Z_3' = \sum_{1\leq i\leq p} c_i(u_1,\ldots,u_m)\partial_{m+i} ,$$

$$A''_{m+t} = A_{m+t} - A'_{m+t} , \quad B_t''^{\,i} = B_t^i - B_t'^{\,i} , \quad 1 \leq i , t \leq p .$$

Pour tout $X \in L(U)$, on a :

$$[Z_1 - Z_1', X] + [Z_2 - Z_2', X] + [Z_3 - Z_3', X] + (\Delta-\Delta')(X) + [T - T',X] = 0 ;$$

on en déduit :

i) pour $X = \partial_{p+j}$, $1 \leq j \leq m-p$:

$$-\sum_{1\leq s\leq m-p} \partial_{p+j}b_s\partial_{p+s} - \sum_{1\leq i\leq p} \partial_{p+j}c_i\partial_{m+i} = 0 ,$$

donc :

$$\partial_{p+j}b_s = 0 = \partial_{p+j}c_i \quad \text{où} \quad 1 \leq s \leq m-p , \quad 1 \leq i \leq p ,$$

ii) pour $X = u_{p+j}\partial_{p+j}$, $1 \leq j \leq m-p$:

$$b_{p+j}\partial_{p+j} + \sum_{1\leq t\leq p} A''_{m+t}\partial_{m+t} = 0 ,$$

donc $b_{p+j} = 0 = A''_{m+t}$, où $1 \leq j \leq m-p$, $1 \leq t \leq p$,

iii) pour $X = u_i\partial_{p+j}$ où $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq m-p$:

$$a_i\partial_{p+j} = 0 ,$$

donc $a_i = 0$, $1 \leq i \leq p$.

iv) pour $X = \partial_{m+i}$, $1 \leq i \leq p$:

$$-\sum_{1\leq t\leq p} B_t''^{\,i}\partial_{m+t} = 0 ,$$

donc $B_t''^{\,i} = 0$, où $1 \leq i$, $t \leq p$.

2) La démonstration de l'existence de Z_1, Z_2, Z_3, Δ, T se fait en plusieurs étapes.

LEMME 8.- <u>Il existe</u> $\hat{Z}_2$ <u>et</u> $Z_3 \in L(U)$ <u>de type 2 et 3 respectivement tels que l'application de</u> $L(U)$ <u>dans</u> $L(U) : X \to D_1(X) = D(X) - [\hat{Z}_2, X] - [Z_3, X]$ <u>soit une dérivation de</u> $L(U)$ <u>vérifiant</u> $D_1(\partial_{p+j}) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq j \leq m-p$.

Posons, pour $1 \leq j \leq m-p$: $D(\partial_{p+j}) = \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{p+j} \partial_{p+\ell}$.

On a, pour $1 \leq j, k \leq m-p$:

$$D([\partial_{p+j}, \partial_{p+k}]) = D(0) = 0 = [\sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{p+j} \partial_{p+\ell}, \partial_{p+k}] + [\partial_{p+j} , \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{p+k} \partial_{p+\ell}] ,$$

soit : $\partial_{p+k} D^{p+\ell}_{p+j} = \partial_{p+j} D^{p+\ell}_{p+k}$; donc il existe, dans U, des fonctions C^∞ de $u_1, \ldots, u_m$, $D_{p+\ell}$, $1 \leq \ell \leq m$, telles que $\partial_{p+j} D_{p+\ell} = D^{p+\ell}_{p+j}$. Il suffit de poser :

$$\hat{Z}_2 = - \sum_{1 \leq \ell \leq m-p} D_{p+\ell} \partial_{p+\ell} \quad , \quad Z_3 = - \sum_{1 \leq i \leq p} D_{m+i} \partial_{m+i} \quad .$$

LEMME 9.- <u>Il existe</u> $Z_1 \in L_J(U)$ <u>de type</u> 1, $\tilde{Z}_2 \in L(U)$ <u>de type 2, une dérivation</u> Δ <u>de</u> $L(U)$ <u>(cf. lemme 6) tels que l'application de</u> $L(U)$ <u>dans</u> $L(U)$:

$$X \to D_2(X) = D_1(X) - [Z_1, X] - [\tilde{Z}_2, X] - \Delta(X) = D(X) - [Z_1, X] - [Z_2, X] - [Z_3, X] - \Delta(X) ,$$

<u>où on a posé</u> $Z_2 = \hat{Z}_2 + \tilde{Z}_2$, <u>soit une dérivation de</u> $L(U)$ <u>vérifiant</u> : $D_2(\partial_{p+j}) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq j \leq m-p$, $D_2(u_k\, \partial_{p+j}) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq j \leq m-p$, $1 \leq k \leq m$.

Posons, pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m-p$:

$$D_1(u_i \partial_{p+j}) = \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{i,p+j} \partial_{p+\ell} .$$

On a, pour $1 \leq s \leq m-p$:

$$D_1([\partial_{p+s}, u_i \partial_{p+j}]) = 0 = [\partial_{p+s} , \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{i,p+j} \partial_{p+\ell}] \quad ;$$

on en déduit que les $D^{p+\ell}_{i,p+j}$ ne dépendent que de $u_1, \ldots, u_p$.
Pour $1 \leq i, k \leq m$, $1 \leq j, s \leq m-p$, on a :

$$D_1([u_i \partial_{p+j}, u_k \partial_{p+s}]) = \delta^k_{p+j}\, D_1(u_i \partial_{p+s}) - \delta^i_{p+s}\, D_1(u_k \partial_{p+j})$$

$$= [\sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{i,p+j} \partial_{p+\ell}, u_k \partial_{p+s}] + [u_i \partial_{p+j} , \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{k,p+s} \partial_{p+\ell}] .$$

i) Supposons $1 \leq k \leq p$.

Pour $i = p+j = p+s$, on a :

$$- \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{k,p+j} \partial_{p+\ell} = - D^{p+j}_{k,p+j} \partial_{p+j} \quad ;$$

On en déduit que, pour $1 \leq \ell \leq m$, $\ell \neq j$, $D^{p+\ell}_{k,p+j} = 0$.

Pour $i = p+s$, on a :

$$- D^{p+j}_{k,p+j} \partial_{p+j} = - D^{p+s}_{k,p+s} \partial_{p+j} \quad ;$$

On en déduit que, $D^{p+j}_{k,p+j} = D^{p+s}_{k,p+s}$.

ii) Supposons $p+1 \leq k \leq m$.

Pour $k \neq p+j = i = p+s$, on a :

$$- \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{k,p+j} \partial_{p+\ell} = D^{k}_{p+j,p+j} \partial_{p+j} - D^{p+j}_{k,p+j} \partial_{p+j} \quad ;$$

on en déduit que, pour $1 \leq \ell \leq m$, $\ell \neq j$, $D^{p+\ell}_{k,p+j} = 0$, puis $D^{k}_{p+j,p+j} = 0$.

Pour $k = p+j \neq i = p+s$, on a :

$$D^{p+s}_{p+s,p+s} \partial_{p+s} + \sum_{1 \leq t \leq p} D^{m+t}_{p+s,p+s} \partial_{m+t} - D^{p+j}_{p+j,p+j} \partial_{p+j} - \sum_{1 \leq t \leq p} D^{m+t}_{p+j,p+j} \partial_{m+t}$$

$$= D^{p+j}_{p+s,p+j} \partial_{p+s} - D^{p+s}_{p+j,p+s} \partial_{p+j} \quad .$$

On en déduit : $D^{p+s}_{p+s,p+s} = D^{p+j}_{p+s,p+j}$, $D^{m+t}_{p+s,p+s} = D^{m+t}_{p+j,p+j}$ pour $1 \leq t \leq p$.

Il suffit de poser : $Z_1 = \sum_{1 \leq k \leq p} (D_k \partial_k + \sum_{1 \leq i \leq p} u_{m+i} \partial_i D_k \partial_{m+k})$, $\tilde{Z}_2 = \sum_{p+1 \leq k \leq m} D_k \partial_k$ où D_k désigne la valeur commune des $D^{p+j}_{k,p+j}$, $1 \leq k \leq m$, et $A_{m+t} = D^{m+t}_{p+j,p+j}$ pour $1 \leq t \leq p$, ce qui détermine Δ.

LEMME 10.- <u>Il existe un champ de vecteurs T sur U tel que l'application de $L(U)$ dans $L(U)$: $X \to D_3(X) = D_2(X) - [T,X]$ soit une dérivation de $L(U)$ vérifiant</u> : $D_3(\partial_{p+\ell}) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq \ell \leq m$, $D_3(u_k \partial_{p+j}) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq k \leq m$, $1 \leq j \leq m-p$.

Posons $D_2(\partial_{m+i}) = \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{m+i} \partial_{p+\ell}$ où $1 \leq i \leq p$.

De $D_2([\partial_{p+j}, \partial_{m+i}]) = 0$, où $1 \leq j \leq m-p$, on déduit que les $D^{p+\ell}_{m+i}$ ne dépendent que de $u_1, \ldots, u_p$.

On a :

$$D_2([\partial_{m+i}, \sum_{1 \leq j \leq m-p} u_{p+j} \partial_{p+j}]) = 0 = [\sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{m+i} \partial_{p+\ell} , \sum_{1 \leq j \leq m-p} u_{p+j} \partial_{p+j}] \quad ;$$

on en déduit que $D^{p+\ell}_{m+i} = 0$ pour $1 \leq \ell \leq m-p$. Il suffit de poser :

$$T = - \sum_{1 \leq t \leq p} (\sum_{1 \leq i \leq p} D^{m+t}_{m+i} u_{m+i}) \partial_{m+t} \quad \text{(cf. lemme 7).}$$

LEMME 11.- <u>Pour tout</u> $X \in L(U)$, <u>dont les composantes sur les</u> $\partial_{p+\ell}$, $1 \leqslant \ell \leqslant m$, <u>sont des polynômes en les</u> u_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, <u>de degré</u> $\leqslant 3$, $D_3(X) = 0$.

1) Posons ; pour $1 \leqslant i, k \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m-p$.

$$D_3(u_i u_k \partial_{p+j}) = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant m} D^{p+\ell}_{i,k,p+j} \partial_{p+\ell}.$$

Puisque $D_3([\partial_{p+s}, u_i u_k \partial_{p+j}]) = 0$, où $1 \leqslant s \leqslant m-p$, les $D^{p+\ell}_{i,k,p+j}$, $1 \leqslant \ell \leqslant m$, ne dépendent que de $u_1, \ldots, u_p$.

i) Supposons $p+1 \leqslant i, k \leqslant m$.

Puisque $\left[\sum_{1 \leqslant s \leqslant m-p} u_{p+s}\partial_{p+s}, u_i u_k \partial_{p+j}\right] = u_i u_k \partial_{p+j}$,

on a : $$-\sum_{1 \leqslant \ell \leqslant m-p} D^{p+\ell}_{i,k,p+j}\, \partial_{p+\ell} = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant m} D^{p+\ell}_{i,k,p+j} \partial_{p+\ell},$$

on en déduit : $2\, D^{p+\ell}_{i,k,p+j} = 0$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant m-p$, $D^{m+t}_{i,k,p+j} = 0$ pour $1 \leqslant t \leqslant p$,

soit $D_3(u_i u_k \partial_{p+j}) = 0$.

ii) Supposons $1 \leqslant i \leqslant p < k \leqslant m$.

De $[u_i \partial_k, u_k^2 \partial_{p+j}] = 2\, u_i u_k \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i u_k \partial_{p+j}) = 0$.

iii) Supposons $1 \leqslant i, k \leqslant p$.

De $[u_i\, \partial_{p+j}, u_k u_{p+j} \partial_{p+j}] = u_i u_k \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i u_k \partial_{p+j}) = 0$.

2) Soient $1 \leqslant i,k,h \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m-p$.

De $D_3([\partial_{p+\ell}, u_i u_k u_h \partial_{p+j}]) = 0$, où $1 \leqslant \ell \leqslant m-p$, on déduit que $[\partial_{p+\ell}, D_3(u_i u_k u_h \partial_{p+j})] = 0$.

i) Supposons $p+1 \leqslant i, k, h \leqslant m$.

De $\left[\sum_{1 \leqslant \ell \leqslant m-p} u_{p+\ell}\partial_{p+\ell}, u_i u_k u_h \partial_{p+j}\right] = 2\, u_i u_k u_h \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i u_k u_h \partial_{p+j}) = 0$.

ii) Supposons $1 \leqslant i \leqslant p < k, h \leqslant m$.

De $\left[\sum_{1 \leqslant \ell \leqslant m-p} u_{p+\ell}\partial_{p+\ell}, u_i u_k u_h \partial_{p+j}\right] = u_i u_k u_h \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i u_k u_h \partial_{p+j}) = 0$.

iii) Supposons $1 \leqslant i, k \leqslant p < h \leqslant m$.

De $[u_i u_k \partial_h, u_h^2 \partial_{p+j}] = 2\, u_i u_k u_h \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i\, u_k u_h \partial_{p+j}) = 0$.

iv) Supposons $1 \leqslant i, k, h \leqslant p$.

De $[u_i u_k \partial_{p+\ell}, u_h u_{p+\ell} \partial_{p+j}] = u_i u_k u_h \partial_{p+j}$ où $1 \leqslant \ell \leqslant m-p$, on déduit que $D_3(u_i u_k u_h \partial_{p+j}) = 0$.

3) i) Soient $1 \leq i \leq m$, $1 \leq t \leq p$.

De $D_3([\partial_{p+\ell}, u_i \partial_{m+t}]) = 0$ où $1 \leq \ell \leq m-p$, on déduit que $[\partial_{p+\ell}, D_3(u_i \partial_{m+t})] = 0$.
Puis de $[u_i \partial_{p+\ell}, u_{p+\ell} \partial_{m+t}] = u_i \partial_{m+t}$ où $1 \leq \ell \leq m-p$, on déduit que $D_3(u_i \partial_{m+t}) = 0$.

ii) Soient $1 \leq i, k, h \leq m$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq \ell \leq m-p$.
De $[u_i u_k \partial_{p+\ell}, u_{p+\ell} \partial_{m+t}] = u_i u_k \partial_{m+t}$, on déduit que $D_3(u_i u_k \partial_{m+t}) = 0$.

De $[u_i u_k u_h \partial_{p+\ell}, u_{p+\ell} \partial_{m+t}] = u_i u_k u_h \partial_{m+t}$, on déduit que $D_3(u_i u_k u_h \partial_{m+t}) = 0$.

Pour terminer la démonstration du théorème, considérons maintenant X quelconque $\in L(U)$; pour tout $x \in U$, il existe $\hat{X} \in L(U)$, dont les composantes sur les ∂_i , $1 \leq i \leq m+p$, sont des polynômes de degré ≤ 3 , tel que $j^3(X-\hat{X})(x) = 0$; d'après le lemme 5, $D_3(X-\hat{X})(x) = 0$, donc, puisque $D_3(\hat{X}) = 0$, $D_3(X)(x) = 0$.

En utilisant (3) et (7), on vérifie immédiatement que :

LEMME 12.- <u>L'application de</u> $L_J(U)$ <u>dans</u> $L_J(U)$ <u>(resp. de</u> $L_J(V)$ <u>dans</u> $L_J(V)$) : $X \to [Z_{|U} , X]$ (<u>resp</u>. $X \to [Z,X]$) <u>est une dérivation de</u> $L_J(U)$ (<u>resp.</u> $L_J(V)$) <u>qui n'est pas intérieure</u> ; <u>ainsi</u> $\dim H^1(L_J(U)) \geq 1$, $\dim H^1(L_J(V)) \geq 1$.

THÉORÈME 4.- <u>Soit</u> D <u>une dérivation de</u> $L_J(U)$. <u>Il existe une constante réelle</u> K <u>et un élément</u> $Y \in L_J(U)$ <u>tels que, pour tout</u> $X \in L_J(U)$, $D(X) = [KZ_{|U} + Y,X]$; K <u>et</u> Y <u>sont déterminés d'une manière unique</u> ; $\dim H^1(L_J(U)) = 1$.

Les notations sont celles du théorème 3.

D'après la proposition 1, puisque $U = \pi^{-1}(\hat{U})$ est le fibré transverse au feuilletage restreint à $\hat{U}$, $D_{|L(U)}$ est une dérivation de $L(U)$. D'après les lemmes 2 et 8, D_1 est une dérivation de $L_J(U)$. L'application de $L_J(U)$ dans $L_J(U)$: $X \to D_2'(X) = D_1(X) - [Z_1,X] - [\tilde{Z}_2,X] = D(X) - [Z_1,X] - [Z_2,X] - [Z_3,X]$ (cf. lemme 9) est une dérivation de $L_J(U)$ telle que $D_2'(\partial_{p+j}) = 0$ pour $1 \leq j \leq m-p$, $D_2'(u_k \partial_{p+j}) = 0$ pour $1 \leq j \leq m-p$, $1 \leq k \leq m$, $k \neq p+j$, $D_2'(u_{p+j} \partial_{p+j}) = \sum_{1 \leq t \leq p} A_{m+t} \partial_{m+t}$, où les A_{m+t} ne dépendent que de $u_1, \ldots, u_p$.

Pour $1 \leq i \leq p$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq j \leq m-p$, on a :

$$D_2'([\partial_i, \partial_{p+j}]) = 0 = [D_2'(\partial_i), \partial_{p+j}]$$

$$D_2'([\partial_i, u_k \partial_{p+j}]) = 0 = [D_2'(\partial_i), u_k \partial_{p+j}] \quad \text{si} \quad k \neq p+j$$

$$= [D_2'(\partial_i), u_{p+j} \partial_{p+j}] + [\partial_i , \sum_{1 \leq t \leq p} A_{m+t} \partial_{m+t}] , \quad \text{si} \quad k = p+j ;$$

On en déduit d'après (7) que les composantes de $D_2'(\partial_i)$ sur les ∂_k , $1 \leq k \leq m$, sont nulles, sur les ∂_{m+t} , $1 \leq t \leq p$, ne dépendent que de $u_1, \ldots, u_p$, et que les A_{m+t} , $1 \leq t \leq p$, sont des constantes.

Pour $1 \leqslant i, k \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant m-p$, $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on a :

$$D'_2([u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, \partial_{p+j}]) = 0 = [D'_2(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}), \partial_{p+j}] ,$$

$$D'_2([u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, u_\ell\partial_{p+j}]) = 0 = [D'_2(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}), u_\ell\partial_{p+j}] \quad \text{si } \ell \neq p+j ,$$

$$= [D'_2(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}), u_{p+j}\partial_{p+j}] + [u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i} , \sum_{1\leqslant t\leqslant p} A_{m+t}\partial_{m+t}] \quad \text{si } \ell = p+j ;$$

on en déduit d'après (7) que les composantes de $D'_2(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i})$ sur les ∂_ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant m$, sont nulles, sur les ∂_{m+t}, $1 \leqslant t \leqslant p$, ne dépendent que de $u_1,\dots u_p$; et que $A_{m+t} = 0$ pour $1 \leqslant t \leqslant p$. Ainsi (cf. lemme 9), $D_2 = D'_2$.
D'après ce qui précède et (7), pour $1 \leqslant i, k, t \leqslant p$, on a :

$$[D_2(\partial_i),\partial_{m+t}] = 0 = [D_2(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}),\partial_{m+t}] ,$$

donc (cf. lemme 10) : $D_2([\partial_i, \partial_{m+t}]) = 0 = [\partial_i, \sum_{1\leqslant s\leqslant p} D^{m+s}_{m+t}\,\partial_{m+s}]$,
d'où on déduit que les D^{m+s}_{m+t}, $1 \leqslant s, t \leqslant p$, sont des constantes ;

$$D_2([u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, \partial_{m+k}]) = [u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, \sum_{1\leqslant s\leqslant p} D^{m+s}_{m+k}\partial_{m+s}] ,$$

soit : $\qquad - D_2(\partial_{m+i}) = - D^{m+k}_{m+k}\,\partial_{m+i}$,

d'où on déduit : $D^{m+s}_{m+i} = 0$ si $s \neq i$, $D^{m+i}_{m+i} = D^{m+k}_{m+k}$.

On désigne par $-K$ la valeur commune des D^{m+i}_{m+i}, $1 \leqslant i \leqslant p$. Le champ de vecteurs T du lemme 10 se réduit, d'après (3), à $KZ_{|U}$.
De ce qui précède et des lemmes 10, 11, 12, on déduit immédiatement que :

LEMME 13.- <u>L'application de</u> $L_J(U)$ <u>dans</u> $L_J(U)$: $X \to D_3(X) = D_2(X) - K[Z_{|U}, X]$ $= D(X) - [Z_1,X] - [Z_2,X] - [Z_3,X] - K[Z_{|U},X]$ <u>est une dérivation de</u> $L_J(U)$ <u>telle que,</u> <u>pour</u> $1 \leqslant i, k \leqslant p$, $D_3(\partial_i) = \sum_{1\leqslant t\leqslant p} D^{m+t}_i\partial_{m+t}$, $D_3(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}) = \sum_{1\leqslant t\leqslant p} D^{m+t}_{ki}\partial_{m+t}$ <u>où les</u> D^{m+t}_i, D^{m+t}_{ki} <u>ne dépendent</u> que de $u_1,\dots,u_p$, et $D_3(X) = 0$ <u>pour tout</u> $X \in L(U)$ <u>dont les composantes sur les</u> $\partial_{p+\ell}$, $1 \leqslant \ell \leqslant m$, <u>sont des polynômes en les</u> u_i , $1 \leqslant i \leqslant m$, <u>de degré</u> $\leqslant 3$.

Pour $1 \leqslant i, k \leqslant p$, on a :

$D_3([\partial_i, \partial_k]) = 0 = [D_3(\partial_i),\partial_k] + [\partial_i, D_3(\partial_k)]$ soit $\partial_i D^{m+t}_k - \partial_k D^{m+t}_i = 0$ pour $1 \leqslant t \leqslant p$; il existe donc, dans U, des fonctions C^∞ de $u_1,\dots,u_p$, D_{m+t} , $1 \leqslant t \leqslant p$, telles que $\partial_i D_{m+t} = D^{m+t}_i$. Posons $Z'_3 = - \sum_{1\leqslant t\leqslant p} D_{m+t}\partial_{m+t}$; Z'_3 est un élément de $L_J(U)$ de type 3, et l'application de $L_J(U)$ dans $L_J(U)$: $X \to D_4(X) = D_3(X) - [Z'_3,X]$ est une dérivation de $L_J(U)$ telle que $D_4(\partial_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m+p$.

On peut encore poser $D_4(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}) = \sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{ki}\partial_{m+t}$ pour $1 \leq i, k \leq p$, où les $\hat{D}^{m+t}_{ki}$ ne dépendent que de $u_1,\dots,u_p$; puisque, pour $1 \leq h \leq p$, $D_4([\partial_h, u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}]) = 0 = [\partial_h, \sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{ki}\partial_{m+t}]$, les $\hat{D}^{m+t}_{ki}$, $1 \leq t \leq p$, sont des constantes.

Pour $1 \leq i, k, h \leq p$, on a :

$$D_4([u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, u_h\partial_k + u_{m+h}\partial_{m+k}]) = \delta^h_i(\sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{kk}\partial_{m+t}) - \sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{hi}\partial_{m+t}$$
$$= [\sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{ki}\partial_{m+t}, u_h\partial_k + u_{m+h}\partial_{m+k}] + [u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, \sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{hk}\partial_{m+t}] ;$$

on en déduit :

pour $h \neq i = k$, $-\sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{hi}\partial_{m+t} = \hat{D}^{m+h}_{ii}\partial_{m+i} - \hat{D}^{m+i}_{hi}\partial_{m+i}$

donc : $\hat{D}^{m+t}_{hi} = 0$ pour $t \neq i$,

puis $\hat{D}^{m+h}_{ii} = 0$,

pour $h \neq i$, $-\hat{D}^{m+i}_{hi}\partial_{m+i} = -\hat{D}^{m+k}_{hk}\partial_{m+i}$

donc $\hat{D}^{m+i}_{hi} = \hat{D}^{m+k}_{hk}$.

Désignons par $\hat{D}_h$ la valeur commune des constantes $\hat{D}^{m+i}_{hi}$ et posons $Z''_3 = \sum_{1\leq h\leq p} \hat{D}_h\partial_{m+h}$; $Z''_3 \in L_J(U)$ et est de type 3. Puisque, pour tout $X \in L(U)$, $[Z'_3 + Z''_3, X] = 0$, la dérivation de $L_J(U) : X \to D_5(X) = D_4(X) - [Z''_3, X] = D_3(X) - [Z'_3 + Z''_3, X]$ est telle que : $D_5(\partial_\ell) = 0$ pour $1 \leq \ell \leq p$, $D_5(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}) = 0$ où $1 \leq i, k \leq p$, $D_5(X) = 0$ pour tout $X \in L(U)$ dont les composantes sur les $\partial_{p+\ell}$, $1 \leq \ell \leq m$, sont des polynômes en les u_i, $1 \leq i \leq m$, de degré ≤ 3.
Soient $1 \leq k, h, \ell, i \leq p$. Pour $1 \leq s \leq m$, on a :

$$D_5([\partial_s, u_ku_h\partial_i + (u_hu_{m+k}+u_{m+h}u_k)\partial_{m+i}]) = 0 = [\partial_s, D_5(u_ku_h\partial_i + (u_hu_{m+k}+u_{m+h}u_k)\partial_{m+i})],$$

donc les composantes de $D_5(u_ku_h\partial_i + (u_hu_{m+k}+u_{m+h}u_k)\partial_{m+i})$ sur les ∂_j, $1 \leq j \leq m+p$ sont constantes, d'après (7).

De $[\sum_{1\leq t\leq p} (u_t\partial_t+u_{m+t}\partial_{m+t}), u_ku_h\partial_i+(u_hu_{m+k}+u_ku_{m+h})\partial_{m+i}] = u_ku_h\partial_i+(u_hu_{m+k}+u_ku_{m+h})\partial_{m+i}$, on déduit que $D_5(u_ku_h\partial_i+(u_hu_{m+k}+u_ku_{m+h})\partial_{m+i}) = 0$. On en déduit que, pour $1 \leq s \leq m$:

$$D_5([\partial_s, u_ku_hu_\ell\partial_i+(u_{m+k}u_hu_\ell+u_ku_\ell u_{m+h}+u_ku_hu_{m+\ell})\partial_{m+i}] = 0$$
$$= [\partial_s, D_5(u_ku_hu_\ell\partial_i + (u_{m+k}u_hu_\ell+u_ku_\ell u_{m+h}+u_ku_hu_{m+\ell})\partial_{m+i})],$$

donc les composantes de $D_5(u_ku_hu_\ell\partial_i + (u_{m+k}u_hu_\ell+u_ku_\ell u_{m+h}+u_ku_hu_{m+\ell})\partial_{m+i})$ sur les ∂_j, $1 \leq j \leq m+p$, sont constantes, d'après (7).

De $\left[\sum_{1\leqslant t\leqslant p}(u_t\partial_t+u_{m+t}\partial_{m+t}),u_ku_hu_\ell\partial_i+(u_{m+k}u_hu_\ell+u_ku_\ell u_{m+h}+u_ku_hu_{m+\ell})\partial_{m+i}\right]$

$= 2(u_ku_hu_\ell\partial_i+(u_{m+k}u_hu_\ell+u_ku_{m+h}u_\ell+u_ku_hu_{m+\ell})\partial_{m+i})$, on déduit que

$D_5(u_ku_hu_\ell\partial_i+(u_{m+k}u_hu_\ell+u_ku_{m+h}u_\ell+u_ku_hu_{m+\ell})\,\partial_{m+i}) = 0$.

Ainsi $D_5(X) = 0$ pour tout $X \in L_J(U)$ dont les composantes sur les ∂_j , $1 \leqslant j \leqslant p+m$, sont des polynômes en les u_i , de degré $\leqslant 3$.

On en déduit comme à la fin de la démonstration du théorème 3, que, pour tout $X \in L_J(U)$, pour tout $x \in U$, $D_5(X)(x) = 0$.

On a ainsi montré que, si on pose $Y = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_3' + Z_3''$, pour tout $X \in L_J(U)$, $D(X) = [K\,Z_{|U} + Y, X]$.

LEMME 14.- K <u>et</u> Y <u>sont uniques</u>.

Supposons que, pour tout $X \in L_J(U)$, $D(X) = [K\,Z_{|U} + Y,X] = [K'Z_{|U} + Y',X]$ où K et K' sont des constantes, Y et $Y' \in L_J(U)$; alors, pour tout $X \in L_J(U)$, où on a :

$$[(K-K')Z_{|U} + (Y-Y'),X] = 0 ;$$

On en déduit, pour $1 \leqslant \ell \leqslant m$, puisque, d'après (3), $[Z_{|U},\partial_\ell] = 0$, que $[Y-Y',\partial_\ell] = 0$, et donc d'après (7) que les composantes de $Y-Y'$ sur les ∂_h , $1 \leqslant h \leqslant m+p$, sont des constantes.

Pour $1 \leqslant i, k \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant m-p$, $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on a, d'après (3) :

$$[Z_{|U},u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}] = [Z_{|U},u_\ell\partial_{p+j}] = 0 ,$$

donc $[Y-Y',u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}] = 0 = [Y-Y', u_\ell\partial_{p+j}]$; on en déduit que $Y - Y' = 0$.

Ensuite, pour $1 \leqslant t \leqslant p$, on a , d'après (3) : $[(K-K')Z_{|U}, \partial_{m+t}]$ $= - (K-K')\partial_{m+t} = 0$, donc $K = K'$.

III - <u>CAS OÙ LE FEUILLETAGE EST UNE FIBRATION</u>

On suppose dans cette partie que W est fibrée sur une variété de base M de dimension p ; on note π_2 la projection canonique de W sur M , F la fibre-type, variété de dimension $m-p$. On considère un recouvrement $(\check{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M par des ouverts de coordonnées locales $(u_1,\dots,u_p)$, difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^p$, qui sont en même temps des ouverts de trivialisation du fibré W ; pour tout $\alpha \in A$, $\hat{U}_\alpha = \pi_2^{-1}(\check{U}_\alpha)$ est difféomorphe à $\check{U}_\alpha \times F$; on considère ensuite un recouvrement $(O_\beta)_{\beta\in B}$ de F par des ouverts de coordonnées locales $(u_{p+1},\dots,u_m)$

difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^{m-p}$; on en déduit un recouvrement $(\hat{U}_{\alpha\beta})_{\beta\in B}$ de $\hat{U}_\alpha$ (resp. $(\hat{U}_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ de W) par des ouverts de coordonnées locales difféomorphes à $\check{U}_\alpha \times O_\beta$ et à des pavés de $\mathbb{R}^m$, puis un recouvrement $(U_{\alpha\beta} = \pi^{-1}(\hat{U}_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times B})$ de V ; $U_{\alpha\beta}$ est difféomorphe à $\hat{U}_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^p$ et à $\check{U}_\alpha \times O_\beta \times \mathbb{R}^p$; c'est un "ouvert de coordonnées locales $u_1,\ldots,u_{m+p}$ adaptées" , qui, de plus, est adapté à la fibration ; on ne considérera sur V que des ouverts de coordonnées locales de ce type ; si $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha'\beta'} \neq 0$, on a dans $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha'\beta'}$ (cf. (2)) :

$$(8)\begin{cases} u'_i = f_i(u_1,\ldots,u_p) \text{ où } 1 \leq i \leq p,\ u'_{p+j} = f_{p+j}(u_{p+1},\ldots,u_m) \text{ où } 1 \leq j \leq m-p , \\ u'_{m+i} = \sum\limits_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k f_i \text{ où } 1 \leq i \leq p , \\ \partial_i = \sum\limits_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k \partial'_k + \sum\limits_{1\leq k,t\leq p} u_{m+k}\partial_i\partial_k f_t \partial'_{m+t} \text{ où } 1 \leq i \leq p , \\ \partial_{p+j} = \sum\limits_{1\leq h\leq m-p} \partial_{p+j} f_{p+h}\partial'_{p+h} \text{ où } 1 \leq j \leq m-p , \\ \partial_{m+i} = \sum\limits_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k \partial'_{m+k} \text{ où } 1 \leq i \leq p . \end{cases}$$

De (7) et (8), on déduit qu'on peut définir, pour tout ouvert Ω de V , l'ensemble $L_1(\Omega)$ des champs de vecteurs $X \in L_J(\Omega)$ tels que, pour tout ouvert $U_{\alpha\beta}$ de coordonnées locales adaptées vérifiant $U_{\alpha\beta} \cap \Omega \neq \emptyset$, $X_{|U_{\alpha\beta}\cap\Omega}$ est du type 1. On vérifie immédiatement que $L_1(\Omega)$ est une sous-algèbre de Lie de $L_J(\Omega)$ et que tout $X \in L_1(\Omega)$ s'étend canoniquement à $\pi^{-1} \circ \pi(\Omega)$ et $(\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega)$; en particulier, si $\Omega = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega)$, X est le relevé canonique dans Ω d'un champ $\check{X}$ sur $\pi_2 \circ \pi(\Omega)$, ouvert de M. $L_J(\Omega) = L_1(\Omega) \oplus L_2(\Omega) \oplus L_3(\Omega)$.

LEMME 15.- <u>Soient</u> Ω <u>un ouvert de</u> V <u>et</u> $X \in L_1(\Omega)$. <u>Pour tout</u> $x \in \Omega$, <u>le germe en</u> x <u>de</u> X <u>est le germe en</u> x <u>d'un</u> $X' \in L_1(V)$.

Soient $x \in \Omega$, $U_{\alpha\beta}$ un ouvert de coordonnées locales adaptées telles que $x \in U_{\alpha\beta}$, $\check{H}$ une fonction sur M, à support compact contenu dans l'ouvert

$\pi_2 \circ \pi(\Omega \cap U_{\alpha\beta}) \subset \check{U}_\alpha = \pi_2 \circ \pi(U_{\alpha\beta})$, égale à 1 dans un voisinage de $z = \pi_2 \circ \pi(x)$; à $\check{H}$ correspond sur V une fonction $H = \check{H} \circ \pi_2 \circ \pi$ à support contenu dans

$(\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)\ (U_{\alpha\beta} \cap \Omega) \subset (\pi_2 \circ \pi)^{-1}\ (\check{U}_\alpha) \cap \Omega_1$ où

$\Omega_1 = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega)$, égale à 1 au voisinage de x .

Soit $X \in L_1(\Omega)$; X s'étend à Ω_1 ; dans $\Omega_1 \cap (\pi_2 \circ \pi)^{-1}\ (\check{U}_\alpha)$, X s'écrit : $X = \sum\limits_{1\leq i\leq p} (X_i(u_1,\ldots,u_p)\partial_i + \sum\limits_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k X_i \partial_{m+i})$;

$X' = \sum_{1\leq i\leq p} (H\, X_i \partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k(H\, X_i)\partial_{m+i})$ appartient à $L_1(V)$ et coïncide avec X au voisinage de x.

Soit $X \in L_1(V)$; son support ϕ est de la forme $(\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{\phi})$ où $\check{\phi}$ est un fermé de M ; on note $L_1^c(V)$ l'ensemble des $X \in L_1(V)$ tel que $\check{\phi}$ est compact.

THÉORÈME 5.- $L_1(V) = [L_1(V), L_1(V)]$, $L_1^c(V) = [L_1^c(V), L_1^c(V)]$.

Soit, comme précédemment, un recouvrement $(\check{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M par des ouverts de coordonnées locales, qui sont des ouverts de trivialisation du fibré W ; on peut supposer les $\check{U}_\alpha$ à adhérence compacte, difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^p$, centrés à l'origine ; d'après [3], théorème I. p. 17, il existe un recouvrement ouvert de M, localement fini, plus fin $(\check{U}_\nu)_{\nu\in I}$ et une partition de I en une collection finie de sous-ensembles I_μ $(\mu = 1,\dots,r)$ tels que, pour tout μ, les ouverts $\check{U}_\nu$ où $\nu \in I_\mu$ sont deux à deux disjoints. Soit $(\check{\theta}_\nu)_{\nu\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\check{U}_\nu)$.

Soient $X \in L_1(V)$ et $\check{X} = (\pi_2 \circ \pi)'(X)$; posons $\check{X}_\nu = \check{\theta}_\nu \check{X}$; le support de $\check{X}_\nu$ est un compact $\check{\phi}_\nu$ de M inclus dans $\check{U}_\nu$; il existe une fonction, C^∞, sur M , $\check{\beta}_\nu$, à support inclus dans $\check{U}_\nu$ et telle que $\check{\beta}_{\nu|\check{\phi}_\nu} = 1$; comme $\check{U}_\nu$ est inclus dans un $\check{U}_\alpha$, ouvert de coordonnées locales $(u_1,\dots,u_p)$, on peut poser :

$$\check{X}_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} X_{\nu,i}(u_1,\dots,u_p)\partial_i \quad , \text{ et , pour } 1 \leq i \leq p \ :$$

$$\check{T}_{\nu,i} = \beta_\nu \partial_i \quad , \quad \check{Y}_{\nu,i} = \beta_\nu \left(\int_0^{u_i} X_{\nu,i}(u_1,\dots,u_{i-1},t,u_{i+1},\dots,u_p)dt\right)\partial_i \ ;$$

le support des $\check{T}_{\nu,i}$, $\check{Y}_{\nu,i}$, $1 \leq i \leq p$, est contenu dans $\check{U}_\nu$.

On vérifie immédiatement que :

$$\check{X}_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} [\check{T}_{\nu,i} , \check{Y}_{\nu,i}]$$

(cf. la proposition 4 de A. Lichnérowicz [6], p. 366).

Définissons X_ν , $T_{\nu,i}$, $Y_{\nu,i}$, où $1 \leq i \leq p$, éléments de $L_1(V)$, à support dans $U_\nu = (\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{U}_\nu)$, relevés canoniques dans V de $\check{X}_\nu$, $\check{T}_{\nu,i}$, $\check{Y}_{\nu,i}$ respectivement, par leurs expressions en coordonnées $(u_1,\dots,u_{m+p})$ dans $U_\alpha = (\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{U}_\alpha)$, (les coordonnées $u_{p+1},\dots,u_m$ n'interviennent pas) :

$$X_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} (X_{\nu,i}(u_1,\dots,u_p)\partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k X_{\nu,i}\partial_{m+i}) ,$$

$$T_{\nu,i} = \beta_\nu \partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k \beta_\nu \partial_{m+i} \quad ,$$

$$Y_{\nu,i} = (\beta_\nu \int_0^{u_i} X_{\nu,i}(\ldots,t,\ldots)dt)\partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k(\beta_\nu \int_0^{u_i} X_{\nu,i}(\ldots,t,\ldots)dt)\partial_{m+i} \;.$$

On vérifie immédiatement que :

$$X_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} [T_{\nu,i} \,,\, Y_{\nu,i}] \;.$$

Puisque, si ν et $\nu' \in I_\mu$, $\check{U}_\nu \cap \check{U}_{\nu'} = \emptyset$, donc : $U_\nu \cap U_{\nu'} = \emptyset$ où $U_\nu = (\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{U}_\nu)$, $U_{\nu'} = (\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{U}_{\nu'})$, on peut poser :

$$X_\mu = \sum_{\nu\in I_\mu} X_\nu \text{ , et pour } 1 \leq i \leq p \text{ , } T_{\mu,i} = \sum_{\nu\in I_\mu} T_{\nu,i} \text{ , } Y_{\mu,i} = \sum_{\nu\in I_\mu} Y_{\nu,i} \;.$$

On a encore :

$X_\mu = \sum_{1\leq i\leq p} [T_{\mu,i} \,,\, Y_{\mu,i}]$, où les $T_{\mu,i}$, $Y_{\mu,i}$ $1 \leq i \leq p$, appartiennent à $L_1(V)$.

Puisque $(\pi_2 \circ \pi)'(X_\mu) = \sum_{\nu\in I_\mu} (\pi_2 \circ \pi)'(X_\nu) = \sum_{\nu\in I_\mu} \check{X}_\nu$, si on pose $\check{X}_\mu = \sum_{\nu\in I_\mu} \check{X}_\nu$, on a $\check{X} = \sum_{1\leq\mu\leq r} \check{X}_\mu$ et donc $X = \sum_{1\leq\mu\leq r} X_\mu$; ainsi $X = \sum_{1\leq\mu\leq r} (\sum_{1\leq i\leq p} [T_{\mu,i} \,,\, Y_{\mu,i}])$.

Lorsque $X \in L_1^c(V)$, il suffit de remarquer que le support de X (resp. $\check{X}$) ne rencontre qu'un nombre fini de U_ν (resp. $\check{U}_\nu$) ; notons B la partie finie de I telle que, si $\nu \in I - B$, $\operatorname{supp} X \cap U_\nu = \emptyset$, alors :

$$\check{X} = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ \nu\in B}} [\check{T}_{\nu,i} \,,\, \check{Y}_{\nu,i}] \;, \qquad X = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ \nu\in B}} [T_{\nu,i} \,,\, Y_{\nu,i}] \;.$$

THÉORÈME 6.- <u>Soit</u> $X \in L_1(V)$ <u>tel que le support de</u> X <u>soit contenu dans un ouvert</u> Ω <u>vérifiant</u> $\Omega = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega)$. <u>Alors</u> $X = \sum_k [T_k, Y_k]$ <u>où</u> $\sum_k$ <u>est une somme finie et les</u> T_k , $Y_k \in L_1(V)$ <u>et sont à support inclus dans</u> Ω.

Les notations sont les mêmes que dans le théorème 5, alors $\check{\phi}_\nu \subset \check{U}_\nu \cap \check{\Omega}$ où $\check{\Omega} = \pi_2 \circ \pi(\Omega)$; on peut imposer que le support de $\check{\beta}_\nu$ soit inclus dans $\check{\Omega} \cap \check{U}_\nu$; alors, pour $1 \leq i \leq p$, les $T_{\nu,i}$ et $Y_{\nu,i}$ sont à support dans $U_\nu \cap \Omega$; puisque le recouvrement de $(\check{U}_\nu)_{\nu\in I}$ de M est localement fini, le recouvrement $(U_\nu)_{\nu\in I}$ de V est localement fini et $\operatorname{supp} T_{\mu,i} = \bigcup_{\nu\in I_\mu} \operatorname{supp} T_{\nu,i} \subset \Omega$,

$\operatorname{supp} Y_{\mu,i} = \bigcup_{\nu\in I_\mu} \operatorname{supp} Y_{\nu,i} \subset \Omega$; d'où le résultat .

PROPOSITION 3.- Pour toute dérivation D de $L_J(V)$ et pour tout $X \in L_J(V)$, supp $D(X) \subset$ supp X ; toute dérivation de $L_J(V)$ est locale.

D'après les propositions 1 et 2, il suffit de démontrer le résultat pour $X \in L_1(V)$; soient $X \in L_1(V)$ et ω un ouvert tel que $X_{|\omega} = 0$; posons $\Omega = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\omega)$; on a aussi $X_{|\Omega} = 0$. Pour tout $x \in \Omega$, il existe des ouverts Ω_1 et Ω_2 de V tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_i = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega_i)$, $i = 1,2$, supp $X \subset \Omega_1$, $x \in \Omega_2$; d'après le théorème 6, on peut écrire $X = \sum_k [T_k, Y_k]$ où les T_k, $Y_k \in L_1(V)$ et sont à support dans Ω_1 ; puisque $D(X) = \sum_k ([D(T_k), Y_k] + [T_k, D(Y_k)])$, on en déduit que $D(X)_{|\Omega_2} = 0$, puis $D(X)_{|\Omega} = 0$.

THÉORÈME 7.- Lorsque le feuilletage sur W est une fibration, $\dim H^1(L_J(V)) = 1$.

Soit D une dérivation de $L_J(V)$; pour tout ouvert Ω de V, on a une dérivation induite $D_\Omega : L_J(\Omega) \to L_J(\Omega)$: pour $X \in L_J(\Omega)$, et $x \in \Omega$, on pose : $D_\Omega(X)(x) = D(X')(x)$ où $X' \in L_J(V)$ et coïncide avec X dans un voisinage ouvert de x ; (cf. lemmes 3 et 15) ; $D_\Omega(X)(x)$ ne dépend pas de X' d'après la proposition 3.

Considérons maintenant un recouvrement $(U_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ de V par des ouverts de coordonnées locales adaptées ; d'après le théorème 4, pour tout $(\alpha,\beta) \in A \times B$ il existe $Y_{\alpha\beta} \in L_J(U_{\alpha\beta})$, une constante $K_{\alpha\beta}$ tels que pour tout $X \in L_J(U_{\alpha\beta})$, $D_{U_{\alpha\beta}}(X) = [K_{\alpha\beta} Z_{|U_{\alpha\beta}} + Y_{\alpha\beta}, X]$; comme $D_{U_{\alpha\beta}}$ et $D_{U_{\alpha'\beta'}}$ restreintes à $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha'\beta'}$ coïncident, $Y_{\alpha\beta}$ et $Y_{\alpha'\beta'}$, restreints à $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha'\beta'}$, sont égaux et $K_{\alpha\beta} = K_{\alpha'\beta'}$; donc il existe $Y \in L_J(V)$ et une constante réelle K tels que pour tout $(\alpha,\beta) \in A \times B$; $Y_{|U_{\alpha\beta}} = Y_{\alpha\beta}$ et $K = K_{\alpha\beta}$; comme pour tout $X \in L_J(V)$, $D(X)_{|U_{\alpha\beta}} = D_{U_{\alpha\beta}}(X_{|U_{\alpha\beta}})$, on a, pour tout $X \in L_J(V)$: $D(X) = [KZ + Y, X]$.

IV - CAS DU TORE MUNI DU FEUILLETAGE PAR DES DROITES À PENTE IRRATIONNELLE

Considérons dans $\mathbb{R}^2$, muni des coordonnées canoniques (x,y), le champ de vecteurs $S = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; les courbes intégrales de S sont les droites $y = \alpha x + K$ où K est une constante, les intégrales premières de S $F(y - \alpha x)$ où F est n'importe quelle application C^∞ de $\mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, suivant que l'on considère des intégrales premières définies globalement dans $\mathbb{R}^2$ ou localement. Par passage au quotient par la relation d'équivalence dans

$\mathbb{R}^2$: $(x,y) \sim (x',y')$ si $x-x' \in \mathbb{Z}$ et $y-y' \in \mathbb{Z}$, on obtient sur $\mathbb{T}^2$ un champ de vecteurs noté encore S ; ses intégrales premières définies globalement doivent être des fonctions $F(y-\alpha x)$, C^∞, périodiques en y de période 1, périodiques en x de période 1 ; F est donc une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le groupe des périodes est engendré par 1 et $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; on en déduit que F est constante.

Sur $W = \mathbb{T}^2$, on peut prendre comme coordonnées locales (u_1,u_2) adaptées au feuilletage $u_1 = y - \alpha x$, $u_2 = x$ où $u_1 \in]a,b[$, $u_2 \in]c,d[$ avec $b-a + |\alpha|(d-c) < 1$; alors (x,y) appartient à un parallélogramme. On en déduit, sur le fibré transverse V, les coordonnées locales adaptées (u_1,u_2,u_3) dans $U =]a,b[\times]c,d[\times \mathbb{R}$; on ne considérera dans la suite que des ouverts de coordonnées locales adaptées de ce type.

Soient U et U' deux tels ouverts tels que : $U \cap U' \neq \emptyset$; on a, dans $U \cap U'$, $u_1 - u_1' = f$, $u_2 - u_2' = g$, où f et g sont localement constantes, $u_3 = u_3'$, donc $\partial_1 = \partial_1'$, $\partial_2 = \partial_2'$, $\partial_3 = \partial_3'$; on a ainsi trois champs de vecteurs globalement définis sur V qui réalisent un parallélisme. On note encore S le relevé canonique de S dans V.

On a :

$$(9) \begin{cases} \partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial y} \ , \quad \partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial x} + \alpha \dfrac{\partial}{\partial y} \ (= S) \ , \quad J\partial_1 = \partial_3 \ , \quad J\partial_2 = J\partial_3 = 0 \ , \\ Z = u_3\partial_3 \ . \end{cases}$$

LEMME 16.- <u>Soit</u> H <u>une application</u> C^∞ <u>de</u> V <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que</u> $\partial_2 H = \partial_3 H = 0$; <u>alors</u> H <u>est constante</u>.

En effet, puisque $\partial_3 H = 0$, il existe $\hat{H}$ application C^∞ de W dans $\mathbb{R}$ telle que $H = \hat{H} \circ \pi$; de $\partial_2 H = 0$, on déduit que $S.\ \hat{H} = 0$, donc que $\hat{H}$ est une intégrale première de S définie globalement sur W, donc une constante.

Soit $X \in L_J(V)$; posons $X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3$; de (5) et (9) en considérant $Y = \partial_1$, puis $Y = \partial_2$, on déduit que

$$\partial_3 X_1 = \partial_3 X_2 = \partial_2 X_1 = 0 \ , \quad \partial_1 X_1 = \partial_3 X_3 \ ;$$

d'après le lemme 16, X_1 est constante ; on en déduit

$$\partial_3 X_3 = 0 \ ; \ \text{d'où :}$$

LEMME 17.- Soit $X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3$; $X \in L_J(V)$ si et seulement si X_1 est constante, et X_2 et X_3 sont des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, périodiques en x de période 1, périodiques en y de période 1 ; ainsi $L_J(V) = R\partial_1 \oplus L(V)$.

Soit U un ouvert de coordonnées locales adaptées ; il existe donc beaucoup de $X \in L_J(U)$ dont le germe en $q \in U$ n'est pas le germe en q d'un $X' \in L_J(V)$. Notons $\tilde{L}(U)$ la restriction de $L_J(V)$ à U ; $\tilde{L}(U)$ est une sous-algèbre de Lie de $L_J(U)$; d'après le lemme 17, $\tilde{L}(U)$ est la somme directe de $\mathbb{R}\ \partial_{1|U}$ et de $L(U)$. On vérifie facilement que :

(10) $$[L_J(V), L_J(V)] \subset L(V) .$$

PROPOSITION 4.- Toute dérivation de $L_J(V)$ est locale.

Soient ω un ouvert de V et $X \in L_J(V)$ tel que $X_{|\omega} = 0$; posons $X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3$; puisque, d'après le lemme 17, X_1 est une constante, on a : $X_1 = 0$, donc $X \in L(V)$ et d'après les propositions 1 et 2, $D(X)_{|\omega} = 0$.

LEMME 18.- Toute dérivation D de $L_J(V)$ induit, sur tout ouvert U de coordonnées locales adaptées, une dérivation $\tilde{D}$ de $\tilde{L}(U)$ telle que, pour tout $X \in L_J(V)$, $\tilde{D}(X_{|U}) = D(X)_{|U}$; en particulier $\tilde{D}_{|L(U)}$ est une dérivation de $L(U)$.

En effet, soient D une dérivation de $L_J(V)$ et $X \in \tilde{L}(U)$; pour tout $q \in U$, posons $\tilde{D}(X)(q) = D(X')(q)$ où $X' \in L_J(V)$ et coïncide avec X dans un voisinage de q ; si X'' est un autre élément de $L_J(V)$ qui coïncide avec X au voisinage de q, $X'' - X'$ est nul au voisinage de q et, puisque D est locale, $D(X''-X')$ est nul au voisinage de q, donc $D(X'')(q) = D(X')(q)$.

Soit $X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3 \in L_J(V)$.

Posons :

(11) $$\begin{cases} \Delta_1(X) = X_1\partial_3 \\ \Delta_2(X) = X_2\partial_3 \\ \Delta_3(X) = (\partial_2 X_2)\partial_3 . \end{cases}$$

LEMME 19.- Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont des dérivations de $L_J(V)$ qui ne sont pas intérieures.

On vérifie facilement que Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 sont des dérivations de $L_J(V)$.

S'il existait $Y = Y_1\partial_1 + Y_2\partial_2 + Y_3\partial_3 \in L_J(V)$ tel que, pour tout $X \in L_J(V)$, $\Delta_1(X) = [Y,X]$ (resp. i) $\Delta_2(X) = [Y,X]$, ii) $\Delta_3(X) = [Y,X]$) , alors on aurait pour $X = \partial_1$, puis $X = \partial_2$, puis $X = \partial_3$:

$-\ \partial_1 Y_3 = 1\ ,\ \partial_2 Y_3 = \partial_3 Y_3 = 0$ ce qui est impossible d'après le lemme 16 ; donc Δ_1 n'est pas intérieure, (resp. i) $\partial_1 Y_3 = 0 = \partial_3 Y_3\ ,\ \partial_2 Y_3 = -1$, donc Y_3 serait indépendante de y (et de u_3) ; alors $\partial_2 Y_3 = \frac{dY_3}{dx}$, mais l'équation différentielle $\frac{dY_3}{dx} = -1$ n'a pas de solution en x périodique de période 1 ; donc Δ_2 n'est pas intérieure.

resp. ii)

$$\partial_1 Y_2 = \partial_2 Y_2 = \partial_3 Y_2 = 0$$

$$\partial_1 Y_3 = \partial_2 Y_3 = \partial_3 Y_3 = 0$$

donc Y_2 et Y_3 seraient des constantes ; puis pour $X = \sin 2\pi x(\partial_2 + \partial_3)$ on devrait avoir $[Y,X] = 2\pi \cos 2\pi x\ \partial_3$, donc

$$\begin{cases} 2\pi\ Y_2\ \cos 2\pi\ x = 0\ , \\ 2\pi\ Y_2\ \cos 2\pi\ x = 2\pi \cos 2\pi\ x\ , \end{cases}$$

équations en Y_2 qui sont incompatibles ; donc Δ_3 n'est pas intérieure).

D'après les lemmes 12 et 19, $\dim H^1(L_J(V)) \geq 4$, puisque Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 et $X \to [Z,X]$ sont des dérivations de $L_J(V)$ linéairement indépendantes.

THÉORÈME 8.- <u>Soit</u> D <u>une dérivation de</u> $L_J(V)$; <u>il existe</u> $Y \in L_J(V)$, <u>des constantes réelles</u> K_1 , K_2 , K_3 , K_4 <u>tels que</u>, <u>pour tout</u> $X \in L_J(V)$, <u>on ait</u> :

$$D(X) = [Y,X] + K_1\ \Delta_1(X) + K_2\ \Delta_2(X) + K_3\ \Delta_3(X) + K_4[Z,X]\ .$$

K_1, K_2, K_3, K_4 <u>sont déterminées d'une manière unique</u> ; Y <u>est déterminé à l'addition près de</u> $Y_3\partial_3$ <u>où</u> Y_3 <u>est une constante</u>. $\dim H^1(L_J(V)) = 4$.

1) Etudions d'abord l'unicité.

Si, pour tout $X \in L_J(V)$, on a aussi

$$D(X) = [Y',X] + K_1'\ \Delta_1(X) + K_2'\ \Delta_2(X) + K_3'\ \Delta_3(X) + K_4'[Z,X]\ ,$$

où $Y' \in L_J(V)$, K_1' , K_2' , K_3' , K_4' sont des constantes, on a, pour tout $X \in L_J(V)$:

$$[(Y-Y'),X] + (K_1 - K_1')\ \Delta_1(X) + (K_2 - K_2')\ \Delta_2(X) + (K_3 - K_3')\ \Delta_3(X) + (K_4 - K_4')[Z,X] = 0.$$

Posons $\quad Y-Y' = Y_1\partial_1 + Y_2\partial_2 + Y_3\partial_3$.

Pour $X = \partial_1$, on a :

$$-\ \partial_1 Y_2 \partial_2 - \partial_1 Y_3 \partial_3 + (K_1 - K_1')\ \partial_3 = 0$$

donc Y_2 est indépendante de y ;

$$\partial_1 Y_3 = K_1 - K_1'$$

donc $\quad Y_3 = (K_1 - K_1')y + h_3(x)$

où h_3 est une fonction de x périodique de période 1 ; puisque Y_3 est périodique en y de période 1, nécessairement $K_1 = K_1'$; donc Y_3 ne dépend que de x.

Pour $X = \partial_2$, on a :

$$-\ \partial_2 Y_2 \partial_2 - \partial_2 Y_3 \partial_3 + (K_2 - K_2')\ \partial_3 = 0$$

donc $\partial_2 Y_2 = 0$ et Y_2 est une constante.

$\partial_2 Y_3 = K_2 - K_2'$, soit puisque Y_3 ne dépend que de x, $\dfrac{dY_3}{dx} = K_2 - K_2'$; comme Y_3 doit être périodique en x de période 1, on a : $K_2 = K_2'$ et Y_3 est une constante.

Pour $X = \partial_3$, on a :

$$-\ (K_4 - K_4')\partial_3 = 0 \quad , \quad \text{donc } K_4 = K_4' .$$

Pour $X = \sin 2\pi\, x\ \partial_2$ on a :

$$2\pi\ Y_2 \cos 2\pi\, x\ \partial_2 + 2\pi \cos 2\pi\, x\ (K_3 - K_3')\partial_3 = 0 ,$$

donc $Y_2 = 0$ et $K_3 = K_3'$.

Pour $X = \sin 2\pi\, y\ \partial_2$, on a :

$$2\pi\ Y_1 \cos 2\pi\, y\ \partial_2 = 0 \quad , \quad \text{donc } Y_1 = 0 .$$

Comme, pour tout $X \in L_J(V)$, $[Y_3\partial_3, X] = 0$ la constante Y_3 est arbitraire.

2) Démontrons l'existence de $Y \in L_J(V)$, K_1, K_2, K_3, K_4.

Soient U et U' deux ouverts de coordonnées locales adaptées (u_1, u_2, u_3) et (u_1', u_2', u_3') tels que $U \cap U' \neq \emptyset$. D'après le lemme 18, D induit sur U (resp. U') une dérivation $\tilde{D}$ (resp. $\tilde{D}'$) de $\tilde{L}(U)$ (resp. $\tilde{L}(U')$) dont la restriction à $L(U)$ (resp. $L(U')$) est une dérivation de $L(U)$ (resp. $L(U')$). D'après le théorème 3, il existe Z_1, Z_2, $Z_3 \in L_J(U)$, de type 1,2,3 respectivement, Δ et T tels que, pour tout $X \in L(V)$:

$$D(X)_{|U} = \tilde{D}(X_{|U}) = [Z_1, X_{|U}] + [Z_2, X_{|U}] + [Z_3, X_{|U}] + \Delta(X_{|U}) + [T, X_{|U}]$$

où $\Delta(X_2(u_1,u_2)\partial_{2|U}) = (\partial_2 X_2)\ A\ \partial_{3|U}$,

$\Delta(X_3(u_1,u_2)\partial_{3|U}) = 0$,

$T = B\ \ u_3\partial_{3|U}$,

où A et B sont des applications C^∞ de U dans $\mathbb{R}$ telles que $\partial_2 A = \partial_3 A = \partial_2 B = \partial_3 B = 0$ (resp. Z'_1, Z'_2, $Z'_3 \in L_J(U')$ de type 1,2,3 respectivement, Δ' et T' tels que, pour tout $X \in L(V)$:

$$D(X)_{|U'} = \tilde{D}'(X_{|U'}) = [Z'_1, X_{|U'}] + [Z'_2, X_{|U'}] + [Z'_3, X_{|U'}] + \Delta'(X_{|U'}) + [T', X_{|U'}]$$

où $\Delta'(X'_2(u'_1,u'_2)\partial_{2|U'}) = (\partial_2 X_2)\ A'\ \partial_{3|U'}$,

$\Delta'(X'_3(u'_1,u'_2)\partial_{3|U'}) = 0$,

$T' = B'\ u_3\ \partial_{3|U'}$,

où A' et B' sont des applications C^∞ de U' dans $\mathbb{R}$ telles que $\partial_2 A' = \partial_3 A' = \partial_2 B' = \partial_3 B' = 0$).

Compte-tenu des résultats d'unicité du théorème 3, $Z_{1|U\cap U'} = Z'_{1|U\cap U'}$, $Z_{2|U\cap U'} = Z'_{2|U\cap U'}$, $A_{|U\cap U'} = A'_{|U\cap U'}$, $B_{|U\cap U'} = B'_{|U\cap U'}$; il existe donc $\hat{Z}_1$ et $\hat{Z}_2 \in L_J(V)$, $\hat{Z}_1 = h\ \partial_1$, $\hat{Z}_2 = k(x,y)\partial_2$ où h est une constante, k une application C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, périodique en x et en y de période 1, des applications C^∞ de V dans $\mathbb{R}$, K_3 et K_4 telles que : $\hat{Z}_{1|U} = Z_1$, $\hat{Z}_{2|U} = Z_2$, $K_{3|U} = A$, $K_{4|U} = B$, $\partial_2 K_3 = \partial_3 K_3 = \partial_2 K_4 = \partial_3 K_4 = 0$; d'après le lemme 16, K_3 et K_4 sont des constantes ; la dérivation Δ de $L(U)$ est la restriction à U et $L(U)$ de la dérivation de $L_J(V)$: $K_3\Delta_3$; le champ de vecteurs dans U :

$T = K_4\ u_3\partial_{3|U}$ est la restriction à U du champ $K_4 Z$. On en déduit que :

LEMME 20.- L'application D_1 de $L_J(V)$ dans $L_J(V)$: $X \to D_1(X) = D(X) - [\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2, X] - K_3\ \Delta_3(X) - K_4[Z,X]$ est une dérivation de $L_J(V)$ telle que, pour tout $X \in L(V)$, pour tout ouvert U de coordonnées locales adaptées :

$$D_1(X)_{|U} = [Z_3, X_{|U}] ;$$

donc, d'après le lemme 17, on peut poser :

$$D_1(g_2(x,y)\partial_2) = E_1(x,y)\ g_2(x,y)\partial_3 ,$$

$$D_1(g_3(x,y)\partial_3) = 0 ,$$

$$D_1(\partial_1) = D_1^1\partial_1 + D_1^2\partial_2 + D_1^3\partial_3$$

où D_1^1 est une constante, g_2, g_3, E_1, D_1^2, D_1^3 sont des applications C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, périodiques en x et en y de période 1.

De $D_1([\partial_1,\partial_2]) = D_1(0) = 0 = [D_1^1\partial_1 + D_1^2\partial_2 + D_1^3\partial_3 , \partial_2] + [\partial_1 , E_1(x,y)\partial_3]$

on déduit :

(12) $$\partial_2 D_1^2 = 0 \quad ; \quad \partial_1 E_1 = \partial_2 D_1^3 .$$

Puisque $\partial_3 D_1^2 = 0$, d'après le lemme 16, D_1^2 est une constante.

Dans tout ouvert U de coordonnées locales adaptées (u_1,u_2,u_3), on a, d'après la proposition 4 et le lemme 18, pour la restriction $\tilde{D}_1$ de D_1 à U :

i) $\tilde{D}_1([\partial_1|_U , u_2\partial_2|_U]) = \tilde{D}_1(0) = 0$

$$= [D_1^1\partial_1|_U + D_1^2\partial_2|_U + D_1^3\partial_3|_U , u_2\partial_2|_U] + [\partial_1|_U , u_2 E_1|_U\partial_3] ,$$

d'où on déduit, d'après (12) : $D_1^2 = 0$;

ii) $\tilde{D}_1([\partial_1|_U , u_1\partial_2|_U]) = \tilde{D}_1(\partial_2|_U) = D_1(\partial_2)|_U = E_1|_U\partial_3|_U$

$$= [D_1^1\partial_1|_U + D_1^3\partial_3|_U , u_1\partial_2|_U] + [\partial_1|_U , u_1 E_1|_U\partial_3|_U]$$

d'où on déduit : $D_1^1 = 0$.

Posons $A_3(x,y) = \int_0^y D_1^3(x,t)\,dt - y K_1$ où $K_1 = \int_0^1 D_1^3(x,t)\,dt$; $A_3(x,y)$ est périodique en x et en y de période 1 ; donc $\hat{Z}_3 = - A_3\partial_3$ est un élément de $L_J(V)$ et :

LEMME 21.- <u>L'application</u> D_2 <u>de</u> $L_J(V)$ <u>dans</u> $L_J(V) : X \to D_2(X) = D_1(X) - [\hat{Z}_3 , X]$ <u>est une dérivation de</u> $L_J(V)$ <u>telle que</u> :

$D_2(\partial_1) = K_1\partial_3$,

$D_2(g_2(x,y)\partial_2) = g_2(x,y)\, E_2(x,y)\partial_3$,

$D_2(g_3(x,y)\partial_3) = 0$

où K_1 est une application C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ indépendante de y, périodique en x de période 1 et où g_2, g_3, E_2 sont périodiques en x et en y de période 1.

De $D_2([\partial_1,\partial_2]) = 0 = [K_1\partial_3,\partial_2] + [\partial_1, E_2\partial_3]$, on déduit :

(13) $$\partial_1 E_2 = \partial_2 K_1 .$$

Puisque K_1 est indépendante de y , $\partial_2 K_1 = \dfrac{dK_1}{dx}$ et (13) s'écrit :

$$\frac{\partial E_2}{\partial y} = \frac{dK_1}{dx} \quad , \quad \text{donc} \quad : \quad E_2 = y\,\frac{dK_1}{dx} + e_2(x)$$

où e_2 est fonction de x seulement, périodique de période 1 ; puisque E_2 doit être périodique en y de période 1, nécessairement : $\frac{dK_1}{dx} = 0$; donc K_1 est une constante et E_2 est une fonction de x seulement, périodique de période 1.

Posons : $B_3(x) = \int_0^x E_2(t)\, dt - x K_2$ où $K_2 = \int_0^1 E_2(t)\, dt$; B_3 est indépendante de y, périodique en x de période 1 ; donc $\hat{\hat{Z}}_3 = - B_3\partial_3$ est un élément de $L_J(V)$ et :

LEMME 22.- <u>L'application</u> D_3 <u>de</u> $L_J(V)$ <u>dans</u> $L_J(V) : X \to D_3(X) = D_2(X) - K_1\Delta_1(X) - [\hat{\hat{Z}}_3,X]$ <u>est une dérivation de</u> $L_J(V)$ <u>telle que</u> : $D_3 = K_2\Delta_2$.

Si on pose $Y = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \hat{\hat{Z}}_3$, on a ainsi montré que, pour tout $X \in L_J(V)$:

$D(X) = [Y,X] + K_1\Delta_1(X) + K_2\Delta_2(X) + K_3\Delta_3(X) + K_4\Delta_4(X)$.

V - <u>d_J-COHOMOLOGIES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES.</u>

On revient à la situation générale où W est une variété munie d'un feuilletage de codimension p et V le fibré transverse.

Comme, dans [5] on déduit de (4) que $(X,Y) \to \{X,Y\} = [X,JY] + [JX,Y] - J[X,Y]$ définit une structure de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des champs de vecteurs sur V.

A toute k-forme ω sur V , on associe la $(k+1)$-forme sur V définie par sa valeur sur $k+1$ champs de vecteurs :

$$(d_J\omega)\ (X_o,\dots,X_k) = \sum_{0\leq i\leq k} (-1)^i\ J\, X_i\ .\ \omega(X_o,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k)$$
$$+ \sum_{0\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j}\ \omega(\{X_i,X_j\},\ X_o,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)$$

où ^ signifie l'omission.

On sait d'après [5] que d_J est une dérivation de degré 1 et que $d_J^2 = 0$.

Notons pour $0 \leq k$, A^k le faisceau des germes des k-formes ω sur V , à valeurs scalaires, telles que $\omega(X_1,\dots,X_k) = 0$ dès que l'un des $X_i \in \mathrm{Ker}\, J$, A le faisceau des germes de fonctions f sur V telles que $d_J(f) = 0$.

Pour tout ouvert Ω de V , notons $A^k(\Omega)$ (resp. $A(\Omega)$) le module des sections de A^k (resp. A) au-dessus de Ω. De (4), on déduit immédiatement que, pour tout k, $0 \leq k \leq p-1$:

$$d_J(A^k(\Omega)) \subset A^{k+1}(\Omega)\ .$$

Soit U un ouvert de coordonnées locales adaptées $(u_1,\dots,u_{m+p})$; $\omega \in A^k(U)$ s'écrit , pour $1 \leqslant k \leqslant p$:

$$\omega = \sum \omega_{i_1\dots i_k}\, du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_k}$$

où $\sum$ est une somme finie et $i_j \in \{1,\dots,p\}$, pour tout j , $1 \leqslant j \leqslant k$; $f \in A(U)$ est fonction des coordonnées $u_1,\dots,u_m$ seulement, c'est-à-dire qu'il existe $\hat{f}$ fonction sur $\hat{U} = \pi(U) \subset W$ telle que $f = \hat{f} \circ \pi_{|U}$.

On définit, pour $k = 0$, $H^o_J(V) = \mathrm{Ker}(A^o(V) \xrightarrow{d_J} A^1(V))$,

pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $$H^k_J(V) = \frac{\mathrm{Ker}(A^k(V) \xrightarrow{d_J} A^{k+1}(V))}{\mathrm{Im}(A^{k-1}(V) \xrightarrow{d_J} A^k(V))}$$

On a : $H^o_J(V) = A(V) = \{\hat{f} \circ \pi$, $\hat{f}$ l'application C^∞ de W dans $\mathbb{R}\}$,

donc : $\dim_{\mathbb{R}} H^o_J(V) = +\infty$.

Si $W = \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}$ muni des coordonnées $(u_1,\dots,u_m)$ où les feuilles sont déterminées par u_i = constante, $1 \leqslant i \leqslant p$, alors $V = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p$ muni des coordonnées adaptées $(u_1,\dots,u_m,\dots,u_{m+p})$; on sait, d'après [5], que :

THÉORÈME 9.- <u>Pour</u> k , $1 \leqslant k \leqslant p$, <u>toute forme</u> $\omega \in A^k(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p)$, d_J-<u>fermée</u>, <u>est</u> d_J-<u>exacte</u> ; <u>donc</u>

$$H^k_J(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p) = 0 , \quad 1 \leqslant k \leqslant p .$$

On en déduit dans le cas général :

COROLLAIRE.- <u>Toute forme</u> $\omega \in A^k(V)$, $1 \leqslant k \leqslant p$, <u>qui est</u> d_J-<u>fermée est localement</u> d_J-<u>exacte</u>. <u>Ainsi</u> :

(14) $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} A^o \xrightarrow{d_J} A^1 \xrightarrow{d_J} \dots \xrightarrow{d_J} A^p \xrightarrow{d_J} 0$$, où j est l'inclusion ,

<u>est une résolution fine du faisceau</u> A <u>et la cohomologie à valeurs dans</u> A <u>est isomorphe à la</u> d_J-<u>cohomologie</u>.

Considérons un recouvrement $(\hat{U}_\alpha)$ de W par des ouverts de coordonnées locales adaptées au feuilletage, difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^m$, $(\hat{U}_\nu)_{\nu\in I}$ un recouvrement ouvert de W, localement fini, plus fin $(\hat{\theta}_\nu)_{\nu\in I}$ une partition de l'unité subordonnée, $(U_\nu)_{\nu\in I}$ le recouvrement correspondant de V , $(\theta_\nu = \hat{\theta}_\nu \circ \pi)_{\nu\in I}$ la partition de l'unité sur V. On a, pour tout $\nu \in I$, $d_J\theta_\nu = 0$.

Soit $\omega \in A^k(V)$, $1 \leq k \leq p$, d_J-fermée ; pour tout $\nu \in I$, $\omega_{|U_\nu}$ est d_J-fermée ; d'après le corollaire, il existe $\alpha_\nu \in A^{k-1}(U_\nu)$ telle que $\omega_{|U_\nu} = d_J\alpha_\nu$; donc $\theta_\nu\omega_{|U_\nu} = d_J(\theta_{\nu|U_\nu}\alpha_\nu)$; on peut étendre $\theta_{\nu|U_\nu}\alpha_\nu$ à V tout entier en prolongeant par 0 ; on obtient un élément, noté encore $\theta_\nu\alpha_\nu$, de $A^{k-1}(V)$; donc $\omega = (\sum_{\nu\in I} \theta_\nu)\omega = \sum_{\nu\in I} (\theta_\nu\omega) = \sum_\nu d_J(\theta_\nu\alpha_\nu) = d_J(\sum_\nu \theta_\nu\alpha_\nu)$ d'où :

THÉORÈME 10.- Pour tout k, $1 \leq k \leq p$: $H^k_J(V) = 0$.

C'est un cas particulier de la proposition 5 de [1].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. ANONA. Sur la d_L-cohomologie. C.R. Acad. Sc. Paris 290 (1980) A 649-651.

[2] I.M. GELFAND et D.B. FUCHS. Funct. Anal. 4, (1970), 10-25 et suiv.

[3] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE. Connections, curvature and cohomology, Vol. I. Academic Press.

[4] J. LEHMANN-LEJEUNE. Intégrabilité des G-structures définies par une 1-forme 0-déformable à valeurs dans le fibré tangent. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16,2 (1966), 329-387.

[5] J. LEHMANN-LEJEUNE. Etude des formes différentielles liée à certaines G-structures. C.R. Acad. Sc. Paris 260 (1965), 1838-1841.

[6] A. LICHNEROWICZ. Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs. Comment. Math. Helvetici 39(51), 343-368.

[7] A. LICHNEROWICZ. Algèbres de Lie attachées à un feuilletage. Ann. Fac. Sc. Toulouse, vol. 1, 45-76, (1979).

[8] F. TAKENS. Derivations of vector fields. Comp. Math. 26 (1973), 95-99.

Josiane Lehmann-Lejeune

E.R.A. au C.N.R.S. n° 07-590
Université des Sciences et Techniques
de Lille I
U.E.R. de Mathématiques Pures et
Appliquées.
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ - CEDEX.