

# Astérisque

D. LEHMANN

## Structures de Maurer-Cartan et $\Gamma_\theta$ -structures II : espaces classifiants

*Astérisque*, tome 116 (1984), p. 134-148

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1984\\_\\_116\\_\\_134\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__134_0)>

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STRUCTURES DE MAURER-CARTAN et  $\Gamma_\theta$ -STRUCTURES

II : ESPACES CLASSIFIANTS

D. LEHMANN (Lille)

1. INTRODUCTION.

Soit  $A$  une  $\mathbb{R}$ -ADG $_c$  (algèbre différentielle graduée commutative). On appellera A-structure (de Maurer-Cartan) sur une variété différentiable  $V$  la donnée d'un  $\mathbb{R}$ -ADG $_c$  morphisme  $\omega : A \rightarrow \Omega_{\text{DR}}(V)$ , et on appellera concordance entre 2 telles structures  $\omega_0$  et  $\omega_1$  la donnée d'une A-structure  $\tilde{\omega} : A \rightarrow \Omega_{\text{DR}}(V \times I)$  (où  $I = [0, 1]$ ) induisant  $\omega_0$  et  $\omega_1$  par restriction à  $V \times \{0\}$  et  $V \times \{1\}$ . On dira plus généralement que 2 A-structures  $\omega_0$  et  $\omega_1$  sont concordantes si elles sont équivalentes pour la relation d'équivalence engendrée par l'existence d'une concordance.

EXEMPLE PRINCIPAL : Rappelons ([1]) que si  $\theta : A \rightarrow \Omega_{\text{DR}}(W)$  désigne une A-structure de Maurer-Cartan sur une variété différentiable  $W$ , et si  $\Gamma_\theta$  désigne le pseudogroupe des germes de difféomorphismes de  $W$  qui préservent  $\theta$ , toute  $\Gamma_\theta$ -structure  $C^\infty$  sur une variété  $V$  induit une A-structure de Maurer-Cartan sur  $V$ , et deux  $\Gamma_\theta$ -structures  $C^\infty$  concordantes au sens de Haefliger induisent des structures de Maurer-Cartan concordantes au sens ci-dessus, d'où une transformation naturelle

$$\lambda_\theta : \mathcal{F}_\theta(\cdot) \rightarrow \mathcal{F}_A(\cdot)$$

de l'ensemble des classes de concordance de  $\Gamma_\theta$ -structures dans l'ensemble des classes de concordance de A-structures, qui implique que la classification des A-structures fournit des résultats, au moins partiels et parfois complets, sur la classification des  $\Gamma_\theta$ -structures.



et 
$$A_k^*(K) = \text{Hom}_{\Sigma} (K, A_k^*(\Delta))$$

où  $A_k^*(\Delta)$  désigne la  $k$ -ADG<sub>C</sub> simpliciale telle que  $(A_k^*(\Delta))_n = A_k^*(\Delta^n)$  (algèbre des formes différentielles sur le simplexe type  $\Delta^n$ , à coefficients  $k$ -polynomiaux par rapport aux coordonnées barycentriques de  $\Delta^n$ ), les opérateurs de face et dégénérescence étant les plus naturels. Ces 2 foncteurs sont adjoints l'un de l'autre : on note  $\beta$  la bijection associée :

$$\beta : \text{Hom}_{k\text{-ADG}_C} (X, A_k(K)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\Sigma} (K, K_k(X)) \quad \text{qui, rappelons le,}$$

passé aux classes d'homotopie.

On définit de même le foncteur  $A_{\infty}(\cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}\text{-ADG}_C$  en remplaçant, dans la définition de  $A_{\mathbb{R}}(\cdot)$ , la  $\mathbb{R}$ -ADG<sub>C</sub> simpliciale  $A_{\mathbb{R}}(\Delta)$  par la  $\mathbb{R}$ -ADG simpliciale  $\Omega_{\text{DR}}(\Delta)$  définie par  $(\Omega_{\text{DR}}(\Delta))_n = \Omega_{\text{DR}}(\Delta^n)$  (algèbre de de Rham sur  $\Delta^n$ ), et on notera  $\gamma$  la flèche induite par l'inclusion naturelle

$$\gamma_0 : A_{\mathbb{R}}(\Delta) \hookrightarrow \Omega_{\text{DR}}(\Delta).$$

Si  $V$  est une variété  $C^{\infty}$ ,  $\delta : \Omega_{\text{DR}}(V) \rightarrow A_{\infty}(S^{\infty}(V))$  désignera le quasi-isomorphisme naturel.

L'inclusion naturelle  $\psi_0 : \mathbb{R}(t, dt) \rightarrow \Omega_{\text{DR}}(I)$  induit une application  $\psi : [A, X]_{\text{III}} \rightarrow [A, X]_{\text{II}}$  entre les classes d'homotopie de morphismes  $\omega : A \rightarrow X$  de  $\mathbb{R}\text{-ADG}_C$  obtenues respectivement en factorisant à travers  $X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(t, dt)$  et  $X \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{\text{DR}}(I)$ .

De même, les inclusions naturelles

$$\psi_0 : A_{\infty}(S(V)) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{\text{DR}}(I) \rightarrow A_{\infty}(S(V \times I)) \quad \text{et}$$

$$\psi_1 : \Omega_{\text{DR}}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{\text{DR}}(I) \rightarrow \Omega_{\text{DR}}(V \times I) \quad \text{si } V \text{ est une variété } C^{\infty},$$

induisent des applications notées  $\Psi : [A, A_{\infty}(S(V))]_{\text{II}} \rightarrow [A, A_{\infty}(S(V))]_{\text{I}}$  (resp.

$[A, \Omega_{\text{DR}}(V)]_{\text{II}} \rightarrow [A, \Omega_{\text{DR}}(V)]_{\text{I}} = \mathcal{J}_A(V)$ ) entre les classes d'homotopie de morphismes  $A \rightarrow A_{\infty}(S(V))$  obtenues respectivement par factorisation à travers  $A_{\infty}(S(V)) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{\text{DR}}(I)$  et  $A_{\infty}(S(V \times I))$  (resp. si  $V$  est une variété  $C^{\infty}$ , entre classes d'homotopie de morphismes  $A \rightarrow \Omega_{\text{DR}}(V)$  définies par factorisation à travers  $\Omega_{\text{DR}}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{\text{DR}}(I)$  ou  $\Omega_{\text{DR}}(V \times I)$ ).

Soit  $|\cdot| : \Sigma \rightarrow \text{Top}$  le foncteur réalisation géométrique de Milnor, adjoint à gauche du foncteur  $S(\cdot) : \text{Top} \rightarrow \Sigma$ . Posons :

$$BA = |K_{\mathbb{R}}(A)|$$

et rappelons (cf. par exemple May [6]) que l'adjonction précédente passe aux classes d'homotopie, que la transformation naturelle  $\varepsilon_1 : |S| \rightarrow |S(\cdot)|$  induit des équivalences d'homotopie, ainsi que  $\varepsilon_0 : |S(\cdot)| \rightarrow |S(\cdot)|_{\text{Top}}$  après restriction aux espaces ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe. On en déduit en composant l'équivalence d'homotopie  $SBA \xrightarrow{\sim} K_{\mathbb{R}}(A)$  avec l'adjonction  $[|K|, BA] \xrightarrow{\sim} [K, SBA]$ , que toute flèche  $| \cdot | : [K, K_{\mathbb{R}}(A)] \rightarrow [K, BA]$  est bijective.

Soit  $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sigma} A_{\mathbb{Q}}(S(V))$  un modèle minimal rationnel de  $V$  ( $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ ) est une  $\mathbb{Q}$ -ADG<sub>c</sub>, bien définie à isomorphisme près, et  $\sigma$  un  $\mathbb{Q}$ -quasi-isomorphisme, c'est-à-dire un homomorphisme induisant un isomorphisme en cohomologie, bien défini à III-homotopie près une fois fixé l'isomorphisme induit en cohomologie. Rappelons que  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  est alors un modèle de  $\Omega_{\text{DR}}(V)$  : il existe un  $\mathbb{R}$ -quasi-isomorphisme  $\rho : \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \rightarrow \Omega_{\text{DR}}(V)$  bien défini à III, donc a fortiori à II-homotopie près, une fois l'isomorphisme induit par  $\sigma$  en cohomologie fixé par le choix de la classe d'homotopie de  $\sigma$ . Rappelons que  $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$  est aussi un  $\mathbb{Q}$ -modèle minimal de  $A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$  et qu'il existe un  $\mathbb{Q}$ -quasi-isomorphisme naturel  $\tau : \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \rightarrow A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$ , bien défini à III, donc à II, homotopie près. On note encore  $\tau : \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \rightarrow A_{\mathbb{R}}K_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$  le  $\mathbb{R}$ -quasi-isomorphisme obtenu après passage aux réels. Posons enfin  $V_{\mathbb{Q}} = |K_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})|$ . [Si l'espace topologique  $V$  est nilpotent et a une cohomologie rationnelle de dimension finie en chaque degré,  $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$  a un nombre fini de générateurs en chaque degré  $V_{\mathbb{Q}}$  a même type d'homotopie que le  $\mathbb{Q}$ -localisé de  $V$ , et les générateurs de  $V_{\mathbb{Q}}$  s'interprètent comme éléments de  $\text{Hom}(\pi_*(V), \mathbb{Q})$ . Mais les définitions ci-dessus ont un sens même si l'espace  $V$  n'est pas nilpotent : cf. Halperin ([3]).]

L'homomorphisme  $\sigma : \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \rightarrow A_{\mathbb{Q}}(S(V))$  induit d'autre part  $K_{\mathbb{Q}}(\sigma) : K_{\mathbb{Q}}A_{\mathbb{Q}}SV \rightarrow K_{\mathbb{Q}}\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ . La transformation naturelle  $|S| \rightarrow K_{\mathbb{Q}}A_{\mathbb{Q}}$  associée à l'adjonction entre  $K_{\mathbb{Q}}$  et  $A_{\mathbb{Q}}$  fournit d'autre part une flèche  $SV \rightarrow K_{\mathbb{Q}}A_{\mathbb{Q}}SV$  qui, composée avec  $K_{\mathbb{Q}}(\sigma)$ , fournit

$$\mu : SV \rightarrow K_{\mathbb{Q}}\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$$

d'où  $|\mu| : |SV| \rightarrow V_{\mathbb{Q}}$ .

Notons  $u : \mathcal{S}_{\theta}(V) \xrightarrow{\cong} [\bar{V}, B\Gamma_{\theta}]$  l'application bijective de classification des  $\Gamma_{\theta}$ -structures par le classifiant de Haefliger ([4]). D'autre part, le foncteur  $[A, A_{\infty}S(\cdot)]_{\Gamma} : \text{Top} \rightarrow \text{Ens}$  est représentable, d'après le théorème de Brown ([5]), au moins après restriction aux espaces  $V$  ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe. Notons  $B'A$  un représentant de ce foncteur et  $v : [A, A_{\infty}S(V)]_{\Gamma} \rightarrow [\bar{V}, B'A]$  l'appli-

cation correspondante de classification (bijective si  $V$  a le type d'homotopie d'un CW-complexe) :  $\lambda_\theta$  est représentable, par une application continue  $B\Gamma_\theta \rightarrow B'A$ .

On vérifie sans peine, par construction, la commutativité de tous les carrés de ce diagramme.

### 3 - CAS D'UNE ALGÈBRE A NILPOTENTE.

La  $\mathbb{R}\text{-ADG}_C$   $A$  est dite nilpotente, si elle est libre et isomorphe au produit tensoriel gradué d'une algèbre minimale et d'une algèbre contractile  $A \simeq M \otimes C$  (avec différentielle produit :  $d_A = d_M \otimes 1 \pm 1 \otimes d_C$ ).

[Sullivan a démontré que si  $A$  est libre en tant qu'algèbre graduée, elle est automatiquement nilpotente dès lors qu'elle est 1-connexe ( $H^1(A) = 0$ )].

#### Théorème 1.-

- Si l'algèbre  $A$  est nilpotente,
- (i)  $B'A$  a même type d'homotopie que  $BA = |K_{\mathbb{R}}A|$ .
  - (ii)  $\mathcal{S}_A(V) \simeq [\bar{V}, BA]$  pour toute variété  $V$ .
  - (iii)  $[\bar{V}, BA] \simeq [\bar{V}_{\mathbb{Q}}, BA]$  pour tout espace  $V$  ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe.

On rappelle le

#### Lemme.-

- Supposons l'algèbre  $A$  nilpotente.
- (i) pour toute  $\mathbb{R}\text{-ADG}_C$   $X$ , les flèches  $\Psi : [A, X]_{III} \rightarrow [A, X]_{II}$  sont bijectives (c'est-à-dire que les III-homotopies et les II-homotopies coïncident).
  - (ii) pour tout espace topologique  $V$  (resp. toute variété différentiable  $V$ )  $\Psi : [A, A_\infty S(V)]_{II} \rightarrow [A, A_\infty S(V)]_I$  (resp.  $\Psi : [A, \Omega_{DR}(V)]_{II} \rightarrow [A, \Omega_{DR}(V)]_I$ ) est bijectif (c'est-à-dire que les II et I-homotopies coïncident).
  - (iii) tout quasi-isomorphisme  $f : X \rightarrow Y$  entre  $\mathbb{R}\text{-ADG}_C$  induit une bijection  $[A, X]_{III} \rightarrow [A, Y]_{III}$ .

Démonstration du théorème : Toutes les flèches  $\Psi$  et  $\Psi$  du diagramme sont bijectives d'après les parties (i) et (ii) du lemme-ci dessus. Les flèches  $\alpha, \gamma, \delta, \rho, \sigma$  et  $\tau$  sont bijectives d'après la partie (iii) du lemme. La flèche  $\beta$  est toujours bijective, en tant qu'adjonction, donc  $\mu = \beta\sigma^{-1}\beta^{-1}$  et  $|\mu|$  aussi. D'autre part, si  $V$  a le type d'homotopie d'un CW-complexe (ce qui est le cas de toute variété),  $v$  est bijectif, et  $|SV| \rightarrow V$  est une équivalence d'homotopie ( $\varepsilon$  est bijectif) : on en déduit une transformation naturelle bijective

$\varepsilon^{-1} | \cdot | \beta(\psi\gamma)^{-1} \psi^{-1} \nu^{-1}$  de  $[\cdot, B'A]$  dans  $[\cdot, BA]$  après restriction aux espaces  $V$  ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe : c'est-à-dire que  $BA \sim B'A$ . Toutes les flèches du diagramme, sauf peut être  $\lambda_\theta$ , sont donc alors bijectives, d'où le théorème.

Corollaire.-

Si  $A$  est une algèbre nilpotente, et  $V$  une variété  $C^\infty$ ,  $\mathcal{S}_A(V)$  ne dépend que du type d'homotopie rationnelle de  $V$  [On appelle ainsi le type d'homotopie de  $V_\mathbb{Q}$ , ou la classe d'isomorphie de  $\mathcal{M}_\mathbb{Q}$ , que  $V$  soit ou non un espace nilpotent].

Théorème 2.-

Si  $A$  est nilpotente,  $BA$  s'obtient à partir d'un point par une suite de fibrations principales images réciproques de fibrations de Serre

$$K(\mathbb{R}, n) \rightarrow PK(\mathbb{R}, n+1) \rightarrow K(\mathbb{R}, n+1).$$

En particulier, si  $A$  est minimale et admet un système de générateurs  $Y^* = \bigoplus_{n \geq 1} Y^n$ ,  $\pi_n(BA) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(Y^n, \mathbb{R})$  pour  $n \geq 2$ , et  $\pi_1(BA)$  est le groupe de Lie (groupe discret)

nilpotent (muni de la topologie discrète) associé à l'algèbre de Lie nilpotente  $\mathbb{R}$ -duale de  $Y^1$ . La tour de Postnikov de  $BA$  se lit sur la structure minimale de  $A$  comme pour les espaces rationnels.

Si  $A$  est nilpotente non minimale, on a plus généralement

$$\pi_n(BA) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H^n(Y^*, \partial), \mathbb{R}) \quad \text{pour } n \geq 2$$

tandis que  $\pi_1(BA)$  est le groupe de Lie nilpotent 1-connexe muni de la topologie discrète) associé à l'algèbre de Lie nilpotente  $\mathbb{R}$ -duale de  $H^1(Y^*, \partial)$ ,  $\partial$  désignant la différentielle  $Y^1 \rightarrow Y^2 \rightarrow \dots$  induite sur les générateurs de l'algèbre libre  $A = L(\bigoplus_{n \geq 1} Y^n)$  par la différentielle de  $A$ .

Supposons d'abord que  $A = (L_n^{\mathbb{R}}(Y), d=0)$  est l'algèbre graduée libre engendrée par un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $Y$  concentré en dimension  $n$ , avec différentielle 0. On a alors  $K_{\mathbb{R}}(A) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(Y, Z_{\mathbb{R}}^n(\Delta))$ , qui est en particulier un groupe abélien simplicial. On a, en outre, une suite exacte courte de groupes abéliens simpliciaux (donc une fibration de Kan) :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(Y, Z_{\mathbb{R}}^n(\Delta)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(Y, A_{\mathbb{R}}^n(\Delta)) \xrightarrow{d} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(Y, Z_{\mathbb{R}}^{n+1}(\Delta)) \rightarrow 0 .$$

Puisque  $A_{\mathbb{R}}^n(\Delta)$  est un espace vectoriel simplicial acyclique, la suite exacte d'homotopie de la fibration de Kan ci-dessus permet de démontrer, par récurrence sur  $n$ ,

que  $|K_{\mathbb{R}}(A)| = BA$  est un espace d'Eilenberg-Mac Lane  $K(Y^*, n)$  ( $Y^* = \mathbb{R}$ -dual de  $Y$ ), d'où le théorème dans ce cas particulier.

Dans le cas général,  $A$  s'obtient à partir d'une algèbre du type précédent par une suite d'extensions principales

$$A_{\alpha-1} \rightarrow (A_{\alpha} = A_{\alpha-1} \oplus_{\tau_{\alpha}} L_{n_{\alpha}}^{\mathbb{R}}(Y_{\alpha})) \rightarrow (L_{n_{\alpha}}^{\mathbb{R}}(Y_{\alpha}), d=0)$$

où  $\tau_{\alpha} : Y_{\alpha} \rightarrow Z^{n_{\alpha}+1}(A_{\alpha-1})$  décrit la restriction à  $Y_{\alpha}$  de la différentielle de  $A_{\alpha}$ . On a donc une somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} (L_{n_{\alpha}}^{\mathbb{R}}(Y_{\alpha}), d=0) & \xlongequal{\quad} & (L_{n_{\alpha}}^{\mathbb{R}}(Y_{\alpha}), d=0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_{\alpha+1} & \xleftarrow{\quad} & \text{contractile} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_{\alpha} & \xleftarrow{\tau_{\alpha}} & (L_{n_{\alpha}+1}^{\mathbb{R}}(Y_{\alpha}), d=0), \end{array}$$

que le foncteur  $B = |K_{\mathbb{R}}(\cdot)|$ , qui admet un adjoint du "bon" côté, transforme en un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} K(Y_{\alpha}^*, n_{\alpha}) & \xlongequal{\quad} & K(Y_{\alpha}^*, n_{\alpha}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BA_{\alpha+1} & \xrightarrow{\quad} & \text{contractile} \\ \downarrow & & \downarrow \\ BA_{\alpha} & \xrightarrow{B(\tau_{\alpha})} & (KY_{\alpha}^*, n_{\alpha+1}), \end{array}$$

d'où la première partie du théorème.

Si  $A$  est minimale, la suite de fibrations ci-dessus est alors exactement la tour de Postnikov de  $BA$ .

Si  $A \cong M \oplus C$  avec  $M$  minimale et  $C$  contractile, on sait - d'après Sullivan - que les indécomposables de  $M$  forment un espace vectoriel gradué isomorphe à  $H(Y^*, \partial)$  si  $Y^*$  constitue un système de générateurs de  $A$ . Puisque  $B(M \oplus C) \simeq BM \times BC$  et que  $BC$  est contractile, on en déduit la fin du théorème.

Remarque : Le théorème 2 permet une description complète des groupes d'homotopie de  $BA$  lorsque  $A$  est nilpotente. Il faut prendre garde cependant que la coho-



mologie, même réelle, de BA est très compliquée (on ne connaît pas  $H^*(K(\mathbb{R},n),\mathbb{R})$ ).

Exemples :

1) Si  $\theta : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow \Omega_{DR}(G)$  désigne l'inclusion, dans les formes différentielles d'un groupe de Lie G, de l'algèbre  $A = C^*(\mathcal{G})$  des formes différentielles invariants à gauche (cochaînes scalaires sur la  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de G), Haefliger a démontré [4] que l'on peut prendre pour  $B\Gamma_\theta$  l'espace total  $G \times_{G_d} EG_d$  du fibré de fibre G associé au fibré principal universel  $EG_d \rightarrow BG_d$  de G muni de la topologie discrète. Mais, ici, on sait que  $\Gamma_\theta$ -structures et structures de Maurer-Cartan coïncident, de sorte que l'on a encore :

$$BC^*(\mathcal{G}) \sim G \times_{G_d} EG_d .$$

Si le groupe G est contractile, on en déduit :

$BC^*(\mathcal{G}) = K(G_d, 1)$
---------------------------------

car  $G \times_{G_d} EG_d$  a alors même type d'homotopie que sa base : lorsque  $\mathcal{G}$  est une algèbre de Lie nilpotente, on retrouve ce résultat comme cas particulier du théorème 2. (Par contre, si G n'est pas contractile,  $BC^*(\mathcal{G}) \neq K(G_d, 1)$ , bien que  $A = C^*(\mathcal{G})$  soit encore une algèbre libre, ce qui prouve que l'hypothèse de nilpotence, dans l'énoncé du théorème 2, pourrait - au mieux - être remplacée par une hypothèse de résolubilité.

2) Pour  $A = (H^*(S^{2r+1}, \mathbb{R}), d = 0) = (\wedge_{2r+1}(\xi), d\xi = 0)$ , on obtient

$BA \sim K(\mathbb{R}, 2r+1)$	.
-------------------------------	---

Lorsque l'algèbre A n'est pas nilpotente, on peut cependant s'y ramener grâce au

Théorème 3.-

<p>Soit <math>\rho : A_1 \rightarrow A</math> un <math>\mathbb{R}</math>-ADG<sub>C</sub> morphisme tel que Ker <math>\rho</math> n'ait pas d'éléments en dimension <math>&lt; N</math>. L'application naturelle <math>\rho^* : \mathcal{F}_A(V) \rightarrow \mathcal{F}_{A_1}(V)</math> est alors</p> <p>{</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>bijjective si <math>\dim V \leq N-2</math></li> <li>surjective si <math>\dim V = N-1</math>.</li> </ul>
---

En particulier  $\rho$  induit un homomorphisme

$$B\rho_* : \pi_n(BA) \rightarrow \pi_n(BA_1) \text{ qui est}$$

$$\begin{cases} \text{bijectif pour } n \leq N-2 \\ \text{surjectif pour } n = N-1. \end{cases}$$

En effet,  $\text{Hom}(A, \Omega_{DR}^*(V)) \xrightarrow{\rho_*} \text{Hom}(A_1, \Omega_{DR}^*(V))$  est bijectif pour  $\dim V < N$ , tandis que  $\text{Hom}(A, \Omega_{DR}^*(V \times I)) \rightarrow \text{Hom}(A_1, \Omega_{DR}^*(V \times I))$  est bijectif pour  $\dim V+1 < N$ , d'où le théorème.

Exemples :

1)  $A = (\mathbb{H}^*(S^{2r}, \mathbb{R}), d=0) = (S_{2r}(\xi)/\xi_2, d\xi=0)$ .

On peut alors prendre pour  $A_1$  le modèle minimal réel de  $S^{2r}$ , avec  $N = 4r-1$  :

$$A_1 = S_{2r}(\xi) \otimes \Lambda_{4r-1}(\eta), \quad d\xi=0, \quad d\eta = \xi^2.$$

- . pour  $r \geq 2$ ,  $\pi_{2r}(BA) \cong \mathbb{R}$   
 $\pi_i(BA) = 0$  pour  $i \neq 2r, i \leq 4r-2$
- . pour  $r = 1$ ,  $\pi_1(BA) = 0$ ,  
 et il existe une surjection  $\pi_2(BA) \rightarrow \mathbb{R}$ .

2)  $A = (\mathbb{H}^*(P^r(\mathbb{C}), \mathbb{R}), d=0) = (S_2(\xi)/\xi^{r+1}, d\xi=0)$  : on peut prendre pour  $A_1$  le modèle minimal réel  $(S_2(\xi) \otimes \Lambda_{2r+1}(\eta), d\xi=0, d\eta = \xi^{r+1})$  de  $P^r(\mathbb{C})$ , avec  $N = 2r+1$ . On en déduit :

$$\begin{cases} \text{pour } r \geq 2 & \pi_2(BA) = \mathbb{R} \\ & \pi_i(BA) = 0 \text{ pour } i \neq 2, i \leq 2r. \end{cases}$$

3)  $A = \Lambda_1(\xi) \otimes \xi_2(d\xi)/_{(d\xi)^{r+1}}$  : on peut alors prendre pour  $A_1$  l'algèbre nilpotente

$$(\Lambda_1(\xi) \otimes S_2(d\xi) \otimes \Lambda_{2r+1}(\eta), \quad d\eta = (d\xi)^{r+1})$$

avec  $N = 2r+1$ . Comme cette algèbre est un modèle réel de  $S^{2r+1}$  (qui reflète la fibration de Hopf), on en déduit

$$\pi_i(BA) = 0 \text{ pour } i \leq 2r.$$

Remarque :

Dans tous ces exemples,  $\Gamma_\theta = \Gamma_{\theta, \rho}$  quand on prend pour  $\theta : A \rightarrow \Omega_{DR}(W)$  les morphismes suivants :

- exemple 1 :  $W =$  variété orientable de dimension  $2r$   $\theta(\xi) =$  forme volume sur  $W$
- exemple 2 :  $W =$  variété symplectique  $\theta(\xi) =$  forme symplectique sur  $W$
- exemple 3 :  $W =$  variété de dimension  $2r+1$  admettant une structure de contact  $\theta(\xi) =$  forme de contact sur  $W$

(Plus généralement,  $\Gamma_\theta = \Gamma_{\theta, \rho}$  chaque fois que  $\text{Im } \theta = \text{Im } \theta, \rho$ , en particulier pour  $\rho$  surjectif).

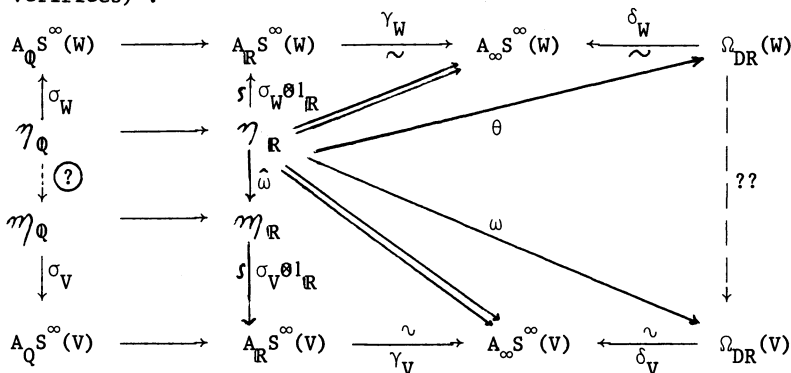
Conjecture :  $B\Gamma_\theta \sim BA$  dans chacun des 3 cas ci-dessus. Cette conjecture se justifie par le fait que les notions de  $\Gamma_\theta$ -feuilletages et  $A$ -feuilletages de Maurer-Cartan coïncident alors, comme il résulte immédiatement de théorèmes de Darboux (cf. Proposition du § 2 de [1]). Elle est vérifiée si  $A = C^*(\mathfrak{g})$  pour toute  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il n'y a, par contre, aucun espoir pour qu'elle soit vérifiée dans le cas général.

4 - RETOUR SUR LA RATIONNALITÉ (cf. [1], § 3).

Supposons que  $A = \mathcal{M}_R$  soit le modèle minimal réel d'une variété  $W$ , et que  $\theta : \mathcal{M}_R \rightarrow \Omega_{DR}(W)$  soit maintenant un quasi-isomorphisme, rationnel au sens suivant :

$$\delta_W \circ \theta \sim \gamma_W \circ (\sigma_W \theta 1_R) .$$

Dans le diagramme ci-dessous (toutes les notions de I, II et III-homotopies coïncident, puisque  $A$  est minimale ; les hypothèses des théorèmes 1 et 2 sont vérifiées) :



Tout morphisme de Maurer-Cartan  $\omega : \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \rightarrow \Omega_{\text{DR}}(V)$  se relève, de façon unique à homotopie près, en un homomorphisme  $\hat{\omega} : \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  tel que

$\gamma_V \circ (\sigma_V \otimes 1_{\mathbb{R}}) \circ \omega \sim \delta_V \circ \omega$ , et le problème de la rationalité de  $\omega$  (à savoir de l'existence d'un morphisme  $\omega_0 : \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$  tel que  $\hat{\omega} \sim (\omega_0 \otimes 1_{\mathbb{R}})$ ) s'interprète maintenant, avec les espaces classifiants, de la façon suivante : les morphismes  $\theta$  et  $\omega$  ont des applications classifiantes,  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{\omega}$ , bien définies à homotopie près, qui se factorisent, en vertu de la partie (iii) du théorème 1, à travers  $W_{\mathbb{Q}}$  et  $V_{\mathbb{Q}}$  en des applications classifiantes  $\tilde{\theta}_{\mathbb{Q}}$  et  $\tilde{\omega}_{\mathbb{Q}}$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 W & \xleftarrow{\varepsilon_W} & |SW| & \xrightarrow{|\mu_W|} & W_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{\mathbb{Q}}} & BA = |K_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}})| \\
 \uparrow \text{??} & & \uparrow \text{??} & & \uparrow \text{?} & \nearrow \tilde{\omega}_{\mathbb{Q}} & \uparrow |K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega})| \\
 V & \xleftarrow{\varepsilon_V} & |SV| & \xrightarrow{|\mu_V|} & V_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tilde{\omega}_{\mathbb{Q}}} & |K_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}})|
 \end{array}$$

On définit  $\tilde{\rho}_{\mathbb{Q}}$  à partir de  $\rho : \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \rightarrow \Omega_{\text{DR}}(V)$  de la même façon que  $\tilde{\theta}_{\mathbb{Q}}$  à partir de  $\theta$ , et l'existence de  $\hat{\omega} : \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  signifie topologiquement que  $\tilde{\omega}_{\mathbb{Q}}$  se factorise, à homotopie près à travers  $|K_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}})| : \tilde{\omega}_{\mathbb{Q}} \sim |K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega})| \circ \tilde{\mu}_{\mathbb{Q}}$ .

Lemme. -

- Les 2 propositions suivantes sont équivalentes :
- (i)  $\omega$  est rationnelle.
  - (ii)  $\tilde{\omega}_{\mathbb{Q}}$  se factorise, à homotopie près, à travers  $W_{\mathbb{Q}}$ .

Remarque : La factorisation de  $\tilde{\omega}_{\mathbb{Q}}$  à travers  $W_{\mathbb{Q}}$  n'est en fait que le premier pas vers l'existence d'une application différentiable  $f : V \rightarrow W$  telle que  $f^* \theta = \omega$ .

Tout d'abord, la commutativité, à homotopie près, du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 W_{\mathbb{Q}} = |K_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})| & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{\mathbb{Q}}} & |K_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}})| = BA \\
 \uparrow a & & \uparrow |K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega})| \\
 V_{\mathbb{Q}} = |K_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})| & \xrightarrow{\tilde{\mu}_{\mathbb{Q}}} & |K_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}})|
 \end{array}$$

équivaut, puisque les espaces  $V$  et  $W$  sont des variétés et ont donc des types d'homotopie de CW-complexes, à celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 K_{\mathbb{Q}}(\eta_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\nu_W} & K_{\mathbb{R}}(\eta_{\mathbb{R}}) \\
 \uparrow a_1 & & \uparrow K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega}) \\
 K_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\nu_V} & K_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}})
 \end{array}$$

où  $\nu_W : \text{Hom}(\eta_{\mathbb{Q}}, A_{\mathbb{Q}}(\underline{\Delta})) \rightarrow \text{Hom}(\eta_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}}(\underline{\Delta}))$  est l'application induite par  $\cdot \otimes_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}$ , et de même pour  $\nu_V$ . Appliquant alors le foncteur  $A_{\mathbb{Q}}$  à ce dernier diagramme, sa commutativité à homotopie près implique celle (à homotopie près) du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \boxed{\mathbb{Q}\text{-ADG}_c} & \xleftrightarrow{\quad} & \boxed{\mathbb{R}\text{-ADG}_c} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 \eta_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{Q}}(\eta_{\mathbb{Q}}) & \xleftarrow{A_{\mathbb{Q}}(\nu_W)} & A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{R}}(\eta_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}} & A_{\mathbb{R}}K_{\mathbb{R}}(\eta_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} \eta_{\mathbb{R}} \\
 \downarrow b & & \downarrow A_{\mathbb{Q}}(a_1) & & \downarrow A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega}) & & \downarrow A_{\mathbb{R}}K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega}) \\
 \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}) & \xleftarrow{A_{\mathbb{Q}}(\nu_V)} & A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}} & A_{\mathbb{R}}K_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \\
 & & & & & & \downarrow \hat{\omega}
 \end{array}$$

(Rappelons que toute flèche  $A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{Q}}\eta_{\mathbb{Q}} \rightarrow A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{Q}}\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$  se relève, à homotopie près, en une flèche  $\eta_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{b} \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$  puisque  $\eta_{\mathbb{Q}}$  est minimale, et que  $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \rightarrow A_{\mathbb{Q}}K_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$  est un quasi-isomorphisme) : c'est dire que  $\omega$  est rationnelle.

Réciproquement, supposons  $\omega$  rationnelle : la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\mathbb{Q}\text{-ADG}_c} & \xleftrightarrow{\quad} & \boxed{\mathbb{R}\text{-ADG}_c} \\
 \eta_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\quad} & \eta_{\mathbb{R}} \\
 \downarrow \omega_{\mathbb{Q}} & & \downarrow \omega_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} \sim \hat{\omega} \\
 \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{M}_{\mathbb{R}}
 \end{array}$$

implique celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 K_{\mathbb{Q}}(\eta_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\nu_W} & K_{\mathbb{R}}(\eta_{\mathbb{R}}) \\
 \uparrow K_{\mathbb{Q}}(\omega_0) & & \uparrow K_{\mathbb{R}}(\omega_0 \otimes 1_{\mathbb{R}}) \sim K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega}) \\
 K_{\mathbb{Q}}(\eta_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\nu_V} & K_{\mathbb{R}}(\eta_{\mathbb{R}})
 \end{array}$$

donc, à homotopie près, celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 W_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{|\nu_W| \sim \hat{\theta}_{\mathbb{Q}}} & |K_{\mathbb{R}}(\eta_{\mathbb{R}})| \\
 \uparrow |K_{\mathbb{Q}}(\omega_0)| & & \uparrow |K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega})| \\
 V_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{|\nu_V| \sim \hat{\mu}_{\mathbb{Q}}} & |K_{\mathbb{R}}(\eta_{\mathbb{R}})|
 \end{array}$$

d'où le lemme.

Supposons maintenant que ce relèvement de  $|K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega})|$  ait déjà été fait jusqu'à l'étage  $|K_{\mathbb{Q}}\eta_{\mathbb{Q}}(<i)| = W_{\mathbb{Q}}(<i)$  de la décomposition de  $W_{\mathbb{Q}}$  en fibrations de Postnikov  $|K(X_i^*, n_i)| \rightarrow W_{\mathbb{Q}}(<i) \xrightarrow{P_i} W_{\mathbb{Q}}(<i)$  ( $X_i$  désignant un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel supposé de dimension finie), correspondant à l'extension

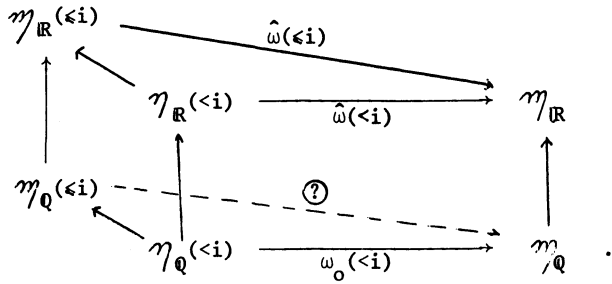
$$(L_{n_i}^{\mathbb{Q}}(X_i), d = 0) \longleftarrow \eta_{\mathbb{Q}}(<i) \longleftarrow \eta_{\mathbb{Q}}(<i)$$

(cf. notations de [2], § 3).

C'est dire qu'il existe  $K_{\mathbb{Q}}(\hat{\omega}(<i))$  rendant le diagramme ci-dessous homotopiquement commutatif

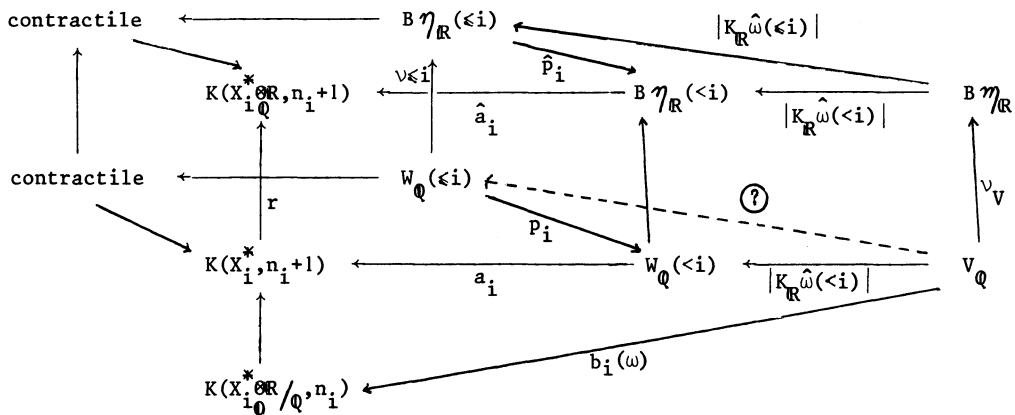
$$\begin{array}{ccccc}
 B\eta_{\mathbb{R}}(<i) & \xleftarrow{|K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega} <i)|} & & & \\
 \uparrow \nu_{<i} & \searrow \hat{P}_i & B\eta_{\mathbb{R}}(<i) & \xleftarrow{|K_{\mathbb{R}}\hat{\omega}(<i)|} & |K_{\mathbb{R}}\eta_{\mathbb{R}}| \\
 W_{\mathbb{Q}}(<i) & \xleftarrow{P_i} & W_{\mathbb{Q}}(<i) & \xleftarrow{?} & V_{\mathbb{Q}} \\
 & & \uparrow \nu_{<i} & & \uparrow \nu_V \\
 & & & & |K_{\mathbb{Q}}\hat{\omega}(<i)|
 \end{array}$$

D'après le lemme précédent, l'existence d'une application continue  $V_{\mathbb{Q}} \rightarrow W_{\mathbb{Q}}(<i)$  conservant la commutativité à homotopie près du diagramme équivaut à celle d'une flèche  $\eta_{\mathbb{Q}}(<i) \rightarrow \eta_{\mathbb{Q}}$  ayant des propriétés analogues dans le diagramme ci-dessous



Rappelons, d'après [1], § 3, qu'il faut et il suffit pour cela que  $[\Omega_i(\omega)] = 0 \in H^{n_i}(V, X_i^* \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cong H^{n_i}(V_{\mathbb{Q}}, X_i^* \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Q})$ .

D'autre part, l'obstruction à relever  $|K_{\mathbb{Q}} \hat{\omega}(\leq i)| : V_{\mathbb{Q}} \rightarrow W_{\mathbb{Q}}(\leq i)$  en une application  $V_{\mathbb{Q}} \rightarrow W_{\mathbb{Q}}(\leq i)$  est, a priori, égale à la classe de cohomologie  $[a_i \circ |K_{\mathbb{Q}}(\hat{\omega}(\leq i))|] \in H^{n_i+1}(V_{\mathbb{Q}}, X_i^*)$ ,  $a_i$  désignant le  $i^{\text{ème}}$  invariant de Postnikov de  $W_{\mathbb{Q}}$ ; mais, en fait,  $a_i \circ |K_{\mathbb{Q}}(\hat{\omega}(\leq i))|$  se factorise à homotopie près en une application  $b_i(\omega)$  à travers la fibre homotopique de  $r : K(X_i^*, n_i+1) \rightarrow K(X_i^* \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Q}, n_i+1)$  puisque le relèvement  $|K_{\mathbb{R}}(\hat{\omega}(\leq i))|$  de  $|K_{\mathbb{Q}} \hat{\omega}(\leq i)|$  est supposé exister. La suite exacte d'homotopie induite par  $r$  prouve que la fibre homotopique de  $r$  est un espace  $K(X_i^* \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Q}, n_i)$  de sorte que l'obstruction topologique cherchée appartient en fait à  $H^{n_i}(V_{\mathbb{Q}}, X_i^* \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cong H^{n_i}(V, \mathbb{R}) / H^{n_i}(V, \mathbb{Q}) \otimes X_i^*$ . On en déduit le :



Théorème 4.-

Les deux obstructions algébrique et topologique ainsi définies dans  $H^{n_i}(V_{\mathbb{Q}}, X_i^* \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Q})$  coïncident.

- [1] D. LEHMANN - Structures de Maurer-Cartan et  $\Gamma_\theta$ -structures  
partie I : feuilletages de Maurer-Cartan (à paraître).
- [2] D. LEHMANN - Théorie homotopique des formes différentielles (d'après  
Sullivan). Astérisque n° 45, 1977.
- [3] S. HALPERIN - Lectures on minimal models.  
(Notes minéographiées - Univ. de Lille I - 1977).
- [4] A. HAEFLIGER - Homotopy and integrability.  
(Lecture Notes - Springer 1970).
- [5] A. HAEFLIGER - Feuilletages sur les variétés ouvertes,  
Topology 9 (1970).
- [6] J.P. MAY - Simplicial objects in algebraic topology.  
(Van Nostrand - 1967).

ERA au CNRS n° 07-590 - U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées  
Université des Sciences et Techniques de Lille I - 59655 - VILLENEUVE D'ASCQ  
CEDEX