PIERRE-PAUL GRIVEL

Fibres algébriques de fibre donnée

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 192-197
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__192_0>

FIBRES ALGÉBRIQUES DE FIBRE DONNÉE

par Pierre-Paul GRIVEL

(Sauf avis contraire, tous les objets gradués sont supposés 0-réduits et de type fini.)

1. Fibré associé à une action

Soit A une DGA telle que la DGL 0-réduite L(A) des dérivations de A qui abaissent le degré soit de type fini.

Définition : une action d'une DGL L sur A consiste en la donnée d'un morphisme de DGL $\omega : L \to L(A)$. Dans l'ensemble des actions des DGL sur A on considère la relation d'équivalence engendrée par la relation suivante : si $\omega : L \to L(A)$ et $\omega' : L' \to L(A)$ sont deux actions, il existe un quasi-isomorphisme $\varphi : L \to L'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\omega"] & \\ L' \arrow[r, "\omega'"'] & L(A) \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près dans la catégorie DGL. (L'homotopie est définie à l'aide de l'objet-chemin $L(A) \otimes \Lambda(t;dt)$.)

D'un autre côté soit $B \underset{\tau}{\otimes} A$ un F^2-fibré algébrique de fibre A et de base B. Il est facile de vérifier le résultat suivant.

Proposition : le fibré $B \underset{\tau}{\otimes} A$ est complètement caractérisé par la donnée d'une application linéaire $\tau_o : L(A)^* \to B$ de degré +1 telle que $d\tau_o - \tau_o d + \frac{1}{2} m\,(\tau_o \otimes \tau_o)[\,]^* = 0$ où m est la multiplication de B et $[\ ]^*$ est le dual du crochet de Lie de L(A).

Soit L une DGL et $\omega : L \to L(A)$ une action de L sur A. Notons $C^*(L)$ la DGA duale de la DGC C(L) de Quillen (voir [Q]), et considérons l'application linéaire de degré +1

$$\tau_o : L(A)^* \xrightarrow{\omega^*} L^* \xrightarrow{\bar{s}} sL^* \xrightarrow{\iota} C^*(L)$$

où ι est l'inclusion de sL^* dans $C^*(L)$ et $\bar{s}$ est l'isomorphisme défini par $\bar{s}(x) = (-1)^{|x|+1}s(x)$, s étant la suspension. Cette application satisfait la condition de la proposition car ω est un morphisme de DGL. On en déduit le résultat suivant.

<u>Théorème I</u> (voir [G_1] et [G_2]) : à la donnée d'une action ω de L sur A est associé d'une façon fonctorielle un fibré $C^*(L) \underset{\tau}{\otimes} A$.

Si ω' est une action de L' sur A équivalente à ω, alors les fibrés $C^*(L') \underset{\tau'}{\otimes} A$ et $C^*(L) \underset{\tau}{\otimes} A$ sont c-équivalents.

2. <u>L-fibré principal universel</u>

Soit L une DGL et notons $U^*(L)$ l'algèbre de Hopf différentielle graduée libre commutative, duale de l'algèbre enveloppante $U(L)$ de L. Sa comultiplication ∇ est le dual de la multiplication de $U(L)$.

<u>Définition</u> : un L-fibré principal de base B est un F^2-fibré $B \underset{\tau}{\otimes} U^*(L)$ tel que l'espace total $B \underset{\tau}{\otimes} U^*(L)$ est un $U^*(L)$-comodule à droite, le morphisme de structure

$$1_B \otimes \nabla : B \underset{\tau}{\otimes} U^*(L) \to B \underset{\tau}{\otimes} U^*(L) \otimes U^*(L)$$

étant un morphisme de DGA.

Cette dernière condition équivaut à dire que $(\tau \otimes 1_{U^*(L)}) \circ \nabla = (1_B \otimes \nabla) \circ \tau$.

<u>Proposition</u> (voir [G_1]) : il existe une application injective de l'ensemble des applications linéaires $\tau_o : L^* \to B$ de degré +1 telles que $d\tau_o - \tau_o d + \frac{1}{2} m\,(\tau_o \otimes \tau_o)\,[\ ]^* = 0$ dans l'ensemble des

L-fibrés principaux $B \underset{\tau}{\otimes} U^*(L)$. Cette application est bijective si L est de dimension finie.

La démonstration de cette proposition utilise le lemme suivant.

Lemme : l'action naturelle ω de L sur $U^*(L)$ définie par ∇ induit un isomorphisme entre L et la sous-DGL

$$M = \{\theta \in L(U^*(L)) \mid (\theta \otimes 1_{U^*(L)}) \circ \nabla = \nabla \circ \theta\} .$$

Cela étant, on peut appliquer la construction générale du no 1 au cas où, L étant une DGL donnée, $A = U^*(L)$ et ω est l'action naturelle déterminée par ∇. On obtient ainsi un L-fibré principal $C^*(L) \underset{\tau_L}{\otimes} U^*(L)$ dont l'espace total est acyclique.

Théorème II (voir [G_1]) : supposons que L est de dimension finie.

a) Pour tout L-fibré principal $B \underset{\tau}{\otimes} U^*(L)$ il existe un morphisme de DGA $w : C^*(L) \to B$ tel que le fibré $B \underset{\tau}{\otimes} U^*(L)$ est isomorphe au fibré induit du fibré $C^*(L) \underset{\tau_L}{\otimes} U^*(L)$ par le morphisme de changement de base w.

b) Si les L-fibrés principaux $B \underset{\tau}{\otimes} U^*(L)$ et $B \underset{\tau'}{\otimes} U^*(L)$ sont isomorphes au-dessus de B, alors les applications classifiantes w et w' sont homotopes.

L'application classifiante w est construite à partir de l'application linéaire τ_o associée à τ, en utilisant la propriété universelle de $C^*(L)$.

3. Fibré universel de fibre donnée

Appliquons maintenant la construction générale du no 1 au cas où, A étant une DGA donnée telle que $L(A)$ soit de type fini, on prend $L = L(A)$ et $\omega = 1_{L(A)}$. On obtient ainsi un fibré $C^*(L(A)) \underset{\tau_A}{\otimes} A$ qui est universel pour les fibrés de fibre A. Pour tout fibré $B \underset{\tau}{\otimes} A$, l'application classifiante $w : C^*(L(A)) \to B$ se construit, comme précédemment, à partir de l'application linéaire $\tau_o : L(A)^* \to B$ qui est associée à τ en vertu de la proposition du no 1.

Remarquons que, d'après la proposition du no 2, cette application τ_o donne naissance à un $L(A)$-fibré principal $B \otimes_{\tau_A} U^*(L(A))$. Remarquons de plus que l'action naturelle de $L(A)$ sur A induit sur A une structure de $U^*(L(A))$-comodule à gauche. On a alors un isomorphisme naturel $B \otimes_{\tau} A = B \otimes_{\tau_A} U^*(L(A)) \mathbin{\square}_{U^*(L(A))} A$.

<u>Définition</u> : le fibré $B \otimes_{\tau_A} U^*(L(A))$ s'appelle le $L(A)$-fibré principal associé au fibré $B \otimes_{\tau} A$.

Soit $B \otimes_{\tau} A$ et $B \otimes_{\tau'} A$ deux fibrés. Si $f : B \otimes_{\tau_A} U^*(L(A)) \to B \otimes_{\tau'_A} U^*(L(A))$ est un morphisme de $L(A)$-fibré principal au-dessus de B, alors le morphisme $f \mathbin{\square} 1_A$ induit un morphisme de fibrés $\bar{f} : B \otimes_{\tau} A \to B \otimes_{\tau'} A$ au-dessus de B.

<u>Théorème III</u> (voir [G_1]) : si A est une DGA minimale dont l'espace des indécomposables est de dimension finie, la correspondance $f \to \bar{f}$ est fonctorielle et établit une bijection entre l'ensemble des morphismes de $L(A)$-fibrés principaux au-dessus de B et l'ensemble des morphismes de fibrés au-dessus de B qui induisent un isomorphisme sur la fibre.

Soit $B \otimes_{\tau} A$ et $B \otimes_{\tau'} A$ deux fibrés; on a vu que l'application classifiante w (resp. w') est essentiellement caractérisée par τ_o (resp. τ'_o) et que par construction $(\tau_A)_o = \tau_o$ (resp. $(\tau'_A)_o = \tau'_o$). Alors, si on remarque de plus qu'un morphisme de $L(A)$-fibré principal au-dessus de B est automatiquement un isomorphisme, les théorèmes II et III impliquent le théorème suivant.

<u>Théorème IV</u> : soit A une DGA minimale dont l'espace des indécomposables est de dimension finie. S'il existe un morphisme de fibrés $f : B \otimes_{\tau} A \to B \otimes_{\tau'} A$ au-dessus de B qui induit un isomorphisme

sur la fibre, alors les applications classifiantes w et w' sont homotopes.

4. Actions et fibrés

Soit A une DGA.

Notons Act(A) l'ensemble des classes d'équivalence des actions de DGL sur A. Notons Fib(A) l'ensemble des classes de c-équivalence des F^2-fibrés de fibre A dont la base est une DGA 1-réduite de type fini.

Théorème V (voir [G_2]) : si A est une DGA minimale dont l'espace des indécomposables est de dimension finie, il y a équivalence entre les ensembles Act(A) et Fib(A).

L'application de Act(A) dans Fib(A) est donnée par le théorème I. L'application réciproque est définie de la façon suivante. Soit $B \underset{\tau}{\otimes} A$ un fibré donné et soit $w : C^*(L(A)) \to B$ l'application classifiante construite au no 3. Notons $L^*(B)$ la DGL $L(B^*)$ de Quillen (voir [Q]). On définit une action λ de $L^*(B)$ sur A en posant

$$\lambda : L^*(B) \xrightarrow{L^*(w)} L^*C^*(L(A)) \xrightarrow{\alpha_{L(A)}} L(A)$$

où $\alpha_{L(A)}$ est la flèche d'adjonction et on vérifie que si w et w' sont des morphismes de DGA homotopes, alors les morphismes de DGL $L^*(w)$ et $L^*(w')$ sont homotopes.

5. Comparaison avec la topologie

Les théorèmes précédents sont à mettre en parallèles avec des résultats sur les H-espaces associatifs qui proviennent des travaux de Dold-Lashof (voir [D-L]) et de Stasheff (voir [S]).

Bibliographie

[D-L] A. Dold and R. Lashof
Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence of bundles
Illinois Journal of Mathematics Vol. 3 no 2 (1959) (285-305)

[G_1] P.P. Grivel
Sur les fibrés principaux associés aux fibrés algébriques
Preprint 1981 (à paraître)

[G_2] P.P. Grivel
Fibrés algébriques et actions d'algèbre de Lie

[Q] D. Quillen
Rational homotopy theory
Annals of Mathematics 90 (1969) (205-295)

[S] J.D. Stasheff
Parallel transport in fibre spaces
Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana Vol 11 no 2 (1966) (68-84)