Astérisque

YVES FÉLIX

Espaces formels et Π-formels

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 96-108
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__96_0>

ESPACES FORMELS ET Π-FORMELS

Yves FÉLIX (*)

I - DÉFINITIONS ET EXEMPLES

A chaque C.W.-complexe 1-connexe de type fini X, on peut associer canoniquement 2 modèles minimaux. Le premier L_X, dit de Quillen ([Q]), est une a.l.d.g. (algèbre de Lie différentielle graduée) $(\mathbb{L}(V),d)$ vérifiant $V = s^{-1}\tilde{H}_*(X;Q)$ et $H_*(\mathbb{L}(V),d) = \pi_*(\Omega X) \otimes Q$. La différentielle d se décompose sous la forme $d = d_2 + d_3 + \ldots$ où $d_i(V) \subset \mathbb{L}^i(V)$. $[\mathbb{L}^i(V)$: crochets de longueur $i]$. d_2 munit l'espace vectoriel dual $(sV)^{\#}$ d'une structure d'algèbre isomorphe à $\tilde{H}^*(X;Q)$. Le second modèle, $\mathcal{M}_X$, construit par Sullivan ([Su]), est une a.d.g.c. (algèbre différentielle graduée commutative) $(\Lambda Z,d)$ vérifiant $Z^* = |\pi_*(X) \otimes Q|^{\#}$et $H^*(\Lambda Z,d) = H^*(X;Q)$. De nouveau, la différentielle d se décompose sous la forme $d = d_2 + d_3 + \ldots$ où $d_i(Z) \subset \Lambda^i Z$ $[\Lambda^i Z$: mots de longueur $i]$. d_2 munit $(s^{-1}Z)^{\#}$ d'un crochet qui en fait une algèbre de Lie graduée isomorphe à $\pi_*(\Omega X) \otimes Q$.

Ces deux modèles sont reliés par les foncteurs C et L de Quillen ([Q], [B-L]). Si (A,d) est une algèbre différentielle graduée commutative de type fini, L(A,d) désigne les primitifs de la cobar construction sur la coalgèbre duale. $L(A,d) = (\mathbb{L}(s^{-1}A^{\#}),d)$. Si (L,∂) est une a.l.g.d. , $C(L,\partial)$ désigne l'algèbre des cochaînes sur L .

$$C(L,\partial) = (\Lambda(sL^{\#}),d)$$

(*) Chercheur qualifié F.N.R.S.

PROPOSITION.- Il existe des quasi-isomorphismes

$$(\Lambda Z,d) \xrightarrow{\sim} C(\mathbb{L}(V),d)$$

$$(\mathbb{L}(V),d) \xrightarrow{\sim} L((\Lambda Z,d)) \ .$$

Pour plus de détails, le lecteur est invité à se réferrer à [Su], [Q], [H], [B-L], [M-N] ou [F2].

DÉFINITION.- Un espace X est dit formel (resp. π-formel) s'il existe un quasi-isomorphisme $\mathcal{M}_X \to (H^*(X;Q),0)$ (resp. $L_X \to (\pi_*(\Omega X) \otimes Q,0)$).

PROPOSITION.- [M-N] [Su] . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) X est formel,
2) L_X a une différentielle purement quadratique,
3) $L_X \xrightarrow{\sim} L(H^*(X;Q),0)$.

De façon duale, les conditions suivantes sont équivalentes :

1') X est π-formel,
2') $\mathcal{M}_X$ a une différentielle purement quadratique,
3') $\mathcal{M}_X \xrightarrow{\sim} C(\pi_*(\Omega X) \otimes Q, 0)$.

Un espace formel est entièrement défini par sa cohomologie, un espace π-formel par son homotopie.

EXEMPLES D'ESPACES FORMELS.

a) Les variétés kälheriennes compactes connexes [D].

b) Les sphères, les espaces $K(Z,n)$, tout wedge et produit d'espaces formels, toute somme connexe de variétés formelles de même dimension.

c) Tout squelette d'un C.W.-complexe formel instable ; tout retracte d'un espace formel.

d) Tout espace dont la cohomologie est le quotient d'une algèbre symétrique libre par une suite régulière de relations (nombreux espaces homogènes [Su]).

EXEMPLES D'ESPACES π-FORMELS.

1) Les sphères, les espaces $K(Z,n)$, tout wedge et produit d'espaces π-formels.

2) Les étages de Postnikov d'un espace π-formel.

3) Tout espace obtenu en rajoutant une cellule à un espace π-formel X le long d'une application $f : S^{n-1} \to X$ telle que l'application induite $X \xrightarrow{f} X \cup_f e^n$ soit surjective en homotopie rationnelle.

4) Tout espace dont l'homotopie est quotient d'une algèbre de Lie libre par une

suite "régulière" de relations $\left[\text{exemple : } S^3_a \vee S^3_b \vee S^3_c \cup_{\omega_1} e^8 \cup_{\omega_2} e^8 \text{ ; } \omega_1 = [a[b,c]],\ \omega_2 = [c,[b,c]].\right]$. Une suite de relations α_i dans une algèbre de Lie L est dite régulière, ou un ensemble fortement libre [An], si les 2 conditions suivantes sont vérifiées

1) $UL \supset Q<\alpha_i>$

2) $UL \simeq Q<\alpha_i) * U(L/(\alpha_i))$ comme espace vectoriel gradué.

Dans [An], D. Anick donne des critères explicites pour qu'une suite soit fortement libre. Ainsi par exemple la suite

$$\alpha_n = [\text{ad } y \ \text{ad}^{n-1} x[x,y], [x,y]] \qquad n \geq 0$$

est une suite fortement libre dans $\mathbb{L}(x,y)$. L'espace $S^3_x \vee S^3_y \cup_n (\cup_{\alpha_n} e_n)$ est un espace π-formel.

DÉVELOPPEMENT DE L'EXEMPLE 3.

La détermination de ces applications f a fait l'objet d'une étude plus générale de J.M. Lemaire ([Le]). Le problème posé était le suivant : soit X un C.W.-complexe, $\alpha = S^p \to X$ une application continue. Sous quelles conditions a-t-on $\pi_*(c_\alpha) \otimes Q = \pi_*(X) \otimes Q/(\alpha)$? Pareille situation correspond à un "meurtre" (celui de la classe α), "parfait" (tuer la classe α ne fait apparaître aucune nouvelle classe d'homotopie).Le premier exemple de meurtre parfait est dû à Labute.

PROPOSITION [La] .- Si on rattache à un wedge de sphères impaires une cellule le long d'une application non rationnellement homotope à zéro, on a toujours un crime parfait.

Dans [Le] et dans [An], le lecteur intéressé peut trouver des critères explicites pour qu'un meurtre soit parfait.

II - AUTOMORPHISMES DE GRADUATION

Soit H une a.g.c. Les automorphismes φ_t de H définis par $\varphi_t(x) = t^{|x|}x$, $x \in H$, $t \in Q \setminus \{0, \pm 1\}$ s'appellent les automorphismes de graduation de H.

THÉORÈME.- ([Su], [Sh]).

Soit X un C.W.-complexe nilpotent de type fini, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) X est formel ,
2) $\exists t \in Q \setminus (0, \pm 1)$ avec φ_t réalisable par un automorphisme de X_o ,
3) Le morphisme canonique $\mathrm{Aut}(X_o) \to \mathrm{Aut}\, H(X_o;Q)$ est surjectif.

III - LE PRINCIPAL OUTIL : LE MODÈLE BIGRADUÉ D'HALPERIN-STASHEFF ([H-S])

Le modèle bigradué d'une a.g.c. H est une résolution de H par une a.d.g.c. libre $(\Lambda Z,d)$ dans le sens de Tate-Jozefiak [Jo]. $(\Lambda Z,d)$ est une a.d. bigraduée $(Z = \bigoplus_{p\geq 0} Z_p)$ munie d'un quasi-isomorphisme $p : (\Lambda Z,d) \to (H,0)$ et vérifiant

1) $H_+(\Lambda Z,d) = 0$
2) $d(Z^p_m) \subset (\Lambda^{\geq 2} Z)^{p+1}_{n-1}$.

L'étude de ce modèle permet d'établir diverses propriétés des espaces formels ([H-S]).

Propriété 1 : Tous les produits de Massey définis et d'ordre supérieur à 3 sont nuls.

Propriété 2 : L'homomorphisme de Hurewicz
$\pi_*(X) \otimes Q \longrightarrow H_*(X;Q)$ a pour image les primitifs de $H_*(X;Q)$ pour sa structure de coalgèbre.

Propriété 3 : La suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration $\Omega X \to EX \to X$
$E_2 = \mathrm{Ext}_H(Q,Q) \Longrightarrow H_*(\Omega X;Q)$ collapse au terme E_2 .

Si maintenant (A,d_A) est une a.d.g.c. de cohomologie H, alors il existe une différentielle D sur ΛZ et un quasi-isomorphisme $\varphi : (\Lambda Z,D) \to (A,d_A)$ vérifiant

$$D = d + \sum_{i=2}^{\infty} d_i \quad \text{où} \quad d_i(Z_p) \subset (\Lambda Z)_{p-i} .$$

Pareil modèle s'appelle un modèle filtré de (A,d_A).

Les déformations d_i "représentent" les opérations cohomologiques d'ordre supérieur. Un exemple illustrerait mieux ce propos. Soit $(\Lambda Z,d)$ le modèle bigradué de $H(S^3 \vee S^3 \vee S^8 ; Q)$.

Z_o : a,b,u $|a| = |b| = 3$, $|u| = 8$

Z_1 : y, v_1, v_2, v_3 $dy = ab$, $dv_1 = au$, $dv_2 = bu$, $dv_3 = u^2$

Z_2 : z ,... $dz = ya$.

ya est un cocycle représentant le triple produit de Massey $\langle a,b,a\rangle$. Dans $(\Lambda Z,d)$, il est nul. Dans $(\Lambda Z,D)$ où $D = d + d_2$ avec $d_2 z = u$, il n'est plus nul. Il est rendu cohomologue à u. $(\Lambda Z,D)$ est en fait le modèle filtré de l'espace $S^3_a \vee S^3_b \underset{\omega}{\cup} e^8$.

Point de vue dual : Une construction du modèle bigradué et de modèles filtrés d'une algèbre de Lie π a été faite par Oukili avec des résultats similaires [ou].

IV - OBSTRUCTIONS A LA FORMALITÉ

Soit H une a.g.c. et $(\Lambda Z,d)$ son modèle bigradué. Soit X un espace de cohomologie rationnelle H et $(\Lambda Z,D)$ un modèle filtré de X.

PROPOSITION [H-S]. - X est formel ssi il existe un isomorphisme $\psi : (\Lambda Z,d) \leftarrow (\Lambda Z,D)$ de la forme $\psi = 1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$ où $\psi_i(Z_p) \subset (\Lambda Z)_{p-i}$.

Ecrivons $D = d + d_2 + d_3 + \dots$ où $d_i(Z_p) \subset (\Lambda Z)_{p-i}$.

d_2 est une dérivation de ΛZ commutant à d. L'existence d'un ψ vérifiant $\psi D = d\psi$ entraîne que $d_2 = d\,\psi_1 - \psi_1\, d$.

Considérons l'algèbre de Lie graduée $\mathrm{Der}^p_q(\Lambda Z)$. d la munit d'une différentielle $\tilde{d}$ par $\tilde{d}(\theta) = d\theta - (-1)^{|\theta|}\theta d$. d_2 est un cocycle de cette algèbre de Lie. S'il existe un ψ, il doit être cohomologue à zéro.

$$d_2 = d\,\psi_1 - \psi_1\, d \iff [d_2] = 0 \text{ dans } H^1_2(\mathrm{Der}(\Lambda Z),\tilde{d})$$

$[d_2]$ représente la première obstruction $O_1(X)$ à la formalité de X.

Si $[d_2] = 0$, alors X admet un modèle du type $(\Lambda Z, e^{\psi_1} D e^{-\psi_1})$ avec $e^{\psi_1} D e^{-\psi_1} = d + d_3 + \dots$. La classe $[d_3]$ dans $H^1_3(\mathrm{Der}(\Lambda Z), \tilde{d})$ fournit une seconde obstruction $O_2(X)$. On obtient de cette façon une suite $O_p(X)$ d'obstructions naturelles, ne dépendant pas des choix antérieurs ([Fl],[H-S]).

Leur étude permit d'exhiber de nombreux critères de formalité ([H-S], [M-N], [S-S], [Fl], [P],...) . Citons en deux :

Critère 1 : ([H-S]) Si X est un C.W.-complexe n-connexe et de dimension $\leq 3n+1$, alors X est formel.

Critère 2 : ([M-N]) Si X est une variété n-connexe de dimension $\leq 4n+1$, alors X est formel.

Ces obstructions ont été construites de deux autres façons. La première est due à Lemaire et Sigrist ([L-S]) et se fait comme suit : soit H une a.g.c. Notons $L_H = \mathcal{L}(H,0)$ un modèle de Quillen de l'espace formel de cohomologie H. $L_H=(L(V),d_2)$ Tout espace X de cohomologie H admet un modèle L_X de la forme $L_X = (\mathbb{L}(V),\ d_2 + d_3 + d_4 + \dots)$ où $d_i(V) \subset \mathbb{L}^i(V)$. d_3 est une dérivation de $\mathbb{L}(V)$ commutant à d_2. C'est donc un cycle de l'a.l.d. $(\mathrm{Der}^q_p(\mathbb{L}(V), [\ ,d_2])$. Les classes $[d_i] \in H^{-1}_{i-1}$ $(\mathrm{Der}(\mathbb{L}(V)), [\ ,d_2]$ fournissent une suite d'obstructions à la formalité, de la même façon que ci-dessus.

Par le même principe que [H-S], Stasheff et Schlessinger ont construit une nouvelle suite d'obstructions en travaillant sur l'algèbre $C(\mathcal{L}(H,0)) = (\Lambda\,\mathbb{L}(V),d)$ ([S-S], [Ta]). Ces obstructions appartiennent à l'espace $H^1_{\geq 2}(\mathrm{Der}\ C(\mathcal{L}(H,0)))$.

L'existence d'un quasi-isomorphisme bigradué $(\Lambda Z,d) \to C(\mathcal{L}(H,0))$ montre ([S-S]) que les obstructions du premier et du troisième type sont les mêmes. Quant aux obstructions du second et du troisième type, un simple calcul sur le foncteur C montre qu'elles sont les mêmes.

La meilleure façon de décrire ces obstructions consiste finalement à introduire les cohomologies de Hochschild et de Harrison de H à coefficients dans H, [Ta] Hosch(H,H) et Harr(H,H). Hosch(H,H) désigne la cohomologie du complexe

$$\mathrm{Hom}(\otimes^p \bar{H},\ H) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Hom}(\otimes^{p+1} \bar{H},\ H) \longrightarrow \dots\dots$$

$$\partial f(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_{p+1}) = \lambda_1\ f(\lambda_2 \otimes \dots \otimes \lambda_{p+1}) + \sum_{i=1}^{p} f(\bar{\lambda}_1 \otimes \dots \otimes \bar{\lambda}_i\ \lambda_{i+1} \dots \lambda_{p+1})$$
$$+ f(\bar{\lambda}_1 \otimes \dots \otimes \bar{\lambda}_p)\ \lambda_{p+1}\ .$$

$[\bar{H}$ = idéal d'augmentation de H, $\bar{\lambda}_i = (-1)^{|\lambda_i|-1}\ \lambda_i]$.

La cohomologie de Harrison est celle du sous-complexe

$$\mathrm{Hom}_s(\otimes^p \bar{H}\ ,\ H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_s(\otimes^{p+1} \bar{H}\ ,\ H) \longrightarrow \dots\dots$$

où l'indice s signifie que les applications linéaires s'annulent sur les décomposables du shuffle produit.

Munissons l'élément $h_1 \otimes \dots \otimes h_p$ du degré $(\sum |h_i|) - p+1$. Le complexe de Harrison se décompose en sous complexes

$$\mathrm{Hom}_s^q(\otimes^p \bar{H}, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_s^{q+1}(\otimes^{p+1} \bar{H}, H) \longrightarrow \dots$$

dont la cohomologie se notera $\mathrm{Harr}^{p-1,q}(H,H)$.

A partir des isomorphismes $\mathrm{Hom}_s^q(\otimes^p \bar{H} , \bar{H}) \simeq \mathrm{Der}_{p-1}^{-q}(L(\bar{H}))$ on montre facilement que le complexe de Harrison est isomorphe au complexe. $(\mathrm{Der}\,(L(\bar{H}), [\ ,d_2]))$.

Les obstructions $O_i(X)$ appartiennent donc aux espaces $\mathrm{Harr}^{i+1,1}(H,H)$.

PROPOSITION 1.- Si $H^1_{\leq 2}(\mathrm{Der}(\Lambda Z), \tilde{d}) = \mathrm{Harr}^{\geq 2,1}(H,H) = 0$, alors tout espace de cohomologie H est formel, on dit alors que H est intrinsèquement formelle.

La réciproque n'est pas vrai : il se peut que H soit intrinsèquement formelle et que $\mathrm{Harr}^{\geq 2,1}(H,H) \neq 0$. Un exemple est donné dans [F1] :
$(S^5 \times S^{23}) \# (S^5 \times S^{23}) \# (S^{14}_{(2)})$ où $S^{14}_{(2)}$ désigne le second espace produit réduit de James de S^{14}.

Sur une extension k algébriquement close de Q, les perturbations $d_3 + d_4 + \dots$ du modèle de Quillen forment une variété algébrique V sur laquelle opère un groupe algébrique $G = \mathrm{Aut}\, H \times G_2$ où G_2 est le groupe des automorphismes de $\mathbb{L}(V)$ de la forme $1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$ où $\psi_i(V) \subset \mathbb{L}^{i+1}(V)$. Le quotient V/G représente l'espace des différents types d'homotopie de cohomologie H. ([L-S], [S-S], [F1]).

PROPOSITION 2.-

a) $\mathrm{Harr}^{\geq 2,1}(H,H)$ est isomorphe au quotient au point "espace formel" de l'espace tangent à Zariski à V par l'espace tangent à l'orbite de l'espace formel.

b) si $\mathrm{Harr}^{*,2}(H,H) = 0$ alors la variété V est lisse et $\mathrm{Harr}^{*,1}(H,H) = 0$ ssi H est intrinsèquement formelle.

c) L'espace formel est rigide ssi H est intrinsèquement formel.

Pour plus de détails sur cette variété, le lecteur est invité à se référer à [L-S], [S-S], et [F1].

La cohomologie de Harrison se plonge dans la cohomologie de Hochschild [Bar].

(1) $$\mathrm{Harr}^*(H,H) \longrightarrow \mathrm{Hosch}^*(H,H) .$$

En utilisant cette injection, Tanré a pu démontré que les espaces p^∞/p^n sont intrinsèquement formels [Ta]. Ce second anneau est appelé par Gerstenhaber ([Ge]) l'anneau infinitésimal de H. Gerstenhaber montre que $\mathrm{Hosch}^{1,*}(H,H)$ mesure les déformations infinitésimales de la loi d'algèbre de H.

$Hosch^{*}(H,H)$ mesure en fait les déformations infinitésimales de la différentielle du modèle d'Adans-Hilton de l'espace $(H,0)$

$$U\,L(H,0)\ .$$

L'injection (1) envoie toute déformation infinitésimale du modèle de Quillen sur la déformation correspondante de son algèbre enveloppante. En particulier $Hosch^{1,1}$ mesure les déformations infinitésimales quadratiques de la différentielle. On retrouve et on généralise ainsi le résultat de Gerstenhaber.

V - TYPE D'HOMOTOPIE : CONSÉQUENCE FORMELLE DE LA COHOMOLOGIE

Si X est un espace formel de cohomologie H, alors son algèbre de Lie d'homotopie rationnelle $\pi_*(\Omega X)\otimes Q$ est isomorphe à $H(L(H,0))$.

$\pi_*(\Omega X)\otimes Q$ peut également se calculer comme suit :

$$\pi_*(\Omega X)\otimes Q = P(H_*(\Omega X\ ;\ Q)) = P(Ext_H(Q,Q))\ .$$

Cette algèbre $Ext_H(Q,Q)$ contient une sous-algèbre $Ext_H^{(1)}(Q,Q)$, algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie engendrée par les générateurs fermés du modèle de Quillen. Cette algèbre $Ext_H^{(1)}(Q,Q)$ se calcule comme suit [R]. Soit m l'idéal maximal H^+.

$$Ext_H^1(Q,Q) = T((m/m^2)^{\#})\ /\ (I)$$

où I est l'idéal bilatère engendré par l'image de l'application

$$(m^2/m^3)^{\#} \longrightarrow (m/m^2)^{\#}\otimes(m/m^2)^{\#} \quad \text{duale de la multiplication .}$$

PROPOSITION.- [Lo]

Si $m^4 = 0$, alors il existe un espace vectoriel gradué V tel que $T(V)$ soit une sous-algèbre de Hopf de $Ext_H(Q,Q)$ et que

$$Ext_H(Q,Q) = Ext_H^{(1)}(Q,Q)\otimes T(V) \quad \text{comme } Ext_H^{(1)}(Q,Q)$$

module à gauche et $T(V)$ module à droite.

$\pi_n(X)\otimes Q$ est encore isomorphe à l'espace vectoriel $(Z^n)^{\#}$ où $(\Lambda Z,d)$ désigne le modèle bigradué de H. Halperin et Stasheff établissent alors la formule suivante :

$$\sum_{p=0}^{\infty} (\dim H^p)\, t^p = \prod_{r=2}^{\infty} (1-(-1)^r\, t^r)^{-\sum_{p+q=r} (-1)^q \dim Z_p^q}$$

d'où l'on peut tirer une approximation du rayon de convergence R de $H_*(\Omega X;Q)$.

$R \leq \inf\{|z_i| \mid z_i$ parcourt les zéros de la série de Poincaré de $X\}$. [F-T] .

En particulier, si X est de dim n , alors

$$R \leq [\dim H^n(X;Q)]^{-1/n}$$

VI - HOMOTOPIE DES ESPACES π-FORMELS DE CATÉGORIE FINIE

Peu de choses connues, citons seulement :

PROPOSITION.- Si X est un espace π-formel de catégorie finie et si $\alpha \in \pi_{2x}(X)$ est non nul, alors $[\alpha,\alpha]$ est aussi non nul.

VII - LES ε_i

Notons $\varepsilon_i = \dim Z_i$

$\varepsilon_o = \dim Z_o = \dim m/m^2$.

$\varepsilon_1 = \dim Z_1 = \dim H_1(H \otimes \Lambda\bar{Z}_o)$.

Les résultats principaux actuellement connus sur les ε_i sont les suivants :

PROPOSITION 1.- [F-H]

Si X est un espace formel et si $\pi_*(X) \otimes Q < \infty$, alors $\varepsilon_i = 0$ pour $i \geq 2$. Autrement dit, $H^*(X;Q)$ est le quotient d'une algèbre libre par une suite régulière de relations.

PROPOSITION 2.- [Koszul] $\varepsilon_2 = 0 \Longrightarrow \varepsilon_i = 0 \quad i \geq 2$.

PROPOSITION 3.- Si $H = H^{pair}$ et si $\varepsilon_{2i+1} = 0$ pour un $i \geq 1$, alors $\varepsilon_{2i} = 0$.
En particulier $\varepsilon_3 = 0 \Longrightarrow \varepsilon_2 = 0$.

PROPOSITION 4.- ([F-T]) Si $\varepsilon_2 \neq 0$, alors il n'existe qu'un nombre fini d'ε_i-nuls.

Conjecture : Si un $\varepsilon_i = 0 \quad i > 2$, alors $\varepsilon_i = 0$ pour $i \geq 2$.

Cette conjecture est équivalente à dire que l'application $p : Z^\# \to (Z_o \oplus Z_1)^\#$ est injective sur le sous-groupe des éléments de Gottlieb.

Une conjecture plus forte (Jacobson [Ja]) veut que p soit injective sur le centre.

Problème dual. Soit $(\mathbb{L}(V),d)$ le modèle bigradué d'une algèbre de Lie π.

Notons $\varepsilon_i = \dim V_i$. Il peut se faire que $\varepsilon_n \neq 0$ et $\varepsilon_i = 0$ $i > n$, n arbitrairement grand et dans ce cas $\varepsilon_j \neq 0$ pour $j \leq n$.

Question : si $\varepsilon_2 = 0$ est-ce que $\varepsilon_i = 0$ $i > 2$?

VIII - ALGÈBRES A DUALITÉ DE POINCARÉ

L'existence de la dualité de Poincaré sur la cohomologie d'un espace augmente le caractère formel et π-formel de cet espace. Nous n'en donnerons pour preuve que les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. [St] (Formalité de l'application d'attachement).

a) Si X et Y sont deux espaces de dimension n vérifiant la dualité de Poincaré , si $X^{<n}$ et $Y^{<n}$ ont même type d'homotopie, alors il en est de même de X et de Y.

b) Soit $(\mathbb{L}(V),d)$ le modèle de Quillen d'un espace à dualité de Poincaré, alors la différentielle du générateur de degré maximal est quadratique.

COROLLAIRE.- Si X est une variété de dimension n et si $X^{<n}$ est formel, alors X est formel.

THÉORÈME 2. (π-formalité de l'application d'attachement). (*)

Si X est un espace formel à dualité de Poincaré, si $\dim m/m^2 > 1$ ($m = H^+(X;Q)$, et si $f : S^{n-1} \to X'$ est l'application d'attachement de la classe fondamentale ($X' = X^{<n}$), alors :

1) $\pi_*(X) = \pi_*(X') / (f)$

2) $\pi_*(X') = \pi_*(X) * \pi_*(S^{n-1})$ comme espace vectoriel gradué.

Remarques : 1) Ce théorème fournit un exemple de "meutre parfait" au sens vu au § 1.

2) $\pi_*(X')$ contient toujours une sous-algèbre de Lie libre.

COROLLAIRE 1.- Si $\dim m/m^2 > 1$ et si X' est formel et π-formel, alors X est formel et π-formel.

COROLLAIRE 2.- Si X et Y sont deux variétés formelles et π-formelles, alors il en est de même de leur somme connexe.

COROLLAIRE 3.- [M-N] Les variétés m-connexes de dimension $\leq 3m+1$ sont π-formelles.

(*) cf. aussi Avramov conf. ibid.

COROLLAIRE 4.- $P(H_* \Omega X',t) = P(H_* \Omega X ,t) \, . \, [1 - t^{n-2} P(H_* \Omega X, t)]^{-1}$.

Ce corollaire 4 permet de calculer facilement $P(H_* \Omega X,t)$ quand X est une intersection complète de r hypersurfaces dans $\mathbb{C}^{n+r}$. En effet dans ce cas $X^{<2n} \simeq \bigvee_\alpha S^n_\alpha \vee P^{n-1}(\mathbb{C})$. ([Ne] [Ba]).

Démonstration du théorème : Dans [Av], Avramov montre que si X est un espace formel, si $\dim m/m^2 > 1$ et si $H(X;Q) = H^{pair}(X;Q)$ vérifie la dualité de Poincaré, alors :

$$H_*(\Omega X') = H_*(\Omega X) \otimes T(s^{n-2} H_* \Omega X) \quad .$$

(on montre facilement que l'hypothèse $H = H^{pair}$ peut être supprimée).

Il en résulte que la suite spectrale d'homotopie rationnelle de la cofibration $S^{n-1} \to X' \to X$ collapse au terme E_2 et donc que $\pi_*(X') \otimes Q \to \pi_*(X) \otimes Q$ est surjectif.

Problème : L'hypothèse de formalité dans ce théorème 2 peut-elle être enlevée ?

BIBLIOGRAPHIE

[An] ANICK D. Non commutative graded algebras and their Hilbert series. J. of algebra 78 (1982), 120-140.

[Av] AVRANOV L. et LEVIN G. Factoring out the socle of a gorenstein ring. Preprint Stoklhom n°14 (1977)

[Ba] BABENKO I.K. On real homotopy properties of complete intersections (Math. U.S.S.R. Izvestija - vol 15 (1980) n°2).

[Bar] BARR M. Harrison homology, Hochschild homology and triples. J. of Algebra 8, 314-323 (1968).

[B-L] BAUES H. et LEMAIRE J.M. Minimal models in homotopy theory. Math. Ann. 225, 219-242 (1977).

[D] DELIGNE P, GRIFFITTS P., MORGAN J. et SULLIVAN D. Real homotopy theory of Kälher manifolds. Inventiones Math. 29, 245-274 (1975).

[F1] FELIX Y. Dénombrement des types de k-homotopie. Théorie de la déformation. Mémoire n°3 de la Société Math. de France (1981).

[F2] FELIX Y. Modèles bifiltrés : une plaque tournante en homotopie rationnelle. Can J of Math (1982).

[F-H] FELIX Y et HALPERIN S. Formal spaces with finite dimensional rational homotopy. Trans. A.M.S. 270 (1982), 575-588.

[F-T] FELIX Y et THOMAS J.C. The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces. Invent. Math. 68 (1982), 257-274.

[Ge] GERSTENHALER M. The cohomology structure of an associative ring. Annals of Math. Vol 78, n°2 (1963) 267-288.

[Ha] HALPERIN S. Lectures on minimal models. Publication interne - Lille n° 111 (1977).

[H-S] HALPERIN S. et STASHEFF J. Obstructions to homotopy equivalences. Advances in Math 32 (1979), 233-279.

[Ha] HARRISON D. Commutative algebras and cohomology. Trans. Amer. Math. Soc 104 (1962) 191-204.

[J] JACOBSON C. On local flat homomorphisms and the Yoneda Ext-algebra of the fibre (publication interne Stockholm n°8 (1982)).

[Jo] JOZEFIAK T. Tate resolutions for commutative graded algebras over a local ring. Fund Math 74 (1972) 209-231.

[La] LABUTE J. Algèbres de Lie èt pro-p-groupes définis par une seule relation. Inventiones math. 4 - 142-158 (1967).

[Le] LEMAIRE J.M. "Autopie d'un meurtre" dans l'homologie d'une aglèbre de chaînes. Ann. scient. Ec. norm. sup. 11 (1978) 93-100.

[L-S] LEMAIRE J.M. et SIRGRIST F. Dénombrement de types d'homotopie rationnelle. C.R. Acad. Sc. Paris 287 (1978) Série A - 109-112.

[Lo] LÖFWALL C. on the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra. Publication interne n°5 (1976) Stockholm.

[M] MILLER T. On the formality of (k-1) connected compact manifolds of dimensional less than or equal to 4k-2. Ill. J. of Math. 23 (1979) 253-258.

[M-N] MILLER T. et NEISENDORFER J. Formal and coformal spaces . Ill. J. of Math 22 (1978) 565-580.

[N] NEISENDORFER J. The rational homotopy groups of complete intersections. Ill. J. of Math. 23 (1979) 175-182.

[Ou] OUTILI A. Thèse de 3ème cycle Nice (1978).

[Pa] PAPADIMA S. A rational classification for spaces satisfying Poincaré duality. Preprint series n°73 (1981) Bucarest.

[Pr] PRIDDY S. Koszul resolutions. Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970) 39-60.

[Q] QUILLEN D. Rational homotopy theory. Ann. of Math. 90 (1969) 205-295.

[R] ROOS J.E. Relations between the Poincaré-Betti series of loop spaces and of local rings. Preprint n°8 (1978) Stockholm.

[S-S] SCHLESSINGER M. et STASHEFF J. Deformation theory and rational homotopy type. A paraître Publ. Sci. I.H.E.S.

[Sh] SHIGA M. Rational homotopy type and self maps. J. Math. Soc. Japan - Vol 31 n°3 (1979), 427-434.

[St] STASHEFF J. Rational Poincaré duality spaces (preprint 1979).

[Su] SULLIVAN D. Infinitesimal computations in topology. Publ. I.H.E.S. 47 (1977) 269-331.

[Ta] TANRÉ D. Modèles de Chen, Quillen, Sullivan et applications aux fibrations de Serre. Thèse Lille (1982).