

# *Astérisque*

BERNARD HELFFER

**Théorie spectrale pour des opérateurs  
globalement elliptiques**

*Astérisque*, tome 112 (1984)

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1984\\_\\_112\\_\\_R1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__112__R1_0)

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## 0. INTRODUCTION

L'objet de ce cours est double. D'une part, nous avons voulu présenter dans un cas particulier une partie des résultats obtenus avec D. Robert durant les années 80-81 concernant la théorie spectrale des opérateurs pseudodifférentiels globalement elliptiques sur  $\mathbb{R}^n$  et d'autre part nous avons essayé de familiariser le lecteur avec une théorie des opérateurs Fourier-intégraux. On s'est efforcé de partir d'un niveau élémentaire et il n'est en principe pas nécessaire de connaître la théorie classique des Fourier-intégraux ni la théorie spectrale. Les spécialistes pourront se passer d'une lecture détaillée du chapitre I. Dans le cas particulier considéré dans ce cours, les résultats que nous avons obtenus avec D. Robert peuvent être également obtenus en utilisant les opérateurs de Toeplitz. On renvoie aux notes situées à la fin de ce cours pour la présentation des travaux de Guillemin-Sternberg, Boutet de Monvel - Guillemin et Boutet de Monvel. Les théories développées par ces auteurs ont sans doute une portée théorique plus générale et mettent mieux en évidence les analogies avec la théorie spectrale pour les opérateurs elliptiques sur les variétés compactes qui n'apparaissent dans notre cours que sur un plan technique. Toutefois ces théories sont difficiles et une approche directe nous semble utile et a conduit dans notre article avec D. Robert à des généralisations qui sortent du champ d'application de ces théories.

La meilleure introduction à ce cours nous semble être de rappeler brièvement les propriétés de l'oscillateur harmonique qui constitue le modèle le plus simple de la théorie.

Considérons donc l'opérateur :

$$(0.1) \quad P = \frac{1}{2} (-\partial_x^2 + x^2)$$

il est bien connu que cet opérateur admet une suite de valeurs propres de multiplicité 1 :

$$(0.2) \quad \lambda_j = (j + \frac{1}{2}), \quad j \in \mathbb{N}$$

et que les fonctions propres de norme 1 correspondantes sont les fonctions d'Hermite:

$$(0.3) \quad h_j(x) = c_j \left( \frac{d}{dx} - x \right)^j e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On introduit classiquement en théorie spectrale la fonction de comptage :

$$(0.4) \quad N(\lambda) = \{ \# j, \lambda_j \leq \lambda \} .$$

Un calcul élémentaire montre alors que l'on a :

$$(0.5) \quad N(\lambda) = \lambda + O(1) \text{ lorsque } \lambda \text{ tend vers } 1' \infty .$$

Q1- La question qui se pose est de savoir si on peut retrouver ce comportement asymptotique sans utiliser le calcul explicite des valeurs propres qui n'est pas possible en général (exemple :  $P = \partial_x^4 + x^4$ ).

La relation (0.2) déterminant les valeurs propres est très particulière, pour des opérateurs plus généraux, on se posera la question de savoir si on a des résultats voisins, à savoir : Existe-t-il  $\zeta > 0$ ,  $\tilde{\sigma}$  et  $C \geq 0$  tel que les puissances  $\zeta$  des valeurs propres de l'opérateur considéré soient contenues dans la réunion d'intervalles de la forme :

$$I_j = [\tilde{\sigma} + j - C/j, \tilde{\sigma} + j + C/j], j \in \mathbb{N}$$

(Pour l'oscillateur harmonique, on peut prendre  $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}$  et  $C = 0$ ).

Q2- Peut-on expliquer ce phénomène sans revenir à un calcul explicite des valeurs propres ?

Enfin, si on considère la distribution tempérée sur  $\mathbb{R}$  :

$$(0.5)' \quad S(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-it\lambda_j} = \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-it(j+1/2)}$$

on vérifie aisément que le support singulier de cette distribution est exactement  $2\pi \mathbb{Z}$ .

Q3- Sous quelles conditions observe-t-on un tel phénomène ?

L'idée directrice, pour répondre à ces questions, provient du lien entre la mécanique classique et la mécanique quantique.

A l'oscillateur harmonique, on associe son symbole :

$$(0.6) \quad p(x, \xi) = \frac{\xi^2 + x^2}{2}$$

INTRODUCTION

et le flot hamiltonien de  $p$ , c'est-à-dire le flot associé au champ de vecteur sur  $\mathbb{R}^2$  (ou plutôt  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ )

$$(0.7) \quad H_p = \left( \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi), -\frac{\partial p}{\partial x}(x, \xi) \right) = (\xi, -x) .$$

On résout pour cela les équations :

$$(0.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(t, y, \eta) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) (= \xi(t, y, \eta)) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t}(t, y, \eta) = -\frac{\partial p}{\partial x}(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) (= -x(t, y, \eta)) \\ x(0, y, \eta) = y \\ \xi(0, y, \eta) = \eta \end{cases} \quad (y, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

Le flot  $\phi_t$  est alors défini comme l'application :

$$(0.9) \quad (y, \eta) \longmapsto \phi_t(y, \eta) = (x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) .$$

Dans le cas considéré ici, on a :

$$(0.10) \quad \phi_t(y, \eta) = (y \cos t + \eta \sin t, -y \sin t + \eta \cos t)$$

On observe ici que le flot  $\phi_t$  est périodique de plus petite période  $\tilde{T} = 2\pi$  .

On verra au chapitre (IV) que c'est cette propriété qui permet de donner une réponse aux questions (Q2) et (Q3).

Considérons pour  $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$  la fonction :

$$(0.11) \quad S(t, x, \eta) = -\frac{x^2 + \eta^2}{2} \operatorname{tg} t + \frac{x\eta}{\cos t}$$

$S$  vérifie le système :

$$\begin{cases} \partial_t S(t, x, \eta) + p(x, \partial_x S(t, x, \eta)) = 0 \\ S(0, x, \eta) = x\eta \end{cases} \quad |t| < \frac{\pi}{2}$$

appelé équation eiconale et a la propriété que l'ensemble :

$$(0.12) \quad \{(x, \partial_x S(t, x, \eta), \partial_\eta S(t, x, \eta), \eta), x, \eta \in \mathbb{R}^2\}$$

est égal au graphe de  $\phi_t$  .

Par ailleurs, le noyau distribution de  $(e^{-itP})$  s'écrit pour  $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

$$(0.13) \quad \begin{aligned} & (e^{itP})(x,y) = \\ & = (2\pi)^{-1} [ |\cos t|^{-1/2} \int e^{i[S(t,x,\eta)-y\cdot\eta]} . d\eta ] . \\ & \quad \cdot e^{-i\pi(k+1)/2} \end{aligned}$$

si  $\frac{\pi}{2} + k\pi < t < \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

Cette dernière propriété est facile à vérifier pour  $|t| < \frac{\pi}{2}$  mais plus délicate pour  $t$  quelconque. Le coefficient  $e^{-i\pi(k+1)/2}$  s'interprète comme un terme lié à l'indice de Maslov dont nous ne parlerons pas. Les techniques développées dans ce cours permettent cependant de retrouver cette expression (cf. §3.4).

Remarquons qu'il apparaît en (0.13) le noyau d'un opérateur Fourier-intégral qui s'écrit à l'aide d'une phase :

$$(0.14) \quad \phi_t(x,\eta,y) = S(t,x,\eta)-y\cdot\eta$$

et d'une amplitude

$$(0.15) \quad a_t(x,\eta,y) = (2\pi)^{-1} e^{-i\pi(k+1)/2} |\cos t|^{-1/2} .$$

Cette phase a la propriété d'homogénéité suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_t(\lambda x, \lambda \eta, \lambda y) &= \lambda^2 \phi_t(x, \eta, y) \\ \forall \lambda &\in \mathbb{R}^+ \\ \forall (x, \eta, y) &\in \mathbb{R}^3 . \end{aligned}$$

Ce type de propriété sera le point de départ de l'introduction de notre théorie des opérateurs Fourier-Intégraux.

Remarquons pour terminer que le noyau distribution de  $(e^{-itP})$  s'écrit aussi sous la forme :

$$(0.17) \quad \begin{aligned} (e^{-itP})(x,y) &= \sum_j e^{-it\lambda_j} . h_j(x) . \bar{h}_j(y) \\ &= \sum_j e^{-it(j+1/2)} h_j(x) . \bar{h}_j(y) . \end{aligned}$$

On voit sur cette formule que  $S(t)$  défini en (0.5) est également :

$$S(t) = \int (e^{-itP})(x,x) dx$$

## INTRODUCTION

et donc :

$$(0.18) \quad S(t) = (2\pi)^{-1} [|\cos t|^{1/2} \iint e^{i[S(t,x,\eta)-x.\eta]} dx d\eta] . e^{-i\pi(\frac{k+1}{2})}$$

(sous réserve de donner un sens aux intégrales qui apparaissent) pour

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < t < \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

On voit également sur (0.13) ou (0.17) que :

$$(0.19) \quad e^{-i\tilde{T}P} = e^{-i2\pi P} = -I .$$

L'objectif de ce cours est donc de comprendre toutes ces formules (dédites ici d'expressions explicites) et les liens qui existent entre elles.



TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 0 - Introduction

---

•	Introduction .....	I
•	Plan du cours .....	VII
•	Remerciements .....	IX

CHAPITRE I : OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS GLOBAUX SUR  $\mathbb{R}^n$  (d'après Subin).

§ 1.1	Classes de symboles . . . . .	1
§ 1.2	Opérateurs pseudodifférentiels - Définition . . . . .	2
§ 1.3	Opérateurs pseudodifférentiels - Calcul symbolique . . . . .	11
§ 1.4	Symbole antiwick et applications . . . . .	12
§ 1.5	Opérateurs globalement elliptiques . . . . .	17
§ 1.6	Espaces de Sobolev . . . . .	20
§ 1.7	Propriétés de Fredholm des opérateurs globalement elliptiques	27
§ 1.8	Les opérateurs globalement elliptiques formellement autoadjoints sont essentiellement autoadjoints . . . . .	30
§ 1.9	Les opérateurs globalement elliptique d'ordre $>0$ sont à spectre ponctuel et à résolvante compacte . . . . .	33
§ 1.10	Calcul fonctionnel pour des opérateurs globalement elliptiques (théorie abstraite) . . . . .	41
§ 1.11	Calcul fonctionnel pour des opérateurs globalement elliptiques (théorie o.p.d.) . . . . .	46
§ 1.12	Caractérisation des opérateurs pseudodifférentiels (d'après Beals). . . . .	52



CHAPITRE II : OPÉRATEURS FOURIER-INTÉGRAUX SUR  $\mathbb{R}^n$  (d'après Helffer-Robert)

§ 2.1	Une classe générale d'opérateurs Fourier-Intégraux . . . . .	60
§ 2.2	Les Fourier-Intégraux globaux "réguliers" . . . . .	68
§ 2.3	Etude d'un cas particulier : $\phi(x,\theta,y) = S(x,\theta) - y.\theta$ . . . . .	74
§ 2.4	Les Fourier-Intégraux globaux "classiques" . . . . .	83
§ 2.5	Composé d'un Fourier-Intégral global et d'un opérateur pseudo-différentiel . . . . .	87
§ 2.6	Fourier-Intégraux globalement elliptiques. Théorème d'Egorov .	97
§ 2.7	Famille de Fourier-Intégraux globaux dépendant de manière $C^\infty$ d'un paramètre . . . . .	101
§ 2.8	Opérateurs Fourier-Intégraux et opérateurs pseudodifférentiels	103
§ 2.9	Rappels sur le théorème de la phase stationnaire . . . . .	115
§ 2.10	Retour aux opérateurs Fourier-Intégraux globaux "classiques" .	118

CHAPITRE III : APPROXIMATION DE  $e^{-itA}$  PAR UN OPÉRATEUR FOURIER-INTÉGRAL (d'après B. Helffer - D. Robert).

§ 3.1	Construction d'une approximation de $e^{-itA}$ . . . . .	133
§ 3.2	Quelques rappels sur la théorie d'Hamilton-Jacobi . . . . .	140
§ 3.3	Etude du Fourier-Intégral approchant $e^{-itA}$ . . . . .	147
§ 3.4	Etude de l'exemple de l'oscillateur harmonique . . . . .	150

CHAPITRE IV : PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DU SPECTRE D'OPÉRATEURS PSEUDO - DIFFÉRENTIELS (d'après B. Helffer-D. Robert)

§ 4.1	Relation de Poisson . . . . .	154
§ 4.2	Formule de Weyl avec reste . . . . .	164
§ 4.3	Spectres d'opérateurs et trajectoires classiques périodiques .	177
	Notes et commentaires . . . . .	184
	Liste des articles cités . . . . .	191
	Liste des ouvrages cités . . . . .	195

## R E M E R C I E M E N T S

---

En premier lieu, je voudrais remercier D. Robert avec qui je collabore depuis deux ans. Par sa connaissance des problèmes de théorie spectrale pour les opérateurs pseudodifférentiels, il a joué un rôle essentiel. Notre étude des questions présentées aux chapitres II à IV a pris naissance dans sa thèse et dans un groupe de travail (A.M. Charbonnel, B. Helffer, A. Mohammed et D. Robert) qui s'est réuni régulièrement en 79-80 pour une étude des travaux de J. Chazarain et Asada - Fujiwara. Le chapitre I de ce cours est une version remaniée d'une partie d'un cours de 3ème cycle donné à l'Université de Nantes en 80-81. Je tiens à remercier M. Dauge pour les notes de ce cours qu'elle a prises et qui ont servi de base à la présente rédaction du chapitre I.

Je voudrais également remercier l'Université Fédérale de Pernambuco, le C.N.Pq et plus particulièrement le professeur F. Cardoso qui m'ont invité au Brésil pour faire ce cours. Les bonnes conditions de travail et le climat amical que j'ai trouvés là-bas m'ont permis de rédiger sur place l'essentiel du manuscrit présenté ici. Je tiens à remercier Delza Xavier Cavalcanti et Neide Maria Santos qui ont assuré la frappe originale du manuscrit. Enfin, je tiens à remercier le Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique et plus particulièrement Madame Paule Truc qui ont accepté d'assurer la frappe définitive pour Astérisque.



I - OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS GLOBAUX SUR  $\mathbb{R}^N$  (D'APRES SUBIN)

1.1 - Classe de symboles

Définition 1.1.1 : Soit  $\rho \in ]0,1]$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $z$  le point générique de  $\mathbb{R}^N$ .

$\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^N)$  est l'ensemble des fonctions  $a \in C^\infty$  telles que :  $\forall \alpha, \exists C_\alpha$  tel que  $\forall z \in \mathbb{R}^N$

$$(1.1.1) \quad |\partial_z^\alpha a(z)| \leq C_\alpha \lambda(z)^{m-\rho|\alpha|}$$

où 
$$\lambda(z) = (1 + |z|^2)^{1/2}.$$

On vérifie immédiatement les propriétés ;

$$(1.1.2) \quad a_1 \in \Gamma_\rho^{m_1}, a_2 \in \Gamma_\rho^{m_2} \Rightarrow a_1 a_2 \in \Gamma_\rho^{m_1+m_2}$$

$$(1.1.3) \quad a \in \Gamma_\rho^m \Rightarrow \forall \alpha, D_z^\alpha a \in \Gamma_\rho^{m-\rho|\alpha|}$$

Introduisons maintenant la notion naturelle de développement asymptotique :

Définition 1.1.2 : Soit  $a_j \in \Gamma_\rho^{m_j}$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ); on suppose que  $m_j$  est une suite décroissante tendant vers  $-\infty$ . On dira qu'une fonction  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  vérifie :

$$(1.1.4) \quad a \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

si : 
$$\forall r \geq 2 \quad a - \sum_{j=1}^{r-1} a_j \in \Gamma_\rho^m.$$
 ■

On montre classiquement que si  $a_j$  est une suite du type ci-dessus, il existe  $a$  tel que (1.1.4) soit vérifié.

Si  $a$  et  $b$  sont 2 symboles admettant le même développement, alors  $a-b \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ .

Pour définir les opérateurs pseudodifférentiels, on est amené à introduire la classe de symboles suivante :

Définition 1.1.3 : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in ]0,1]$ ,  $\pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$  est par définition la classe des fonctions  $C^\infty$   $a$  sur  $\mathbb{R}_{x,y,\xi}^{3n}$  telle que

$$\exists m' \geq 0. \text{ t.q. } \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^{3n}, \exists C_{\alpha\beta\gamma} \text{ t.q. :}$$

$$(1.1.5) \quad |D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma a(x,y,\xi)| \leq C_{\alpha\beta\gamma} \lambda(x,y,\xi)^{m-\rho(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)} \times \\ \times \lambda(x-y)^{m'+\rho(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)} . \quad \blacksquare$$

Remarquons tout d'abord que  $m'$  peut dépendre de  $a$ .

On démontre ainsi aisément la proposition suivante :

Proposition 1.1.4 : Si  $a \in \pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$  et si on pose  $b(x,\xi) = a(x,x,\xi)$ , alors  $b \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$ .

Inversement, soit  $p$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$(x,y) \rightarrow (p(x,y), x-y)$$

soit bijective. Alors si  $b(x,\xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$ , la fonction

$$(x,y,\xi) \rightarrow a(x,y,\xi) = b(p(x,y),\xi) \text{ appartient à } \pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n}).$$

## 1.2 - Opérateurs pseudodifférentiels - Définition.

Si  $a$  est dans  $\pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ , on cherche à donner un sens pour  $u$  dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  à l'expression

$$(1.2.1) \quad Au(x) = \int e^{i \langle x-y, \xi \rangle} a(x,y,\xi) u(y) dy \, d\xi$$

$$\text{où} \quad d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$$

qui permettra de définir l'opérateur pseudodifférentiel  $A$  comme étant l'application  $u \rightarrow Au$ .

Comme souvent dans ce genre de questions, (1.2.1) doit être considéré comme une intégrale oscillante.

Le lemme suivant va nous permettre de définir (1.2.1) :

Lemme 1.2.1 : Soit  $\chi$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{3n})$  telle que  $\chi(0) = 1$  ; alors, pour tout  $x$ , dans  $\mathbb{R}^n$ , pour tout  $u$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  la fonction définie pour  $\varepsilon > 0$  par

$$(1.2.2) \quad I_{\chi,\varepsilon}(x) = \int e^{i \langle x-y, \xi \rangle} \chi(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon \xi) a(x,y,\xi) u(y) dy \, d\xi$$

admet quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  une limite  $I_\chi(x)$ . De plus cette limite est indépendante de  $\chi$ .

Démonstration : On remarque que si  $M$  et  $N$  sont des entiers pairs, on a :

$$\lambda(x-y)^{-M} (1-\Delta_x)^{M/2} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} = e^{i\langle x-y, \xi \rangle}$$

$$\lambda(\xi)^{-N} (1-\Delta_y)^{N/2} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} = e^{i\langle x-y, \xi \rangle} .$$

Par conséquent, en faisant des intégrations par parties, on obtient

$$(1.2.3) \quad I_{\chi, \varepsilon}(x) = \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \lambda(x-y)^{-M} (1-\Delta_x)^{M/2} (1-\Delta_y)^{N/2} (\lambda(\xi))^{-N} \chi(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon \xi) \\ a(x, y, \xi) u(y) \, dy \, d\xi .$$

Pour  $M$  et  $N$  assez grand, on voit facilement que, compte tenu de (1.1.5), que l'on utilise sous la forme (correspondant à  $\rho = 0$ )

$$(1.2.4) \quad |D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma a(x, y, \xi)| \leq \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \lambda(x, y, \xi)^m \lambda(x-y)^{m'}$$

on peut appliquer le théorème de Lebesgue et on obtient immédiatement, que si  $M > n, N > n$  :

$$(1.2.5) \quad \lim_{\chi, \varepsilon} I_{\chi, \varepsilon}(x) = \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \lambda(x-y)^{-M} (1-\Delta_x)^{M/2} (1-\Delta_y)^{N/2} \\ \lambda(\xi)^{-N} \chi(0, 0, 0) a(x, y, \xi) u(y) \, dy \, d\xi$$

Cette dernière intégrale ne dépend pas de  $\chi$  car  $\chi(0, 0, 0) = 1$  et par conséquent le lemme 1.2.1 est ainsi démontré.

Compte-tenu de (1.2.5), on définit  $(Au)(x)$  par :  $(Au)(x) = I_\chi(x)$ .

On a la proposition suivante :

Proposition 1.2.2 : Si on définit  $Au(x)$  par (1.2.5) pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \rightarrow (Au)$  est une application linéaire continue de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

Il est clair, compte tenu de (1.2.5) et du théorème de Lebesgue que  $(Au)(x)$  est  $C^\infty$ .

Il s'agit de montrer que  $x \rightarrow (Au)(x)$  est dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  et que  $u \rightarrow Au$  est continue de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  .

Remarquons tout d'abord que :  $(D_x^\alpha Au)(x)$

est une somme de termes du même type que (1.2.5), il suffit donc de regarder le cas où  $|\alpha| = 0$ .

On veut donc majorer :  $\lambda(x)^k (Au)(x)$

indépendamment de  $x$ .

On utilise dans (1.2.5) la majoration :

$$(1.2.6) \quad \lambda(x)^k \leq C \lambda(x-y)^k \lambda(y)^k \quad \text{pour } k \geq 0 .$$

$M$  et  $N$  qui seront déterminés ultérieurement sont choisis assez grands.

On a :

$$\begin{aligned} |\lambda(x)^k (Au)(x)| &\leq C_{k,M,N} \sup_{\substack{y,\xi \\ |\alpha| \leq M \\ |\beta| \leq N}} \left[ \lambda(x-y)^{-M+k+n+1} \lambda(\xi)^{-N+n+1} \lambda(y)^k \right. \\ &\quad \left. D_\xi^\beta D_y^\alpha (a(x,y,\xi) u(y)) \right] \\ &\leq \tilde{C}_{k,M,N} \sup_{\substack{y,\xi \\ |\alpha| \leq M}} \left[ \lambda(x-y)^{-M+k+n+1} \lambda(\xi)^{-N+n+1} \lambda(y)^k \right. \\ &\quad \left. \lambda(x-y)^{m'} \lambda(x,y,\xi)^m |D_y^\alpha u(y)| \right] \\ &\leq \tilde{\tilde{C}}_{k,M,N} \sup_{\substack{y,\xi \\ |\alpha| \leq M}} \left[ \lambda(x-y)^{-M+k+n+1+m'+|m|} \lambda(\xi)^{-N+n+1+|m|} \right. \\ &\quad \left. \lambda(y)^{k+|m|} |D_y^\alpha u(y)| \right] \end{aligned}$$

Si on choisit :  $M \geq k+n+1+m'+|m|$  et  $N \geq n+1+|m|$

on obtient finalement :

$$(1.2.7) \quad |\lambda(x)^k (Au)(x)| \leq \sup_{\substack{|\alpha| \leq M \\ y \in \mathbb{R}^n}} \lambda(y)^{k+|\alpha|} |D_y^\alpha u(y)| .$$

La proposition (1.2.2) en résulte aisément.

La proposition 1.2.2 a permis d'associer à un symbole  $a$  dans  $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$  un opérateur pseudodifférentiel continu de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $b(x,y,\xi)$  le symbole défini par :  $b(x,y,\xi) = \overline{a(y,x,\xi)}$  et soit  $B$  l'opérateur pseudodifférentiel considéré comme opérateur continu de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}'$ .

$B$  admet un transposé  ${}^t B$  continu de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{S}'$  et on pose :  $B^* = \overline{{}^t B}$ .  $B^*$  est un opérateur continu de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{S}'$  et on a :

$$(1.2.8) \quad (B^*u, \overline{v})_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = (u, \overline{Bv})_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \forall u \in \mathcal{S}', \quad \forall v \in \mathcal{S}$$

Par ailleurs, compte tenu du choix de  $b$ , on a :

$$B^*u = Au \quad \text{pour } u \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

Par conséquent,  $\mathcal{S}$  étant dense dans  $\mathcal{S}'$ ,  $A$  admet une extension unique comme opérateur de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{S}'$ .

Définition 1.2.3 : On désigne par  $G_\rho^m(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des o.p.d qui s'écrivent à l'aide d'une amplitude  $a$  dans  $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ .

On pose

$$(1.2.9) \quad G_\rho^{-\infty} = \cap G_\rho^m .$$

Proposition 1.2.4 :  $G_\rho^{-\infty}$  est l'ensemble des opérateurs à noyau dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ , i.e. si  $A \in G_\rho^{-\infty}$ , il existe  $K_A(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  tel que

$$Au(x) = \int K_A(x,y) u(y) dy .$$

Preuve : Posons, au sens des intégrales oscillantes :

$$(1.2.10) \quad K_A(x,y) = \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x,y,\xi) d\xi$$

i.e.  $\forall \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$



$$(1.2.11) \quad \langle K_A(x,y), \psi(x,y) \rangle_{\mathcal{J}'\mathcal{J}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x,y,\xi) \chi(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon \xi) \psi(x,y) dy dx d\xi.$$

On vérifie aisément en revenant à la définition (1.2.11) que  $a(x,y,\xi)$  et

$$(1.2.12) \quad b^M(x,y,\xi) = \frac{1}{\lambda(x-y)^M} (1-\Delta_\xi)^{M/2} a(x,y,\xi)$$

définissent la même distribution  $K_A(x,y)$  dans  $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^{2n})$  et que

$$(1.2.13) \quad Au(x) = \int K_A(x,y) u(y) dy.$$

Montrons que  $K_A(x,y)$  est continue en  $(x,y)$  et que l'on a:  $\forall N, \exists C_N$  t.q.

$$(1.2.14) \quad |K_A(x,y)| \leq C_N (\lambda(x,y))^{-N}.$$

Par hypothèse, pour tout  $m$ , il existe  $a$  et  $m'$  tel que l'on ait (1.2.10) avec

$$(1.2.15) \quad |D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma a| \leq C_{m,\alpha,\beta,\gamma} \lambda(x,y,\xi)^m \lambda(x-y)^{m'}.$$

Alors  $b^M(x,y,\xi)$  définie en (1.2.12) vérifie si on choisit  $M \geq m'$

$$(1.2.16) \quad |b^M(x,y,\xi)| \leq \tilde{C}_{M,m} \lambda(x,y,\xi)^m.$$

Si on choisit  $m < -N-n-1$ , on voit clairement que  $K_A(x,y)$  défini par (1.2.10) avec  $a$  remplacé par  $b_M$  est une intégrale absolument convergente et qu'on a la majoration indiquée (1.2.14).

L'étude des dérivées de  $K_A(x,y)$  ne pose pas de problème nouveau.

Inversement, un noyau dans  $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^{2n})$  définit un o.p.d.

Soit en effet  $K_A(x,y) \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^{2n})$ . Posons

$$(1.2.17) \quad \tilde{K}_A(u,v) = K_A(v,v-u) \quad (\text{i.e. } K_A(x,y) = \tilde{K}_A(x-y,y)).$$

$\tilde{K}_A$  est dans  $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^{2n})$ .

Alors, si on pose :

$$(1.2.18) \quad p(x,\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{F}_{u \rightarrow \xi} \tilde{K}_A)(\xi, x)$$

il est clair que  $p \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$  et est donc dans  $\bigcap_m \Gamma_\rho^m$ .

Compte tenu de la proposition 1.1.4, si on pose :

$$a(x,y,\xi) \stackrel{\text{def}}{=} p(x,\xi) ,$$

alors :  $u \in \bigcap_m \pi_\rho^m$ .

Par conséquent l'opérateur de noyau dans  $\mathcal{J}$  définit un o.p.d. dans  $G_\rho^{-\infty}$ .

Tel qu'on a défini  $A$  (cf. formule 1.2.1), on n'a pas unicité du symbole  $a(x,y,\xi)$ .

Ce phénomène apparaît de la même manière dans le cadre des opérateurs pseudodifférentiels classiques. Le théorème suivant va clarifier un petit peu cette question :

Théorème 1.2.5 : Soit  $A \in G_\rho^m$ , alors on peut écrire  $A$  sous l'une des trois formes suivantes :

$$(1.2.19) \quad (Au)(x) = \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \sigma_{A,\ell}(x,\xi) u(y) dy d\xi, \quad \forall u \in \mathcal{J}$$

$$(1.2.20) \quad (Au)(x) = \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \sigma_{A,r}(y,\xi) u(y) dy d\xi, \quad \forall u \in \mathcal{J}$$

$$(1.2.21) \quad (Au)(x) = \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \sigma_{A,W}\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi, \quad \forall u \in \mathcal{J}$$

(On écrit  $\sigma_{A,\ell}$  pour left (c'est le symbole classique!),  $\sigma_{A,r}$  pour right et  $\sigma_{A,W}$  pour le symbole de Weyl).

Remarque : On a :  $\sigma_{A,\ell}^* = \overline{\sigma_{A,r}}$   
 $\sigma_{A,W}^* = \overline{\sigma_{A,W}}$  ■

Le théorème 1.2.5 est la conséquence du théorème plus général suivant :

Théorème 1.2.6 : Soit  $A \in G_{\rho}^m$  ; alors on peut écrire  $A$ , pour tout  $\tau \in ]0,1[$ , sous la forme :

$$(1.2.22) \quad Au(x) = \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} b_{\tau}((1-\tau)x + \tau y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad \forall u \in \mathcal{S}$$

avec  $b_{\tau}(x, \xi) \in \Gamma_{\rho}^m(\mathbb{R}^{2n})$ . De plus  $b_{\tau}$  est unique.  $b_{\tau}$  est appelé le  $\tau$ -symbole de  $A$ .

Démonstration : Par hypothèse, on a

$$(1.2.23) \quad Au(x) = \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad \text{avec } a \in \pi_{\rho}^m.$$

Posons :  $v = (1-\tau)x + \tau y$   
 $w = x - y$ .

On a :

$$a(x, y, \xi) = a(v + \tau w, v - (1-\tau)w, \xi).$$

On fait un développement de Taylor près de  $w = 0$ :

$$(1.2.24) \quad a(x, y, \xi) = \sum_{|\beta| + |\gamma| \leq N-1} \frac{(-1)^{\gamma}}{\beta! \gamma!} (1-\tau)^{|\gamma|} \tau^{|\beta|} |w|^{\beta + \gamma} (\partial_x^{\beta} \partial_y^{\gamma} a)(v, v, \xi) + r_N(x, y, \xi)$$

avec

$$(1.2.25) \quad r_N(x, y, \xi) = \sum_{|\beta| + |\gamma| = N} C_{\beta\gamma} (x-y)^{\beta + \gamma} \int_0^1 (1-t)^{N-1} (\partial_x^{\beta} \partial_y^{\gamma} a)(v + \tau t w, v - t(1-\tau)w, \xi) dt$$

Il correspond à la décomposition de  $a$ , la décomposition de  $A$ :

$$(1.2.26) \quad A = A_{N-1} + R_N.$$

On a :

$$A_{N-1} u(x) = \sum_{|\beta| + |\gamma| \leq N-1} C_{\beta\gamma} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} (x-y)^{\beta + \gamma} (\partial_x^{\beta} \partial_y^{\gamma} a)(v, v, \xi) u(y) dy d\xi$$

que l'on réécrit, en remarquant que :

$$e^{i\langle x-y, \xi \rangle} (x-y)^{\beta + \gamma} = i^{-(|\beta| + |\gamma|)} \partial_{\xi}^{\beta + \gamma} e^{i\langle x-y, \xi \rangle}$$

sous la forme :

$$A_{N-1} u(x) = \sum_{|\beta| + |\gamma| \leq N-1} \tilde{C}_{\beta\gamma} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \partial_{\xi}^{\beta + \gamma} \partial_x^{\beta} \partial_y^{\gamma} a(v, v, \xi) u(y) dy d\xi.$$

Or si  $a \in \pi_\rho^m$ ,  $(\partial_\xi^{\beta+\gamma} \partial_x^\beta \partial_y^\gamma a)(x, y, \xi)$  est, si  $|\beta| + |\gamma| = p$ , dans  $\pi_\rho^{m-2p}$ .

On déduit alors de la proposition (1.1.4) que

$$\partial_\xi^{\beta+\gamma} \partial_x^\beta \partial_y^\gamma a(v, v, \xi) \in \Gamma_\rho^{m-2p}$$

Enfin, en utilisant la 2ème partie de cette proposition, on en déduit que

$$(\partial_\xi^{\beta+\gamma} \partial_x^\beta \partial_y^\gamma a)((1-\tau)x + \tau y, (1-\tau)x + \tau y, \xi) \in \pi_\rho^{m-2p}$$

Par conséquent,  $A_{N-1}$  s'écrit bien sous la forme voulue avec :

$$(1.2.27) \quad b^{N-1}(v, \xi) = \sum_{p=0}^{N-1} b_{p, \tau} \quad \text{et} \quad b_{p, \tau} \in \Gamma_\rho^{m-2p}.$$

L'examen de  $R_N$  est plus délicat. On peut réécrire  $R_N$  sous la forme suivante, pour  $u$  dans  $\mathcal{F}$ :

$$(R_N u)(x) = \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \tilde{r}_N(x, y, \xi) u(y) dy d\xi$$

avec

$$(1.2.28) \quad \tilde{r}_N(x, y, \xi) = \sum_{|\beta| + |\gamma| = N} C_{\beta\gamma} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial_\xi^{\beta+\gamma} \partial_x^\beta \partial_y^\gamma a(v+t\tau w, v-t(1-\tau)w, \xi) dt$$

On aura besoin de l'inégalité suivante :  $\forall \tau \in [0, 1], \exists C_\tau > 0$  t.q. :

$$(1.2.29) \quad \frac{1}{C_\tau} \leq \frac{|v+t\tau w| + |v-(1-\tau)w|}{|v| + |w|} \leq C_\tau$$

On déduit de (1.2.28) et (1.2.29) la majoration, pour  $p \in \mathbb{N}^{3n}$  :

$$(1.2.30) \quad \Delta_{N,p} \equiv |D_{x,y,\xi}^p \tilde{r}_N(x, y, \xi)| \leq C_p \int_0^1 \lambda(v, t\tau w, \xi)^{m-p(2N+|p|)} \lambda(t\tau w)^{m'+p(2N+|p|)} dt$$

On suppose dans la suite que  $N$  est choisi assez grand de telle sorte que

$$(1.2.31) \quad m-2N\rho \leq 0$$

On déduit de (1.2.30) que si

$$(1.2.32) \quad |w| \leq C \lambda(v, \xi)$$

alors :

$$(1.2.33) \quad \Delta_{N,p}(x,y,\xi) \leq \tilde{C}_p \lambda(v,w,\xi)^{m-\rho(2N+p)} \lambda(w)^{m'+\rho(2N+p)} .$$

Dans une zone où on a

$$(1.2.34) \quad |w| \geq C' \lambda(v,w,\xi) ,$$

il résulte de (1.2.30) que

$$(1.2.35) \quad \Delta_{N,p}(x,y,\xi) \leq C \lambda(v,w,\xi)^{|m|+|m'|} .$$

On introduit maintenant une partition de l'unité. Soit  $\chi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\chi = 1$  sur  $[-1/2, 1/2]$  et  $\chi = 0$  en dehors de  $[-1, +1]$  et posons

$$\psi_\varepsilon(x,y,\xi) = \chi\left(\frac{|w|}{\varepsilon \lambda(v,w,\xi)}\right) .$$

On décompose  $R_N$  sous la forme

$$R_N = R_N^{1,\varepsilon} + R_N^{2,\varepsilon} .$$

avec  $R_N^{j,\varepsilon}$  de symbole  $r_N^{j,\varepsilon}$  ( $j=1,2$ ) et

$$r_N^{1,\varepsilon} = \psi_\varepsilon \cdot \tilde{r}_N \quad r_N^{2,\varepsilon} = (1-\psi_\varepsilon) \tilde{r}_N .$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, l'inégalité (1.2.32) est vérifiée sur le support de  $r_N^{1,\varepsilon}$ ;  $\psi_\varepsilon$  appartient à  $\pi_\rho^0$  et  $\tilde{r}_N$  appartient, d'après (1.2.33), à  $\pi_\rho^{m-2N\rho}$  sur le support de  $\psi_\varepsilon$ . Par conséquent,  $r_N^{1,\varepsilon}$  appartient à  $\pi_\rho^{m-2N\rho}$  et  $R_N^{1,\varepsilon}$  est dans  $G_\rho^{m-2\rho N}$ .

Sur le support de  $(1-\psi_\varepsilon)$ , on a l'estimation (1.2.34). En raisonnant d'une manière analogue à la démonstration de la proposition (1.2.4), on montre que  $R_N^{2,\varepsilon}$  est à noyau dans  $\mathcal{J}$ . En conclusion,  $R_N \in G_\rho^{m-2\rho N}$ .

On vient donc de démontrer que, pour tout  $N$ ,  $N \geq N_0$ , on a la décomposition :

$$(1.2.36) \quad A = A_{N-1} + R_N$$

où  $A_{N-1}$  admet un  $\tau$ -symbole

$$b_\tau^{N-1} = \sum_{p=0}^{N-1} b_{p,\tau}$$

et  $R_N$  est dans  $G_\rho^{m-2\rho N}$ .

Remarquons maintenant qu'il existe un symbole  $b'(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m$  t.q :

$$b'_\tau \sim \sum_{p=0}^{\infty} b_{p, \tau}$$

(cf. la remarque qui suit la définition 1.1.2, car  $b_{p, \tau} \in \Gamma_\rho^{m-2\rho p}$ ).

Soit  $A'$  l'opérateur de symbole  $b'_\tau$ . On a pour tout  $N$  :

$$(1.2.37) \quad A' = A_{N-1}' + R_N'$$

avec  $R_N'$  dans  $G_\rho^{m-2\rho N}$ .

Par conséquent  $A-A' \in G_\rho^{-\infty}$ . Donc, d'après la proposition (1.2.4),  $A-A'$  est à noyau dans  $\mathcal{J}$ .

Il reste à montrer que tout opérateur à noyau dans  $\mathcal{J}$  peut être défini par un  $\tau$ -symbole. Ceci se démontre comme en (1.2.17). Posant :

$$(1.2.38) \quad \tilde{K}_\tau(v, w) = K(v + \tau w, v - (1-\tau)w)$$

on voit que  $\tilde{K}_\tau$  appartient à  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$  et qu'on peut prendre :

$$(1.2.39) \quad b_\tau(v, \xi) = \mathcal{F}_{w \rightarrow \xi} \tilde{K}_\tau(v, w)$$

L'unicité du  $\tau$ -symbole se démontre en prolongeant les formules (1.2.38) et (1.2.39) à des noyaux dans  $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^{2n})$ .

Remarque 1.2.7 : Avec les notations du théorème 1.2.6, on a,  $\forall \tau \in [0, 1], \forall \tau_1 \in [0, 1]$

$$(1.2.40) \quad b_\tau(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (\tau_1 - \tau)^{|\alpha|} (\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha b_{\tau_1})(x, \xi)$$

$$(1.2.41) \quad b_\tau(x, \xi) - b_{\tau_1}(x, \xi) \in \Gamma_\rho^{m-2\rho} \quad \blacksquare$$

### 1.3 - Opérateurs pseudodifférentiels : Calcul symbolique

Le calcul symbolique dans  $G_\rho^m$  est très voisin du calcul classique.

On a le théorème :

Théorème 1.3.1 : Soit  $A_1 \in G_\rho^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $A_2 \in G_\rho^{m_2}(\mathbb{R}^n)$ ; alors  $A_1 \circ A_2 \in G_\rho^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $b_{\tau_1}^1$  est le  $\tau_1$ -symbole de  $A_1$  et si  $b_{\tau_2}^2$  est le  $\tau_2$ -symbole de  $A_2$ , le  $\tau$ -symbole  $b_{\tau}(x, \xi)$  de  $A_1 \circ A_2$  admet le développement asymptotique suivant :

$$(1.3.1) \quad b_{\tau}(x, \xi) \sim \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}(\tau, \tau_1, \tau_2) (\partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} b_{\tau_1}^1)(x, \xi) \times (\partial_{\xi}^{\gamma} D_x^{\delta} b_{\tau_2}^2)(x, \xi)$$

$$C_{0,0,0,0} = 1$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad \text{sauf si } \alpha + \gamma = \beta + \delta \quad .$$

En particulier on a :

$$(1.3.2) \quad b_{\tau}(x, \xi) - b_{\tau_1}^1(x, \xi) \cdot b_{\tau_2}^2(x, \xi) \in \Gamma_{\rho}^{m_1 + m_2 - 2\rho} .$$

Démonstration : Si  $b_{\tau}$  est un développement du type (1.3.1) pour un  $\tau$  déterminé, on a d'après (1.2.4) le même type de développement pour tout  $\tau'$ . On peut également modifier comme on veut  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Il est commode de choisir  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = 1$ .

On a :

$$A_2(u(x)) = \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} b_1^2(y, \xi) u(y) dy d\xi \quad , \quad \forall u \in \mathcal{D}$$

d'où :

$$(1.3.3) \quad \widehat{A_2 u}(\xi) = \int e^{-iy \cdot \xi} b_1^2(y, \xi) u(y) dy \quad , \quad \forall u \in \mathcal{D}$$

Pour  $v$  dans  $\mathcal{D}$ , on a

$$(1.3.4) \quad A_1 v(x) = \int e^{ix\xi} b_0^1(x, \xi) \widehat{v}(\xi) d\xi \quad .$$

On déduit de (1.3.3) et (1.3.4) que, pour tout  $u \in \mathcal{D}$ , on a :

$$(A_1 \circ A_2)u = \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} b_0^1(x, \xi) b_1^2(y, \xi) u(y) dy d\xi \quad .$$

On voit facilement que :  $(x, y, \xi) \rightarrow b_0^1(x, \xi) \cdot b_1^2(y, \xi) \in \pi_{\rho}^{m_1 + m_2}(\mathbb{R}^{3n})$ .

Les autres propriétés se déduisent du théorème (1.2.5) et de sa démonstration.

#### 1.4 - Symbole antiwick et applications.

Soit  $\phi_0(x) = \pi^{-n/4} e^{-|x|^2/2}$  ;  $\phi_0(x)$  est la première fonction propre de l'oscillateur harmonique  $(-\Delta + |x|^2)$  normalisée par  $\|\phi_0\|_{L^2}^2 = 1$  .

Soit  $P_0$  la projection orthogonale associée à  $\phi_0$  :

$$\mathcal{F} \ni u \rightarrow P_0 u = \langle u, \phi_0 \rangle \phi_0$$

$P_0$  se prolonge en un opérateur régularisant dont le noyau distribution (qui appartient à  $\mathcal{F}$ ) est

$$K(x, y) = \pi^{-n/2} e^{-\frac{(|x|^2 + |y|^2)}{2}}$$

Le symbole de Weyl de  $P_0$  est

$$\sigma_0(x, \xi) = \mathcal{F}_{v \rightarrow \xi} K(x + \frac{1}{2}v, x - \frac{1}{2}v) = C_n (\exp(-|x|^2 - |\xi|^2))$$

Posons  $z_0 = (x_0, \xi_0)$ ,  $z = (x, \xi)$ . On définit un nouveau symbole par :

$$(1.4.1) \quad \sigma_{z_0}(z) = \sigma_0(z - z_0).$$

Soit  $P_{z_0}$  l'opérateur de symbole de Weyl  $\sigma_{z_0}(z)$ .

On montre facilement le lemme suivant :

Lemme 1.4.1 :

$$(1.4.2) \quad P_{z_0} = U_{z_0} P_0 U_{z_0}^{-1}$$

où  $U_{z_0} = M_{\xi_0} \cdot T_{x_0}$ .

$T_{x_0}$  est la translation de  $x_0$  définie,  $\forall u \in \mathcal{F}$ , par  $T_{x_0} u = u(x - x_0)$

$M_{\xi_0}$  est la multiplication par  $e^{ix \cdot \xi_0}$  définie  $\forall u \in \mathcal{F}$ , par :  $(M_{\xi_0} u)(x) = e^{ix \cdot \xi_0} u(x)$ . ■

On pose pour  $a$  dans  $\Gamma_\rho^m$  :

$$(1.4.3) \quad A = \int a(x_0, \xi_0) P_{x_0, \xi_0} dx_0 d\xi_0 \quad (\text{intégrale d'opérateurs})$$

On peut voir que  $A$  est continue de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  ; on montre en effet que

$$(P_{(x_0, \xi_0)} u)(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_{x_0}^n \times \mathbb{R}_{\xi_0}^n \times \mathbb{R}_x^n) \quad \text{et que l'application :}$$

$$\mathcal{F} \ni u \rightarrow (P_{(x_0, \xi_0)} u)(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_{x_0}^n \times \mathbb{R}_{\xi_0}^n \times \mathbb{R}_x^n)$$

est continue.



Si  $a(x_0, \xi_0)$  est un multiplicateur de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}_{x_0}^n \times \mathbb{R}_{\xi_0}^n)$  (ce qui est le cas ici) la propriété annoncée en résulte aisément.

Définition 1.4.2 : L'opérateur  $A$  défini par (1.4.3) est appelé opérateur de symbole antiwick  $a$ .

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 1.4.3 : Si  $a \geq 0$ , alors :  $(Au, u) \geq 0$ ,  $\forall u \in \mathcal{F}$  ■

En effet  $\forall z_0, \forall u \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \langle P_{z_0} u, u \rangle &= \langle P_{z_0} U_{z_0}^{-1} u, U_{z_0}^{-1} u \rangle \\ &= |\langle U_{z_0}^{-1} u, \phi_0 \rangle|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Continuité  $L^2$ .

Proposition 1.4.4 : Soit  $a \in \Gamma_\rho^0(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $a$  réel. Alors  $A$  se prolonge en un opérateur continu de  $L^2$  dans  $L^2$  de norme majorée par  $\sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |a(z)|$ .

Démonstration : Soit  $M = \sup |a|$ . On montrera dans le théorème suivant que l'identité  $a$  comme symbole antiwick 1. Il résulte de la proposition (1.4.3) que  $(M-A)$  et  $(M+A)$  sont des opérateurs positifs. On donc, pour tout  $u$  dans  $\mathcal{F}$  :

$$(1.4.4) \quad -M \|u\|^2 \leq (Au, u) \leq M \|u\|^2$$

$a$  étant réel,  $A$  est autoadjoint et il résulte alors d'un théorème classique que

$$\sup_{\substack{u \in \mathcal{F} \\ u \neq 0}} \frac{|(Au, u)|}{\|u\|^2} \leq M.$$

c.q.f.d.

Remarque 1.4.5 : Lorsque  $a$  n'est pas réel, on décompose  $a$  sous la forme  $\text{Re} a + i \text{Im} a$ .

La proposition 1.4.4 est encore vraie en remplaçant  $\sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |a|$  par  $2 \sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |a|$ . ■

Les théorèmes qui suivent précisent le lien entre les opérateurs à symbole antiwick et la classe  $G_\rho^m$ .

Théorème 1.4.6 : Soit  $A$  un opérateur de symbole antiwick  $a \in \Gamma_\rho^m$ .

Alors  $A$  appartient à  $G_\rho^m$  et le symbole de Weyl de  $A$  est donné par :

$$(1.4.5) \quad b_{1/2}(z) = \pi^{-n/2} \int e^{-|z-z'|^2} a(z') dz'$$

De plus le  $\tau$ -symbole de  $A$  admet un développement asymptotique :

$$(1.4.6) \quad b_\tau(z) \sim \sum_\alpha C_\alpha \partial_z^\alpha a(z)$$

avec en particulier :  $C_0 = 1$ ,  $C_\alpha = 0$  pour  $\alpha$  impair. D'où :

$$(1.4.7) \quad \forall \tau \in [0,1], b_\tau - a \in \Gamma_\rho^{m-2\rho}.$$

Démonstration : La formule (1.4.5) résulte immédiatement de (1.4.3) et (1.4.1).

Pour montrer (1.4.6), on fait le développement de Taylor de  $a$  en  $z$  :

$$(1.4.8) \quad a(z') = a(z) + (z'-z)(\partial_z a)(z) + \dots + \sum_{|\alpha|=N-1} \frac{(z'-z)^\alpha}{\alpha!} \partial_z^\alpha a(z) + r_N(z',z)$$

avec

$$r_N(z',z) = \sum_{|\alpha|=N} C'_\alpha (z'-z)^\alpha \int_0^1 \partial_z^\alpha a(z+t(z'-z))(1-t)^{N-1} dt.$$

Modulo l'estimation du reste, qui est laissée au lecteur, on trouve ainsi facilement (1.4.6) en réintroduisant (1.4.8) dans (1.4.5) et :

$$(1.4.9) \quad C_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \pi^{-n/2} \int z^\alpha e^{-|z|^2} dz.$$

La réciproque "partielle" du théorème (1.4.6) est donnée par le

Théorème 1.4.7 : Soit  $B$  dans  $G_\rho^m$ . Alors il existe  $A$  dans  $G_\rho^m$  admettant un symbole antiwick  $a$  dans  $\Gamma_\rho^m$  tel que  $A-B$  soit à noyau dans  $\mathcal{J}$ .

Démonstration : Soit  $B$  le symbole de Weyl de  $B$  et  $A_1$  l'opérateur de symbole antiwick  $b$ ; il résulte de (1.4.7) et du théorème (1.4.6) que

$$B_2 = (B-A_1) \text{ appartient à } G_\rho^{m-2\rho}$$

De la même manière, si  $A_2$  est l'opérateur dont le symbole antiwick est le symbole de Weyl de  $B_2$ , on a :

$$B-A_1-A_2 = B_2-A_2 \in G_\rho^{m-4\rho}.$$

On construit ainsi une suite  $A_j$  d'opérateurs dans  $G_\rho^{m-2j}$  admettant des symboles antiwick  $a_j$ .

Si  $a$  est un symbole tel que  $a \sim \sum a_j$ , l'opérateur de symbole antiwick  $a$  répond à la question.

c.q.f.d.

Continuité  $L^2$  (suite).

Théorème 1.4.7 : Si  $A \in G_\rho^0$ ,  $A$  se prolonge en un opérateur continu de  $L^2$  dans  $L^2$ .

1ère démonstration : On remarque que le symbole classique  $a$  (à gauche de  $A$ ) vérifie :

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|}$$

et on applique les théorèmes usuels.

2ème démonstration : D'après le théorème 1.4.7, il existe  $\tilde{A}$  dans  $G_\rho^0$  tel que  $\tilde{A}$  admette un symbole antiwick  $a$  et tel que  $\tilde{A}-A$  soit régularisant. On utilise alors la prop. 1.4.4 pour  $\tilde{A}$  et la continuité de  $(\tilde{A}-A)$  qui est évidente.

Compacité

Théorème 1.4.8 : Un opérateur  $A$  dans  $G_\rho^m$  avec  $m < 0$  se prolonge en un opérateur compact de  $L^2$  dans  $L^2$ .

La démonstration repose sur les 3 points suivants :

- a) Les opérateurs à noyaux ds  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$  sont compacts (classique!).
- b) Toute limite d'opérateurs compacts au sens de  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  est un opérateur compact.

Compte tenu du Th. 1.4.7, il suffit de démontrer que :

- c) Si  $B$  est un opérateur dans  $G_\rho^m$  avec  $m < 0$  et s'il admet un symbole antiwick  $b(x, \xi)$ , alors  $B$  est limite dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  d'opérateurs régularisants.

Or  $B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \chi(\varepsilon x, \varepsilon \xi) a(x, \xi) P_{x, \xi} dx d\xi$ .

et comme :  $\sup_{x, \xi} |\chi(\varepsilon x, \varepsilon \xi) a(x, \xi) - a(x, \xi)| \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

la propriété résulte de la prop. 1.4.4.

$$(\chi(x, \xi) = 1 \text{ si } |x| + |\xi| \leq 1/2, \chi(x, \xi) = 0 \text{ si } |x| + |\xi| \geq 1).$$

1.5 - Opérateurs globalement elliptiques

Le modèle de l'opérateur globalement elliptique est l'oscillateur harmonique que nous avons considéré dans l'introduction  $P = -\Delta_x + |x|^2$ .

Dans la suite de ces conférences, on va encore particulariser les classes considérées en supposant que  $\rho = 1$ .

Définition 1.5.1 : On dira que  $a \in \Gamma_1^{m, cl}$ . (cl. pour classique)

si  $a \in \Gamma_1^m$  et si  $a$  admet un développement asymptotique :

$$(1.5.1) \quad a \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{m-j}$$

où  $a_{m-j} \in C^\infty$  et

$$(1.5.2) \quad a_{m-j}(\lambda x, \lambda \xi) = \lambda^{m-j} a_{m-j}(x, \xi)$$

pour  $\lambda \geq 1, |x| + |\xi| \geq 1$ .

Remarque 1.5.2 : Comme ce qui se passe pour  $|x| + |\xi| \leq R$  est peu important, on écrit parfois :

$$a \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} \overset{v}{a}_{m-j}$$

avec  $\overset{v}{a}_{m-j} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n} \setminus 0)$

et  $\overset{v}{a}_{m-j}$  homogène en  $(x, \xi)$  de degré  $(m-j)$ .

On sous-entend dans cette écriture que  $a \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{m-j}$  et que

$$\begin{cases} a_{m-j} = \overset{v}{a}_{m-j} & \text{pour } |x| + |\xi| \geq R. \\ a_{m-j} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}). \end{cases}$$

Définition 1.5.3 : Si  $a \in \Gamma_1^{m, cl}$ , on dit que  $a_{m-}$  est le symbole principal.

Définition 1.5.4 : On dira qu'un o.p.d A est dans  $G_1^{m,c1}$  s'il peut être défini par un symbole de Weyl a dans  $\Gamma_1^{m,c1}(\mathbb{R}^{2n})$  (ou par un  $\tau$ -symbole dans  $\Gamma_1^{m,c1}(\mathbb{R}^{2n})$ ).

Remarque 1.5.5 : La notion de symbole principal de A ne dépend pas du  $\tau$ -formalisme choisi (cf. Remarque 1.2.7).

Définition 1.5.6 : On dira qu'un o.p.d. A dans  $G_1^{m,c1}$  est globalement elliptique si on a :

$$\exists R, \quad \exists C > 0 \quad \text{tel que } \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \quad \text{vérifiant}$$

$$(1.5.3) \quad |x| + |\xi| \geq R, \quad \text{on ait } |a_m(x, \xi)| \geq C(|x| + |\xi|)^m,$$

où  $a_m$  désigne le symbole principal de A.

Construction d'une paramétrix

Théorème 1.5.7 : Soit A dans  $G_1^{m,c1}$  un opérateur globalement elliptique, alors il existe B dans  $G_1^{-m,c1}$  tel que

$$(1.5.4) \quad BA = I + R$$

$$AB = I + R'$$

où R et R' sont régularisants.

Démonstration : Elle est similaire à celle du cas classique.

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer l'existence de B et B' dans  $G_1^{-m,c1}$  tel que

$$(1.5.5) \quad BA = I + R$$

$$(1.5.6) \quad AB' = I + \tilde{R}'$$

En effet, on a alors

$$BAB' = B + \tilde{B}\tilde{R}'$$

$$(I+R)B' = B + \tilde{B}\tilde{R}' .$$

D'où  $B' - B = \tilde{B}\tilde{R}' - RB'$  .

Mais  $\tilde{B}\tilde{R}' - RB'$  est régularisant de sorte que :

$$AB = AB' + A(B-B')$$

$$AB = I + \tilde{R}' + A(\tilde{B}\tilde{R}' - RB')$$

et on voit facilement que  $R' = \tilde{R}' + A(\tilde{B}\tilde{R}' - RB')$  est régularisant .

On va démontrer (1.5.5) ((1.5.6) se démontre de manière analogue).

Par hypothèse, le symbole principal  $a_m$  vérifie (1.5.3). Si  $\chi$  désigne une fonction dans  $C^\infty$  égale à 1 en dehors de  $B(0,2R)$  et nulle dans  $B(0,R)$ ,  $b_{-m} = \frac{\chi}{a_m}$  est un symbole dans  $\Gamma_1^{-m,cl}$  .

Soit  $B_1$  l'opérateur de symbole de Weyl  $b_{-m}$

(on notera  $B_1 = Op_W(b_{-m})$ ).

Il résulte de la formule de décomposition (cf. 1.3.2) que

$$(1.5.7) \quad \sigma_W(B_1.A) - 1 \in \Gamma_1^{-1,cl} .$$

On a donc construit  $B_1$  dans  $G_1^{-m,cl}$  tel que

$$(1.5.8) \quad B_1.A = I + R_1 \quad \text{avec} \quad R_1 \in G_1^{-1,cl} .$$

On déduit de (1.5.8) l'égalité, pour tout  $N$  :

$$(1.5.9) \quad \left( \sum_{j=0}^N (-1)^j R_1^j \right) \circ B_1 \circ A = I + (-1)^{N+1} R_1^{N+1} .$$

Soit  $r_1^j$  le symbole de Weyl de  $R_1^j$  et soit  $s$  dans  $\Gamma_1^{0,cl}$  un symbole tel que

$$(1.5.10) \quad s \sim \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j r_1^j .$$

Alors l'opérateur  $S$  de symbole de Weyl  $s$ , vérifie, compte tenu de (1.5.9) et (1.5.10)

$$(1.5.11) \quad S \circ B_1 \circ A = I + R \quad \text{où} \quad R \quad \text{est régularisant.}$$

1.6 - Espaces de Sobolev

On étudie ici la chaîne d'espaces naturellement associée aux opérateurs pseudo-différentiels considérés au §1.5.

Définition 1.6.1 : Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose

$$B^k(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n), x^\alpha D_x^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| + |\beta| \leq k\} \quad \blacksquare$$

On voit aisément que :

$$(1.6.1) \quad \bigcap_k B_k = \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$$

Inversement, si  $u$  est dans  $\mathcal{J}'$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u$  se prolonge en un élément du dual de  $B^k$ .

$\mathcal{J}$  étant dense dans  $B^k$ , le dual de  $B^k$  (noté  $B^{-k}$ ) s'injecte continûment dans  $\mathcal{J}'$ .

On pourrait alors définir les  $B^s(\mathbb{R}^n)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) en utilisant la théorie de l'interpolation. Nous allons donner ici une définition à l'aide des o.p.d.

Soit 
$$b_s(x, \xi) = \lambda(x, \xi)^s .$$

Pour chaque  $s$ , on choisit un opérateur  $L_s$  dont le symbole est  $b_s(x, \xi)$  modulo  $\Gamma_1^{s-1}$ . On pose la définition

Définition 1.6.2 : On désigne par  $\tilde{B}^s(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des  $u \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$  tels que  $L_s u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . ■

Cette définition a beaucoup d'inconvénients mais elle permet de démontrer facilement la

Proposition 1.6.3 : Si  $A \in G_1^m$ ,  $A$  opère de  $\tilde{B}^s$  dans  $\tilde{B}^{s-m}$ .

Démonstration : Soit  $u \in \tilde{B}^s$ , il est clair qu'alors  $Au$  est dans  $\mathcal{J}'$  (cf. la remarque suivant (1.2.8)).

Montrons que  $L_{s-m} Au \in L^2$ .

Soit  $\tilde{L}_{-s}$  une paramétrix de  $L_s$  ( $L_s$  est globalement elliptique) ; on a

$$(1.6.2) \quad \tilde{L}_{-s}.L_s = I + R_s \quad \text{où } R_s \text{ est régularisant.}$$

D'où pour tout  $v$  dans  $\mathcal{J}'$

$$(1.6.3) \quad v = \tilde{L}_{-s} \circ L_s v - R_s \tilde{v}.$$

Appliquant  $L_{s-m} \circ A$  à (1.6.3) avec  $v = u$ , on obtient

$$(1.6.4) \quad L_{s-m} A \tilde{L}_{-s} \cdot L_s u - L_{s-m} A R_s u = L_{s-m} A u.$$

On voit immédiatement que  $L_{s-m} A \tilde{L}_{-s}$  est dans  $G_1^0$  et que  $L_{s-m} A R_s$  est régularisant d'où la propriété.

Le théorème suivant se démontre également facilement :

Théorème 1.6.4 : Régularité Soit  $A \in G_1^{m,cl}$  un opérateur globalement elliptique,  
alors :  $\forall s \in \mathbb{R} ; u \in \mathcal{J}' , Au \in \tilde{B}^s \Rightarrow u \in \tilde{B}^{s+m}$

Démonstration : Par hypothèse, il existe  $Q$  dans  $G_1^{-m,cl}$  tel que :

$$(1.6.5) \quad QA = I + R \quad \text{avec } R \text{ régularisant.}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} u &= QAu - Ru \\ L_{s+m} u &= L_{s+m} QAu - L_{s+m} Ru. \end{aligned}$$

D'après (1.6.3), on a

$$(1.6.6) \quad \begin{aligned} L_{s+m} u &= L_{s+m} Q L_{-s} \cdot L_s Au \\ &\quad - L_{s+m} Q R_s Au - L_{s+m} R u. \end{aligned}$$

Si on remarque que  $L_{s+m} \circ Q \circ L_{-s}$  est d'ordre 0 et que les opérateurs  $L_{s+m} Q R_s A$  et  $L_{s+m} R$  sont régularisants, on en déduit aisément le théorème.

Corollaire 1.6.5 :  $\tilde{B}^s$  ne dépend pas du choix de  $L_s$ . Plus généralement

$$\tilde{B}^s = \{u \in \mathcal{J}' , Au \in L^2(\mathbb{R}^n), A \in G_\rho^{s,cl}\}.$$

La proposition suivante permet de faire le lien avec les espaces introduits au départ :

Proposition 1.6.6 :  $\tilde{B}^m = B^m, \quad m \in \mathbb{N}$



Démonstration : Supposons d'abord  $m$  pair

L'opérateur  $(\sum_{i=1}^n (D_{x_i}^2 + x_i^2))^{m/2} = A_m$  est globalement elliptique d'ordre  $m$ .

Si  $u \in B^m$ , comme  $A_m$  est une combinaison linéaire des  $x^\alpha D_x^\beta$  pour  $|\alpha| + |\beta| \leq m$ ,  $A_m u$  appartient à  $L^2$  et donc  $u \in \tilde{B}^m$ .

Inversement si  $u \in \tilde{B}^m$ , comme les  $x^\alpha D_x^\beta$  sont dans  $G_1^m$  pour  $|\alpha| + |\beta| \leq m$ , on a  $x^\alpha D_x^\beta u \in L^2$  (Prop. 1.6.3) et donc  $u \in B^m$ .

Supposons  $m$  impair :

L'injection de  $\tilde{B}^m$  dans  $B^m$  se démontre comme ci-dessus. Montrons que  $B^m \subset \tilde{B}^m$ .

$(m+1)$  est pair et l'opérateur :  $A_{m+1} = (\sum_{i=1}^n (D_{x_i}^2 + x_i^2))^{\frac{m+1}{2}}$  est globalement elliptique.

On a donc l'existence de  $Q$  dans  $G_1^{-m-1}$  telle que :

$$(1.6.7) \quad Q \left( \sum_{i=1}^n (D_{x_i}^2 + x_i^2) \right)^{\frac{m+1}{2}} = I + R$$

On réécrit (1.6.7) sous la forme

$$(1.6.8) \quad \sum_i (Q \circ D_{x_i}) (D_{x_i} \circ A_{m-1}) + \sum_i (Q \circ x_i) (x_i \circ A_{m-1}) = I + R .$$

On a donc trouvé  $2n$  o.p.d  $Q_i$  dans  $G_1^{-m}$  et  $2n$  opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux de degré en  $(x, \xi)$  inférieur à  $m$  tels que :

$$(1.6.9) \quad \sum_{i=1}^{2n} Q_i \circ P_i = I + R .$$

Pour tout  $u$  dans  $\mathcal{J}'$ , on a

$$(1.6.10) \quad L_m u = \sum_{i=1}^{2n} (L_m \circ Q_i) \circ P_i u - L_m R u$$

L'injection de  $B^m$  dans  $\tilde{B}^m$  en résulte aisément.

Lemme 1.6.7 : Si  $s \geq s'$ , on a  $\tilde{B}^s \subset \tilde{B}^{s'}$ .

A dessein nous n'avons pas parlé de topologie sur  $\tilde{B}^s$ . Nous allons esquisser brièvement comment munir  $\tilde{B}^s$  d'une structure Hilbertienne. Ce serait facile si

nous avons un opérateur réalisant un isomorphisme de  $\tilde{B}^s$  sur  $L^2$ , appartenant à  $G_p^{s,cl}$  (dans notre cas, l'opérateur le plus simple serait  $(\sum_{i=1}^n (D_{x_i}^2 + x_i^2))^{s/2}$ , mais nous n'avons pas encore défini la puissance fractionnaire).

Nous procédons de manière légèrement différente.

Soit  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p$  un entier positif supérieur ou égal à  $s$ ; à l'aide de (1.6.2), on munit  $\tilde{B}^s$  d'une structure préhilbertienne, en posant :

$$(1.6.11) \quad (u, v)_s = (L_s u, L_s v)_0 + \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq p} (x^\alpha D_x^\beta R_s u, x^\alpha D_x^\beta R_s v)_0 .$$

Lemme 1.6.8 :  $\tilde{B}^s$  est complet.

Démonstration : Soit  $u_n$  une suite de Cauchy dans  $B^s$ . On a

$$(1.6.12) \quad \begin{aligned} v_n &= L_s u_n \xrightarrow{L^2} v \quad (L^2 \text{ est complet}) \\ w_n &= R_s u_n \xrightarrow{B^p} w \quad (B^p \text{ est complet}) \end{aligned}$$

On a d'après (1.6.2) :

$$u_n = \tilde{L}_{-s} L_s u_n - R_s u_n .$$

Soit  $u = \tilde{L}_{-s} v - w$  et montrons que  $u_n \rightarrow u$  dans  $\tilde{B}^s$

$$(1.6.13) \quad \begin{aligned} L_s u_n &= L_s \tilde{L}_{-s} L_s u_n - L_s R_s u_n \\ L_s u_n &= L_s \tilde{L}_{-s} v_n - L_s w_n . \end{aligned}$$

Clairement,  $L_s \tilde{L}_{-s}$  étant d'ordre 0, on a

$$(1.6.14) \quad L_s \tilde{L}_{-s} v_n \text{ tend vers } L_s \tilde{L}_{-s} v \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Regardons de plus près  $L_s w_n$ . On utilise (1.6.9) (avec  $m=p$ )

$$L_s w_n = \sum_{i=1}^{2n} (L_s \circ Q_i) P_i w_n - L_s R w_n$$

où  $P_i$  est un opérateur différentiel de degré  $p$  (en  $x$  et  $D_x$ ).

On sait d'après (1.6.12) que  $P_i w_n$  tend vers  $P_i w$  dans  $L^2$ .  $(L_s Q_i)$  et  $(L_s R)$  étant d'ordre 0, on en déduit que :

$$(1.6.15) \quad L_s w_n \rightarrow \sum_{i=1}^{2n} (L_s \circ Q_i) P_i w - L_s R w = L_s w .$$

On a ainsi montré que :  $L_s u_n \rightarrow L_s u$  dans  $L^2$ .

Par conséquent :  $v = L_s u$  (d'après 1.6.12) et donc :

$$w = u - \tilde{L}_{-s} \cdot L_s u \quad (\text{en revenant à la définition de } u)$$

et :

$$(1.6.16) \quad w = R_s u \quad (\text{d'après 1.6.2}) .$$

Finalement, il résulte de (1.6.12) et (1.6.16) que

$$(1.6.17) \quad R_s u_n \rightarrow R_s u \quad \text{dans } B^p .$$

Ceci termine la démonstration du lemme (1.6.8).

On laisse le lecteur vérifier que la topologie d'espace normé associé ne dépend pas du choix de  $L_s$  et du choix de  $p$  ( $p \geq 0$ ,  $p \geq s$ ).

Montrons maintenant le

Lemme 1.6.9 : La topologie de  $\tilde{B}^m$  coïncide avec celle de  $B^m$ .

Preuve : D'après (1.6.2) avec  $s = m$ , on a :

$$x^\alpha D_x^\beta u = x^\alpha D^\beta \tilde{L}_{-m} L_m u + x^\alpha D^\beta R_m u$$

D'où :

$$||u||_{\tilde{B}^m}^2 \leq C ||L_m u||_0^2 + ||R_m u||_0^2 \leq C ||u||_{B^m}^2 .$$

Pour montrer l'inégalité inverse, on utilise (1.6.9).

Lemme 1.6.10 :  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\hat{B}^s$ .

Preuve : On sait que  $\mathcal{J}$  est dense dans  $L^2$ . D'après (1.6.2), on a :

$$u = \tilde{L}_{-s} \cdot L_s u - R_s u .$$

Soit  $v_n \in \mathcal{J}$  une suite telle que  $v_n \rightarrow L_s u$  dans  $L^2$ , alors la suite  $u_n = \tilde{L}_{-s} v_n - R_s u$  est dans  $\mathcal{J}$  et tend vers  $u$  dans  $B^s$ .

c.q.f.d.

Convention : On notera maintenant  $\tilde{B}^s$  par  $B^s$  puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 1.6.11 : Si  $A \in G_\rho^m$ ,  $A$  est continue de  $B^s$  dans  $B^{s-m}$  pour tout  $s$  dans  $\mathbb{R}$  et est compact de  $B^s$  dans  $B^{s-m-\epsilon}$  pour tout  $\epsilon > 0$ .

Preuve : On a :

$$L_{s-m} Au = L_{s-m} A \tilde{L}_{-s} L_s u - L_{s-m} A R_s u = (L_{s-m} A \tilde{L}_{-s}) L_s u - \sum_i (L_{s-m} A Q_i) P_i R_s u + (L_{s-m} A R) R_s u$$

(grâce à 1.6.9 où les  $P_i$  sont des opérateurs différentiels d'ordre  $p$  avec  $p \geq \sup(0, s)$  et les  $Q_i$  sont d'ordre  $-p$ ).

D'où

$$(1.6.18) \quad \|L_{s-m} Au\|_0^2 \leq C(\|L_s u\|_0^2 + \|R_s u\|_{B^p}^2).$$

De même :

$$R_{s-m} Au = (R_{s-m} A \tilde{L}_{-s}) L_s u - (R_{s-m} A) R_s u.$$

D'où, avec  $\tilde{p} \geq \sup(0, s-m)$  :

$$(1.6.19) \quad \|R_{s-m} Au\|_{B^{\tilde{p}}}^2 \leq C(\|L_s u\|_0^2 + \|R_s u\|_{B^p}^2).$$

Montrons maintenant la compacité. On a

$$A = (A \tilde{L}_{-s} \tilde{L}_\epsilon) L_{-\epsilon} L_s + \tilde{R}_0 \quad \text{où } \tilde{R}_0 \text{ est régularisant.}$$

$L_s$  est continue de  $B^s$  dans  $L^2$ ,  $L_{-\epsilon}$  est compact de  $L^2$  dans  $L^2$  (si  $\epsilon > 0$ ) d'après le théorème (1.4.8) et  $(A \tilde{L}_{-s} \tilde{L}_\epsilon)$  est continue de  $L^2$  dans  $B^{s-m-\epsilon}$ . Le composé  $(A \tilde{L}_{-s} \tilde{L}_\epsilon) L_{-\epsilon} L_s$  est donc compact de  $B^s$  dans  $B^{s-m-\epsilon}$ . Il nous reste à montrer qu'un opérateur régularisant  $\tilde{R}_0$  est compact de  $B^s$  dans  $B^t$  pour tout  $s, t$  dans  $\mathbb{R}$ . On utilise pour cela l'identité :

$$(1.6.20) \quad \begin{aligned} \tilde{R}_0 &= \tilde{L}_{-t}(L_t \tilde{R}_0 \tilde{L}_{-s}) L_s - R_t(\tilde{R}_0 \tilde{L}_{-s}) L_s \\ &\quad - \tilde{L}_{-t}(L_t \tilde{R}_0) R_s + R_t \tilde{R}_0 R_s \end{aligned}$$

Si on se rappelle qu'un opérateur régularisant est compact de  $L^2$  dans  $L^2$ , chacun des 4 termes du membre de droite de (1.6.20) est le composé d'un opérateur continu de  $B^s$  dans  $L^2$ , d'un opérateur compact de  $L^2$  dans  $L^2$  et d'un opérateur continu de  $L^2$  dans  $B^t$ .

Dualité entre  $B^s$  et  $B^{-s}$ .

Proposition 1.6.12 : Le produit scalaire  $L^2$  défini pour  $u, v$  dans  $\mathcal{J}$  se prolonge en une forme sesquilineaire  $Q_s$  continue sur  $B^s \times B^{-s}$ . Le dual  $(B^s)^*$  de  $B^s$  s'identifie à  $B^{-s}$ .

Pour  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{J}$ , on a :

$$(u, v)_{L^2, L^2} = (\tilde{L}_{-s} L_s u, v) - (R_s u, \tilde{L}_s L_{-s} v) + (R_s u, R_{-s} v)$$

D'où :

$$(1.6.21) \quad (u, v)_{L^2, L^2} = (L_s u, (\tilde{L}_{-s})^* v) - ((\tilde{L}_s)^* R_s u, L_{-s} v) + (R_s u, R_{-s} v) .$$

Il résulte immédiatement de (1.6.21) et de la proposition (1.6.11) l'inégalité :

$$(1.6.22) \quad |(u, v)_{L^2, L^2}| \leq C \|u\|_{B^s} \|v\|_{B^{-s}}, \forall u \in \mathcal{J}, \forall v \in \mathcal{J} .$$

Et pour  $u$  dans  $B^s$  et  $v$  dans  $B^{-s}$ , on posera :

$$(1.6.23) \quad Q_s(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} (L_s u, (\tilde{L}_{-s})^* v) - ((\tilde{L}_s)^* R_s u, L_{-s} v) + (R_s u, R_{-s} v) .$$

D'après (1.6.21) et le lemme (1.6.10), la première assertion de la proposition 1.6.12 est claire.

Montrons maintenant que  $B^{-s} = (B^s)^*$ .

D'après ce qui précède, l'application  $\chi_s$  de  $B^{-s}$  dans  $(B^s)^*$  définie par :

$$B^s \ni v \rightarrow \chi_s(v)(u) = Q_s(u, v)$$

est antilinéaire continue injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective.

D'après le théorème de Riesz, si  $f \in (B^s)^*$ , il existe  $w$  dans  $B^s$  tel que, pour tout  $u$  dans  $B^s$ , on ait :

$$f(u) = \langle u, w \rangle_{B^s \times B^s} .$$

Revenant à la définition du produit scalaire dans  $B^s$ , on vérifie que si l'on

$$\text{pose : } v = L_s^* L_s w + \tilde{R}_s w$$

$$\left( \text{où } \tilde{R}_s = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq p} (x^\alpha D_x^\beta R_s)^* (x^\alpha D_x^\beta R_s) \right) ,$$

$$\text{on a : } \chi_s(u) = f.$$

c.q.f.d.

### 1.7 - Propriétés de Fredholm des opérateurs globalement elliptiques.

Rappelons que si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux espaces de Hilbert, un opérateur continu de  $A$  et de  $H_1$  dans  $H_2$  est dit de Fredholm ou à indice si

$$\text{i) } \dim \text{Ker } A < \infty$$

$$\text{ii) } \dim \text{coker } A < \infty$$

$$\left( \text{où } \text{coker } A = H_2 / \text{Im } A \right) .$$

On pose alors :

$$(1.7.1) \quad \text{Ind}(A) = \dim \text{Ker } A - \dim \text{coker } A .$$

On rappelle que, dans ce cas, on a les propriétés

$$(1.7.2) \quad \text{Im } A \text{ est fermée .}$$

$$(1.7.3) \quad \text{Si } A^* \text{ désigne l'adjoint de } A, A^* \text{ est à indice et}$$

$$\dim \text{coker } A = \dim \text{Ker } A^* , \text{Im } A = (\text{Ker } A^*)^\perp .$$

$$(1.7.4) \quad \text{Si } T \text{ est compact de } H_1 \text{ dans } H_1, I+T \text{ est à indice et d'indice nul.}$$

$$(1.7.5) \quad \text{Si } A \in \text{Fred}(H_1, H_2) \text{ (ensemble des opérateurs de Fredholm de } H_1 \text{ dans } H_2)$$

$$\text{et } B \in \text{Fred}(H_2, H_3), \text{ alors } BA \in \text{Fred}(H_1, H_3) \text{ et } \text{Ind}(BA) = \text{Ind } A + \text{Ind } B .$$

(1.7.6)  $\text{Fred}(H_1, H_2)$  est ouvert dans  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$  et la fonction indice de  $\text{Fred}(H_1, H_2)$  dans  $\mathbb{Z} : A \rightarrow \text{Ind } A$  est continue.

(1.7.7) Si  $A \in \text{Fred}(H_1, H_2)$  et  $R$  est compact de  $H_1$  dans  $H_2$ , alors  $A + R \in \text{Fred}(H_1, H_2)$  et  $\text{Ind}(A + R) = \text{Ind } A$ .

Le critère suivant est très utile pour montrer qu'un opérateur est de Fredholm :

Proposition 1.7.1 : Soit  $A$  dans  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ , on suppose qu'il existe  $B_1, B_2$  tels que

$$(1.7.8) \quad B_1 A = I + R_1 \quad \text{et } B_1, B_2 \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$$

$$(1.7.9) \quad A B_2 = I + R_2$$

avec  $R_j$  compact de  $H_j$  dans  $H_j$ .

Alors  $A$  est à indice.

Les principaux résultats de ce paragraphe sont les suivants :

Proposition 1.7.2 : Soit  $A$  un opérateur globalement elliptique dans  $G_1^{m, cl}$ . Alors

$$(1.7.10) \quad \text{i) } \text{Ker}(A \wedge_{B^s}) = \text{Ker}(A \wedge_{\mathcal{J}'}) = \text{Ker}(A \wedge_{\mathcal{J}})$$

$$(1.7.11) \quad \text{ii) } \forall s, \forall s' < s, \exists C_{s, s'}, \text{ t.q. } \forall u \in \mathcal{J}' :$$

$$\| |u| \|_{B^s}^2 \leq C_{s, s'} (\| |Au| \|_{B^{s-m}}^2 + \| |u| \|_{B^{s'}}^2) .$$

La proposition résulte immédiatement de l'existence de la paramétrix :

$$(1.7.12) \quad QA = I + R .$$

En effet, on écrit :  $u = QAu - Ru$  et on utilise la continuité de  $Q$  et  $R$  pour montrer (1.7.11) .

Si  $u \in \mathcal{J}'$  et  $Au = 0$ , on a :  $u = Ru$ .  $R$  étant régularisant, on en déduit que  $u$  est dans  $\mathcal{J}$  d'où (1.7.10).

Proposition 1.7.3 : Soit  $A$  un opérateur globalement elliptique dans  $G_1^{m, cl}$ . Alors pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $A \wedge_{B^s} \in \text{Fred}(B^s, B^{s-m})$ . De plus,  $\text{Ind}(A \wedge_{B^s})$  est indépendant de  $s$  (on note alors  $\text{Ind } A$ ). Si  $A$  est formellement autoadjoint (i.e. a son symbole de Weyl réel), alors :  $\text{Ind } A = 0$  .

Preuve :  $A \wedge_B^s \in \text{Fred}(B^s, B^{s-m})$ ; il suffit d'appliquer le théorème (1.5.7) et la proposition (1.7.1).

D'après (1.7.10), on a :

$$(1.7.13) \quad \text{Ker}(A \wedge_B^s) = \text{Ker}(A \wedge_B^{s'}) .$$

On montrerait de même que pour l'o.p.d. adjoint formel de  $A^*$ , on a :

$$(1.7.14) \quad \text{Ker}(A^* \wedge_B^{-s+m}) = \text{Ker}(A^* \wedge_B^{-s'+m}) .$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que

$$(1.7.15) \quad (A \wedge_B^s)^* = A^* \wedge_B^{-s+m}$$

ce qui se montre grâce à la proposition (1.6.11).

On déduit de (1.7.13), (1.7.14), (1.7.15) et (1.7.3) que :

$$\text{Ind}(A \wedge_B^s) = \text{Ind}(A \wedge_B^{s'}) .$$

On a clairement, compte tenu de (1.7.15)

$$(1.7.16) \quad \text{Ind}(A) = \text{Ind}(A \wedge_B^s) = \text{Ind}(A \wedge_B^{s'})^* = \text{Ind}(A^* \wedge_B^{-s+m}) = \text{Ind}(A^*) .$$

Maintenant, si  $A$  est formellement autoadjoint, on déduit de (1.7.16) que :

$$\text{Ind}(A) = - \text{Ind}(A) = 0 .$$

La proposition est entièrement démontrée.

Remarque 1.7.4 : Il suffit en fait que le symbole principal soit réel pour que  $\text{Ind } A = 0$  ■

La dernière proposition de ce paragraphe montre que l'inverse (s'il existe) d'un o.p.d. globalement elliptique est un o.p.d.

Proposition 1.7.5 : Soit  $A$  un opérateur pseudodifférentiel globalement elliptique dans  $G_1^{m,cl}$ . S'il existe  $s$  tel que  $A \wedge_B^s$  soit bijectif de  $B^s$  sur  $B^{s-m}$ , alors on a la même propriété pour tout  $s$  et  $(A \wedge_B^s)^{-1}$  peut être considéré



comme la restriction à  $B^{s-m}$  d'un opérateur pseudodifférentiel dans  $G_1^{-m,cl}$ .

Démonstration

Pour simplifier, on pose  $A_s = A \wedge B^s$ . On a :

$$(1.7.17) \quad \begin{aligned} QA &= I + R \\ AQ &= I + \tilde{R} \end{aligned}$$

$$(1.7.18) \quad \begin{aligned} A_s \cdot (A_s)^{-1} &= I \\ (A_s)^{-1} A_s &= I. \end{aligned}$$

De (1.7.17) et (1.7.18), on tire :

$$(1.7.19) \quad A_s^{-1} = Q \wedge B^{s-m} - RQ \wedge B^{s-m} + R A_s^{-1} \tilde{R} \wedge B^{s-m}.$$

Q et RQ étant clairement des o.p.d. dans  $G_1^{-m,cl}$ , il suffit de vérifier que  $R A_s^{-1} \tilde{R}$  est un opérateur régularisant. Or  $\tilde{R}$  envoie continûment  $\mathcal{J}'$  dans  $\mathcal{J}$ ,  $A_s^{-1}$  envoie  $\mathcal{J}$  dans  $B^s$  et R envoie  $B^s$  dans  $\mathcal{J}$ . c.q.f.d.

1.8 - Les opérateurs globalement elliptiques formellement autoadjoints sont essentiellement autoadjoints.

Définition 1.8.1 : Un opérateur non-borné d'un espace de Hilbert  $H_1$  dans  $H_2$  est un opérateur défini sur un sous espace  $D_A$  de  $H_1$  à valeur dans  $H_2$ .

Ici nous nous placerons le plus souvent dans le cas où  $H_1 = H_2$  et on fera toujours l'hypothèse que :

$$(1.8.1) \quad \overline{D_A} = H_1.$$

Exemple 1.8.2 : Soit  $\mathcal{A}$  un o.p.d. global sur  $\mathbb{R}^n$ . On peut lui associer un opérateur non-borné  $A_0$  de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en prenant :

$$(1.8.2) \quad D_{A_0} = \mathcal{J}(\mathbb{R}^n).$$

$$(1.8.3) \quad \forall u \in D_{A_0}, A_0 u = \mathcal{A}u.$$

Définition 1.8.3 : Soit  $A$  un opérateur non-borné de  $H_1$  dans  $H_2$  vérifiant (1.8.1). On appelle adjoint  $A^*$  de l'opérateur  $A$  l'opérateur non-borné de  $H_2$  dans  $H_1$  défini par :

$D_{A^*} = \{v \in H_2, t.q. u \rightarrow (Au, v) \text{ définie sur } D_A \text{ se prolonge en une forme linéaire continue sur } H_1, i.e. \exists f \in H_1 \text{ t.q. } (Au, v)_{H_2} = (u, f)_{H_1}\}$ .

On pose alors :  $A^*v = f$ .

Remarque :  $f$  est unique car  $D_A$  est dense dans  $H_1$ .

Exemple 1.8.4 : Si  $A_0$  est l'opérateur défini en (1.8.2), (1.8.3),  $A_0^*$  est l'opérateur défini par :

$$(1.8.4) \quad D_{A_0^*} = \{v \in L^2, \mathcal{A}^*v \in L^2\}$$

$$(1.8.5) \quad \forall v \in D_{A_0^*}, A_0^*v = \mathcal{A}^*v$$

$\mathcal{A}^*$  désigne l'adjoint formel de l'opérateur pseudodifférentiel .

Définition 1.8.5 : Supposons que  $H_1$  est égal à  $H_2$ . Un opérateur non-borné  $A$  est dit symétrique si :  $(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in D_A$ .

Exemple 1.8.6 : Si  $A_0$  est l'opérateur défini en (1.8.2), (1.8.3) et si  $\mathcal{A}$  est formellement autoadjoint, alors  $A_0$  est symétrique.

Définition 1.8.7 : Soit  $A$  un opérateur non-borné de  $H_1$  dans  $H_2$ . On dit que  $A$  est fermé si le graphe  $G_A$  de  $A$  est fermé dans  $H_1 \times H_2$  ( $G_A = \{(u, Au), u \in D_A\}$ ).  
 $(G_A = \{(u, Au), v \in D_A\})$ .

On dit que  $A$  est fermable si  $\overline{G_A}$  est le graphe d'un opérateur.

On note alors  $\bar{A}$  l'opérateur dont le graphe est  $\overline{G_A}$ .

Exemple 1.8.8 : Si  $A_0$  est l'opérateur défini en (1.8.2), (1.8.3),  $A_0$  est fermable.

Il suffit en effet de vérifier la proposition suivante :

Pour toute suite  $u_n \in D_{A_0}$  telle que :  $u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$ ,  $A_0 u_n \rightarrow w$  dans  $L^2$ , alors  $w=0$ .

Or si  $u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$ ,  $A_0 u_n = \mathcal{A} u_n$  tend vers 0 dans  $\mathcal{F}'$  et par conséquent  $w=0$ .

Définition 1.8.9 : Un opérateur non-borné de  $H$  dans  $H$  est dit essentiellement autoadjoint si  $\overline{D_A} = H$  et si  $\overline{A} = A^*$  (i.e.  $D_{A^*} = D_{\overline{A}}$  et  $\forall u \in D_{A^*}; \overline{A}u = A^*u$ ).

Remarque : Comme on a toujours :  $\overline{A^*} = A^*$ , on a dans ce cas :  $\overline{A^*} = A$ .  $\overline{A}$  est donc une extension autoadjointe de  $A$  (on peut montrer que c'est la seule).

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.8.11 : Soit  $\mathcal{A}$  dans  $G_1^{m,c1}$  un opérateur pseudodifférentiel globalement elliptique ( $m \geq 0$ ) et formellement autoadjoint.

Alors l'opérateur non-borné  $A_0$  associé à  $\mathcal{A}$  de domaine  $D_{A_0} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  est essentiellement autoadjoint et la fermeture  $\overline{A_0}$  de  $A_0$  est l'opérateur autoadjoint défini par :

$$(1.8.5) \quad D_{\overline{A_0}} = B^m \text{ et } \overline{A_0}u = \mathcal{A}u, \forall u \in B^m.$$

Démonstration : Il y a des critères généraux pour vérifier qu'un opérateur est essentiellement autoadjoint. Nous préférons donner ici une démonstration directe.

On a déterminé dans l'exemple (1.8.4) le domaine de  $A_0^*$  et comment il opérerait.

Remarquons maintenant que  $\mathcal{A}$  étant formellement autoadjoint, on a :  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$

De plus,  $\mathcal{A}$  étant globalement elliptique d'ordre  $m \geq 0$ , il résulte du théorème (1.6.4) et de (1.8.4) que :

$$(1.8.6) \quad D_{A_0^*} = \{v \in L^2, \mathcal{A}v \in L^2\} = B^m$$

et que :

$$(1.8.7) \quad \forall v \in D_{A_0^*} = (B^m), A_0^*v = \mathcal{A}v.$$

Etudions maintenant  $\overline{A_0}$ . Montrons d'abord que l'ensemble  $\mathcal{M}$  défini par

$\mathcal{M} = \{(u, Au), u \in B^m\}$  est inclus dans  $\overline{G_{A_0}}$ .  $\mathcal{F}$  étant dense dans  $B^m$ , il existe donc, pour  $u$  dans  $B^m$ , une suite  $f_n$  dans  $\mathcal{F} (= D_{A_0})$  telle que :  $f_n \rightarrow u$  dans  $B^m$ .

On en déduit immédiatement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \rightarrow u \text{ dans } L^2 \\ A_0 f_n \rightarrow \mathcal{A}u \text{ dans } L^2 \end{array} \right. \text{ (continuité de } \mathcal{A} \text{ de } B^m \text{ dans } L^2).$$

Inversement, soit  $(u,v)$  dans  $\overline{G_{A_0}}$ . Par définition, il existe une suite  $u_n$  dans  $\mathcal{D}$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2 \\ A_0 u_n = \mathcal{A} u_n \rightarrow v \text{ dans } L^2. \end{array} \right.$$

On en déduit que :  $v = \mathcal{A}u$  et que par conséquent,  $\mathcal{A}$  étant globalement elliptique,  $u$  appartient à  $B^m$ . Par conséquent,  $\overline{G_{A_0}} \subset \mathcal{U}$ .

On a ainsi montré que :

$$(1.8.8) \quad D_{A_0} = B^m$$

et

$$(1.8.9) \quad \forall u \in B^m, A_0 u = \mathcal{A}u.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 1.8.11.

1.9 - Les opérateurs globalement elliptiques d'ordre  $> 0$  sont à spectre ponctuel et à résolvante compacte.

Soit  $A$  un opérateur fermé non borné de domaine  $D(A) \subset H$  à valeur dans  $H$ .

Définition 1.9.1 : On appelle spectre de  $A$  et on note  $\sigma(A)$  le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  tel que : si  $\lambda \notin \sigma(A)$ ,  $(A-\lambda I)$  admette un inverse continu partout défini, noté  $(A-\lambda I)^{-1}$  (cela signifie que  $(A-\lambda I)$  est injectif sur  $D(A)$  et que son image est  $H$  tout entier).

On voit aisément que  $\sigma(A)$  est fermé. On dit que  $\lambda$  est valeur propre si  $(A-\lambda I)$  est non injectif.

Définition 1.9.2 : On désigne par  $\sigma_p(A)$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$ , qui sera appelé le spectre ponctuel de  $A$ .

On a clairement l'injection  $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$ . On définit alors les vecteurs propres associés à  $\lambda$  comme les éléments non nuls de  $\text{Ker}(A-\lambda I)$ . Le principal objet de ce paragraphe est de démontrer le :

Théorème 1.9.3 : Soit  $\mathcal{A} \in G_1^{m,c1}$  un opérateur globalement elliptique d'ordre  $m > 0$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) et formellement autoadjoint.

Alors l'opérateur non borné  $\overline{A}_0$  canoniquement associé à  $\mathcal{A}$  admet un spectre réduit au spectre ponctuel, discret et contenu dans  $\mathbb{R}$ . Plus précisément, il existe une suite de nombres réels  $\lambda_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) tendant vers l'infini et une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\phi_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ), où  $\phi_j$  est une fonction propre associée à  $\lambda_j$  (\*) telle que :

$$\sigma_p(\overline{A}_0) = \sigma(\overline{A}_0) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}.$$

Avant de démontrer le théorème (1.9.3) par réduction à la théorie spectrale pour les opérateurs compacts, autoadjoints, injectifs que nous admettrons, nous allons établir quelques résultats préliminaires qui ont leur intérêt en soi et qui permettent d'obtenir directement certaines affirmations du théorème.

On a vu que  $D_{\overline{A}_0}^- = B^m$  et que  $(\mathcal{A} - \lambda I)$  est, si  $m > 0$ , un opérateur à indice, d'indice nul, s'il est considéré comme opérateur de  $B^m$  dans  $L^2$ .

On en déduit immédiatement que :  $\text{Im}(\overline{A}_0 - \lambda I)$  est fermée dans  $H$  et que  $\text{Ker}(\overline{A}_0 - \lambda I)$  est de dimension finie.

Soit  $\lambda \in \sigma(\overline{A}_0)$ . De deux choses l'une : ou bien  $(\overline{A}_0 - \lambda I)$  n'est pas injectif et dans ce cas  $\lambda \in \sigma_p(\overline{A}_0)$  ou bien  $(\overline{A}_0 - \lambda I)$  est injectif, mais dans ce cas il est surjectif puisque l'indice est nul. Ce cas ne peut se produire puisque  $\lambda \in \sigma(\overline{A}_0)$ . Par conséquent, on a montré que :

$$(1.9.1) \quad \sigma_p(\overline{A}_0) = \sigma(\overline{A}_0)$$

Comme  $m$  est  $> 0$ ,  $\mathcal{A} - \lambda I$  est globalement elliptique et il résulte de l'existence de la paramétrix (cf. 1.7.10) que :  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I) \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ .

Par conséquent :

$$(1.9.2) \quad \text{Les fonctions propres de } \overline{A}_0 \text{ sont dans } \mathcal{J}.$$

---

(\*) Autrement dit, chaque valeur propre est répétée selon sa multiplicité.

$\overline{A}_0$  étant autoadjoint, on vérifie immédiatement que :

$$(1.9.3) \quad \sigma_p(\overline{A}_0) \subset \mathbb{R}$$

et

$$(1.9.4) \quad \text{Si } \phi \in \text{Ker}(A-\lambda I), \psi \in \text{Ker}(A-\mu I) \text{ et } \lambda \neq \mu, \text{ le}$$

produit scalaire  $\langle \phi, \psi \rangle$  est nul .

On en déduit que :

$$(1.9.5) \quad \sigma_p(\overline{A}_0) \text{ est dénombrable .}$$

Sinon il existerait une famille non dénombrable de vecteurs orthogonaux, ce qui contredirait la séparabilité de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

En particulier, on déduit de (1.9.5) que

$$(1.9.6) \quad \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_0 \notin \sigma_p(\overline{A}_0) .$$

On va maintenant donner une autre démonstration de cette propriété lorsque le symbole principal de  $\mathcal{A}$  est positif.

Proposition 1.9.4 : Soit  $\mathcal{A} \in G_1^{m,cl}$  un opérateur globalement elliptique formellement autoadjoint d'ordre  $m > 0$  ( $m \in \mathbb{N}$  pour simplifier) de symbole principal  $a_m$  réel positif.

Alors  $A_0$  est semi-borné, i.e. il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $(A_0 + C)$  soit positif,

i.e. :

$$(1.9.7) \quad ((A_0 + C)u, u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D} .$$

Corollaire 1.9.5 : Sous les hypothèses de la proposition 1.9.4, on a l'inclusion :

$$\sigma_p(\overline{A}_0) \subset [-C, +\infty[ .$$

Démonstration de la proposition 1.9.4 : Soit  $\chi$  dans  $C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\chi(t) = 0$  pour  $|t| \leq 1$  et  $\chi(t) = 1$  pour  $|t| \geq 2$ .

Alors  $q_m(x, \xi) = \chi(|x| + |\xi|) \sqrt{a_m}$  est un symbole d'ordre  $m/2$ . Soit  $Q$  l'opérateur admettant  $q_m$  comme symbole de Weyl. Le calcul symbolique montre que :

$$(1.9.8) \quad \mathcal{A} = Q^*Q + R \quad \text{avec } R \text{ dans } G_1^{m-1}$$

$$(Q^* = Q \text{ car } q_m \text{ est réel}).$$

On déduit de (1.9.8) que :

$$(1.9.9.) \quad (\mathcal{A}u, u) = ||Qu||^2 + (Ru, u), \quad \forall u \in \mathcal{J}.$$

Q étant elliptique, on a l'inégalité (cf. 1.7.11).

$$(1.9.10) \quad ||u||_{B^{m/2}}^2 \leq C_0 (||Qu||_0^2 + ||u||_0^2), \quad \forall u \in \mathcal{J}.$$

Or R est continu de  $B^{\frac{(m-1)}{2}}$  dans  $B^{-\frac{(m-1)}{2}}$  ; on en déduit que :

$$(1.9.11) \quad |(Ru, u)| \leq C_1 ||u||_{B^{\frac{m-1}{2}}} ||Ru||_{B^{-\frac{(m-1)}{2}}} \leq C_2 ||u||_{B^{\frac{m-1}{2}}}^2.$$

Comme on a injection compacte de  $B^{m/2}$  dans  $B^{\frac{m-1}{2}}$  (d'après la proposition 1.6.11), il résulte d'un lemme classique (lemme de Lions) que l'on a, pour tout  $\epsilon > 0$ , l'existence d'une constante  $C(\epsilon)$  telle que

$$(1.9.12) \quad ||u||_{B^{\frac{m-1}{2}}}^2 \leq \epsilon ||u||_{B^{m/2}}^2 + C(\epsilon) ||u||_0^2, \quad \forall u \in \mathcal{J}$$

Les inégalités (1.9.9) à (1.9.12) permettent alors, par un choix convenable de  $\epsilon$ , d'obtenir (1.9.7). La proposition est ainsi démontrée.

Il résulte donc de toutes les considérations qui précèdent le :

Lemme 1.9.6 : Il existe  $\lambda_0$  réel tel que  $(A_0 - \lambda_0 I)$  admette un inverse borné  $(A_0 - \lambda_0 I)^{-1}$  compact, autoadjoint, injectif dont l'image est  $B^m$ .

Preuve : Tout a été démontré sauf le caractère autoadjoint de  $(\overline{A_0} - \lambda I)^{-1}$  qui résulte immédiatement du caractère autoadjoint de  $(\overline{A_0} - \lambda I)$ .

Le lemme 1.9.6 permet alors d'appliquer à  $T = (\overline{A_0} - \lambda I)^{-1}$  la théorie spectrale classique pour les opérateurs compacts, autoadjoints injectifs. On sait qu'alors

$$(1.9.13) \quad \sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}.$$

et que :

$$(1.9.14) \quad \forall \mu \in \sigma_p(T), \dim \text{Ker}(T - \mu I) < \infty.$$

Comme  $T$  est autoadjoint et injectif, on sait de plus qu'il existe une suite  $\mu_j (j \in \mathbb{N})$ , décroissante en module, tendant vers 0 et une suite  $\phi_j (j \in \mathbb{N})$  dans  $L^2$ , telle que

$$(1.9.15) \quad \phi_j \in \text{Ker}(T - \mu_j I)$$

et

$$(1.9.16) \quad \text{Les } \phi_j \text{ constituent une base orthogonale de } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Enfin, si  $P_k$  désigne le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les  $k$ -premières fonctions propres, on a :

$$(1.9.17) \quad T = \lim_{k \rightarrow \infty} T P_k \text{ dans } \mathcal{L}(L^2, L^2).$$

On a alors immédiatement le théorème, en remarquant que si :

$$T \phi_j = \mu_j \phi_j$$

on a :

$$\phi_j = \mu_j (\overline{A}_0 - \lambda_0 I) \phi_j.$$

Si on pose  $\lambda_j = \lambda_0 + \frac{1}{\mu_j}$ , on a :

$$(1.9.18) \quad \overline{A}_0 \phi_j = \lambda_j \phi_j$$

$\mu_j$  tendant vers 0,  $\lambda_j$  tend vers l'infini.

On a ainsi terminé la démonstration du théorème 1.9.3.

Définition 1.9.7 : Si  $A$  est un opérateur non-borné dans  $H$ , on peut définir  $A^N$  pour  $N \in \mathbb{N}$ , par récurrence sur  $N$  par :

$$\begin{cases} D(A^N) = \{u \in D(A^{N-1}) / A^{N-1} u \in D(A)\} \\ A^N u = A(A^{N-1} u) \end{cases}, \forall u \in D(A^N).$$

On voit facilement que  $\overline{A}_0^N$  est, pour  $N \geq 1$ , l'opérateur canoniquement associé à l'o.p.d.  $\mathcal{A}^N$  et que c'est l'extension autoadjointe de  $A_0^N$  :



$$(1.9.19) \quad \overline{A_o^N} = \overline{A_o}^N$$

La base orthonormale  $\phi_j$  permet de réaliser un isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  sur  $\ell^2$  ; on voit facilement que, dans cet isomorphisme, on a :

$$(1.9.20) \quad D(\overline{A_o^N}) = \{u / \sum_j \lambda_j^{2N} |u_j|^2 < \infty, u = \sum u_j \phi_j\}.$$

Enfin, si on pose :

$$(1.9.21) \quad D^\infty = \bigcap_N D(\overline{A_o^N}),$$

on voit facilement que :

$$(1.9.22) \quad D^\infty = \bigcap_N B^{mN}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$$

Pour terminer ce paragraphe, on va donner une estimation grossière de la croissance des valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\overline{A_o}$ .

Proposition 1.9.8 : Sous les hypothèses de ce paragraphe, si on suppose de plus que

$0 \notin \sigma_p(A_o)$ , il existe  $N_o \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\sum_j |\lambda_j|^{-2N_o} < \infty.$$

Démonstration : D'après la proposition 1.7.5,  $\mathcal{A}^{-N}$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $G_1^{-mN, cl}$ . Soit  $a_N(x, \xi)$  le symbole à gauche de  $\mathcal{A}^{-N}$  et  $L_N$  le noyau distribution de  $\mathcal{A}^{-N}$ . On a la relation :

$$(1.9.23) \quad L_N(x, y) = \int e^{i(x-y, \xi)} a_N(x, \xi) d\xi \quad (\text{dans } \mathcal{J}').$$

Cette intégrale, qui est à considérer comme une intégrale oscillante pour  $N \in \mathbb{N}$ , devient absolument convergente si  $mN > n$ .  $L_N(x, y)$  est alors continue bornée sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

On remarque que, si  $N$  est assez grand ( $mN > n+1$ ), on a :

$$\begin{aligned} y_i L_N(x, y) &= \int y_i e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a_N(x, \xi) d\xi \\ &= - \int D_{\xi_i} (e^{i\langle x-y, \xi \rangle}) a_N(x, \xi) d\xi + \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} x_i a_N(x, \xi) d\xi \\ &= \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} D_{\xi_i} a_N(x, \xi) d\xi + \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} x_i a_N(x, \xi) d\xi \end{aligned}$$

et on vérifie qu'alors  $y_i L_N(x, y)$  est continue bornée sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Itérant cette remarque, on trouve finalement  $N_0$  tel que  $x^\alpha y^\beta L_{N_0}(x, y)$  soit continu borné pour tous  $\alpha, \beta$  tels que  $|\alpha| + |\beta| \leq 2n + 2$ .

On en déduit qu'alors  $L_{N_0}(x, y)$  est dans  $L^2_{x, y}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  et donc :

$$(1.9.24) \quad \int |L_{N_0}(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Remarquons maintenant que

$$\begin{cases} \text{les } \{\phi_i(x)\} \text{ forment une base orthogonale de } L^2_x \\ \text{les } \{\overline{\phi_j}(y)\} \text{ forment une base orthogonale de } L^2_y \end{cases}$$

et par conséquent que les  $\{\phi_i(x)\overline{\phi_j}(y)\}_{i, j}$  forment une base orthogonale de  $L^2_{x, y}$ .

Calculons les coordonnées  $a_{ij}$  de  $L_{N_0}(x, y)$  dans cette base :

$$a_{ij} = \int L_{N_0}(x, y) \overline{\phi_i}(x) \cdot \phi_j(y) dx dy = \int \overline{\phi_i}(x) \left( \int L_{N_0}(x, y) \phi_j(y) dy \right) dx = \int \overline{\phi_i}(x) (\mathcal{L}^{-N_0} \phi_j)(x) dx.$$

$$(1.9.25) \quad a_{ij} = \delta_{ij} \lambda_j^{-N_0}.$$

On a donc :

$$\int |L_{N_0}(x, y)|^2 dx dy = \sum_{i, j} |a_{ij}|^2 = \sum_j |\lambda_j|^{-2N_0} < \infty.$$

c.q.f.d.

Remarque 1.9.9 : On peut préciser la proposition 1.9.8. en utilisant la principe du Max-Min qui dit que pour un opérateur autoadjoint positif, d'inverse compact, on a :

$$(1.9.26) \quad \lambda_j = \max_{\substack{\text{codim } M=j-1 \\ M \subset D(A)}} \min_{\substack{u \in M \\ \|u\|=1}} (Au, u)$$

où  $M$  parcourt l'ensemble des sous-espaces fermés de codimension  $(j-1)$  de  $D(A)$ .  
 Considérons l'oscillateur harmonique en dimension  $n$ .

$$(1.9.27) \quad P_0 = \sum_{i=1}^n (-\partial_{x_i}^2 + x_i^2)$$

Les valeurs propres de  $P_0$  sont explicitement connues.

A tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on associe une valeur propre  $\lambda(\alpha) = \sum_{j=1}^n (2\alpha_j + 1)$  et une fonction propre :  $\phi_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \psi_{\alpha_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \psi_{\alpha_n}(x_n)$ , où  $\psi_j(t)$  désigne la  $j^{\text{ième}}$ -fonction propre de  $(-\partial_t^2 + t^2)$ .

On voit alors aisément qu'on a l'encadrement suivant pour la fonction de comptage  $N_0(\lambda)$  associée à  $P_0$  :  $\exists C_0$  et  $C_1$  tels que

$$(1.9.28) \quad C_0(1+|\lambda|)^n \leq N_0(\lambda) \leq C_1(1+|\lambda|)^n \quad \text{pour } \lambda \geq C_1$$

$$(N_0(\lambda) = \{\#\ \alpha, \lambda(\alpha) \leq \lambda\}).$$

On montre en effet l'encadrement suivant, pour  $\lambda \geq n$

$$\left[ \frac{\lambda - n}{2n} \right]^n \leq N_0(\lambda) \leq \left( \frac{\lambda - n}{2} \right)^n$$

où  $[a]$  désigne la partie entière de  $a$  pour  $a \in \mathbb{R}$ .

On en déduit (compte tenu du fait que, si  $\lambda_j^0$  désigne la  $j^{\text{ième}}$  valeur propre de  $P_0$ , on a :  $N_0(\lambda_j^0) = j$ ) que :

$$(1.9.30) \quad \lambda_j^0 \approx j^{1/n} \quad (\text{i.e. sans contrôle des constantes}) \quad \text{lorsque } j \text{ tend vers } 1^\infty.$$

Soit maintenant  $Q$  un opérateur globalement elliptique d'ordre 2, autoadjoint.

On a les inégalités suivantes :

$$(1.9.31) \quad \|Qu\|^2 \leq \tilde{C}_1 (\|P_0 u\|_0^2 + \|u\|_0^2), \quad \forall u \in \mathcal{Y}$$

et

$$(1.9.32) \quad \|P_0 u\|^2 \leq \tilde{C}_2 (\|Qu\|_0^2 + \|u\|_0^2), \quad \forall u \in \mathcal{Y}$$

On peut réécrire (1.9.31) et (1.9.32) sous la forme :

$$(1.9.33) \quad (Q^2 u, u) \leq (\tilde{C}_1 (P_0^2 + I)u, u)$$

$$(P_0^2 u, u) \leq (\tilde{C}_2 (Q_2 + I)u, u)$$

et si  $\lambda_j$  désigne la valeur propre de  $Q$ , on déduit de la formule (1.9.26) appliquée à  $P_0^2$  et  $Q^2$  que

$$(1.9.34) \quad \begin{cases} \lambda_j^2 \leq \tilde{C}_1 (\lambda_j^{o2} + 1) \\ \lambda_j^{o2} \leq \tilde{C}_2 (\lambda_j^2 + 1) \end{cases} .$$

Il en résulte que l'on a :  $\lambda_j \sim j^{1/n}$ .

Pour un opérateur globalement elliptique d'ordre  $m$ , autoadjoint, on obtient en prenant par exemple la puissance fractionnaire d'ordre  $2/m$  (cf. §1-10 et 1-11) :

$$(1.9.35) \quad \begin{cases} \lambda_j \approx j^{m/2n} \\ N(\lambda) \approx \lambda^{n/2m} \end{cases} .$$

Bien entendu, on donnera ultérieurement des résultats beaucoup plus précis.

#### 1.10 - Calcul fonctionnel sur les opérateurs globalement elliptiques (théorie abstraite).

Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur globalement elliptique d'ordre  $m > 0$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) formellement autoadjoint et  $A_0, \bar{A}_0$  les opérateurs définis dans les paragraphes précédents.

Pour simplifier, on pose  $\overline{A_0} = A$ . Soit  $f$  une fonction définie (au moins) sur le spectre de  $A$ . Soit  $\phi_j$  la base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  associée à la suite des valeurs propres  $\lambda_j$ . On pose la :

Définition 1.10.1 :  $f(A)$  est l'opérateur non-borné défini par :

$$(1.10.1) \quad D(f(A)) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) / \sum_j |f(\lambda_j)|^2 |u_j|^2 < \infty \text{ avec } u = \sum_j u_j \phi_j\}$$

et pour  $u$  dans  $D(f(A))$  :

$$(1.10.2) \quad f(A)u = \sum_j f(\lambda_j) u_j \phi_j .$$

Il est immédiat de vérifier que  $f(A)$  est fermé et de domaine dense (les fonctions propres  $\phi_j$  appartiennent à  $D(f(A))$ ).

De plus,  $f(A)$  est autoadjoint si  $f$  est réel.

Rappelons qu'on a défini  $D^\infty (= \mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$  en (1.9.22) ; il est naturel de se demander sous quelle condition  $f(A)$  opère de  $D^\infty$  dans  $D^\infty$ . C'est l'objet du lemme :

Lemme 1.10.2 : Si  $f$  est à croissance lente sur le spectre, i.e. s'il existe une constante  $C$  et  $p \in \mathbb{N}$  tels que

$$(1.10.3) \quad \forall j \in \mathbb{N}, |f(\lambda_j)| \leq C(1 + |\lambda_j|)^p$$

alors  $f(A)$  opère continûment de  $D^\infty$  dans  $D^\infty$ .

Preuve : D'après (1.10.3), on a, pour tout  $N$ , l'inégalité

$$|(1 + |\lambda_j|)^N f(\lambda_j) u_j| \leq C |(1 + |\lambda_j|)^{N+p} u_j|$$

On en déduit immédiatement la continuité de  $f(A)$  restreint à  $D(A^{N+p})$  dans  $D(A^N)$

(où  $D(A^{N+p})$  et  $D(A^N)$  sont munis de leur structure d'espace de Hilbert naturelle).

Notons qu'en fait :  $D(A^N) = B^{mN}$ .

Remarque 1.10.3 : Si  $f$  est bornée (cas où  $p = 0$ ),  $f(A)$  est continu de  $L^2$  dans  $L^2$ .

Exemples :

Exemples 1.10.4 : On suppose que  $A_0$  est strictement positif. Dans ce cas

$\sigma(\overline{A}_0) \subset \mathbb{R}^+$ . On peut prendre dans ce cas :

$$f(x) = x^s \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } s \in \mathbb{R} .$$

Exemple 1.10.5 : Si  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f(A)$  est de rang fini et régularisant.

Exemple 1.10.6 :  $f(x) = e^{itx}$  où  $t$  est un paramètre réel.

Alors  $f(A) = e^{-itA}$  est un opérateur borné unitaire dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , d'adjoint  $e^{+itA}$ .

Exemple 1.10.7 : On suppose que  $A_0$  est positif. Alors si  $f \in \mathcal{J}'(\overline{\mathbb{R}}^+)$ ,  $f(A)$  est un opérateur régularisant. Par exemple, on peut prendre la fonction :

$$f_t(x) = e^{-tx} \quad \text{avec } t > 0.$$

Exemple 1.10.8 : Si  $f$  et  $g$  sont à croissance lente, on a, sur  $D^\infty$ , l'égalité  $f(A).g(A) = (f.g)(A)$ .

Proposition 1.10.9 :  $t \rightarrow e^{-itA}$  appartient à  $C_t^\infty(\mathcal{L}(D^\infty, D^\infty))$ .

De plus, l'équation suivante est satisfaite :

$$(1.10.4) \quad \left( \frac{1}{i} \partial_t + A \right) e^{-itA} = 0 \quad \text{dans } C_t^\infty(\mathcal{L}(D^\infty, D^\infty))$$

$$e^{-itA} /_{t=0} = I .$$

Démonstration : En revenant aux définitions, on montre en effet que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $t \rightarrow e^{-itA} \in C_t^{m-1}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(D(A^{m+p}), D(A^p)))$ .

L'équation 1.10.4 vérifiée par  $e^{-itA}$  sera la clé pour chercher une bonne approximation de  $e^{-itA}$ .

Etude du noyau distribution de  $f(A)$ .

Proposition 1.10.10 : Si  $f$  est à croissance lente sur le spectre de  $A$ , le noyau distribution  $K$  de  $f(A)$  est dans  $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  et on a :

$$(1.10.5) \quad K = \lim_{N \rightarrow \infty} K_N \quad \text{dans } \mathcal{J}' \text{ faible}$$

où  $K_N$  est le noyau :

$$(1.10.6) \quad K_N(x, y) = \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) \phi_i(x) \overline{\phi_i}(y) .$$

Le fait que le noyau de  $f(A)$  soit dans  $\mathcal{F}'_{x,y}$  résulte du théorème des noyaux et du fait que, de par le lemme 1.10.2,  $f(A)$  est continu de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  et donc de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}'$ .

$$(1.10.7) \quad \text{Soit } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{f(\lambda_i)}{(1+|\lambda_i|)^{2k}} \text{ tende vers } 0 \text{ lorsque } i \rightarrow \infty .$$

( $k$  existe toujours, car  $f$  est à croissance lente sur le spectre et  $\lambda_i$  tend vers l'infini avec  $i$ .)

(1.10.8) Soit  $B_N = f(A)P_N$  (cf. 1.9.17 pour la définition de  $P_N$ ) l'opérateur de noyau  $K_N$ .

$B_N$  se prolonge en un opérateur continu de  $D(A^k)$  dans  $(D(A^k))'$  et il résulte de (1.10.7) que  $B_N$  est de Cauchy dans  $\mathcal{L}(D(A^k), D(A^k)')$ .

Il existe donc  $B$  dans  $\mathcal{L}(D(A^k), D(A^k)')$  tel que :

$$(1.10.9) \quad B = \lim_{N \rightarrow \infty} B_N$$

On constate de plus, compte tenu de (1.10.8) et (1.10.9), que, pour tout  $i$  :

$$B \phi_i = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \geq i}} B_N \phi_i = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \geq i}} f(A) \phi_i = f(A) \phi_i .$$

Par conséquent  $B$  et  $f(A)$  étant dans  $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$  et coïncidant sur les  $\phi_i$  sont égaux dans  $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ . On a donc

$$(1.10.10) \quad f(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} B_N .$$

Proposition 1.10.11 : Si  $f$  est à décroissance rapide sur le spectre, alors  $K_N$  tend vers  $K$  dans  $\mathcal{F}$ .

D'après la démonstration précédente, qu'on peut utiliser avec  $k=0$ , on voit immédiatement que  $K_N(x,y) \rightarrow K(x,y)$  dans  $L^2_{x,y}$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Introduisons  $A^c$  par :

$$(1.10.11) \quad \forall u \in \mathcal{F}, A^c u = \overline{A \bar{u}}$$

On a :

$$(1.10.12) \quad A_x^M A_y^{cM} K_N(x,y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{2M} f(\lambda_i) \overline{\phi_i(x)} \overline{\phi_i(y)} .$$

D'une part,  $A_x^M A_y^{CM} K_N(x,y)$  tend vers  $A_x^M A_y^{CM} K(x,y)$  dans  $\mathcal{J}'_{x,y}$  (proposition 1.10.10) et d'autre part, comme  $\lambda_i^{2M} f(\lambda_i)$  tend rapidement vers 0 quand  $i$  tend vers  $l^\infty$ , est convergente dans  $L^2_{x,y}$ .

On en déduit que, pour tout  $M \in \mathbb{N}$  :

$$A_x^M (A_y^C)^M K_N(x,y) \text{ tend vers } A_x^M (A_y^C)^M K(x,y) \text{ dans } L^2$$

lorsque  $N$  tend vers l'infini.

$A_x$  et  $A_y^C$  étant globalement elliptiques, on en déduit, en admettant un théorème de régularité de  $A_x$  (ou  $A_y^C$ ) à valeurs vectorielles à partir de  $L^2_{x,y}$ , que

$$K_N(x,y) \rightarrow K(x,y) \text{ dans } B_x^M \hat{\otimes} B_y^M \text{ pour tout } M.$$

Compte tenu de l'inclusion de  $B_x^M \hat{\otimes} B_y^M$  dans  $B_{x,y}^M$  et de la propriété :

$$\cap_M B_{x,y}^M = \mathcal{J}'_{x,y}, \text{ la proposition est démontrée. } \blacksquare$$

Corollaire 1.10.12 : Si  $f$  est à décroissance rapide, on a

$$\text{Trace } f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i f(\lambda_i) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,x) dx .$$

Etude de Trace ( $e^{-itA}$ ) (définition abstraite)

On voudrait définir  $\text{Trace } (e^{-itA})$ . Si  $f$  était une fonction  $(t,x) \rightarrow f(t,x)$  dans  $C^0(\mathbb{R}_t, \mathcal{J}'_x)$ , alors  $\text{Trace } f(t,A)$  serait une fonction continue en  $t$ . Mais  $(t,x) \rightarrow e^{-itx}$  n'a pas cette propriété.

On va définir  $\text{Trace } e^{-itA}$  comme une distribution.

Proposition 1.10.13 : L'application :

$$\mathcal{J} \ni \phi \rightarrow \text{Trace } g(A) \text{ où } g(x) = \int e^{-itx} \phi(t) dt .$$

définit une distribution tempérée notée  $\text{Trace } e^{-itA}$ .



Démonstration :  $\phi \rightarrow g = \hat{\phi}$  étant continue de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$ , il reste à montrer que  $|\text{Trace } g(A)| \leq C P(g)$  pour un  $C \in \mathbb{R}$  et une semi-norme  $P$  convenable. Or on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_j g(\lambda_j) \right| &= \left| \sum_j (1 + \lambda_j^2)^{-N} (1 + \lambda_j^2)^N g(\lambda_j) \right| \\ &\leq \left( \sum_j (1 + \lambda_j^2)^{-N} \right) \sup_{t \in \mathbb{R}} |(1 + t^2)^N g(t)| . \end{aligned}$$

Or, on a montré dans la proposition 1.9.8, qu'il existait  $N_0$  tel que :

$$\sum_j (1 + \lambda_j^2)^{-N_0} < \infty .$$

La proposition est donc démontrée.

Il sera intéressant d'étudier les singularités de  $\text{Trace}(e^{-itA})$ . Ceci sera fait au chapitre II.

### 1.11 - Calcul fonctionnel sur les opérateurs globalement elliptiques (Théorie o.p.d.).

On garde les hypothèses du paragraphe précédent et on suppose de plus que  $\overline{A_0} = A$  est inversible et positif, i.e.  $\sigma_p(\overline{A_0}) \subset \mathbb{R}^+$ .

On a vu (cf. ex. 1.10.4) que l'on peut définir abstraitement  $A^z$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

On a d'abord le théorème suivant :

Théorème 1.11.1 : Soit  $\mathcal{A} \in G_1^{m, c^1}$  un opérateur globalement elliptique d'ordre  $m > 0$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), formellement autoadjoint, strictement positif.

Soit  $A = \overline{A_0}$  l'extension autoadjointe associée. Alors  $A^z$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) peut être défini comme un opérateur pseudodifférentiel dans  $G_1^{m \text{ Rez}-1}$ .

Le théorème suivant précise et généralise le théorème 1.11.1.

Théorème 1.11.2 : Soit  $f$  une fonction d'une variable réelle  $\lambda$  à valeur complexe vérifiant les propriétés d'un symbole classique d'Hörmander d'ordre  $r$  :

$$(1.11.1) \quad |f^{(k)}(\lambda)| \leq C_k (1 + |\lambda|)^{r-k} .$$

Alors, sous les hypothèses du théorème 1.11.1,  $f(\overline{A_0})$  est inclus dans  $G_1^{rm}$  et son symbole de Weyl  $a_f$  admet un développement du type

$$(1.11.2) \quad a_f \sim \sum_{j=0}^m a_{f,rm-j} \quad \text{avec} \quad a_{f,rm-j} \in \Gamma_1^{mr-j}$$

$$(1.11.3) \quad a_{f,rm} = f(a_m)$$

$$(1.11.4) \quad a_{f,rm-1} = a_{m-1} \cdot f'(a_m)$$

$$(1.11.5) \quad \text{Pour } j \geq 2, a_{f,rm-j} = \sum_{l=1}^j \frac{d_{jk}(a)}{k!} f^{(k)}(a_m)$$

où les  $d_{jk}$  ne dépendent que de  $a$  et sont inclus dans  $\Gamma_1^{mk-j}$ .

De plus, si  $f(\lambda) \sim \sum_j c_j \cdot \lambda^{r-j}$  (pour  $\lambda > 0$ ), alors  $f(\overline{A_0})$  est dans  $G_1^{rm,cl}$ .

Remarque 1.11.3 : En fait, il suffit de faire l'hypothèse (1.11.1) dans  $\mathbb{R}^+$ .

Nous ne démontrerons pas dans ce cours le théorème 1.11.2.

Remarque 1.11.4 : En particulier, dans le cas où  $f(\lambda) = \lambda^z$  pour  $\lambda > 0$ , on obtient que le symbole de Weyl de  $A^z$ ,  $a(z)$ , admet un développement (en termes homogènes si  $z$  est réel) de la forme :

$$a(z) \sim \sum_j a_{m\text{Rez}-j}(z)$$

avec

$$(1.11.6) \quad \begin{cases} a_{m\text{Rez}}(z) &= a_m^z \quad \text{pour } |x|+|\xi| \text{ assez grand} \\ a_{m\text{Rez}-1}(z) &= z a_{m-1} \cdot a_m^{z-1} \\ a_{m\text{Rez}-j}(z) &= \sum_{l=1}^j (-1)^k \frac{d_{jk}(a)}{k!} z(z-1)\dots(z-k+1) a_m^{z-k} \end{cases}$$

Nous démontrerons ici le théorème (1.11.1) et la propriété (1.11.6) .

Démonstration du théorème 1.11.1 :  $A^z$  a été défini "abstraitement" au §1.10 (cf. 1.10.4) et on a vu que, sur  $D^\infty(= \mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$ , on avait (cf. Remarque 1.10.8) :

$$(1.11.7) \quad A_1^z \cdot A^z = A^{z_1+z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

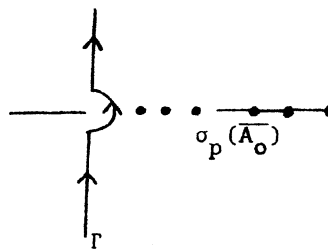
Il suffira donc de démontrer le théorème dans le cas où  $\text{Re} z < 0$ . On conclura dans le cas général en utilisant (1.11.17) et pour les formules (1.11.6) un argument de prolongement analytique.

Soit maintenant  $\Gamma$  le contour dans  $\mathbb{C}$  défini par exemple par la réunion de

$$\Gamma_1 = \{\rho e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad , \quad -\infty < \rho < -\varepsilon\}$$

$$\Gamma_2 = \{\varepsilon e^{-i\frac{\pi}{2}+t} \quad , \quad 0 < t < \pi\}$$

$$\Gamma_3 = \{\rho e^{i\frac{\pi}{2}} \quad , \quad \varepsilon < \rho < +\infty\}$$



On choisit  $\varepsilon$  assez petit de sorte que  $\Gamma$  soit à gauche de  $\sigma_p(\overline{A_0})$ .

Posons alors :

$$B_z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (A-\lambda)^{-1} d\lambda$$

où on a pris la détermination principale de  $\lambda^z$  dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

L'intégrale est convergente dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  car  $\text{Re} z < 0$  et on a (A étant auto-adjoint) pour  $\lambda \in \Gamma$  :

$$(1.11.8) \quad \left\| (A-\lambda)^{-1} \right\| \leq (d(\lambda, \sigma(\overline{A_0}))^{-1} \leq \frac{C}{|\lambda|+1}$$

Remarquons maintenant qu'on a, pour  $j \in \mathbb{N}$  :

$$B_z \phi_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (A-\lambda)^{-1} \phi_j d\lambda = \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (\lambda_j - \lambda)^{-1} d\lambda \right) \phi_j$$

Utilisant la théorie de Cauchy, on constate que

$$B_z \phi_j = \lambda_j^z \phi_j \quad (j \in \mathbb{N}) \quad .$$

On montre ainsi que :

$$(1.11.9) \quad A^z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (A-\lambda)^{-1} d\lambda \quad .$$

La démonstration du théorème résultera d'une étude soignée du symbole de l'opérateur pseudodifférentiel  $(A-\lambda)^{-1}$ . Pour tout  $\lambda \in \Gamma$ ,  $(A-\lambda)$  est inversible et on a vu (cf. proposition 1.7.5) que  $(A-\lambda)^{-1}$  est un o.p.d. (plus généralement pour tout  $\lambda \in C\sigma_p(A_0)$ ). En suivant soigneusement dans la démonstration la dépendance en  $\lambda$ , on obtiendrait que le symbole de Weyl  $q(x, \xi, \lambda)$  de  $(A-\lambda)^{-1}$  dépend de manière  $C^\infty$  de  $\lambda$  et qu'on a :

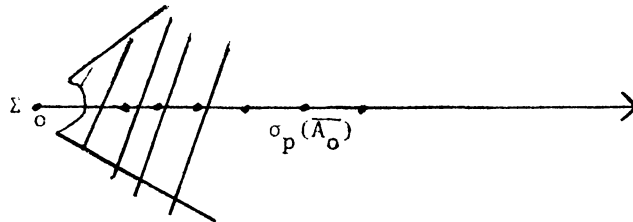
$$(1.11.10) \quad \forall K \subset C\sigma_p(A_0), \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}, \quad \exists C(K, \alpha, \beta) \text{ t.q.}$$

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta q(x, \xi, \lambda)| \leq C(K, \alpha, \beta) \lambda(x, \xi)^{-m-|\alpha|-|\beta|}$$

Cette information est insuffisante et on doit examiner plus soigneusement la dépendance du symbole en  $\lambda$ . Pour s'éviter quelques problèmes techniques, on fera l'hypothèse :

$$(1.11.11) \quad \text{L'opérateur } \mathcal{A} \text{ considéré est un polynôme de } x \text{ et } D_x \text{ de degré } m.$$

Soit  $\Sigma$  le sous-ensemble de  $C\sigma_p(\overline{A_0})$  construit comme étant la réunion du complémentaire du cône :  $|\arg z| < \alpha$  (avec  $\alpha < 0$ ) et d'une bande assez petite centrée à l'origine :



On introduit la classe  $\Gamma^{s, m, \Sigma}$  de symboles définie par :

$$(1.11.12) \quad \Gamma^{s, \Sigma, m} = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n} \times \Sigma); \forall \alpha, \forall \beta, \exists C_{\alpha\beta} \text{ t.q. :}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi, \lambda)| \leq C_{\alpha\beta} (\lambda[|x, \xi, |\lambda|^{1/m}])^{s-|\alpha|-|\beta|}$$

On voit facilement que, si (1.11.11) est vérifiée,  $(\mathcal{A}-\lambda)$  admet un symbole de Weyl dans  $\Gamma^{m, \Sigma, m}$ . On notera :  $(\mathcal{A}-\lambda) \in G^{m, \Sigma, m}$ .

Par ailleurs, son symbole principal est elliptique en  $(x, \xi, \lambda)$ , en ce sens qu'il vérifie :

$$(1.11.13) \quad |a_m(x, \xi, \lambda)| \geq C(|x| + |\xi| + |\lambda|^{1/m})^m$$

pour  $|x| + |\xi| + |\lambda|^{1/m}$  assez grand

où  $a_m(x, \xi, \lambda) = a_m(x, \xi) - \lambda$ .

On peut alors faire une théorie elliptique (en  $(x, \xi, \lambda)$ ) "avec paramètre" et construire une paramétrix  $Q_\lambda$  telle que

$$Q_\lambda \cdot (\mathcal{A} - \lambda) = I + R_\lambda$$

$$(\mathcal{A} - \lambda) \cdot Q_\lambda = I + R'_\lambda$$

où  $Q_\lambda \in G^{-m, \Sigma, m}$ ,  $R_\lambda$  et  $R'_\lambda \in G^{-\infty, \Sigma, m}$ .

Compte tenu de (1.11.18), on peut montrer alors (cf. proposition 1.7.5) en contrôlant soigneusement la dépendance en  $\lambda$  que  $(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}$  est lui-même dans  $G^{-m, \Sigma, m}$  et qu'on a

$$(1.1.15) \quad (\mathcal{A}-\lambda)^{-1} - Q_\lambda \in G^{-\infty, \Sigma, m}.$$

Si on analyse la construction de la paramétrix  $Q_\lambda$ , on peut donner une information plus précise sur  $q(x, \xi, \lambda)$ ;  $q(x, \xi, \lambda)$  admet un développement asymptotique de la forme :

$$(1.11.16) \quad q(x, \xi, \lambda) \sim q_{-m}(x, \xi, \lambda) + q_{-m-1}(x, \xi, \lambda) + \dots + q_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$$

(la somme asymptotique étant prise au sens des symboles en  $(x, \xi, \lambda)$ ).

On a de plus pour  $|x|+|\xi|+|\lambda| \geq R$  avec  $R$  assez grand,  $\lambda \in \Sigma$

$$(1.11.17) \quad \begin{cases} q_{-m}(x, \xi, \lambda) &= (a_m(x, \xi) - \lambda)^{-1} \\ q_{-m-1}(x, \xi, \lambda) &= \frac{-a_{m-1}(x, \xi)}{(a_m(x, \xi) - \lambda)^2} \\ q_{-m-j}(x, \xi, \lambda) &= \sum_{k=1}^j d_{jk}(a) (a_m(x, \xi) - \lambda)^{-k-1} \end{cases}$$

avec  $d_{jk}(a)$  dans  $\Gamma_1^{mk-j}$  (en fait homogène de degré  $mk-j$  en  $(x, \xi)$ ).

Remarque 1.11.5 : Sous l'hypothèse (1.11.11),  $d_{jk}(a)$  est polynômial en  $(x, \xi)$  et

on a donc :

$$(1.11.18) \quad q_{-m-j}(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=[j/m]}^j d_{jk}(a) (a_m(x, \xi) - \lambda)^{-k-1}$$

Revenons à la formule (1.11.9). Le candidat à être le symbole de  $A^z$  est, s'il existe :

$$(1.11.19) \quad a_z(x, \xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z q(x, \xi, \lambda) d\lambda .$$

Comme on a, pour  $|x|+|\xi| \leq R$  et  $\lambda \in \Gamma$  :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta q(x, \xi, \lambda)| \leq C_{\alpha\beta} (1+|\lambda|)^{-1}$$

on n'a pas de problème dans cette zone.

On suppose donc dorénavant  $|x|+|\xi| \geq R$  et on utilise (1.11.16) :

$$(1.11.20) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z q(x, \xi, \lambda) d\lambda = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z q_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda \\ + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z q^N(x, \xi, \lambda) d\lambda$$

où  $q^N(x, \xi, \lambda)$  est dans  $\Gamma^{-m-N, \Gamma, m}$ .

Examinons le second membre de (1.11.20). Pour  $|x|+|\xi| \geq R$ , on a :

$|x|+|\xi|+|\lambda| \geq R$  et par conséquent, d'après (1.11.17) :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z q_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda = \sum_{k=1}^j d_{jk}(a) \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (a_m - \lambda)^{-k-1} d\lambda .$$

D'où, en appliquant le théorème des résidus :

$$\sum_{k=1}^j (-1)^k d_{jk}(a) \frac{z(z-1)\dots(z-k)}{k!} a_m^{z-k} \stackrel{\text{def}}{=} a_{m\text{Re}z-j}(z; x, \xi) .$$

Il ne reste plus, pour montrer que  $A^z$  est un opérateur pseudodifférentiel, qu'à montrer :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z q^N(x, \xi, \lambda) d\lambda \in \Gamma_1^{-M(N)}(\mathbb{R}^{2n})$$

avec  $M(N) \rightarrow \infty$  lorsque  $N$  tend vers  $1^\infty$ . Ceci résulte immédiatement de la propriété que  $q^N$  est dans  $\Gamma^{-m-N, \Gamma, m}$ .

1.12 - Caractérisation des opérateurs pseudodifférentiels (d'après Beals).

On se propose dans ce paragraphe de démontrer la caractérisation suivante des classes  $G_\rho^0$  :

Théorème 1.12.1 : Soit  $1 \geq \rho \geq 0$  et  $B$  une application linéaire de  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ .

On pose :

$$\begin{cases} L_j B = [ix_j, B] = ix_j B - iBx_j & (j=1, \dots, n) \\ M_j B = [D_j, B] = D_{x_j} B - B D_{x_j} \end{cases}$$

et si  $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$  sont des multiindices, on pose :

$$B \begin{matrix} (\alpha) \\ (\beta) \end{matrix} = L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n} M_1^{\beta_1} \dots M_n^{\beta_n} B .$$

Alors  $B$  est dans  $G_\rho^0(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si, pour tous  $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$ , l'opérateur  $B \begin{matrix} (\alpha) \\ (\beta) \end{matrix} = L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n} M_1^{\beta_1} \dots M_n^{\beta_n} B$ .

Alors  $B$  est dans  $G_\rho^0(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si, pour tous  $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$ , l'opérateur  $B \begin{matrix} (\alpha) \\ (\beta) \end{matrix}$  a une extension continue de  $B^{-(|\alpha|+|\beta|)\rho}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Montrons d'abord la partie facile du théorème.

Lemme 1.12.2 : Si  $B$  est dans  $G_\rho^0(\mathbb{R}^n)$ , alors pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ , l'opérateur  $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$  a une extension continue de  $B^{-(|\alpha|+|\beta|)\rho}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Le lemme est vrai pour  $\rho = 0$ , mais compte tenu de ce que nous avons démontré dans ce cours, nous ne ferons ici la démonstration que dans le cas où  $\rho > 0$ .

Si  $B$  s'écrit sous la forme

$$(1.12.1) \quad Bu = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

avec

$$(1.12.2) \quad a \in \Gamma_\rho^0(\mathbb{R}^{2n}).$$

on vérifie immédiatement que  $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$  est un opérateur pseudodifférentiel de symbole  $(\partial_x^\beta D_\xi^\alpha a)(x, \xi)$  dans  $\Gamma_\rho^{-\rho(|\alpha|+|\beta|)}(\mathbb{R}^{2n})$ . Le lemme se déduit alors du théorème (1.4.7) et de la proposition (1.6.3).

Montrons maintenant le :

Lemme 1.12.3 : Soit  $B$  une application linéaire de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}'$  telle que, pour tout  $\alpha, \beta$  dans  $(\mathbb{Z}_+)^n$ , l'opérateur  $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$  admette une extension continue de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $B$  appartient à  $G_0^0(\mathbb{R}^n)$ .

Démonstration : Nous cherchons d'abord une écriture formelle du symbole  $b$  (usuel, cf. (1.12.1) en supposant par exemple que  $B$  est continu de  $\mathcal{F}'$  dans  $\mathcal{F}$ ).

Posons

$$(1.12.3) \quad e_\xi(x) = e^{ix \cdot \xi}$$

et soit  $g \in \mathcal{D}$  tel que  $g(0) = 1$  et tel que :  $g(x) = g(-x)$ .

Posons :  $g_x(y) = g(y-x)$ .

Si  $u \in \mathcal{F}$ , on a :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x) g_x(x) = \iint e^{i(x-y) \cdot \xi} g_x(y) u(y) dy d\xi \\ &= \iint e^{-iy \cdot \xi} e_\xi(x) g_y(x) u(y) dy d\xi \end{aligned}$$

on obtient alors formellement :

$$Bu(x) = \iint e^{-iy \cdot \xi} B(e_\xi g_y)(x) u(y) dy d\xi$$



$$\begin{aligned}
 &= \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} b_0(x, y, \xi) u(y) dy d\xi \\
 &= \int e^{ix \cdot \xi} b(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

où

$$(1.12.4) \quad b_0(x, y, \xi) = e_{-\xi}(x) B(e_{\xi} g_y)(x)$$

et

$$(1.12.5) \quad b(x, \xi) = \iint e^{i\langle x-y, \eta-\xi \rangle} b_0(x, y, \eta) d\eta dy$$

Les estimations qui vont suivre permettront de donner un sens à l'intégrale oscillante (1.12.5).

Considérons d'abord  $b_0(x, y, \xi)$  défini en (1.12.4). Si  $B$  est continu de  $L^2$  dans  $L^2$ , on déduit de (1.12.4) l'estimation  $L^2$  suivante pour  $b_0$  considérée comme fonction de  $x$  dépendant des paramètres  $y$  et  $\xi$ .

$$\begin{aligned}
 & \| |b_0(x, y, \xi)| \|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)} \leq \| |B| \|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \| |e_{\xi} g_y| \|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)} \\
 (1.12.6) \quad & \| |b_0(x, y, \xi)| \|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)} \leq \| |B| \|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \| |g| \|
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant :  $(D_x b_0)(x, y, \xi)$ , on a :

$$\begin{aligned}
 & D_{x_i} b_0(x, y, \xi) = -i\xi_i \cdot e_{-\xi}(x) B(e_{\xi} g_y)(x) \\
 & + e_{-\xi}(x) D_{x_i} [B(e_{\xi} g_y)](x) = -i\xi_i e_{-\xi}(x) B(e_{\xi} g_y)(x) \\
 & + e_{-\xi}(x) [D_{x_i} B] [(e_{\xi} g_y)](x) + e_{-\xi}(x) (B(D_{y_i} (e_{\xi} g_y)))(x)
 \end{aligned}$$

$$(1.12.7) \quad D_{x_i} b_0(x, y, \xi) = e_{-\xi}(x) [D_{x_i}, B] (e_{\xi} g_y)(x) \\ + e_{-\xi}(x) (B [e_{\xi} \cdot (+D_{x_i} g)_y]) (x)$$

D'où

$$(1.12.8) \quad \|D_{x_i} b_0(x, y, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)} \leq \| [D_{x_i}, B] \|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \cdot \|g\| + \|B\| \|D_{x_i} g\|$$

Étudions maintenant  $(D_{y_i} b_0)$ , on a :

$$(1.12.9) \quad D_{y_i} b_0(x, y, \xi) = e_{-\xi}(x) B (e_{\xi} (-D_{x_i} g)_y)(x)$$

D'où

$$(1.12.10) \quad \|D_{y_i} b_0(x, y, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \|D_{x_i} g\|_{L^2}$$

Regardons enfin  $(D_{\xi_i} b_0)$ , on a :

$$D_{\xi_i} b_0(x, y, \xi) = -x_i \cdot e_{-\xi}(x) B (e_{\xi} g_y)(x) + e_{-\xi}(x) B [x_i e_{\xi} \cdot g_y](x)$$

$$(1.12.11) \quad D_{\xi_i} b_0(x, y, \xi) = e_{-\xi}(x) [B, x_i] (e_{\xi} \cdot g_y)(x)$$

D'où

$$(1.12.12) \quad \|D_{\xi_i} b_0(x, y, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)} \leq \| [B, x_i] \|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \|g\|$$

Si on regarde les formules (1.12.7), (1.12.9) et (1.12.11), on obtient aisément par récurrence qu'il existe pour tout  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^{+n}$  une constante universelle  $C_{\alpha\beta\gamma}$  telle que :

$$(1.12.13) \quad D_x^\beta D_\xi^\alpha D_y^\gamma b_o(x, y, \xi) \leq C_{\alpha\beta\gamma} \left[ \begin{array}{c} \sum \\ |\tilde{\alpha}| \leq |\alpha| \\ |\tilde{\beta}| \leq |\beta| \end{array} \left\| B_{(\tilde{\beta})}^{(\tilde{\alpha})} \right\| \right]_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \times \|g\|_H^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}$$

où  $H^{(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)}(\mathbb{R}^n)$  désigne l'espace de Sobolev usuel construit sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

On a par conséquent montré que :

$$(1.12.14) \quad \| D_x^\beta D_\xi^\alpha D_y^\gamma b_o(x, y, \cdot) \|_{L_x^2} \leq \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}$$

où les  $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}$  sont des constantes ne dépendant que des normes dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  des  $B_{(\tilde{\beta})}^{(\tilde{\alpha})}$  pour  $|\tilde{\alpha}| \leq |\alpha|$  et  $|\tilde{\beta}| \leq |\beta|$ . Utilisant le théorème d'injection de Sobolev, on en déduit :  $\forall \alpha, \beta, \gamma, \exists \tilde{\tilde{C}}_{\alpha\beta\gamma}$  t.q :

$$(1.12.15) \quad | D_x^\beta D_\xi^\alpha D_y^\gamma b_o(x, y, \xi) | \leq \tilde{\tilde{C}}_{\alpha\beta\gamma}$$

i.e  $b_o \in \Gamma_o^\circ(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

Si on avait démontré que  $b_o$  était dans  $\Gamma_o^\circ(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  avec  $\rho > 0$ , la conclusion du lemme (1.123) serait immédiate (cf. Déf. 1.2.3 et Théorème 1.2.6).

Il reste à généraliser l'étude faite au § 1.2 dans le cas  $\rho = 0$ .

Pour donner un sens à (1.12.15), on introduit l'opérateur différentiel :

$$(1.12.16) \quad L = \frac{-i(x-y) \cdot \partial_\eta - i(\xi-\eta) \cdot \partial_x + 1}{1 + |x-y|^2 + |\xi-\eta|^2}$$

qui vérifie :

$$(1.12.17) \quad L \cdot e^{i \langle x-y, \eta-\xi \rangle} = e^{i \langle x-y, \eta-\xi \rangle}$$

On a alors :

$$(1.12.18) \quad b(x, \xi) = \iint e^{i \langle x-y, \eta-\xi \rangle} \langle t_L \rangle^N b_o(x, y, \eta) d\eta dy$$

qui devient, pour  $N > 2n+1$ , une intégrale convergente grâce à (1.12.15).

On déduit alors de (1.12.15) et (1.12.18) que

$$b \in \Gamma_o^0(\mathbb{R}^{2n})$$

et plus précisément :  $\forall \alpha, \beta, \exists C_{\alpha\beta}$  tel que

$$(1.12.19) \quad |D_x^\beta D_\xi^\alpha b(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta}$$

de plus les  $C_{\alpha, \beta}$  ne dépendent que d'un nombre fini de normes dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  des  $B_{\tilde{\alpha}}^{(\tilde{\beta})}$ .

Dans le cas général, on approche  $B$  par des opérateurs continus de  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ .

Soit  $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  égale à 1 au voisinage de l'origine. Pour  $0 < \varepsilon \leq 1$ , on pose :

$$p_\varepsilon(x, \xi) = h(\varepsilon x) \quad , \quad q_\varepsilon(x, \xi) = h(\varepsilon \xi)$$

$$P_\varepsilon = p_\varepsilon(x, D) \quad , \quad Q_\varepsilon = q_\varepsilon(x, D) \quad , \quad B_\varepsilon = P_\varepsilon B Q_\varepsilon$$

Les opérateurs  $B_\varepsilon$  sont régularisants et pour tout  $u$  dans  $\mathcal{F}$ , on a :

$$(1.12.20) \quad B_\varepsilon u \rightarrow Bu \text{ dans } C^\infty$$

et donc  $b_0^\varepsilon(x, y, \xi)$  (défini en 1.12.4 en remplaçant  $B$  par  $B_\varepsilon$ ) vérifie :

$$(1.12.21) \quad b_0^\varepsilon(x, y, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} b_0(x, y, \xi) \text{ dans } C^\infty.$$

Par ailleurs :

$$(1.12.22) \quad \text{Les } B_{\varepsilon(\beta)}^{(\alpha)} \text{ décrivent quand } \varepsilon \in ]0, 1[ \text{ des bornés de } \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$$

Il résulte de (1.12.20), (1.12.21), (1.12.22) et de la remarque suivant (1.12.19) que les symboles  $b_\varepsilon$  convergent dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  vers un symbole  $b$  dans  $\Gamma_0^O(\mathbb{R}^n)$  (défini par 1.12.18) et que :

$$(1.12.23) \quad b(x, D)u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon(x, D)u = Bu \text{ pour } u \text{ dans } \mathcal{F}.$$

Démonstration du théorème 1.12.1 : Soit donc  $B$  tel que, pour tous  $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$ , l'opérateur  $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$  ait une extension de  $B^{-(|\alpha|+|\beta|)\rho}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Il résulte du lemme (1.12.3) que  $B$  est dans  $G_0^O(\mathbb{R}^n)$  et défini par un symbole  $b(x, \xi)$  vérifiant :

$$(1.12.24) \quad |D_x^\alpha D_\xi^\beta b(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta}.$$

Si  $\rho = 0$ , on a terminé. Si par contre  $\rho$  est strictement positif, les estimations (1.12.24) sont insuffisamment précises.

Remarquons maintenant que, compte tenu de la remarque précédant le lemme (1.12.3), on a :

$$(1.12.25) \quad B \in G_0^O \Leftrightarrow B_{(\beta)}^{(\alpha)} \in G_0^{-\rho(|\alpha|+|\beta|)}(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha, \beta \in (\mathbb{Z}^+)^n.$$

Considérons donc  $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$  et soit  $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$  un opérateur globalement elliptique dans  $G_1^\rho(|\alpha|+|\beta|)(\mathbb{R}^n)$ .

On remarque maintenant que :

$$(1.12.26) \quad B_{(\beta)}^{(\alpha)} \in G_0^{-\rho(|\alpha|+|\beta|)} \Leftrightarrow B_{(\beta)}^{(\alpha)} \cdot \mathcal{L}_{\alpha, \beta} \in G_0^O(\mathbb{R}^n).$$

Ceci résulte immédiatement de l'existence d'une paramétrix pour  $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$  (Th. 1.5.7)

Pour démontrer le théorème (1.12.1), il ne reste plus à démontrer que  $B_{(\beta)}^{(\alpha)} \cdot \mathcal{L}_{\alpha,\beta}$  vérifie les hypothèses du lemme (1.12.3). Montrons tout d'abord que :

$$(1.12.27) \quad B_{(\beta)}^{(\alpha)} \cdot \mathcal{L}_{\alpha\beta} \text{ se prolonge en un opérateur de } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^n).$$

D'après la proposition 1.6.11,  $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$  est continu de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans

$B^{-\rho(|\alpha|+|\beta|)}$  et  $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$  est par hypothèse prolongeable en un opérateur continu de  $B^{-\rho(|\alpha|+|\beta|)}$  dans  $L^2$ . On en déduit immédiatement (1.12.27).

Considérons maintenant par exemple :  $[D_{x_i}, B_{(\beta)}^{(\alpha)} \cdot \mathcal{L}_{\alpha\beta}]$ .

$$\text{on a : } [D_{x_i} \cdot \mathcal{L}_{\alpha\beta} B_{(\beta)}^{(\alpha)}] = B_{(\beta)}^{(\alpha)} [D_{x_i}, \mathcal{L}_{\alpha\beta}] + [D_{x_i}, B_{(\beta)}^{(\alpha)}] \mathcal{L}_{\alpha\beta}$$

$[D_{x_i}, \mathcal{L}_{\alpha\beta}]$  appartient à  $G_1^{+\rho(|\alpha|+|\beta|)-1}$  et donc a fortiori à  $G_0^{+\rho(|\alpha|+|\beta|)}$ .

Par conséquent,  $B_{(\beta)}^{(\alpha)} \cdot [D_{x_i}, \mathcal{L}_{\alpha\beta}]$  se prolonge en un opérateur continu de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Remarquons maintenant que :  $[D_{x_i}, B_{(\beta)}^{(\alpha)}] = B_{(\beta)}^{(\alpha+i)}$  se prolonge par

hypothèse en un opérateur continu de  $B^{-\rho(|\alpha|+|\beta|+1)}$  dans  $L^2$  et donc a fortiori de  $B^{-\rho(|\alpha|+|\beta|)}$  dans  $L^2$ . Par conséquent,  $B_{(\beta)}^{(\alpha+i)} \cdot \mathcal{L}_{\alpha\beta}$  se prolonge en un opérateur continu de  $L^2$  dans  $L^2$ . On démontre alors (1.12.27) par récurrence. Le théorème est ainsi démontré compte tenu de (1.12.25), (1.12.26) et (1.12.27).

II - OPÉRATEURS FOURIER INTÉGRAUX SUR  $\mathbb{R}^n$  (D'APRES B. HELFFER - D. ROBERT)

Dans le chapitre I, on a rappelé, en suivant de plus ou moins près le livre de Subin, la théorie des opérateurs pseudodifférentiels globaux et on a déjà démontré un certain nombre de résultats qualitatifs concernant la théorie spectrale.

Dans ce chapitre, on va étudier différentes classes de Fourier-intégraux globaux sur  $\mathbb{R}^n$  pouvant être utiles pour notre problème (cf. chapitre III) et des problèmes voisins.

2.1 - Une classe générale d'opérateurs Fourier-intégraux.

On s'intéresse ici à donner un sens à des intégrales du type :

$$(2.1.1) \quad (I(a, \phi).f)(x) = \iint_{\mathbb{R}_\theta^N \times \mathbb{R}_y^n} e^{i\phi(x, \theta, y)} a(x, \theta, y) f(y) dy d\theta$$

où  $f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

On doit considérer bien entendu cette intégrale comme une "intégrale oscillante", c'est-à-dire lui donner un sens par des intégrations par parties (on précisera dans ce paragraphe).

On fait sur  $\phi$  les hypothèses suivantes :

$$(H1) \quad \phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une application } C^\infty.$$

Si on pose comme au chapitre I :  $\lambda(x, \theta, y) = (1 + |x|^2 + |y|^2 + |\theta|^2)^{1/2}$ ,

$$(H2) \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^N, \text{ il existe } C_{\alpha\beta\gamma} \text{ tel que}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\theta^\gamma \phi(x, \theta, y)| \leq C_{\alpha\beta\gamma} (\lambda(x, y, \theta))^{2 - (|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)}_+$$

$$(H3) \quad \text{Il existe des réels } K_1, K_2 > 0 \text{ tels que}$$

$$K_1 \cdot \lambda(x, \theta, y) \leq \lambda(\partial_y \phi, \partial_\theta \phi, y) \leq K_2 \lambda(x, \theta, y)$$

$$(H3)^* \quad \text{Il existe des réels } K_1^*, K_2^* > 0 \text{ tels que}$$

$$K_1^* \cdot \lambda(x, \theta, y) \leq \lambda(x, \partial_\theta \phi, \partial_x \phi) \leq K_2^* \lambda(x, \theta, y).$$

On définit également la classe d'amplitude de la manière suivante :

Soient  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in [0, 1]$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$ . On pose :

$$(2.1.2) \quad \Gamma_\rho^\mu(\Omega) = \{a \in C^\infty(\Omega) : |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\theta^\gamma a| \leq C_{\alpha\beta\gamma} \lambda(x, \theta, y)^{\mu - \rho(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)}\}$$

Lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma_\rho^\mu(\Omega)$  est la classe définie au chapitre I. On notera simplement  $\Gamma_\rho^\mu$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Soient donc  $\phi$  vérifiant (H1), (H2) et (H3) et  $a$  dans  $\Gamma_\rho^\mu$ ; on se propose de préciser le sens que l'on donne à (2.1.1) comme intégrale oscillante. Pour cela, on procède suivant la méthode classique.

$I(a, \phi)f$  étant bien défini pour  $a \in \mathcal{J}$ , il s'agit de montrer que l'on peut passer à la limite à l'aide d'intégrations par parties.

Soit donc, comme au chapitre I,  $\chi$  une fonction dans  $\mathcal{J}$  telle que  $\chi(0) = 1$  et posons :

$$(2.1.3) \quad a_p(x, \theta, y) = \chi(p^{-1}(x, \theta, y)) a(x, \theta, y) .$$

On a la

Proposition 2.1.1 :

i) Pour tout  $f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ , tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(I(a_p, \phi)f)(x)$  admet une limite lorsque  $p \rightarrow \infty$ , indépendante de la fonction  $\chi$ . On pose alors

$$(2.1.4) \quad I(a, \phi)f = \lim_{p \rightarrow \infty} I(a_p, \phi)f$$

ii)  $I(a, \phi)$  définit un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

iii) Si de plus,  $\phi$  vérifie  $H_3^*$ , alors  $I(a, \phi)$  se prolonge en un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

Démonstration : Soit  $\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\text{supp } \delta \subseteq [-1, 2]$  et telle que  $\delta \equiv 1$  sur  $[0, 1]$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$(2.1.5) \quad \omega_\varepsilon(x, \theta, y) = \delta\left(\frac{|\partial_y \phi|^2 + |\partial_\theta \phi|^2}{\varepsilon \lambda(x, \theta, y)^2}\right).$$



L'hypothèse (H3) implique qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que l'on ait sur le support de  $\omega_\varepsilon$ :

$$(2.1.6) \quad \lambda(x, \theta, y) \leq \gamma [(1+|y|^2)^{1/2} + \varepsilon^{1/2} \lambda(x, \theta, y)] .$$

Par conséquent, il existe  $\varepsilon_0$  et une constante  $\gamma_0$ , telle que pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , on ait l'inégalité :

$$(2.1.7) \quad \lambda(x, \theta, y) \leq \gamma_0 (1+|y|^2)^{1/2}$$

sur le support de  $\omega_\varepsilon$ .

Dans ce qui suit, on fixe  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .

Il est immédiat qu'alors :  $I(\omega_{\varepsilon_0} a_p, \phi) f$  est une intégrale absolument convergente et que l'on a :

$$(2.1.8) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} I(\omega_{\varepsilon_0} a_p, \phi) f = I(\omega_{\varepsilon_0} a, \phi) f$$

En utilisant (H2) on montre également aisément que  $I(\omega_{\varepsilon_0} a, \phi)$  est un opérateur continu de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même. Pour étudier  $\lim_{p \rightarrow +\infty} I((1-\omega_{\varepsilon_0}) a_p, \phi) f$ , on introduit l'opérateur :

$$(2.1.9) \quad L = i^{-1} \frac{\left( \sum_{j=1}^n (\partial_{y_j} \phi) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^N (\partial_{\theta_j} \phi) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right)}{|\partial_y \phi|^2 + |\partial_\theta \phi|^2}$$

On a clairement

$$(2.1.10) \quad Le^{i\phi} = e^{i\phi} \text{ (sous réserve que le dénominateur de (2.1.9) soit non nul).}$$

Soit  $\Omega_0$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$  défini par

$$(2.1.11) \quad \Omega_0 = \{(x, \theta, y), |\partial_y \phi|^2 + |\partial_\theta \phi|^2 > \frac{\varepsilon_0}{2} \lambda(x, \theta, y)^2\} .$$

Si  ${}^tL$  désigne le transposé de  $L$ , on a le

Lemme 2.1.2 : Pour tout entier  $q \geq 0$ , on a, pour tout  $b$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\theta^N)$  :

$$(2.1.12) \quad ({}^tL)^q ((1-\omega_{\varepsilon_0}) b) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq q} g_{\alpha, \beta}^q \cdot \partial_y^\alpha \partial_\theta^\beta ((1-\omega_{\varepsilon_0}) b)$$

où les  $g_{\alpha, \beta}^q$  sont dans  $\Gamma_0^{-q}(\Omega_0)$  et ne dépendent que de  $\phi$ .

On démontre le lemme par récurrence. Il est clairement vérifié pour  $q = 0$ . On voit maintenant facilement que :

$$(2.1.13) \quad t_L = \sum_j F_j \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_j G_j \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} + H$$

où  $F_j \in \Gamma_0^{-1}(\Omega_0)$ ,  $G_j \in \Gamma_0^{-1}(\Omega_0)$ ,  $H \in \Gamma_0^{-2}(\Omega_0)$ .

Ces derniers points résultent de l'hypothèse (H2). La récurrence se démontre alors immédiatement.

Fin de la démonstration de la proposition 2.1.1.

Pour tout entier  $q \geq 0$ , on a, compte tenu de (2.1.10) :

$$(2.1.14) \quad (I((1-\omega_{\varepsilon_0})_{a_p}, \phi)f)(x) = \iint e^{i\phi(x, \theta, y)} (t_L)^q ((1-\omega_{\varepsilon_0})_{a_p} f) dy d\theta$$

Or :

$$(2.1.15) \quad (t_L)^q ((1-\omega_{\varepsilon_0})_{a_p} f) \text{ décrit (quand } p \text{ varie) un borné de } \Gamma_0^{\mu-q}$$

et

$$(2.1.16) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} (t_L)^q ((1-\omega_{\varepsilon_0})_{a_p} f)(x, \theta, y) = (t_L)^q ((1-\omega_{\varepsilon_0})_{af})(x, \theta, y)$$

pour tout  $(x, \theta, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$ .

Enfin, on a, pour tout  $s > n + N$  :

$$(2.1.17) \quad \iint |t_L|^{-s}(x, \theta, y) dy d\theta \leq \gamma_s \lambda(x)^{n+N-s} ;$$

Il résulte alors de (2.1.14) à (2.1.17) que l'on a (grâce au théorème de convergence dominée) :

$$(2.1.18) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} (I((1-\omega_{\varepsilon_0})_{a_p}, \phi)f)(x) = \iint e^{i\phi(x, \theta, y)} (t_L)^q ((1-\omega_{\varepsilon_0})_{af}) dy d\theta .$$

où  $q$  vérifie  $q > n + N + \mu$ .

(2.1.16) et (2.1.18) permettent de démontrer le point i) de la proposition.

Montrons maintenant que  $I((1-\omega_{\varepsilon_0})_{a_p}, \phi)$  est continu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Compte tenu de (2.1.13) et (2.1.18), on a :

$$(2.1.19) \quad I((1-\omega_{\varepsilon_0})_{a_p}, \phi)f(x) = \sum_{|\gamma| \leq q} \iint e^{i\phi(x, \theta, y)} h_{\gamma}^{(q)}(x, \theta, y) \partial_{\gamma}^{\gamma} f(y) dy d\theta .$$

avec  $h_{\gamma}^{(q)} \in \Gamma_0^{\mu-q}$ .

D'autre part, on a :

$$(2.1.20) \quad x^\alpha \partial_x^\beta (e^{i\phi} h_Y^q(x, \theta, y)) \in \Gamma_o^{\mu-q+|\alpha|+|\beta|}$$

On déduit de (2.1.19) et (2.1.20) que, pour  $q > n + N + \mu + |\alpha| + |\beta|$ , il existe une constante  $C_{\alpha, \beta, q}$  telle que :

$$(2.1.21) \quad |x^\alpha \cdot \partial_x^\beta (I((1-\omega_{\varepsilon_o})a, \phi)f)(x)| \leq C_{\alpha\beta q} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ |\gamma| \leq q}} |\partial_x^\gamma f(\mathbf{x})|$$

(2.1.21) démontre la continuité de  $I(1-\omega_{\varepsilon_o})a, \phi$ .

Le point (iii) de la proposition est une conséquence de ce qui précède.

En effet, posons  $F = I(a, \phi)$  et désignons par  ${}^tF$  le transposé de  $F$ .

On a à démontrer que  ${}^tF$  opère continûment de  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

Posons :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, \theta, y) &= \phi(y, \theta, x) \\ \tilde{a}(x, \theta, y) &= a(y, \theta, x) \end{aligned}$$

$\phi$  vérifient (H3)\*,  $\tilde{\phi}$  vérifie (H3). On en déduit alors facilement que  ${}^tF = I(\tilde{a}, \tilde{\phi})$ . Par conséquent, iii) résulte de ii).

Remarque 2.1.3 : Le calcul développé ici généralise celui développé au chapitre I.

On prend en effet  $N = n$ ,  $\phi(x, y, \theta) = \langle x - y, \theta \rangle$  et on remarque que si  $a \in \Pi_o^m(\mathbb{R}^{3n})$ , il existe  $\mu$  tel que  $a \in \Gamma_o^\mu(\mathbb{R}^{3n})$ .

Remarque 2.1.3 bis : Le calcul défini ci-dessus est encore valide si les hypothèses sur  $\phi$  ne sont satisfaites que sur le support de  $a$ .

Proposition 2.1.4 Composition de deux Fourier-intégraux : Soient  $\phi_1, \phi_2$  deux phases vérifiant (H1), (H2) et (H3). Posons :

$$(2.1.22) \quad \phi(x, \theta, z) = \phi_1(x, \theta_1, y) + \phi_2(y, \theta_2, z)$$

avec  $\theta_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$ ,  $\theta_2 \in \mathbb{R}^{N_2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta = (\theta_1, y, \theta_2)$ .

Alors  $\phi$  vérifie (H1), (H2), (H3) et, pour tous  $a_1 \in \Gamma_o^{\mu_1}$ ,  $a_2 \in \Gamma_o^{\mu_2}$ , on a

$$(2.1.23) \quad I(a_1, \phi_1) \circ I(a_2, \phi_2) = I(a_1 \dot{\times} a_2, \phi)$$

avec  $(a_1 \times a_2)(x, \theta, z) = a_1(x, \theta_1, y) a_2(y, \theta_2, z)$ .

Démonstration : (H1) et (H2) sont immédiates à vérifier pour  $\phi$ .

Concentrons nous donc sur l'hypothèse (H3). La majoration étant évidente, il nous suffit donc de vérifier que  $\phi$  satisfait l'inégalité :

(2.1.24) il existe  $K > 0$  tel que :

$$\lambda(x, \theta_1, y, \theta_2, z) \leq K \lambda(z, \partial_z \phi_2, \partial_y \phi_1 + \partial_y \phi_2, \partial_{\theta_1} \phi_1, \partial_{\theta_2} \phi_2)$$

La propriété (H3) appliquée à  $\phi_1$  et  $\phi_2$  montre qu'il existe  $C > 0$  telle que :

$$(2.1.25) \quad \lambda(x, \theta_1, y, \theta_2, z) \leq C \lambda(\partial_y \phi_1, \partial_{\theta_1} \phi_1, y, \partial_{\theta_2} \phi_2, \partial_z \phi_2, z)$$

mais on a également :

$$(2.1.26) \quad \lambda(y) \leq C' \lambda(\partial_{\theta_2} \phi_2, \partial_z \phi_2, z)$$

(d'après H3 appliqué à  $\phi_2$ )

et

$$(2.1.27) \quad |\partial_y \phi_2| \leq C'' \lambda(y, \theta_2, z) \leq C''' (\lambda(\partial_{\theta_2} \phi_2, \partial_z \phi_2, z))$$

(d'après H2 et H3 appliqués à  $\phi_2$ ).

Enfin, on remarque que

$$(2.1.28) \quad |\partial_y \phi_1| \leq |\partial_y \phi_1 + \partial_y \phi_2| + |\partial_y \phi_2|$$

Les inégalités (2.1.25) à (2.1.28) impliquent (2.1.24).

Vérifions maintenant la formule de composition (2.1.23). Introduisons pour cela les suites de fonctions ( $i=1,2$ ):

$$\chi_p^i(x, \theta_i, y) = \exp(-p^{-1}(|x|^2 + |\theta_i|^2 + |y|^2)) ; (x, \theta_i, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^n$$

Il est clair que (2.1.23) est vérifiée pour :

$$a_p^1 = a_1 \cdot \chi_p^1, \quad a_p^2 = a_2 \cdot \chi_p^2$$

$$\text{or : } \chi_p^1(x, \theta_1, y) \cdot \chi_p^2(y, \theta_2, z) = \exp(-p^{-1}(|x|^2 + 2|y|^2 + |\theta_1|^2 + |\theta_2|^2 + |z|^2))$$

D'où il résulte que

$$(2.1.29) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} (I(a_p^1 \cdot a_p^2, \phi)f)(x) = (I(a_1 \cdot a_2, \phi)f)(x)$$

pour tout  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

D'autre part, la démonstration de la proposition (2.1.1) montre qu'il existe, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , pour  $j = 1, 2$ , un entier  $M_{j, \ell}$  et une constante  $C_{j, \ell} > 0$  telle que, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  et tout  $p \geq 1$ , on ait :

$$(2.1.30) \quad \|I(a_p^j, \phi_j)f\|_{B^\ell} \leq C_{\ell, j} \|f\|_{B^{M_{j, \ell}}}$$

On déduit d'abord de (2.1.30) que, pour tout  $f_0$  fixé dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ,  $g_p = I(a_p^2, \phi_2)f_0$  décrit un borné de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  quand  $p$  varie.  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  étant un espace de Montel, on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer que  $g_p$  converge dans  $\mathcal{F}$  vers  $g = I(a_2, \phi_2)f_0$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

Or, on a :

$$(2.1.31) \quad \|I(a_p^1, \phi_1)g_p - I(a_1, \phi_1)g\|_{B^\ell} \leq \\ \leq \|I(a_p^1, \phi_1)(g_p - g)\|_{B^\ell} + \|(I(a_p^1, \phi_1) - I(a_1, \phi_1))g\|_{B^\ell}.$$

Quitte à extraire de nouveau une sous-suite, on peut supposer que :

$$(2.1.32) \quad I(a_p^1, \phi_1)g \rightarrow I(a_1, \phi_1)g \quad \text{dans } \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

Il résulte alors de (2.1.30) à (2.1.32) que, pour tout  $\ell$ , quitte à extraire une sous-suite, on a :

$$(2.1.33) \quad I(a_p^1, \phi_1), I(a_p^2, \phi_2)f_0 \rightarrow I(a_1, \phi_1) \cdot I(a_2, \phi_2)f_0 \quad \text{dans } B^\ell.$$

On déduit de (2.1.29) et (2.1.33) la relation (2.1.23). c.q.f.d.

#### Comparaison avec la théorie de Asada-Fujiwara

Considérons une classe de phase où l'on remplace les hypothèses (H3) et (H3)\* par l'hypothèse :

(H4) Il existe une constante strictement positive  $\delta_0$  telle que

$$|\det D(\phi)(x, \theta, y)| \geq \delta_0$$

où  $D(\phi)$  est la matrice carrée :

$$(2.1.34) \quad D(\phi)(x, \theta, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, \theta, y) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \theta}(x, \theta, y) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial y}(x, \theta, y) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \theta}(x, \theta, y) \end{pmatrix}$$

Cette hypothèse est plus forte que les hypothèses (H3) et (H3)\*, on a en effet le lemme suivant :

Lemme 2.1.5 : Soit  $\phi$  une phase vérifiant (H1), (H2) et (H4), alors elle vérifie (H3) et (H3)\*.

Considérons l'application  $h$  définie par

$$(2.1.35) \quad (x, \theta, y) \xrightarrow{h} h(x, \theta, y) = (n, \zeta, y) = (-\phi'_y, \phi'_\theta, y) .$$

La matrice jacobienne de  $h$  s'écrit :

$$(2.1.36) \quad \begin{pmatrix} -\phi''_{yx} & -\phi''_{y\theta} & -\phi''_{yy} \\ \phi''_{\theta x} & \phi''_{\theta\theta} & \phi''_{\theta y} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

et son déterminant est égal en valeur absolue à  $|\det D(\phi)(x, \theta, y)|$ .

Il résulte alors de l'hypothèse (H4) et d'un théorème classique d'inversion globale que  $h$  est un difféomorphisme global de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$  et que l'inverse  $h^{-1}$  vérifie

$$(2.1.37) \quad \|(h^{-1})'(n, \zeta, y)\| \leq C \lambda(n, \zeta, y).$$

L'inégalité (H3) en résulte.

Pour démontrer (H3)\*, on considère l'application  $g$  définie par :

$$(2.1.38) \quad (x, \theta, y) \xrightarrow{g} g(x, \theta, y) = (x, \zeta, \xi) = (x, \phi'_\theta, \phi'_x)$$

et on raisonne comme précédemment.

Asada et Fujiwara ont démontré le théorème suivant (dont nous donnerons des démonstrations dans des cas particuliers) :

Théorème 2.1.6 : Soit  $\phi$  une phase vérifiant (H1), (H2) et (H4) et soit  $a$  une amplitude dans  $\Gamma^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$ , alors  $I(a, \phi)$  se prolonge en un opérateur continu de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Proposition 2.1.7 : Soient  $\phi_1, \phi_2$  deux phases vérifiant (H1), (H2), (H4). Alors la phase  $\phi$  définie en (2.1.22) vérifie également (H1), (H2) et (H4).

Démonstration : Il suffit de vérifier (H4). On a :

$$(2.1.39) \quad D(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_1 \partial y} & 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta_2 \partial z} & 0 & \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta_2 \partial y} & \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

On en déduit alors facilement que

$$(2.1.40) \quad |\det D(\phi)| = |\det D(\phi_1)| |\det D(\phi_2)|$$

(H4) s'en déduit alors aisément.

## 2.2 Les Fourier-Intégraux globaux "réguliers"

Les classes précédentes d'amplitudes et de symboles sont trop générales pour espérer un calcul symbolique raisonnable. On va introduire dans ce paragraphe et le suivant des classes plus petites permettant un calcul.

Auparavant, remarquons que, comme dans le cas des opérateurs pseudodifférentiels, on a la propriété suivante

(2.2.1) Si  $a \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$  et  $\phi$  vérifie (H1), (H2) et (H3),  $I(a, \phi)$  est à noyau dans  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

Si  $\phi$  est une phase vérifiant (H1), (H2) et (H4), on introduit une famille de voisinages  $\Omega_{\phi, \varepsilon}$  de la variété critique  $\phi'_\theta = 0$  en posant

$$(2.2.2) \quad \Omega_{\phi, \varepsilon} = \{(x, \theta, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n, |\phi'_\theta|^2 < \varepsilon^2 (|x|^2 + |y|^2 + |\theta|^2)\}$$

où  $\varepsilon > 0$ .

On fait maintenant sur  $\phi$  l'hypothèse suivante :

$$(2.2.3) \quad (H5) \text{ il existe } \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que } \phi \in \Gamma_1^2(\Omega_{\phi, \varepsilon_0})$$

et sur l'amplitude  $a$  l'hypothèse :

(2.2.4) (A1)<sub>m</sub> Il existe  $\varepsilon_1 > 0, \mu \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$  tel que :

$$a \in \Gamma_0^\mu(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cap \Gamma_1^m(\Omega_{\phi, \varepsilon_1})$$

On pose maintenant la définition :

Définition 2.2.1 : Soit  $\phi$  une phase vérifiant (H1), (H2), (H4) et (H5);

On désigne par  $\mathcal{J}^{m, \phi}$  l'ensemble des Fourier-intégraux qui peuvent s'écrire comme la somme d'un opérateur régularisant (i.e. à noyau dans  $\mathcal{J}$ ) et d'un opérateur de la forme  $I(a, \phi)$  où  $a$  est une amplitude vérifiant (A1)<sub>m</sub> (on écrira pour simplifier  $a \in \Gamma_1^m, \phi$ ).

Le lemme suivant justifie la notation  $\mathcal{J}^{m, \phi}$  :

Lemme 2.2.2 : Si  $F$  appartient à  $\mathcal{J}^{m, \phi}$ , il existe une amplitude  $b$  dans  $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  et un opérateur régularisant  $\mathcal{R}$  tel que :

$$(2.2.5) \quad F = I(b, \phi) + \mathcal{R}.$$

Démonstration : Posons  $\varepsilon = \inf(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ . Par hypothèse, il existe  $a$  dans  $\Gamma_0^\mu$  tel que  $a \in \Gamma_1^m(\Omega_{\phi, \varepsilon})$  et un opérateur régularisant  $\mathcal{R}_0$  tel que :

$$(2.2.6) \quad F = I(a, \phi) + \mathcal{R}_0.$$

Compte tenu de (2.2.1), on peut toujours supposer que  $a$  est nul si  $|x| + |y| + |\theta| \leq 1$ .

Soit  $\delta$  une fonction  $C^\infty$  égale à 1 sur  $[-1, +1]$  et à support dans  $[-2, +2]$ .

On décompose  $a$  sous la forme :

$$(2.2.7) \quad a = a_1 + a_2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} a \left( 1 - \delta \left( \frac{4|\phi'_\theta|^2}{\varepsilon^2(|x|^2 + |y|^2 + |\theta|^2)} \right) \right) + a \cdot \delta \left( \frac{4|\phi'_\theta|^2}{\varepsilon^2(|x|^2 + |y|^2 + |\theta|^2)} \right)$$

Sur le support de  $a_1$ , on a :

$$(2.2.8) \quad |\phi'_\theta|^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4} (|x|^2 + |y|^2 + |\theta|^2)$$

et donc, puisqu'on a supposé  $a$  nulle pour  $|x| + |y| + |\theta| \leq 1$ , on a



$$(2.2.9) \quad |\phi'_\theta| \geq \frac{\varepsilon}{8} \lambda(x, y, \theta) .$$

De plus,  $a_1$  appartient à  $\Gamma_0^u(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$ , et on vérifie aisément en faisant des intégrations par parties en  $\theta$  et compte-tenu de (2.2.9) que le noyau-distribution de  $I(a_1, \phi)$  défini par l'intégrale oscillante :

$$(2.2.10) \quad I(a_1, \phi)(x, y) = \int e^{i\phi(x, y, \theta)} a_1(x, y, \theta) d\theta$$

est dans  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

On remarque maintenant que compte-tenu (2.2.7)  $a_2$ , qui est dans  $\Gamma_1^{m, \phi}$  et à support dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon}$ , est dans  $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$ . c.q.f.d.

Montrons maintenant que la classe introduite est stable par composition :

Proposition 2.2.3 : Soient  $\phi_1, \phi_2$  deux phases vérifiant (H1), (H2) (H4) et (H5). Alors la phase  $\phi$  définie en (2.1.22) vérifie (H1), (H2), (H4) et (H5).

De plus, si  $F_1$  appartient à  $\mathcal{J}^{m_1, \phi_1}$  et  $F_2$  appartient à  $\mathcal{J}^{m_2, \phi_2}$ , le composé  $F_1 \cdot F_2$  est dans  $\mathcal{J}^{m_1 + m_2, \phi}$ .

Démonstration : Posons  $\theta = (\theta_1, y, \theta_2)$  et supposons que  $(x, y, \theta) \in \Omega_{\phi, \varepsilon}$  où  $\varepsilon$  est à choisir assez petit.

On a :

$$(2.2.11) \quad \phi'_\theta = (\phi'_{1\theta_1}, \phi'_{1y} + \phi'_{2y}, \phi'_{2\theta_2})$$

On va montrer qu'il existe  $\varepsilon$  assez petit tel que l'on ait dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon}$  :

$$(2.2.12) \quad \lambda(x, \theta, z) \approx \lambda(x, \theta_1, y) \approx \lambda(y, \theta_2, z) .$$

(On entend ici par  $a \approx b$  que l'on a  $0 < c \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1}{c}$ ).

Or on a :

$$\begin{aligned} \lambda(x, \theta, z) &\lesssim \lambda(x, \theta_1, y) + \lambda(y, \theta_2, z) \\ &\lesssim \lambda(x, \theta_1, y) + \lambda(y, \phi'_{2y}, \phi'_{2\theta_2}) \quad (\text{d'après (H3)}) \\ &\lesssim \lambda(x, \theta_1, y) + \lambda(\phi'_{1y}, \phi'_{2y} + \phi'_{1y}, \phi'_{2\theta_2}) \end{aligned}$$

$$(2.2.13) \quad \lambda(x, \theta, z) \lesssim \lambda(\phi'_{2y} + \phi'_{1y}, \phi'_{2\theta_2}) + \lambda(x, \theta_1, y) .$$

Si  $(x, \theta, z)$  est dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon}$ , on déduit de (2.2.13) que :

$$(2.2.14) \quad \lambda(x, \theta, z) \leq c_1 \lambda(x, \theta_1, y) + c_2 \varepsilon \lambda(x, \theta, z)$$

pour des constantes  $c_1$  et  $c_2$  convenables.

Par conséquent, il résulte de (2.2.14) que, si l'on choisit  $\varepsilon$  assez petit, on a :

$$(2.2.15) \quad \lambda(x, \theta, z) \lesssim \lambda(x, \theta_1, y) .$$

Comme on a clairement :

$$\lambda(x, \theta_1, y) \lesssim \lambda(x, \theta, z)$$

la première partie est démontrée.

On démontre de manière analogue que, pour  $\varepsilon$  assez petit et  $(x, \theta, z)$  dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon}$ ,

$$\text{on a :} \quad \lambda(x, \theta, z) = \lambda(y, \theta_2, z) .$$

Remarquons maintenant que, si  $(x, \theta, z) \notin \Omega_{\phi, \varepsilon}$ , on a :

$$|\phi'_{1\theta_1}| \leq \varepsilon \lambda(x, \theta, z) \leq \tilde{c}_1 \varepsilon \lambda(x, \theta_1, y) \quad (\text{d'après 2.2.12})$$

$$|\phi'_{2\theta_2}| \leq \varepsilon \lambda(x, \theta, z) \leq \tilde{c}_2 \varepsilon \lambda(y, \theta_2, z) \quad \text{d'après 2.2.12}$$

Si  $\varepsilon$  est choisi assez petit et  $|x| + |\theta_1| + |y| \geq 1$  (respectivement  $|y| + |\theta_2| + |z| \geq 1$ ),

on déduit de (H5) pour  $\phi_1$  (respectivement pour  $\phi_2$ ) que  $\phi_1$  (respectivement  $\phi_2$ )

est dans  $\Gamma_1^2(\Omega_{\phi, \varepsilon})$ . Par ailleurs, si  $|x| + |\theta_1| + |y| < 1$  (resp.  $|y| + |\theta_2| + |z| < 1$ ),

on a dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon}$  :  $|x| + |\theta| + |z| \leq \varepsilon$  et on a de manière évidente les bonnes esti-

mations. Par conséquent,  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  est dans  $\Gamma_1^2(\Omega_{\phi, \varepsilon})$ .

Les autres assertions de la proposition se démontrent par des considérations analogues.

Proposition 2.2.4 : Si  $N = n$ ,  $\phi_0(x, y, \theta) = \langle x - y, \theta \rangle$ , on a :  $\mathcal{J}^{m, \phi_0} = G_1^m$  .

Démonstration : Il est immédiat d'après le lemme 2.2.2 que  $\mathcal{J}^{m, \phi_0}$  est inclus dans  $G_1^m$ .

Inversement, si  $P$  est dans  $G_1^m$ , il existe  $a \in \Gamma_1^m(\mathbb{R}^{2n})$  tel que :

$$(Pu)(x) = \iint e^{i\langle x-y, \theta \rangle} a(x, \theta) u(y) dy d\theta$$

pour tout  $u \in \mathcal{J}$ .

Il reste à vérifier que le symbole  $(x,y,\theta) \rightarrow a(x,\theta)$ , qui est clairement dans  $\Gamma_0^{\text{sup}(0,m)}(\mathbb{R}^{3n})$ , est dans  $\Gamma_1^m(\Omega_{\phi_0,\varepsilon})$  pour  $\varepsilon$  assez petit .

Ici,  $\Omega_{\phi_0,\varepsilon}$  est l'ensemble :

$$(2.2.16) \quad \Omega_{\phi_0,\varepsilon} = \{(x,y,\theta) , |x-y|^2 < \varepsilon^2(|x|^2+|y|^2+|\theta|^2)\} .$$

On déduit de (2.2.16) que, pour  $\varepsilon$  assez petit, on a, dans  $\Omega_{\phi_0,\varepsilon}$

$$(2.2.17) \quad \lambda(x,y,\theta) \approx \lambda(x,\theta) .$$

On en déduit que :

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\theta^\gamma a(x,\theta)| \lesssim \lambda(x,\theta)^{m-|\alpha|-|\beta|-|\gamma|} \lesssim \lambda(x,y,\theta)^{m-|\alpha|-|\beta|-|\gamma|} \quad (\text{dans } \Omega_{\phi_0,\varepsilon}).$$

En effet, c'est vérifié pour  $|\beta|=0$ , car  $a$  est dans  $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^{2n})$  et c'est trivial pour  $|\beta| \neq 0$  .

Etant donné un élément  $F$  dans  $\mathcal{J}^{m_0,\phi}$ , on peut, bien entendu s'intéresser au problème de savoir s'il existe  $m < m_0$  tel que  $F$  est dans  $\mathcal{J}^{m,\phi}$ . Ce problème est lié à la notion de "symbole principal" d'un Fourier-intégral dans la théorie de Hörmander - Duistermaat. Par analogie à cette théorie classique, on introduit la

Définition 2.2.5 : Soit  $\phi$  une phase vérifiant (H1), (H2) et (H4) ; on associe à  $\phi$  les deux ensembles suivants :

$$(2.2.18) \quad C_\phi = \{(x,\theta,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n, \phi'_\theta = 0\} .$$

$$(2.2.19) \quad \Lambda_\phi = \{(x,\phi'_x, y, -\phi'_y), (x,y,\theta) \in C_\phi\}$$

On a d'abord le :

Lemme 2.2.6 :  $C_\phi$  est une sous-variété  $C^\infty$  de codimension  $N$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$ .

Démonstration : Cela résulte immédiatement de la démonstration du lemme 2.1.5.

On est maintenant en mesure de montrer la proposition suivante :

Proposition 2.2.7 : Soit  $F \in \mathcal{J}^{m,\phi}$ . Si le symbole qui définit  $F$  s'annule sur  $C_\phi$ , alors  $F \in \mathcal{J}^{m-2,\phi}$ .

Démonstration : Soit donc  $b$  tel que :

$$(2.2.20) \quad F = I(b, \phi) + \mathcal{Q}$$

$$(2.2.21) \quad b \upharpoonright_{C_\phi} = 0$$

$$(2.2.22) \quad b \in \Gamma_1^{m, \phi}.$$

De par le lemme 2.2.2, on peut remplacer (2.2.22) par :

$$(2.2.23) \quad b \in \Gamma_1^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n) \text{ et } \text{supp } b \in \Omega_{\phi, \varepsilon} \quad (\text{avec } \varepsilon > 0, \text{ arbitrairement petit}).$$

Soit  $c$  le symbole sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$  défini par :

$$(2.2.24) \quad c(n, \zeta, y) = b \circ h^{-1}(n, \zeta, y)$$

où  $h$  est défini en (2.1.35).

Il résulte de (2.2.23), (2.2.24), (2.2.36) et du fait que  $\phi \in \Gamma^{2, \phi}$  que :

$$(2.2.25) \quad c \in \Gamma_1^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$$

et

$$|\zeta|^2 \leq c \varepsilon^2 (|n|^2 + |\zeta|^2 + |y|^2)$$

On écrit alors :

$$(2.2.26) \quad c(n, \zeta, y) = c(n, 0, y) + \sum_j \zeta_j \cdot c_j(n, \zeta, y)$$

avec

$$c_j(n, \zeta, y) = \int_0^1 \frac{\partial c}{\partial \zeta_j}(n, s\zeta, y) ds.$$

Si  $\varepsilon$  a été choisi assez petit, on en déduit que  $c_j(n, \zeta, y) \in \Gamma_1^{m-1}$ .

Par hypothèse  $c(n, 0, y) \equiv 0$ , on a donc finalement

$$(2.2.27) \quad c(n, \zeta, y) = \sum_j \zeta_j \cdot c_j(n, \zeta, y)$$

$$\text{avec } c_j \in \Gamma_1^{m-1}.$$

Revenant aux coordonnées initiales, on a donc montré que (en modifiant éventuellement  $b$  en dehors d'un  $\Omega_{\phi, \varepsilon}$ ) on a :

$$(2.2.28) \quad b(x, y, \theta) = \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial \phi_j} \cdot b_j(x, y, \theta)$$

$$\text{avec } b_j \in \Gamma_1^{m-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n) \quad .$$

Or on a :

$$(2.2.29) \quad I\left(\sum_j \frac{\partial \phi}{\partial \theta_j} \cdot b_j, \phi\right) = I\left(-\sum_j \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} b_j, \phi\right)$$

grâce à des intégrations par partie, par rapport à  $\theta$ , d'où le résultat.

Remarque 2.2.8 : La proposition 2.2.7 montre en particulier que dans la classe

$\mathcal{J}^{m, \phi}$  un élément  $I(a, \phi)$  est entièrement déterminé, modulo  $\mathcal{J}^{m-2, \phi}$ , par la restriction de  $a$  à  $C_\phi$ . En particulier, s'il existe  $b$  dans  $\Gamma_1^{m-1}$  tel que  $a - b/C_\phi = 0$ , on a  $I(a, \phi) \in \mathcal{J}^{m-1, \phi}$ .

Bien entendu, si on suppose dans la proposition 2.2.7 que le symbole qui définit  $F$  s'annule à l'ordre  $k$  sur  $C_\phi$ , alors  $F$  appartient à  $\mathcal{J}^{m-2k, \phi}$ . Par conséquent, modulo un opérateur régularisant, l'opérateur  $I(a, \phi)$  est défini par le germe de  $a$  sur  $C_\phi$ .

### 2.3. Etude d'un cas particulier : $\phi(x, \theta, y) = S(x, \theta) - y \cdot \theta$

On considère le cas particulier où  $N = n$  et où la phase  $\phi(x, \theta, y)$  prend la forme particulière :

$$(2.3.1) \quad \phi(x, \theta, y) = S(x, \theta) - y \cdot \theta$$

et on fait sur  $S$  les hypothèses suivantes :

$$(G.1) \quad S : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une application } C^\infty .$$

$$(G.2) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n, \text{ il existe } C_{\alpha\beta} \text{ telle que :}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta S(x, \theta)| \lesssim C_{\alpha\beta} \lambda(x, \theta)^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+}$$

$$(G3) \quad |x| \lesssim \lambda(\theta, \partial_\theta S)$$

$$(G3)^* \quad |\theta| \lesssim \lambda(x, \partial_x S) .$$

Proposition 2.3.1 : Si  $S$  vérifie les hypothèses (G1), (G2), (G3) et (G3)\*, la phase  $\phi$  associée à  $S$  en (2.3.1) vérifie (H1), (H2), (H3) et (H3)\*.

Montrons par exemple que (G3)  $\Rightarrow$  (H3). On a :

$$(2.3.2) \quad \lambda(x, \theta, y) \lesssim \lambda(x, \theta) + \lambda(y) \lesssim \lambda(\theta, \partial_\theta S) + \lambda(y) \quad (\text{d'après G3}).$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \partial_{y_i} \phi &= -\theta_i \\ \partial_{\theta_i} \phi &= \partial_{\theta_i} S - y_i. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(2.3.3) \quad \lambda(\theta, \partial_\theta S) = \lambda(\partial_y \phi, \partial_\theta \phi + y) \lesssim \lambda(\partial_y \phi, \partial_\theta \phi, y)$$

La partie non triviale de (H3) se déduit alors de (2.3.2) et (2.3.3).

Considérons maintenant l'hypothèse :

(G4) Il existe une constante strictement positive  $\delta_0$  telle que, pour tout  $(x, \theta)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , on ait :

$$(2.3.4) \quad \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \theta} (x, \theta) \right| \geq \delta_0.$$

Proposition 2.3.2 : Si  $S$  vérifie (G4), la phase  $\phi$  associée à  $S$  en (2.3.1) vérifie (H4).

Il suffit de remarquer que :

$$(2.3.5) \quad D(\widehat{\phi})(x, \theta, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \theta} \\ -I & \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \theta} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.3.3 : Il résulte de (G2) et (G4) par le théorème d'inversion globale que les applications

$$(x, \theta) \rightarrow (x, \partial_x S)$$

et

$$(x, \theta) \rightarrow (\theta, \partial_\theta S)$$

sont des difféomorphismes globaux de  $\mathbb{R}^{2n}$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ .

On démontre ainsi que (G4) et (G5) impliquent (G3) et (G3)\* et également l'inégalité suivante qui nous sera utile par la suite :

$$(2.3.6) \quad |x-x'| + |\theta-\theta'| \leq C [ |(\partial_\theta S)(x,\theta) - (\partial_\theta S)(x',\theta')| + |\theta-\theta'| ]$$

En particulier, on a :

$$(2.3.7) \quad |x-x'| \leq C |(\partial_\theta S)(x,\theta) - (\partial_\theta S)(x',\theta)|$$

Considérons enfin l'hypothèse

$$(G5) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta S(x,\theta)| \lesssim \lambda(x,\theta)^{2-|\alpha|-|\beta|}$$

(2.3.8)

et montrons la

Proposition 2.3.4 : Soit S une phase vérifiant (G1), (G2) et (G4).

Si S vérifie (G5), alors la phase  $\phi$  associée à S en (2.3.1) vérifie (H5).

On doit démontrer qu'il existe  $\varepsilon_0$  tel que dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon_0}$ , on a :

$$(2.3.9) \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\theta^\gamma \phi| \lesssim \lambda(x,\theta,y)^{2-|\alpha|-|\beta|-|\gamma|}$$

L'estimation est évidente pour  $|\beta| \neq 0$ . On regarde donc le cas où :  $|\beta| = 0$ .

Pour  $|\alpha|+|\gamma| \leq 2$ , l'estimation a déjà été vérifiée (C2)  $\Rightarrow$  (H2)).

Maintenant, on remarque que si  $|\alpha|+|\gamma| \geq 2$ , on a

$$(2.3.10) \quad \partial_x^\alpha \partial_\theta^\gamma \phi = (\partial_x^\alpha \partial_\theta^\gamma S)(x,\theta)$$

Compte tenu de (2.3.9) et (2.3.10), il reste à démontrer que, pour  $|\alpha|+|\gamma| \geq 2$ ,

on a :

$$(2.3.11) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\theta^\gamma S(x,\theta)| \lesssim \lambda(x,\theta,y)^{2-|\alpha|-|\gamma|}$$

dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon_0}$ .

Compte tenu de (2.3.8), (2.3.11) résultera de :

$$(2.3.12) \quad \text{Il existe } \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que dans } \Omega_{\phi, \varepsilon_0} : \lambda(x,\theta,y) \approx \lambda(x,\theta)$$

Montrons (2.3.12). Il suffit de majorer  $|y|$ . La région  $\Omega_{\phi, \varepsilon_0}$  est définie dans notre cas par :

$$(2.3.13) \quad |\partial_\theta S(x, \theta) - y|^2 \leq \varepsilon_0^2 (|x|^2 + |y|^2 + |\theta|^2)$$

On en déduit que, dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon_0}$ , on a :

$$|y| \leq \lambda(\partial_\theta S - y) + \lambda(\partial_\theta S) \leq \varepsilon_0 (|x| + |y| + |\theta|) + C \lambda(x, \theta) .$$

D'où, pour  $\varepsilon_0$  assez petit :

$$(2.3.14) \quad |y| \leq 2 C \lambda(x, \theta) \text{ dans } \Omega_{\phi, \varepsilon_0} .$$

(2.3.12) se déduit alors aisément de (2.3.14). c.q.f.d.

Parallèlement, on peut supposer que l'amplitude  $a$  ne dépend pas de  $y$ . On démontre facilement la

Proposition 2.3.5 : Si  $(x, \theta) \rightarrow a(x, \theta)$  appartient à  $\Gamma_0^H(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\theta^n)$ , alors

$$(x, \theta, y) \rightarrow a(x, \theta) \text{ appartient à } \Gamma_0^H(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_y^n).$$

Si  $(x, \theta) \rightarrow a(x, \theta)$  appartient à  $\Gamma_1^m(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}^n)$ , alors  $(x, \theta, y) \rightarrow a(x, \theta)$  appartient à  $\Gamma_1^{m, \phi}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_y^n)$ .

Le deuxième point résulte de (2.3.12). c.q.f.d.

Le théorème de continuité  $L^2$  (Th. 2.1.6) résultera, dans le cas particulier considéré dans ce paragraphe, de la proposition suivante :

Proposition 2.3.6 : Soit  $F$  l'opérateur de noyau distribution :

$$\int e^{i(S(x, \theta) - y \cdot \theta)} a(x, \theta) d\theta$$

où  $a \in \Gamma_0^m(\mathbb{R}_{x, \theta}^{2n})$  et  $S$  vérifie (G1), (G4) et (G5) alors  $F \cdot F^*$  et  $F^* F$  sont dans  $G_0^{2m}(\mathbb{R}^n)$ .

Si de plus  $a \in \Gamma_1^m(\mathbb{R}_{x, \theta}^n)$  alors  $FF^*$  et  $F^*F$  sont dans  $G_1^{2m}(\mathbb{R}^n)$ .

Les symboles de  $F^*F$  et  $FF^*$  sont donnés modulo  $G_1^{2m-2}(\mathbb{R}^n)$  par :

$$(2.3.15) \quad \sigma(F \cdot F^*)(x, \partial_x S(x, \theta)) \equiv |a(x, \theta)|^2 \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial x} \right|^{-1}(x, \theta)$$

$$(2.3.16) \quad \sigma(F^* \cdot F)(\partial_\theta S(x, \theta), \theta) \equiv |a(x, \theta)|^2 \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial x} \right|^{-1}(x, \theta)$$



Démonstration : Pour  $u$  dans  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ,  $(Fu)(x)$  est défini par :

$$(2.3.17) \quad (Fu)(x) = \int e^{iS(x,\theta)} a(x,\theta) \hat{u}(\theta) d\theta .$$

Pour  $v$  dans  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ , on obtient immédiatement l'expression de la transformée de Fourier de  $(F^*v)$ . On a en effet :

$$(2.3.18) \quad (F^*v)(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iS(\tilde{x},\theta)} \bar{a}(\tilde{x},\theta) v(\tilde{x}) d\tilde{x} .$$

On en déduit que, pour  $v$  dans  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ , on a :

$$(FF^*v)(x) = \iint e^{i(S(x,\theta)-S(\tilde{x},\theta))} \bar{a}(x,\theta) \cdot \bar{a}(\tilde{x},\theta) v(\tilde{x}) d\tilde{x} d\theta .$$

L'idée classique est de réécrire :  $S(x,\theta) - S(\tilde{x},\theta)$  sous la forme :

$\langle x-\tilde{x}, \xi(x,\tilde{x},\theta) \rangle$  puis de faire le changement de variables :

$(x,\tilde{x},\theta) \rightarrow (x,\tilde{x},\xi = \xi(x,\tilde{x},\theta))$  pour retrouver l'expression usuelle d'un opérateur pseudo-différentiel.

Considérons donc le noyau distribution de  $F \cdot F^*$  :

$$(2.3.19) \quad K(x,\tilde{x}) = \int e^{i[S(x,\theta)-S(\tilde{x},\theta)]} a(\tilde{x},\theta) \bar{a}(x,\theta) d\theta .$$

Il résulte de (2.3.7) que si :

$$(2.3.20) \quad |x-\tilde{x}| \geq \varepsilon/2 \lambda(x,\tilde{x},\theta) \quad (\text{avec } \varepsilon > 0) .$$

on a

$$(2.3.21) \quad |(\partial_\theta S)(x,\theta) - (\partial_\theta S)(\tilde{x},\theta)| \geq \varepsilon/2C \lambda(x,\tilde{x},\theta) .$$

On introduit une fonction  $C^\infty$  réelle positive  $\omega$  (égale à 1 sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et à support dans  $] -1, +1[$ ) et on réécrit :

$$(2.3.22) \quad b(x,\tilde{x},\theta) \stackrel{\text{déf}}{=} a(\tilde{x},\theta) \cdot \bar{a}(x,\theta) = b_1^\varepsilon(x,\tilde{x},\theta) + b_2^\varepsilon(x,\tilde{x},\theta) .$$

avec

$$b_1^\varepsilon(x,\tilde{x},\theta) = \omega\left(\frac{|x-\tilde{x}|}{\varepsilon \lambda(x,\tilde{x},\theta)}\right) b(x,\tilde{x},\theta)$$

Il correspond à la décomposition de  $b$  celle de  $K$  sous la forme :

$$(2.3.23) \quad K(x, \tilde{x}) \equiv K_1^\varepsilon(x, \tilde{x}) + K_2^\varepsilon(x, \tilde{x})$$

avec :

$$(2.3.24) \quad K_2^\varepsilon(x, \tilde{x}) = \int e^{i[S(x, \theta) - S(\tilde{x}, \theta)]} b_2^\varepsilon(x, \tilde{x}, \theta) d\theta .$$

Sur le support de  $b_2^\varepsilon$ , l'inégalité (2.3.20) est vérifiée. Des intégrations par parties à l'aide de l'opérateur :

$$(2.3.24) \quad L = \frac{\sum_i [(\partial_{\theta_i} S)(x, \theta) - (\partial_{\theta_i} S)(\tilde{x}, \theta)] \partial_{\theta_i}}{|\partial_{\theta} S(x, \theta) - \partial_{\theta} S(\tilde{x}, \theta)|^2}$$

montrent que :

$$(2.3.25) \quad K_2^\varepsilon(x, \tilde{x}) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) .$$

L'examen de  $K_1^\varepsilon$  est plus délicat. On devra jouer ici sur le choix de  $\varepsilon$ .  
On écrit donc :

$$(2.3.26) \quad S(x, \theta) - S(\tilde{x}, \theta) = \langle x - \tilde{x}, \xi(x, \tilde{x}, \theta) \rangle$$

$$\text{avec :} \quad \xi(x, \tilde{x}, \theta) = \int_0^1 (\partial_x S)(\tilde{x} + t(x - \tilde{x}), \theta) dt$$

$$(2.3.27) \quad \text{Posons :} \quad \tilde{\xi}^\varepsilon(x, \tilde{x}, \theta) = \omega\left(\frac{|x - \tilde{x}|}{2\varepsilon\lambda(x, \tilde{x}, \theta)}\right) \cdot \xi(x, \tilde{x}, \theta)$$

$$+ (1 - \omega)\left(\frac{|x - \tilde{x}|}{2\varepsilon\lambda(x, \tilde{x}, \theta)}\right) (\partial_x S)(\tilde{x}, \theta)$$

Remarquons que, sur le support de  $b_1^\varepsilon$ , on a :

$$(2.3.28) \quad \tilde{\xi}^\varepsilon(x, \tilde{x}, \theta) = \xi(x, \tilde{x}, \theta) , \quad (x, \tilde{x}, \theta) \in \text{supp } b_1^\varepsilon .$$

$$(2.3.29) \quad |x - \tilde{x}| \leq \varepsilon \lambda(x, \tilde{x}, \theta) , \quad (x, \tilde{x}, \theta) \in \text{supp } b_1^\varepsilon .$$

Par conséquent, si  $\varepsilon$  est assez petit, on a :

$$(2.3.30) \quad \lambda(x, \theta) \approx \lambda(\tilde{x}, \theta) \approx \lambda(x, \tilde{x}, \theta) \quad \text{sur le support de } b_1^\varepsilon .$$

Considérons l'application:

$$(2.3.31) \quad (x, \tilde{x}, \xi) \rightarrow (x, \tilde{x}, \tilde{\xi}^\varepsilon(x, \tilde{x}, \theta)) .$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est égal à :

$$(2.3.32) \quad \det \left( \frac{\partial \tilde{\xi}^\varepsilon}{\partial \theta} (x, \tilde{x}, \theta) \right) .$$

Mais:

$$(2.3.33) \quad \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\tilde{\xi}_j^\varepsilon(x, \tilde{x}, \theta)) = \omega \left( \frac{|x - \tilde{x}|}{2\varepsilon\lambda(x, \tilde{x}, \theta)} \right) \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial \theta_i} + (1 - \omega) \left( \frac{|x - \tilde{x}|}{2\varepsilon\lambda} \right) (\partial_{\theta_i} \partial_{x_j} S) \\ + \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left[ \omega \left( \frac{|x - \tilde{x}|}{2\varepsilon\lambda(x, \tilde{x}, \theta)} \right) \right] [\xi_j - (\partial_{x_j} S)(\tilde{x}, \theta)]$$

On réécrit (2.3.33) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\tilde{\xi}_j^\varepsilon(x, \tilde{x}, \theta)) = (\partial_{\theta_i} \partial_{x_j} S)(\tilde{x}, \theta) + \omega \left( \frac{|x - \tilde{x}|}{2\varepsilon\lambda(x, \tilde{x}, \theta)} \right) \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial \theta_i}(x, \tilde{x}, \theta) - \partial_{\theta_i} \partial_{x_j} S(\tilde{x}, \theta) \right) \\ - \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \cdot \left( \frac{|x - \tilde{x}|}{2\varepsilon\lambda} \right) \cdot \lambda^{-1} \cdot \omega' \left( \frac{|x - \tilde{x}|}{2\varepsilon\lambda(x, \tilde{x}, \theta)} \right) (\xi_j - \partial_{x_j} S)$$

On vérifie sous l'hypothèse (G5), qu'il existe C tel que pour tout  $(x, \tilde{x}, \theta) \in \mathbb{R}^{3n}$ , on ait:

$$(2.3.34) \quad |(\partial_{\theta_i} (\tilde{\xi}_j^\varepsilon))(x, \tilde{x}, \theta) - (\partial_{\theta_i} \partial_{x_j} S)(\tilde{x}, \theta)| \leq C\varepsilon$$

Compte tenu de (G4), on déduit de (2.3.34), que, pour  $\varepsilon$  assez petit, on a

$$(2.3.35) \quad \det \left( \frac{\partial \tilde{\xi}^\varepsilon}{\partial \theta} (x, \tilde{x}, \theta) \right) \geq \frac{\delta_0}{2} .$$

On fixe désormais  $\varepsilon$  tel que (2.3.30) et (2.3.35) soient vérifiés.

Compte tenu de (2.3.31), (2.3.32), (2.3.35) et du théorème d'inversion globale,

il existe une application  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$(x, \tilde{x}, \xi) \rightarrow \theta(x, \tilde{x}, \xi)$$

telle que l'on ait

$$(2.3.36) \quad \begin{cases} \bar{\xi}^\varepsilon(x, \bar{x}, \theta(x, \bar{x}, \xi)) = \xi \\ \theta(x, \bar{x}, \bar{\xi}^\varepsilon(x, \bar{x}, \theta)) = \theta \end{cases}$$

De plus, les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 1 de  $\theta$  sont bornées.

Rappelons l'expression de  $K_1^\varepsilon(x, \bar{x})$  :

$$K_1^\varepsilon(x, \bar{x}) = \int e^{i\langle x - \bar{x}, \bar{\xi}^\varepsilon(x, \bar{x}, \theta) \rangle} b_1^\varepsilon(x, \bar{x}, \theta) d\theta$$

On fait le changement de variables indiqué en (2.3.36) et on obtient :

$$K_1^\varepsilon(x, \bar{x}) = \int e^{i\langle x - \bar{x}, \xi \rangle} b_1^\varepsilon(x, \bar{x}, \theta(x, \bar{x}, \xi)) \left| \det \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right| d\xi$$

On vérifie alors que  $b_1^\varepsilon(x, \bar{x}, \theta(x, \bar{x}, \xi)) \cdot \left| \det \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|$  est dans  $\Gamma_0^{2m}(\mathbb{R}^{3n})$  (cf. 2.3.30) si  $a$  est dans  $\Gamma_0^m(\mathbb{R}^{2n})$  et dans  $\Gamma_1^{2m}(\mathbb{R}^{3n})$  si  $a$  est dans  $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^{2n})$ .

Plaçons nous dans le cas où  $a$  est dans  $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^{2n})$  et calculons le symbole de  $F.F^*$

On sait (cf. le théorème 1.2.6 et sa démonstration) que celui-ci est déterminé modulo  $\Gamma^{2m-2}(\mathbb{R}^{2n})$  par la restriction de  $b_1^\varepsilon(x, \bar{x}, \theta(x, \bar{x}, \xi)) \cdot \det \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)$  à  $x = \bar{x}$ .

On a donc

$$(2.3.37) \quad \sigma(F.F^*)(x, \xi) \equiv b_1^\varepsilon(x, x, \theta(x, x, \xi)) \cdot \det \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)(x, x, \xi) \pmod{\Gamma_1^{2m-2}}$$

Or (cf. 2.3.22) on a :  $b_1^\varepsilon(x, x, \theta(x, x, \xi)) = |a(x, \theta(x, x, \xi))|^2$

Par construction,  $\theta(x, x, \xi)$  est l'inverse de l'application :

$$(2.3.38) \quad \theta \rightarrow \partial_x S(x, \theta) = \xi$$

Calculons maintenant  $\det \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)(x, x, \xi)$ . Il est plus facile de calculer

$\det \left( \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)(x, x, \theta)$  qui est égal à  $\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial x} \right)$ . Par conséquent, on a :

$$\det \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)(x, x, \xi) = \left( \det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial x} \right) \right)^{-1}(x, \theta(x, x, \xi))$$

On a donc finalement démontré que :

$$(2.3.39) \quad \sigma(\mathcal{F}\mathcal{F}^*)(x, \partial_x S(x, \theta)) \equiv |a(x, \theta)|^2 \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial x}(x, \theta) \right|^{-1} \\ (\text{modulo } \Gamma_1^{2m-2}(\mathbb{R}^{2n}))$$

La démonstration des autres points concernant  $\mathcal{F}\mathcal{F}^*$  est laissée au lecteur. Etudions brièvement  $\mathcal{F}^*\mathcal{F}$ . Il résulte de (2.3.17) et (2.3.18) que, si l'on désigne par  $\mathcal{F}$  la transformée de Fourier, on a pour  $v$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  :

$$(\mathcal{F} \cdot (\mathcal{F}^*\mathcal{F}) \cdot \mathcal{F}^{-1})v(\theta) = \int e^{-i(S(x, \theta) - S(x, \tilde{\theta}))} \bar{a}(x, \theta) a(x, \tilde{\theta}) v(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} dx$$

Le noyau-distribution de  $(\mathcal{F} \cdot (\mathcal{F}^*\mathcal{F}) \cdot \mathcal{F}^{-1})$  est donc :

$$(2.3.41) \quad \tilde{K}(\theta, \tilde{\theta}) = \int e^{-i(S(x, \theta) - S(x, \tilde{\theta}))} \tilde{a}(x, \theta) a(x, \tilde{\theta}) dx$$

Si on compare avec (2.3.19), on constate que c'est une expression du même type en échangeant le rôle de  $x$  et  $\theta$ . Toutes les hypothèses du théorème étant symétriques en  $x$  et  $\theta$ , on trouve que  $(\mathcal{F} \cdot (\mathcal{F}^*\mathcal{F}) \cdot \mathcal{F}^{-1})$  peut s'écrire comme un opérateur pseudo-différentiel dans  $G_o^{2m}(\mathbb{R}^n)$  (si  $a \in \Gamma_o^m(\mathbb{R}^{2n})$ ).

De plus, dans le deuxième cas, on a (cf. 2.3.39) :

$$(2.3.42) \quad \sigma(\mathcal{F} \cdot (\mathcal{F}^*\mathcal{F}) \cdot \mathcal{F}^{-1})(\theta, \partial_\theta S(x, \theta)) \equiv |a(x, \theta)|^2 \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial x}(x, \theta) \right|^{-1} \\ (\text{modulo } \Gamma_1^{2m-2}(\mathbb{R}^{2n})) .$$

Rien n'empêche, compte tenu de la remarque (1.2.7), de travailler en symbolisme de Weyl. Le lemme suivant est un cas particulier d'un résultat général sur l'action du groupe métaplectique par conjugaison sur les opérateurs pseudo-différentiels ;

Lemme 2.3.7 : Soit  $B$  dans  $G_1^m$  un opérateur pseudo-différentiel de symbole de Weyl  $b$ , alors  $\mathcal{F}^{-1} B \mathcal{F}$  est un o.p.d dont le symbole de Weyl  $\tilde{b}$  est défini par :

$$(2.3.43) \quad \tilde{b}(x, \xi) = b(\xi, -x) .$$

La démonstration est immédiate.

De (2.3.42) et (2.3.43), on déduit alors que :

$$(2.3.44) \quad \sigma((F^*F))(\partial_\theta S(x, \theta), \theta) \equiv |a(x, \theta)|^2 \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial x}(x, \theta) \right|^{-1} \\ (\text{modulo } \Gamma_1^{2m-2}(\mathbb{R}^{2n})).$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.3.6.

Remarque 2.3.8 : Une fois démontrée la proposition (2.3.6), on en déduit immédiatement que pour  $m \leq 0$ ,  $F$  est continu de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (cf. Th. 2.1.6). En effet,  $F^*F$  est un o.p.d dans  $G_\rho^m(\rho = 0$  ou  $1$  selon l'hypothèse sur  $a$ ). Il résulte alors du théorème de continuité  $L^2$  démontré au chapitre I (Th. 1.4.7) dans le cas où  $\rho > 0$  et du théorème de Caldéron-Vaillancourt dans le cas où  $\rho = 0$  que  $F^*F$  est continu de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

#### 2.4 Les Fourier-Intégraux globaux "classiques".

Au paragraphe (2.1), nous avons introduit une classe de Fourier-Intégraux correspondant (dans le cas où la phase  $\phi$  était  $\langle x-y, \theta \rangle$ ) à la classe  $G_0^m$ .

Au paragraphe (2.2), nous avons introduit, sous des hypothèses supplémentaires sur  $\phi$ , la classe  $\mathcal{I}^{m, \phi}$  des Fourier-Intégraux globaux réguliers correspondant (dans le cas où la phase  $\phi$  était  $\langle x-y, \theta \rangle$ ) à la classe  $G_1^m$ .

On introduit ici la classe correspondant dans le cas pseudo-différentiel à la classe  $G_1^{m, cl}$ .

On fait sur la phase  $\phi$  les hypothèses suivantes :

$$(2.4.1) \quad (F1) = (H1)$$

i.e.  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^\infty$ .

$$(2.4.2) \quad (F2) = (H2)$$

i.e.  $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^N$ , il existe  $C_{\alpha\beta\gamma}$  telle que :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\theta^\gamma \phi(x, y, \theta) \right| \leq C_{\alpha\beta\gamma} (\lambda(x, y, \theta))^{2-(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)}_+$$

(2.4.3) (F3) (comparer avec H5).

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $R_0 > 0$  tel que :

$$(x, y, \theta) \in \Omega_{\phi, \varepsilon_0} \cap C B(0, R_0) \Rightarrow \phi(\lambda x, \lambda y, \lambda \theta) = \lambda^2 \phi(x, y, \theta) \quad \forall \lambda \geq 1$$

(2.4.4) (F4) (comparer avec H4).

Il existe  $R_1 > 0$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, \theta) \notin B(0, R_1) \\ \phi'_\theta = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \det D(\phi) \neq 0$$

Proposition 2.4.1. : Si  $\phi$  vérifie (F1) à (F4),  $\phi$  vérifie (H1), (H2), (H3), (H3)\* et (H5).

Démonstration

Montrons par exemple (H3) : Pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $(x, y, \theta) \notin \Omega_{\phi, \varepsilon}$ , on a :

$$|x|^2 + |y|^2 + |\theta|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} |\phi'_\theta|^2$$

Par conséquent, il existe une constante  $C_{0, \varepsilon}$  telle que :

$$(2.4.5) \quad (x, y, \theta) \notin \Omega_{\phi, \varepsilon} \Rightarrow \lambda(x, y, \theta) \leq C_{0, \varepsilon} \lambda(\partial_y \phi, \partial_\theta \phi, y) .$$

De même, pour tout R, il existe une constante  $C_{1, R}$  telle que :

$$(2.4.6) \quad (x, y, \theta) \in B(0, R) \Rightarrow \lambda(x, y, \theta) \leq C_{1, R} \lambda(\partial_y \phi, \partial_\theta \phi, y) .$$

On est donc ramené à montrer une estimation de même type dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon} \cap C B(0, R_0)$  pour  $\varepsilon_0$  assez petit et  $R_0$  assez grand.

En utilisant l'homogénéité et la compacité des sphères dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , il suffit de montrer que :

$$(2.4.7) \quad (x_0, y_0, \theta_0) \in C_\phi \cap C \bar{B}(0, R_0) \Rightarrow (\phi'_y, y_0) \neq 0 .$$

On en déduira alors qu'il existe un voisinage de  $(x_0, y_0, \theta_0)$  dans lequel  $(\phi'_y, \phi'_\theta, y)$  sera différent de 0, d'où l'estimation voulue dans un voisinage conique de  $(x_0, y_0, \theta_0)$ .

(2.4.7) résultera de la remarque suivante. Considérons dans un voisinage de  $(x_0, y_0, \theta_0)$  l'application  $h$  définie en (2.1.35). Il résulte de l'hypothèse (F4) que  $h$  est un difféomorphisme local. Supposons alors que  $(\phi'_y(x_0, y_0, \theta_0), y_0) = 0$ . Ceci implique que  $h(x_0, \theta_0, y_0) = 0$ . D'après (F3), on a également :  $h(\lambda x_0, \lambda \theta_0, \lambda y_0) = 0$  pour tout  $\lambda$  assez voisin de 1. Ceci contredit la propriété que  $h$  est un difféomorphisme local. (H3) est ainsi démontré. (H3)\* se démontre par une méthode analogue.

Remarque 2.4.2 : On voit ici apparaître la clé des démonstrations de ce paragraphe (qui sont très proches de la théorie classique de Hörmander) : on remplace ici le théorème d'inversion globale par des théorèmes d'inversion locale combinée avec de l'homogénéité.

Remarque 2.4.3 : (F3) et (F4) n'impliquent pas tout à fait (H4) mais seulement (H4) dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon} \cap C(B(0, R))$  pour  $\varepsilon$  assez petit et  $R$  assez grand. Certes la valeur de  $\phi$  en dehors de cette zone ne semble pas importante mais il ne semble pas toujours possible de remplacer  $\phi$  par une phase  $\tilde{\phi}$  vérifiant (H4) et coïncidant avec  $\phi$  sur  $\Omega_{\phi, \varepsilon} \cap C(B(0, R))$ . Ce sera néanmoins le cas dans nos applications.

Montrons enfin H5 : (H5) résulte immédiatement de (F3).

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.4.1.

Nous sommes maintenant en mesure de poser la définition suivante :

Définition 2.4.4 : Soit  $\phi$  une phase vérifiant (F1) à (F4). On pose :

$$(2.4.7) \quad \Gamma_1^{m, \phi, cl} = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n), \exists \mu \in \mathbb{R}, \varepsilon_1 > 0$$

$$\text{tel que : } a \in \Gamma_0^\mu(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n) \cap \Gamma_1^{m, cl}(\Omega_{\phi, \varepsilon_1})\}.$$

et on désigne par  $\Gamma_1^{m, \phi, cl}$  l'ensemble des Fourier-Intégraux qui peuvent s'écrire comme la somme d'un opérateur régularisant et d'un opérateur de la forme  $I(a, \phi)$



avec  $a \in \Gamma_1^{m, \phi, cl}$ .

Remarque 2.4.5 : Si  $\phi$  vérifie (H4), la classe  $\mathcal{J}_1^{m, \phi, cl}$  est contenue dans  $\mathcal{J}_1^{m, \phi}$  (cf. Remarque 2.4.3).

On démontre immédiatement l'analogie du lemme 2.2.2.

Lemme 2.4.6 : Si  $F \in \mathcal{J}_1^{m, \phi, cl}$ , il existe une amplitude  $b$  dans  $\Gamma_1^{m, cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{I})$  et un opérateur régularisant tel que :

$$(2.4.8) \quad F = I(b, \phi) + R.$$

De même, on a l'analogie de la proposition 2.2.3 :

Proposition 2.4.7 : Soient  $\phi_1, \phi_2$  deux phases vérifiant (F1) à (F4). Alors la phase  $\phi$  définie en (2.1.22) vérifie les hypothèses (F1) à (F4). De plus, si  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) appartient à  $\mathcal{J}_1^{m_1, \phi_1, cl}$  (resp.  $\mathcal{J}_1^{m_2, \phi_2, cl}$ ) le composé  $F_1 \cdot F_2$  est dans  $\mathcal{J}_1^{m_1 + m_2, \phi, cl}$ .

Démonstration : On a démontré au cours de la proposition (2.2.3) que pour tout  $\epsilon_i$  ( $i=1,2$ ) et tout  $R_i$ , il existait  $c > 0$  et  $R > 0$  tels que :

$$\begin{array}{c} (x, \theta, z) \in \Omega_{\phi, \epsilon} \cap C B(0, R) \\ \Downarrow \\ (x, \theta_1, y) \in \Omega_{\phi, \epsilon_1} \\ (y, \theta_2, z) \in \Omega_{\phi_2, \epsilon_2} \end{array}$$

Toutes les propriétés annoncées se démontrent aisément. ■

Proposition 2.4.8 (cf. Proposition 2.2.4) : Si  $N = n$ ,  $\phi_0(x, y, \theta) = \langle x - y, \theta \rangle$ , on a :  $\mathcal{J}_1^{m, \phi_0, cl} = G_1^{m, cl}$ .

Définition 2.4.8 : On pose

$$\Lambda_\phi^R = \{(x, \phi'_x, y, -\phi'_y), (x, y, \theta) \in C_\theta \cap C B(0, R)\}$$

et

$$\Lambda_\phi = \{(x, \xi, y, \eta), \exists \lambda \neq 0, (\frac{x}{\lambda}, \frac{\xi}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}, \frac{\eta}{\lambda}) \in \Lambda_\phi^R\}.$$

On voit aisément que  $\bigvee_{\phi} \Lambda_{\phi}$  est une sous-variété conique fermée de  $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}) \setminus 0$  contenue dans  $(\mathbb{R}^{2n} \setminus 0) \times (\mathbb{R}^{2n} \setminus 0)$ .

La proposition 2.2.7 admet (cf. Remarque 2.4.2) l'analogie suivant :

Proposition 2.4.9 : Soit  $F \in \mathcal{J}_1^{m, \phi, cl}$ . Si le symbole  $a$  qui définit  $F$  s'annule sur  $C_{\phi} \cap C B(0, R)$  (pour  $R$  assez grand) (ou simplement  $a_m$  et  $a_{m-1}$  si on écrit  $a \sim \sum_{j \geq 0} a_{m-j}$  ), alors  $F$  appartient à  $\mathcal{J}_1^{m-2, \phi, cl}$ .

Terminons ce paragraphe par l'étude du cas particulier traité au § 2.3 dans le cadre des F.I.O globaux réguliers.

On considère donc une phase du type (2.3.1) :

$$\phi(x, \theta, y) = S(x, \theta) - y \cdot \theta$$

et on fait les 3 hypothèses suivantes sur  $S$  :

$$(2.4.9) \quad (E1) = (G_1), \text{ i.e. } (x, \theta) \rightarrow S(x, \theta) \text{ est } C^{\infty} \text{ de } \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\theta^n \text{ dans } \mathbb{R}.$$

$$(2.4.10) \quad (E2) \exists R > 0, \text{ tel que } \forall (x, \theta) \in C B(0, R), \forall \lambda \geq 1,$$

$$S(\lambda x, \lambda \theta) = \lambda^2 S(x, \theta)$$

$$(2.4.11) \quad (E3) \exists R > 0, \text{ tel que } \det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \theta} (x, \theta) \right) \neq 0$$

$$\text{pour } (x, \theta) \in C B(0, R).$$

Proposition 2.4.10 (cf. proposition 2.3.4) : Soit  $S$  une phase vérifiant (E1), (E2), (E3), alors la phase  $\phi$  associée vérifie les hypothèses (F1) à (F4).

Si  $(x, \theta) \rightarrow a(x, \theta)$  appartient à  $\Gamma_1^{m, cl}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\theta^n)$ , alors  $(x, \theta, y) \rightarrow a(x, \theta)$  appartient à  $\Gamma_1^{m, \phi, cl}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\theta^n \times \mathbb{R}_y^n)$ .

## 2.5 - Composé d'un Fourier-intégral global et d'un opérateur pseudo-différentiel.

Soit  $I(a, \phi)$  un opérateur Fourier-intégral global dans  $\mathcal{J}_2^{m, \phi}$  et  $Q$  un opérateur pseudo différentiel dans  $G_1^m(\mathbb{R}^n)$  dont le symbole classique (à gauche) est  $q(x, \xi)$ . On se propose dans ce paragraphe de démontrer puis de donner des

applications du théorème suivant :

Théorème (2.5.1) : Soit F dans  $\mathcal{J}^{m_2, \phi}$  ( $F = I(a, \phi)$ ) et Q dans  $G_1^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ , alors QF est dans  $\mathcal{J}^{m_1+m_2, \phi}$ . Plus précisément, on peut écrire :

$$(2.5.1) \quad QF = I(b, \phi)$$

et b admet pour tout M le développement suivant :

$$(2.5.2) \quad b = \sum_{|\alpha| < M} b_\alpha + b^{(M)} .$$

avec

$$(2.5.3) \quad b_\alpha(x, \theta, z) = \frac{1}{\alpha!} \left( \frac{\partial^\alpha q}{\partial \xi^\alpha} \right) (x, \phi'_x(x, \theta, z)) [D_y^\alpha e^{i\psi} a(y, \theta, z)] \Big|_{y=x}$$

où  $\psi$  est définie par :

$$(2.5.4) \quad \psi(x, y, \theta, z) = \phi(y, \theta, z) - \phi(x, \theta, z) - \langle y-x, \phi'_x(x, \theta, z) \rangle$$

Enfin :

$$(2.5.5) \quad b_\alpha \in \Gamma_1^{m_1+m_2-|\alpha|, \phi} \quad (\text{cf. 2.2.4})$$

$$(2.5.6) \quad b^{(M)} \in \Gamma_1^{m_1+m_2-M, \phi} .$$

Démonstration : Elle est longue et technique. Nous utiliserons librement les intégrales oscillantes sans revenir à leur définition. Rappelons qu'il résulte du paragraphe précédent que QF est de la forme :  $I(q, a, \tilde{\phi})$  avec

$\tilde{\phi}(x, y, \xi, \theta, z) = \langle x-y, \xi \rangle + \phi(y, \theta, z)$ , mais ce résultat n'est pas satisfaisant car il ne fournit pas de calcul symbolique. On doit donc travailler pour réécrire  $I(q, a, \tilde{\phi})$  sous la forme  $I(b, \phi)$ .

Remarquons au passage que  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  sont deux phases telles que  $\Lambda_\phi = \Lambda_{\tilde{\phi}}$  (cf. 2.2.19). Le théorème (2.5.1) est donc en un certain sens un cas particulier d'un résultat général.

Formellement, le symbole b est donné par l'intégrale oscillante :

$$(2.5.7) \quad b(x, \theta, z) = \iint e^{i[\langle x-y, \xi \rangle + \phi(y, \theta, z) - \phi(x, \theta, z)]} a(y, \theta, z) \cdot q(x, \xi) d\xi dy .$$

Il reste à montrer que  $b$  est réellement un symbole dans la classe annoncée.

On réécrit d'abord (2.5.7) (grâce à (2.5.4)) sous la forme :

$$(2.5.8) \quad b(x, \theta, z) = \iint e^{i\langle x-y, \xi - \phi'_x(x, \theta, z) \rangle} \frac{i^\Psi(x, \theta, y, z)}{[e^{i\psi} a(y, \theta, z) \cdot q(x, \xi)]} d\xi dy$$

On développe ensuite  $q(x, \xi)$  par la formule de Taylor au point  $(x, \phi'_x(x, \theta, z))$

$$(2.5.9) \quad q(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < M} q^{(\alpha)}(x, \phi'_x) \frac{(\xi - \phi'_x)^\alpha}{\alpha!} + q_M(x, \xi, \theta, z)$$

où

$$(2.5.10) \quad q_M(x, \xi, \theta, z) = M \sum_{|\alpha|=M} \frac{1}{\alpha!} (\xi - \phi'_x(x, \theta, z))^\alpha \int_0^1 q^{(\alpha)}(x, \phi'_x + \sigma(\xi - \phi'_x)) (1-\sigma)^{M-1} d\sigma$$

Au développement (2.5.9) correspond la décomposition de  $b$  suivante :

$$(2.5.11) \quad b(x, \theta, z) = \sum_{|\alpha| < M} q^{(\alpha)}(x, \phi'_x) \iint e^{i\langle x-y, \xi - \phi'_x(x, \theta, z) \rangle} \frac{(\xi - \phi'_x(x, \theta, z))^\alpha}{\alpha!} [e^{i\psi} a] d\xi dy + b^{(M)}$$

avec

$$(2.5.12) \quad b^{(M)} = \sum_{|\alpha|=M} \frac{1}{\alpha!} \iiint_c e^{i\langle x-y, \xi - \phi'_x \rangle} \frac{(\xi - \phi'_x)^\alpha}{\alpha!} \cdot e^{i\psi} a q^{(\alpha)}(x, \phi'_x + \sigma(\xi - \phi'_x)) \times (1-\sigma)^{M-1} d\sigma \cdot d\xi \cdot dy$$

Posons alors :

$$(2.5.13) \quad b_\alpha = \frac{q^{(\alpha)}(x, \phi'_x)}{\alpha!} \iint e^{i\langle x-y, \xi - \phi'_x \rangle} \frac{(\xi - \phi'_x)^\alpha}{\alpha!} e^{i\psi} a d\xi dy$$

On peut réécrire  $b$  sous la forme

$$b_\alpha = \frac{q^{(\alpha)}(x, \phi'_x)}{\alpha!} \iint \xi^\alpha \cdot e^{i\langle x-y, \xi \rangle} (e^{i\psi} a) d\xi \cdot dy .$$

La formule 2.5.3 en résulte immédiatement.

Montrons maintenant (2.5.5). On remarque que, pour  $\varepsilon$  assez petit,

$$(2.5.14) \quad \lambda(x, \phi'_x) \approx \lambda(x, \theta, z) \quad \text{dans } \Omega_{\phi, \varepsilon} .$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \lambda(x, \theta, z) &\lesssim \lambda(x, \phi'_x, \phi'_\theta) \quad (\text{d'après H3}^*) \\ &\lesssim \lambda(x, \phi'_x) + \varepsilon \lambda(x, \theta, z) \quad \text{dans } \Omega_{\phi, \varepsilon} . \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(2.5.15) \quad q^{(\alpha)}(x, \phi'_x) \in \Gamma_1^{m_1 - |\alpha|}(\Omega_{\phi, \varepsilon}) \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

Par ailleurs :

$$(2.5.16) \quad q^{(\alpha)}(x, \phi'_x) \in \Gamma_0^{\sup(m_1 - |\alpha|, 0)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n).$$

Considérons maintenant l'expression :

$$K_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} [D_y^\alpha [e^{i\psi} a((y, \theta, z))] ] /_{y=x} .$$

On remarque d'abord que :  $\langle D_y \psi \rangle /_{y=x} = 0$ . Par conséquent, il n'apparaît dans l'expression ci-dessus que des dérivées plus grandes que 2 de  $\psi$  et donc de  $\phi$  .

Il résulte alors des hypothèses (H2) et (H5) que, si  $a \in \Gamma_0^\mu$  :

$$(2.5.17) \quad K_\alpha \in \Gamma_0^\mu(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$$

et

$$(2.5.18) \quad K_\alpha \in \Gamma_1^{m_2}(\Omega_{\phi, \varepsilon_0})$$

(2.5.5) résulte alors des points (2.5.15) à (2.5.18).

Il reste maintenant à étudier le reste  $b^{(M)}$  qui est le point le plus délicat.

Remarquons tout d'abord que pour tout  $M' \geq M$  on a :

$$(2.5.19) \quad b^{(M)} = \sum_{M \leq |\alpha| < M'} b_\alpha + b^{(M')} .$$

Compte tenu des propriétés de  $b_\alpha$  déjà démontrées il suffit pour démontrer (2.5.6) de montrer que pour tout  $\beta, \gamma, \delta$ , il existe  $M' \geq M$  et  $C_{M', \beta, \gamma, \delta}$  tels que l'on ait :

$$(2.5.20) \quad \left| \partial_x^\beta \partial_\theta^\gamma \partial_z^\delta b^{(M')} (x, \theta, z) \right| \leq C_{M', \beta, \gamma, \delta} \lambda(x, \theta, z)^{m_1 + m_2 - M - |\beta| - |\gamma| - |\delta|}$$

dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon}$  ( $\varepsilon$  assez petit).

et d'autre part de montrer que :

$$(2.5.21) \quad \left| \partial_x^\beta \partial_\theta^\gamma \partial_z^\delta b^{(M)} (x, \theta, z) \right| \leq \tilde{C}_{\beta, \gamma, \delta} \lambda(x, \theta, z)^M \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$$

On réécrit d'abord  $b^{(M')}$  sous la forme (cf. 2.5.12).

$$b^{(M')} (x, \theta, z) = M' \sum_{|\alpha|=M'} \frac{1}{\alpha!} \int_{\xi} \int_y \int_0^1 e^{i \langle x-y, \xi - \phi'_x \rangle} \times q^{(\alpha)} (x, \phi'_x + \sigma(\xi - \phi'_x)) \cdot D_y^\alpha [e^{i\psi} a] (1-\sigma)^{M'-1} d\sigma d\xi dy$$

Puis changeant  $\xi - \phi'_x$  en  $\xi$ , on obtient :

$$(2.5.22) \quad b^{(M')} (x, \theta, z) = M' \sum_{|\alpha|=M'} \frac{1}{\alpha!} \int_{\xi} \int_y \int_0^1 e^{i \langle x-y, \xi \rangle} q^{(\alpha)} (x, \phi'_x + \sigma\xi) D_y^\alpha [e^{i\psi} a] (1-\sigma)^{M'-1} d\sigma d\xi dy$$

Pour montrer (2.5.20), on cherche à contrôler des expressions du type :

$$\partial_x^\beta \partial_\theta^\gamma \partial_z^\delta b^{(M')} .$$

Or  $\partial_x^\beta \partial_\theta^\gamma b^{(M')}$  est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$(2.5.23) \quad \int_y \int_{\xi} \int_0^1 e^{i \langle x-y, \xi \rangle} \partial_x^{\beta''} \partial_y^{\alpha+\beta'} \partial_\theta^{\gamma'} \partial_z^{\delta'} [e^{i\psi} \cdot a] \cdot \partial_x^{\beta''''} \partial_\theta^{\gamma''} \partial_z^{\delta''} [q^{(\alpha)} (x, \phi'_x + \sigma\xi)] (1-\sigma)^{M'-1} d\sigma d\xi dy$$

où :

$$|\beta'| + |\beta''| + |\beta'''| = |\beta|$$

$$|\gamma'| + |\gamma''| = |\gamma|$$

$$|\delta'| + |\delta''| = |\delta|$$

Soit  $f$  le terme défini par :

$$(2.5.24) \quad \partial_x^{\beta''} \partial_y^{\alpha + \beta'} \partial_\theta^{\gamma'} \partial_z^{\delta'} (e^{i\Psi} a) = f \cdot e^{i\Psi} .$$

Compte tenu de (H2) et de (2.5.4), on a la propriété

$$(2.5.25) \quad \left| \partial_x^{\tilde{\alpha}} \partial_y^{\tilde{\beta}} \partial_\theta^{\tilde{\gamma}} \partial_z^{\tilde{\delta}} \Psi \right| \leq C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} (1 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

pour tout  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$  tel que :  $|\tilde{\alpha}| + |\tilde{\beta}| + |\tilde{\gamma}| + |\tilde{\delta}| \geq 1$

On déduit alors de (2.5.24) et (2.5.25) la majoration :

$$(2.5.26) \quad \left| \partial_y^{\tilde{\alpha}} f \right| \leq C_{\tilde{\alpha}} \lambda(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{y})^\mu (1 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) (|\mu| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| + M')$$

Considérons maintenant l'autre terme apparaissant dans (2.5.23) :

$$(2.5.27) \quad g(\mathbf{x}, \xi, \theta, \sigma, \mathbf{z}) = \partial_x^{\beta'''} \partial_\xi^{\gamma''} \partial_z^{\delta''} [q^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \phi_{\mathbf{x}}' + \sigma \xi)]$$

Compte tenu de (H2), on a :

$$(2.5.28) \quad \left| \partial_\xi^\rho g(\mathbf{x}, \xi, \theta, \sigma, \mathbf{z}) \right| \leq C_\rho \lambda_1^{m_1 - |\alpha|}(\mathbf{x}, \phi_{\mathbf{x}}' + \sigma \xi) .$$

On réécrit un terme de la forme (2.5.23) de la manière suivante :

$$(2.5.29) \quad B \stackrel{\text{d'éf}}{=} \iiint_{y \xi_0}^1 e^{i \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \xi \rangle + \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta, \mathbf{z})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta, \mathbf{z}) g(\mathbf{x}, \xi, \theta, \sigma, \mathbf{z}) (1 - \sigma)^{M' - 1} d\sigma d\xi dy .$$

Posons :

$$(2.5.30) \quad H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \xi, \theta, \mathbf{z}) = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \xi \rangle + \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta, \mathbf{z}) .$$

Comme souvent dans ce genre de question, on va découper l'intégrale en fonction de l'éloignement aux points critiques de  $H$  par rapport à  $(\xi, y)$  qui sont déterminés par les équations :

$$(2.5.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \xi} = x - y = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = -\xi + \frac{\partial \phi}{\partial x}(y, \theta, z) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \theta, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ \xi = 0 \end{cases}$$

On déduit immédiatement de (2.5.31) et de (H2), l'inégalité :

$$(2.5.32) \quad |\partial_y H|^2 + |\partial_\xi H|^2 \gtrsim |x-y|^2 + |\xi|^2 .$$

(2.5.32) conduit à découper l'intégrale  $B$  de la manière suivante.

Soit  $\omega$  une fonction dans  $C^\infty(\mathbb{R})$  à support dans  $] -2, +2[$  et égale à 1 sur  $[-1, +1]$ .

Pour  $\eta \in \mathbb{R}$  à déterminer, on pose alors

$$(2.5.33) \quad k_\eta(x, y, \xi, \theta, z) = \omega\left(\frac{|\xi|^2 + |x-y|^2}{\eta \lambda^2(x, y, \xi, \theta, z)}\right)$$

On réécrit alors  $B$  sous la forme :

$$(2.5.34) \quad B = B_1 + B_2$$

avec :

$$(2.5.35) \quad B_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \iiint e^{iH(1-k_\eta)} f \cdot g(1-\sigma)^{M'-1} d\sigma d\xi dy .$$

Sur le support de  $(1-k_\eta)$ , on a, d'après (2.5.32) et (2.5.33) :

$$(2.5.36) \quad |\partial_y H|^2 + |\partial_\xi H|^2 \gtrsim \lambda^2(x, y, \xi, \theta, z) .$$



On introduit alors comme d'habitude l'opérateur :

$$L = (|\partial_y H|^2 + |\partial_\xi H|^2)^{-1} \left( \sum_j (\partial_{y_j} H) \cdot \partial_{y_j} + \sum_k (\partial_{\xi_k} H) \cdot \partial_{\xi_k} \right).$$

et on réécrit  $B_1$  sous la forme :

$$(2.5.37) \quad B_1 = \iiint e^{iH} ({}^t L)^{\ell((1-k_\eta) \cdot f \cdot g)} (1-\sigma)^{M'-1} d\sigma dy d\xi.$$

Compte tenu de (2.5.25), (2.5.26), (2.5.28) et (2.5.36), on obtient que pour tout  $M' \geq M$ , tout  $\tilde{k} \in \mathbb{R}^+$ , on a :

$$(2.5.38) \quad |B_1(x, \theta, z)| \lesssim \lambda^{-\tilde{k}}(x, \theta, z).$$

Considérons maintenant :

$$(2.5.39) \quad B_2(x, \theta, z) = \iiint_0^1 e^{iH} \cdot k_\eta f \cdot g (1-\sigma)^{M'-1} d\sigma dy d\xi.$$

Après un certain nombre d'intégrations par parties en  $\xi$ , on réécrit  $B_2$  sous la forme :

$$(2.5.40) \quad B_2(x, \theta, z) = \int_y \int_\xi \int_0^1 e^{iH(1+|x-y|^2)^{-M_1}} f \cdot (1-\Delta_\xi)^{M_1} (k_\eta g) d\sigma dy d\xi.$$

Estimation 2.5.21 :

Compte tenu de (2.5.22), (2.5.23), (2.5.34), (2.5.38) (avec  $M' = M$ ), il suffit de montrer qu'on peut choisir  $\mu_M$  indépendant de  $\beta, \gamma, \delta$  tel que l'on ait :

$$(2.5.41) \quad |B_2(x, \theta, z)| \lesssim \lambda(x, \theta, z)^{\mu_M}.$$

Compte tenu de (2.5.26), (2.5.28), (2.5.33) et (2.5.40), on obtient que ,

pour  $|\eta|$  assez petit et en prenant dans (2.5.40)  $M_1 = \frac{1}{2}[|\mu| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| + M + n + 1]$ , l'inégalité (2.5.41) est vérifiée avec  $\mu_M = 2|\mu| + (m_1 - M)_+ + n$ .

Estimation 2.5.20 dans  $\Omega_{\phi, \varepsilon}$

Sur le support de  $k_\eta$ , on a :

$$(2.5.42) \quad |x-y|^2 + |\xi|^2 \leq 2\eta \lambda^2(x, y, \xi, z, \theta).$$

et d'après (H3)\*, on a :

$$(2.5.43) \quad \lambda(x, \theta, z) \lesssim \lambda(x, \phi'_\theta, \phi'_x)$$

Maintenant remarquons que si  $(x, \theta, z) \in \Omega_{\phi, \varepsilon}$  et que  $\varepsilon$  est choisi assez petit, on a :

$$(2.5.44) \quad \lambda(x, \theta, z) \approx \lambda(x, \phi'_x) .$$

On déduit de (2.5.44) que :

$$(2.5.45) \quad \lambda(x, \xi, \theta, z, y) \underset{\substack{\text{uniformément} \\ \text{par rapport à } \sigma}}{\lesssim} \lambda(x, \phi'_x + \sigma \xi, \xi, x-y) .$$

Finalement en utilisant (2.5.42) et (2.5.45), et en choisissant  $\eta$  et  $\varepsilon$  assez petits, on obtient que, pour tout  $(x, \theta, z, \xi, y)$  tel que :

$(x, \theta, z) \in \Omega_{\phi, \varepsilon}$ ,  $(x, \xi, \theta, z, y) \in \text{supp } k_\eta$ , on a, pour tout  $\sigma \in [0, 1]$  :

$$(2.5.46) \quad \lambda(x, \theta, z) \approx \lambda(x, \xi, \theta, z, y) \approx \lambda(x, \phi'_x + \sigma \xi)$$

les équivalences étant uniformes en  $\sigma$ .

$$(2.5.47) \quad (1 - \Delta_\xi)^{M_1} (k_\eta g) \lesssim \lambda(x, \theta, z) \lambda^{m_1 - M'}$$

Par ailleurs, il résulte de (2.5.26) l'estimation :

$$(2.5.48) \quad (\lambda(x-y))^{-M_1} f \lesssim \lambda(x, \theta, z) |\mu| (1 + |x-y|)^{|\mu| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| + M' - 2M_1}$$

On joue sur  $M'$  et  $M_1$  de sorte que

$$(2.5.49) \quad |\mu| + m_1 - M' + 2n \leq m_1 + m_2 - M - |\beta| - |\gamma| - |\delta|$$

et

$$(2.5.50) \quad |\mu| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| + M' - 2M_1 \leq 0$$

(2.5.49) et (2.5.50) sont compatibles. L'inégalité (2.5.50) résulte alors de (2.5.38) et de (2.5.47) à (2.5.50). c.q.f.d.

Le théorème (2.5.1) a l'analogie suivant pour la composition à droite.

Théorème 2.5.2 : Soit F dans  $\mathcal{J}^{m_2, \phi}$  et Q dans  $G_1^{m_1}(\mathbb{R}^n)$  (de symbole à droite  $\tilde{q}$ ) ; alors FQ est dans  $\mathcal{J}^{m_1+m_2, \phi}$ . Plus précisément, on peut écrire :

$$(2.5.51) \quad FQ = I(c, \phi)$$

et c admet pour tout M le développement suivant :

$$(2.5.52) \quad c = \sum_{|\alpha| < M} c_\alpha + c^{(M)}$$

avec :

$$(2.5.53) \quad c_\alpha(x, \theta, z) = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \tilde{q}}{\partial \eta^\alpha}(z, -\phi'_z(x, \theta, z)) \cdot D_y^\alpha [e^{i\psi} a(x, \theta, y)]_{y=z}.$$

et  $c_\alpha$  et  $c^{(M)}$  vérifient les propriétés (2.5.5) et (2.5.6).

Démonstration : On souhaite bien entendu se ramener à la démonstration du théorème (2.5.1).

On a déjà remarqué que :

$$(2.5.54) \quad I(b, \phi)^* = I(b^*, \phi^*)$$

avec :

$$\begin{aligned} b^*(x, \theta, y) &= \bar{b}(y, \theta, x) \\ \phi^*(x, \theta, y) &= -\phi(y, \theta, x). \end{aligned}$$

Si F est de la forme  $I(a, \phi)$ , on a :

$$(FQ)^* = Q^* \cdot F^* = Q^* \cdot I(a^*, \phi^*)$$

Q étant défini par son symbole à droite q, Q est défini avec comme symbole à gauche  $\tilde{q}$ . Il résulte du théorème (2.2.1) que :

$$(FQ)^* = I(c^*, \phi^*)$$

avec :

$$(2.5.55) \quad c_\alpha^*(x, \theta, z) = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \tilde{q}}{\partial \xi^\alpha}(x, \phi_x^*(x, \theta, z)) D_y^\alpha [e^{i\psi^*} a^*(y, \theta, z)]_{y=x}$$

D'où :

$$c_\alpha(x, \theta, z) = \overline{c_\alpha^*}(z, \theta, x) = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \bar{q}(z, -\phi'_x(x, \theta, x)) (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha [e^{i\psi} a(x, \theta, y)]_{y=z} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Comme application des théorèmes précédents, on a la

Proposition 2.5.3 : Si  $F$  est dans  $\mathcal{J}^{m, \phi}$ , alors  $F$  opère continûment de  $B^s(\mathbb{R}^n)$  dans  $B^{s-m}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

Démonstration : Si  $L_{-s} \in G_1^{-s}(\mathbb{R}^n)$  et  $L_{s-m} \in G_1^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ , il résulte des théorèmes (2.5.1) et (2.5.2) que :

$$(2.5.56) \quad L_{s-m} F L_{-s} \in \mathcal{J}^{0, \phi}$$

Le théorème résulte alors du théorème 2.1.6 (cf. également la remarque 2.3.8).

## 2.6 Fourier-Intégraux globalement elliptiques. Théorème d'Egorov.

Dans ce paragraphe, on se replace (pour des raisons techniques) dans le cadre du paragraphe 2.3.

Considérons l'opérateur  $F$  de la proposition 2.3.6 et supposons que :

$$(2.6.1) \quad a(x, \theta) = \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial x} \right|^{1/2}.$$

Sous les hypothèses (2.3.11) et (2.3.4), on vérifie que

$$(2.6.2) \quad a \in \Gamma_1^0(\mathbb{R}^{2n}).$$

Il résulte alors de la proposition (2.3.6) que :

$$(2.6.3) \quad F^*F = I + R$$

avec  $R$  dans  $G_1^{-2}(\mathbb{R}^n)$ .

On déduit immédiatement de (2.6.3) et du théorème (2.5.1) qu'il existe un Fourier-Intégral  $G$  dans  $\mathcal{J}^{0, \phi^*}$  (avec  $\phi^*(x, y, \theta) = x\theta \cdot S(y, \theta)$ ) tel que :

$$(2.6.4) \quad G.F = I + \mathcal{R}$$

avec  $\mathcal{R} \in G^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

On a ainsi construit ce que l'on appellera naturellement un opérateur Fourier-Intégral globalement elliptique dans  $\mathcal{J}^{0,\phi}$ .

On peut vérifier également qu'il existe  $G'$  dans  $\mathcal{J}^{0,\phi}$  tel que :

$$(2.6.5) \quad F G' = I + \mathcal{R}' \quad \text{avec } \mathcal{R}' \text{ dans } G^{-\infty}.$$

On vérifie alors que  $G'-G$  est régularisant.

Remarque 2.6.1 : On peut raffiner (2.6.4) en construisant un F.I.O dans  $\mathcal{J}^{0,\phi} \mathbb{F}$  tel que

$$(2.6.6.) \quad \tilde{F}^* \tilde{F} = I + \tilde{\mathcal{R}} \quad \text{avec } \tilde{\mathcal{R}} \text{ dans } G^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Il suffit en effet de construire un o.p.d  $B$  dans  $G_1^0(\mathbb{R}^n)$  auto-adjoint tel que

$$(2.6.7) \quad B(I+R)B = I + \tilde{\mathcal{R}}.$$

Or

$$B \equiv (I+R)^{-1/2} \equiv I - \frac{1}{2}R + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} R^2 + \dots$$

définit un o.p.d (défini modulo  $G^{-\infty}$ ) qui répond à la question.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer dans le cadre de § 2.3 un analogue du théorème classique d'Egorov.

Théorème 2.6.2 (Théorème d'Egorov) : Soit  $F$  un Fourier-Intégral global elliptique dans  $\mathcal{J}^{0,\phi}$  et  $G$  son inverse dans  $\mathcal{J}^{0,\phi^*}$ . Si  $Q$  est un o.p.d dans  $G_1^m(\mathbb{R}^n)$  de symbole  $q$ , alors  $G Q F$  est un o.p.d dans  $G_1^m(\mathbb{R}^n)$  de symbole  $p$  et on a :

$$(2.6.8) \quad p(\partial_\theta S(x,\theta), \theta) = q(x, \partial_x S(x,\theta)) \quad \text{modulo } \Gamma_1^{m-2}(\mathbb{R}^{2n})$$

Démonstration : Remarquons les points suivants :

1er point : Si un Fourier-Intégral dans  $\mathcal{J}^{m,\phi}$  est défini par un noyau de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(S(x,\theta)-y\theta)} a(x,y,\theta) d\theta$$

on peut, modulo un régularisant, supposer qu'il est défini par une amplitude  $a$  indépendante de  $y$  appartenant à  $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^{2n})$ . Montrons ce point modulo  $\mathcal{J}^{m-2, \phi}$  (modulo un régularisant se déduit par récurrence). On pose simplement :

$$\tilde{a}(x, \theta) = a(x, \partial_\theta S(x, \theta), \theta)$$

et on constate que  $(x, y, \theta) \rightarrow a(x, y, \theta)$  et  $(x, y, \theta) \rightarrow \tilde{a}(x, \theta)$  coïncident sur  $C_\phi$ . De même, on montre qu'un Fourier-Intégral dans  $\mathcal{J}^{m, \phi^*}$  défini par un noyau de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \theta - S(y, \theta))} a^*(x, y, \theta) d\theta$$

peut être défini (modulo un régularisant) par une amplitude indépendante de  $x$ .

2ème point : Si  $F$  est défini par une amplitude  $a$  ne dépendant pas de  $y$ , QF s'écrit également avec une amplitude  $c(x, \theta)$  ne dépendant pas de  $y$  (cela résulte du 1er point ou de l'examen des formules (2.5.2) et (2.5.3)) et on a :

$$(2.6.9) \quad c(x, \theta) \equiv q(x, \partial_x S(x, \theta)) \cdot a(x, \theta) \text{ (modulo } \Gamma_1^{m-2}(\mathbb{R}^{2n})) \text{ .}$$

3ème point : Si  $G$  est défini par une amplitude  $b$  ne dépendant pas de  $x$ , on peut écrire, pour  $v$  dans  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  :

$$(2.6.10) \quad \widehat{G.v}(\eta) = \int e^{-iS(y, \eta)} b(y, \eta) v(y) dy$$

et on a :

$$(2.6.11) \quad ((QF)u)(x) = \int e^{iS(x, \xi)} c(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \text{ .}$$

Comme dans la démonstration de la proposition (2.3.6) (cf. 2.3.40), on considère plutôt :

$$\widehat{\mathcal{F}}(G.QF) \mathcal{F}^{-1}$$

dont le noyau est donné par l'intégrale oscillante :

$$(2.6.12) \quad K(\eta, \xi) = \int e^{i(S(y, \xi) - S(y, \eta))} b(y, \eta) \cdot c(y, \xi) dy \text{ .}$$

La démonstration se déroule alors comme dans cette proposition. On vérifie que  $\mathcal{F}(\text{QF})\mathcal{F}^{-1}$  est un o.p.d dont le symbole  $d$  est déterminé (modulo  $\Gamma_1^{m-2}(\mathbb{R}^n)$ ) par :

$$(2.6.13) \quad d(\eta, -\partial_\eta S(y, \eta)) \equiv b(y, \eta)q(y, \partial_y S(y, \eta)) \cdot a(y, \eta)$$

$G$  étant l'inverse de  $F$ , on a :

$$(2.6.14) \quad b \equiv 1 \pmod{\Gamma_1^{-2}(\mathbb{R}^{2n})} .$$

On déduit de (2.6.13) et (2.6.14) que :

$$(2.6.15) \quad d(\eta, -\partial_\eta S(y, \eta)) \equiv q(y, \partial_y S(y, \eta)) \pmod{\Gamma_1^{m-2}} .$$

Compte tenu du lemme (2.3.7), on déduit de (2.6.15) que :

$$p(\partial_\eta S(y, \eta), \eta) \equiv q(y, \partial_y S(y, \eta)) \pmod{\Gamma_1^{m-2}} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque 2.6.3 : Développons plus en détail le 2ème point de la démonstration du théorème (2.6.2), car on peut préciser la théorème (2.51) dans le cas où :  $F \in \mathcal{J}_1^{m_2, cl}$ ,  $Q \in G_1^{m_1, cl}$  et où :

$$(2.6.16) \quad \phi(x, \theta, y) = S(x, \theta) - y \cdot \theta \quad \text{vérifiant (E1), (E2), et (E3)}.$$

On réécrit le théorème (2.51) sous la forme :

Théorème 2.6.4 : Soit  $\phi(x, \theta, y) + S(x, \theta, y) - y \cdot \theta$  où  $S$  vérifie (E1) à (E3), a un symbole classique :  $(x, \theta, y) \rightarrow a(x, \theta)$  indépendant de  $y$ .

Soit donc  $F = I(a, \phi)$  dans  $\mathcal{J}_1^{m_2, \phi, cl}$  et  $Q$  dans  $G_1^{m_1, cl}$  alors  $QF$  est dans  $\mathcal{J}_1^{m_1 + m_2, \phi, cl}$ . Plus précisément, on peut écrire :

$$(2.6.17) \quad QF = I(b, \phi)$$

et  $b$  est indépendant de la 3ème variable et admet pour tout  $M$  le développement suivant :

$$(2.6.18) \quad b = \sum_{|\alpha| < M} b_\alpha + b^{(M)}$$

avec :

$$(2.6.19) \quad b_\alpha(x, \theta, z) = b_\alpha(x, \theta) = \frac{1}{\alpha!} \left( \frac{\partial^\alpha q}{\partial \xi^\alpha} \right) (x, \partial_x S) D_y^\alpha [e^{i\psi_a(y, \theta)}]_{y=x}$$

où  $\psi$  est définie par :

$$(2.6.20) \quad \psi(x, y, \theta, z) = S(y, \theta) - S(x, \theta) - \langle y - x, \partial_x S(x, \theta) \rangle .$$

Comme fonction de  $(x, \theta)$ , on a :

$$(2.6.21) \quad b_\alpha(x, \theta) \in \Gamma_1^{m_1 + m_2 - |\alpha|, c1}$$

$$(2.6.22) \quad b^{(M)} \in \Gamma_1^{m_1 + m_2 - M, c1} .$$

Démonstration : Le seul point à remarquer est que si  $(x, \theta) \rightarrow p(x, \theta)$  est un symbole dans  $\Gamma_1^{p, c1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $(x, \theta) \rightarrow (p(x, \partial_x S(x, \theta)))$  est également un symbole dans  $\Gamma_1^{p, c1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  .

## 2.7 - Famille de Fourier-Intégraux globaux dépendant de manière $C^\infty$ d'un paramètre.

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^s$  ; On aura besoin pour les applications d'une classe de Fourier-Intégraux globaux dépendant d'un paramètre  $\mu \in \mathcal{O}$ . Dans nos applications,  $\mathcal{O}$  sera un intervalle  $]-T, T[$  ( $T > 0$ ) de  $\mathbb{R}$ . La phase  $\phi_\mu$  ( $\mu \in \mathcal{O}$ ) vérifiera les hypothèses suivantes :

(2.7.1) Hypothèse ( $H_1^{\mathcal{O}}$ )

$$(\mu, x, \theta, y) \rightarrow \phi_\mu(x, \theta, y)$$

est  $C^\infty$  sur  $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$  .

(2.7.2) Hypothèse ( $H_2$ )

$$t.q \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^N \times \mathbb{N}^s, \quad \forall K \text{ compact } C\mathcal{O}, \exists C_{\alpha\beta\gamma\delta}^K$$

$$\forall (\mu, x, \theta, y) \in K \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n, ,$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\theta^\gamma \partial_\mu^\delta \phi_\mu(x, \theta, y)| \leq C_{\alpha\beta\gamma\delta}^K \lambda(x, \theta, y)^{(2-|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)_+} .$$



(2.7.3) Hypothèse  $(H_4^{\mathcal{O}})$

Pour tout  $K$  dans  $\mathcal{O}$ , il existe  $\delta_o(K)$  tel que :  $\forall \mu \in K, \forall (x, y, \theta)$ , on ait :

$$|\det D(\phi_\mu)| \geq \delta_o(K) .$$

De même, on introduit la classe  $\Gamma_\rho^{m, \mathcal{O}}(\mathbb{R}^t)$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) des symboles  $a_\mu$  tels que l'application :

$$(2.7.4) \quad \mathcal{O} \ni \mu \rightarrow \mathbb{R}^t \ni z \rightarrow a_\mu(z) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^t) .$$

soit  $C^\infty$  de  $\mathcal{O}$  dans  $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^t)$ .

Sous ces hypothèses, on vérifie que, si  $a_\mu \in \Gamma_o^{m, \mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+N+n})$ ,

$$(2.7.5) \quad I(a_\mu, \phi_\mu) \text{ est dans } C^\infty(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n), \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)))$$

et que l'on a la propriété :

$$(2.7.6) \quad \frac{\partial}{\partial \mu_j} I(a_\mu, \phi_\mu) = I\left(\frac{\partial a_\mu}{\partial \mu_j} + a_\mu \cdot i \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \mu_j}, \phi_\mu\right) \quad (j=1, \dots, s) .$$

Il est clair que sous les hypothèses  $(H_1^{\mathcal{O}}, H_2^{\mathcal{O}}, H_4^{\mathcal{O}})$

$$(2.7.7) \quad \frac{\partial a_\mu}{\partial \mu_j} + i a_\mu \cdot \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \mu_j} \in \Gamma_o^{m+2, \mathcal{O}}(\mathbb{R}^{n+N+n}) .$$

Si on fait de plus l'hypothèse  $(H_5^{\mathcal{O}})$  (cf. 2.2.3).

Pour tout  $K \subset \mathcal{O}$ , il existe  $\varepsilon_o > 0$  tel que,  $\forall \mu \in K$ ,

$$(2.7.8) \quad \phi_\mu \in \Gamma_1^{2, \mathcal{O}}(\Omega_{\phi_\mu, \varepsilon_o})$$

et sur l'amplitude  $a_\mu$  l'hypothèse

$$(2.7.9) \quad a_\mu \in \Gamma_1^{m, \mathcal{O}}(\Omega_{\phi_\mu, \varepsilon_o}) \cap \Gamma_o^{\tilde{m}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n) \text{ pour tout } \mu \in K$$

et on obtient :

$$(2.7.10) \quad \frac{\partial a_\mu}{\partial \mu_j} + i a_\mu \cdot \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \mu_j} \in \Gamma_1^{m+2, \mathcal{O}}(\Omega_{\phi_\mu, \varepsilon_o}) \cap \Gamma_o^{\tilde{m}+2, \mathcal{O}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$$

On vérifie alors que tous les théorèmes démontrés au chapitre II restent vrais avec un contrôle  $C^\infty$  de paramètre  $\mu \in \mathcal{G}$ , uniforme sur tout compact de  $\mathcal{G}$ .

2.8 - Fourier-Intégraux et opérateurs pseudodifférentiels

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment la caractérisation de Beals des opérateurs pseudodifférentiels permet de reconnaître des opérateurs pseudodifférentiels cachés sous la forme de Fourier-Intégraux globaux. Dans un cas particulier, on démontrera un théorème plus précis en utilisant le théorème de la phase stationnaire.

Proposition 2.8.1 : Soit  $I(a, \phi)$  dans  $\mathcal{J}^{m, \phi}$  (cf. définition 2.2.1). On fait l'hypothèse suivante :

(2.8.1) Il existe  $R > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} \phi'_\theta = 0 & \Rightarrow (x, \phi'_x) = (y, -\phi'_y) \\ |x| + |y| + |\theta| \geq R & \end{aligned}$$

(Autrement dit  $\Lambda_\phi$  défini en (2.2.19) est "approximativement" le graphe de l'identité).

Alors  $I(a, \phi)$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $G_1^m(\mathbb{R}^n)$ .

Démonstration : Compte tenu de la proposition 2.2.3, on se ramène aisément au cas où  $m = 0$ . La proposition (2.8.1) est un corollaire du théorème 1.12.1 et de la proposition 2.5.3 si on démontre le

Lemme 2.8.2 : Soit  $I(b, \phi)$  un F.I.O global régulier dans  $\mathcal{J}^{p, \phi}$  tel que  $\phi$  vérifie (2.8.1), alors  $[x_j, I(b, \phi)]$  et  $[\frac{\partial}{\partial x_j}, I(b, \phi)]$  sont dans  $\mathcal{J}^{p-1, \phi}$ .

Démonstration du Lemme 2.8.2 : On a, pour  $u$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  :

$$(I(b, \phi)u)(x) = \iint e^{i\phi(x, \theta, y)} b(x, \theta, y) u(y) dy d\theta .$$

$$D'ou : \quad ([x_j, I(b, \phi)]u)(x) = \iint e^{i\phi(x, \theta, y)} (x_j - y_j) b(x, \theta, y) \cdot u(y) dy d\theta .$$

On a donc :

$$(2.8.2) \quad [x_j, I(b, \phi)] = I((x_j - y_j)b, \phi) \quad .$$

Il en résulte que  $[x_j, I(b, \phi)]$  est dans  $\mathcal{J}^{p+1, \phi}$ . Mais, sous l'hypothèse (2.8.1),  $(\phi'_\theta = 0)$  implique  $(x=y)$  pour  $|x|+|y|+|\theta|$  assez grand. Par conséquent,

$$(x_j - y_j)b \Big|_{C_\phi} \text{ est nul pour } |x|+|y|+|\theta| \text{ assez grand.}$$

Il résulte alors de la proposition (2.2.7) que  $[x_j, I(b, \phi)]$  est dans  $\mathcal{J}^{p-1, \phi}$ . On montre de même que :

$$(2.8.3) \quad [D_{x_j}, I(b, \phi)] = I((\partial_{x_j} \phi + \partial_{y_j} \phi)b + (D_x b) + (D_y b), \phi).$$

Mais  $\phi'_\theta = 0$  implique  $(\phi'_x + \phi'_y = 0)$  pour  $|x|+|y|+|\theta|$  assez grand. On conclut de nouveau par la proposition (2.2.7) que  $[D_{x_j}, I(b, \phi)]$  est dans  $\mathcal{J}^{p-1, \phi}$ .

Plaçons nous maintenant dans le cadre des Fourier-Intégraux globaux "classiques" (§ 2.4). La proposition (2.8.1) se réécrit sous la forme suivante :

Proposition 2.8.3 : Soit  $I(a, \phi)$  dans  $\mathcal{J}_1^{m, \phi, c^1}$ . On suppose pour simplifier que  $\phi$  vérifie également (H4). On suppose de plus que :

$$(2.8.4) \quad \bigvee_{\phi} \text{ est le graphe de l'identité.}$$

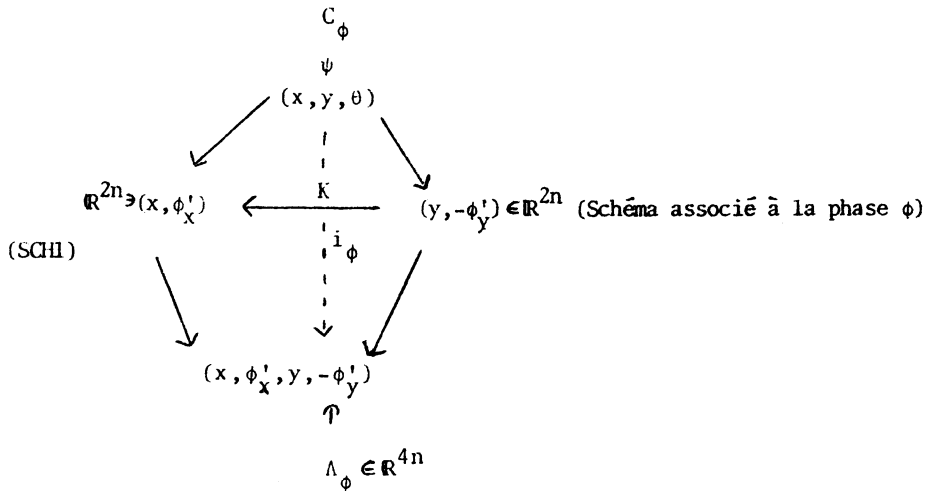
Alors  $I(a, \phi)$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $G_1^{n, c^1}(\mathbb{R}^n)$  dont le symbole  $(x, \zeta) \rightarrow b(x, \xi)$  est donné, modulo  $\Gamma_1^{m-2}(\mathbb{R}^{2n})$ , par :

$$(2.8.5) \quad b(x, \xi) = (2\pi)^{+(\frac{n+N}{2})} \left( \frac{a}{C_{\bigvee_{\phi}}} \cdot |\det D(\bigvee_{\phi})|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{i \frac{\pi}{4} \cdot n_{\bigvee_{\phi}}} \circ i_{\bigvee_{\phi}}^{-1}(x, \xi, x, \xi) \right)$$

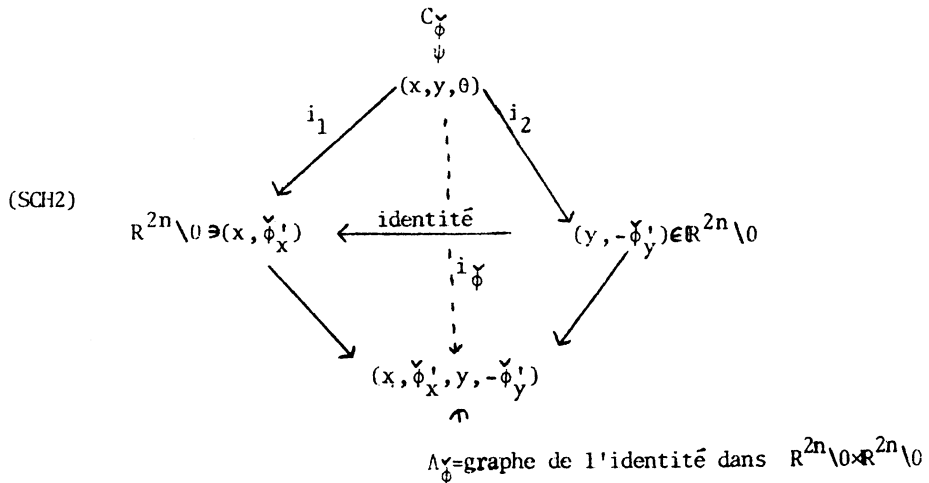
où  $n_{\bigvee_{\phi}} \in \mathbb{Z}$  et  $(x, \xi)$  est assez grand .

Précisons tout d'abord quelques notations apparaissant dans (2.8.5) .

On a les deux schémas suivants:



et quand on passe à la phase homogène correspondante  $\check{\phi}$  définie dans un voisinage de  $|\phi'_\theta|^2 \leq \varepsilon^2(|x|^2 + |y|^2 + |\theta|^2)$



$\Lambda \nabla_{\phi}$  est défini au § 2.4 (Prop. 2.4.8);  $(\det D(\phi))$  est défini en (2.1.39) et compte tenu de (F3), il lui correspond sur  $C \nabla_{\phi}$  une fonction homogène  $(\det D(\nabla_{\phi}))$  de degré 0 et non nulle.

On supposera dans la suite que  $a$  est à support dans  $\Omega_{\phi, \epsilon}$  de sorte que  $a$  est une somme de termes homogènes (on se ramène aisément à ce cas).

Démonstration de la proposition 2.8.3 : On sait par la proposition (2.8.1) que  $I(a, \phi)$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $C_1^m(\mathbb{R}^n)$ . Il nous reste donc à étudier le symbole de  $I(a, \phi)$ .

Posons  $B = I(a, \phi)$ .

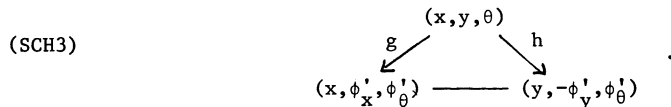
Le symbole  $b(x, \xi)$  de  $B$  est donné par la formule :

$$(2.8.6) \quad b(x, \xi) = e_{-\xi}(x) B e_{\xi} \quad \text{avec} \quad e_{\xi}(x) = e^{ix \cdot \xi} .$$

On a alors au moins formellement :

$$(2.8.7) \quad b(x, \xi) = \iint e^{i[\phi(x, \theta, y) - x\xi + y\xi]} a(x, \theta, y) dy d\theta .$$

L'intégrale apparaissant dans (2.8.7) doit être considérée comme une intégrale oscillante comme nous allons le préciser maintenant. Reprenons l'étude faite dans la démonstration du lemme (2.1.5). On avait le schéma suivant :



On a vu que  $h, g, g^{-1}, h^{-1}$  sont des difféomorphismes globaux dont les coefficients de la matrice dérivée sont bornés. On en déduit l'existence d'une constante  $C$  telle que :  $\forall (x, y, \theta), \forall (x', y', \theta')$  on ait :

$$(2.8.8) \quad |x-x'| + |y-y'| + |\theta-\theta'| \leq C(|y-y'| + |\phi'_y(x, y, \theta) - \phi'_y(x', y', \theta')| + |\phi'_\theta(x, y, \theta) - \phi'_\theta(x', y', \theta')|)$$

On va maintenant appliquer (2.8.8) avec un choix particulier de  $(x', y', \theta')$  déterminé par :

$$(2.8.9) \quad h(x', y', \theta') = (y, \xi, 0) .$$

On obtient ainsi :

$$(2.8.10) \quad y' = y, \quad x' = x(y, \xi), \quad \theta' = \theta(y, \xi)$$

(2.8.8) devient alors :

$$(2.8.11) \quad |x - x(y, \xi)| + |\theta - \theta(y, \xi)| \leq C(|\phi'_y + \xi| + |\phi'_\theta(x, \theta, y)|).$$

Nous allons maintenant exploiter l'hypothèse (2.8.4) et l'homogénéité.

On en déduit que, pour  $|y| + |\xi| \geq R$ ,  $(y, \xi) \rightarrow \theta(y, \xi)$  est homogène de degré 1.

$$(2.8.12) \quad \theta(\lambda y, \lambda \xi) = \lambda \theta(y, \xi) \quad \forall \lambda \geq 1, \quad \forall (y, \xi), |y| + |\xi| \geq R$$

et que

$$(2.8.13) \quad x(y, \xi) = y \quad \text{si} \quad |y| + |\xi| \geq R.$$

Enfin, on a également :

$$(2.8.14) \quad |\theta(y, \xi) - \theta(x, \xi)| \leq C|x - y|$$

D'où :

$$|x - y| + |\theta - \theta(x, \xi)| \leq \tilde{C}(|\phi'_y + \xi| + |\phi'_\theta(x, \theta, y)| + |x(y, \xi) - y|)$$

On déduit de (2.8.13) que :  $|x(y, \xi) - y| \leq C$

D'où finalement :

$$(2.8.15) \quad |x - y| + |\theta - \theta(x, \xi)| \leq \tilde{\tilde{C}}(|\phi'_y + \xi| + |\phi'_\theta| + 1)$$

On introduit alors l'opérateur :

$$(2.8.16) \quad L = \frac{1}{i} \frac{(\phi'_y + \xi) \cdot \partial_y + \phi'_\theta \cdot \partial_\theta + i}{|\phi'_y + \xi|^2 + |\phi'_\theta|^2 + 1}$$

qui vérifie :  $L(e^{i[\phi(x, \theta, y) - x\xi + y \cdot \xi]}) = e^{i[\phi(x, \theta, y) - x\xi + y \cdot \xi]}$ .

Compte tenu de (2.8.15), on rend l'intégrale oscillante (2.8.7) convergente en posant, avec  $M$  assez grand :

$$(2.8.17) \quad b(x, \xi) = \iint e^{i[\phi(x, \theta, y) - x\xi + y \cdot \xi]} ({}^tL)^M a(x, \theta, y) dy d\theta.$$

$$a_M(x, \theta, y) \stackrel{\text{def}}{=} ({}^tL)^M a(x, \theta, y) \quad \text{vérifie en effet :}$$

$$(2.8.18) \quad (|\phi'_y + \xi|^2 + |\phi'_\theta|^2 + 1)^{M/2} |a_M(x, \theta, y)| \leq \lambda(x, \theta, y)^m.$$

On veut montrer maintenant que  $b(x, \xi)$  est un symbole classique d'ordre  $m$ .

Soit  $\chi$  une fonction valant 1 sur  $] -1, 1[$  et à support dans  $[-2, 2]$ . On réécrit  $a(x, \theta, y)$  sous la forme :

$$(2.8.19) \quad a(x, \theta, y) = a_1^\varepsilon(x, \theta, y) + a_2^\varepsilon(x, \theta, y)$$

avec

$$(2.8.20) \quad a_1^\varepsilon(x, \theta, y) = a(x, \theta, y) \chi\left(\frac{|\phi'_y + \xi| + |\phi'_\theta|^2}{\varepsilon^2(1 + |x|^2 + |\xi|^2)}\right)$$

où  $\varepsilon$  est un nombre  $> 0$  que l'on déterminera ultérieurement. On a alors :

$$(2.8.21) \quad b(x, \xi) = b_1^\varepsilon(x, \xi) + b_2^\varepsilon(x, \xi)$$

avec :

$$(2.8.22) \quad \begin{cases} (1) \quad b_1^\varepsilon(x, \xi) = \iint e^{i(\phi(x, \theta, y) - x\xi + y \cdot \xi)} a_1^\varepsilon(x, \theta, y) d\theta dy \\ (2) \quad b_2^\varepsilon(x, \xi) = \iint e^{i(\phi(x, \theta, y) - x\xi + y \cdot \xi)} ({}^tL)^M a_2^\varepsilon(x, \theta, y) d\theta dy \end{cases}$$

Examinons tout d'abord  $b_2^\varepsilon(x, \xi)$ . Compte tenu de (2.8.22), (2.8.20), (2.8.15) et (2.8.18), on voit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , tout  $M'$ , il existe  $C_{\varepsilon, M'}$  telle que

$$(2.8.23) \quad |b_2^\varepsilon(x, \xi)| \leq C_{\varepsilon, M'} \lambda(x, \xi)^{-M'}.$$

En jouant sur  $N$  dans (2.8.22), on obtient des estimations du même type, pour les dérivées en  $(x, \xi)$  de  $b_2^\varepsilon(x, \xi)$ , et on a donc :

$$(2.8.24) \quad b_2^\varepsilon(x, \xi) \in \Gamma_1^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}) .$$

Modulo  $\Gamma^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ , l'étude de  $b(x, \xi)$  se ramène à l'étude de  $b_1^\varepsilon(x, \xi)$  défini par l'intégrale (2.8.22)<sub>(1)</sub> où le support de  $a_1^\varepsilon(x, \theta, y)$  est compact en  $(\theta, y)$  .

Pour localiser le support plus précisément, on va démontrer le

Lemme 2.8.4 : Si  $\varepsilon$  est choisi assez petit, il existe  $c$  et  $C$  tels que :

$$(2.8.25) \quad c \lambda(x, \xi) \leq \lambda(x, \theta, y) \leq C \lambda(x, \xi)$$

sur le support de  $a_1^\varepsilon$  .

Démonstration : Montrons tout d'abord que :  $\lambda(x, \theta, y) \leq C \lambda(x, \xi)$  .

On a :  $\lambda(x, \theta, y) \lesssim \lambda(x, \theta - \theta(x, \xi), y - x, \theta(x, \xi))$  , d'où :

$$(2.8.26) \quad \lambda(x, \theta, y) \lesssim \lambda(x, \phi_y' + \xi, \xi, \phi_\theta')$$
 (d'après 2.8.15).

On conclut alors en remarquant que sur le support de  $a_\varepsilon$  , on a :

$$(2.8.27) \quad |\phi_y' + \xi|^2 + |\phi_\theta'|^2 \leq 2\varepsilon^2 \lambda(x, \xi)^2 .$$

Montrons maintenant que  $c \lambda(x, \xi) \leq \lambda(x, \theta, y)$  .

On remarque tout d'abord que :

$$(2.8.28) \quad \lambda(x, \xi) \lesssim \lambda(x, \xi + \phi_y', \phi_y') \lesssim \lambda(x, \theta, y, \xi + \phi_y') .$$

De (2.8.27), on déduit alors que :

$$(2.8.29) \quad \lambda(x, \xi) \leq C [\lambda(x, \theta, y) + \varepsilon \lambda(x, \xi)]$$

sur le support de  $a_\varepsilon$  (grâce à (2.8.26). D'où (2.8.25) en choisissant  $\varepsilon$  assez petit.

Revenons maintenant à l'étude de  $b_1^\varepsilon$  (cf. 2.8.23 (1)). On s'intéresse bien entendu au comportement pour  $(x, \xi)$  assez grand . Posant :



$$(2.8.30) \quad \begin{cases} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{t}} \\ \xi = \tilde{\mathbf{t}}\xi \end{cases} \quad \text{avec } t = |\mathbf{x}| + |\xi|$$

on obtient :

$$b_{\epsilon}^1(\tilde{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{t}}\tilde{\xi}) = \iint e^{i[\phi(\tilde{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{x}}, \theta, y) - t^2\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\xi} + t y \tilde{\xi}]} a_1^{\epsilon}(\tilde{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{x}}, \theta, y) d\theta dy.$$

Il s'agit de montrer que  $\tilde{b}_{\epsilon}(t, \tilde{\omega})$  défini par :

$$\tilde{\omega} = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\xi}) \quad (|\dot{\omega}|=1), \quad \tilde{b}_{\epsilon}(t, \tilde{\omega}) = b_{\epsilon}^1(\tilde{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{t}}\tilde{\xi})$$

est dans  $S^{m,cl}(\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1})$  où  $S^{m,cl}(\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1})$  est l'ensemble des symboles vérifiant (cf. § 2.9) :

$$(2.8.31) \quad \tilde{b}(t, \tilde{\omega}) \sim \sum_{j \geq 0} t^{m-j} b_{-j}(\tilde{\omega})$$

On a, après changement de variable :

$$(2.8.32) \quad \tilde{b}_{\epsilon}(t, \tilde{\omega}) = t^{N+n} \iint e^{i[\phi(\tilde{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{t}}\tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{t}}\tilde{y}) - t^2\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\xi} + t^2\tilde{y} \cdot \tilde{\xi}]} a_1^{\epsilon}(\tilde{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{t}}\tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{t}}\tilde{y}) d\tilde{\theta} d\tilde{y}$$

Maintenant, pour  $|t|$  assez grand, il résulte de (2.8.25) et de l'hypothèse d'homogénéité sur  $a$  et  $\phi$  que :

$$(2.8.33) \quad \tilde{b}_{\epsilon}(t, \tilde{\omega}) = t^{N+n} \iint e^{it^2[\check{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\theta}, \tilde{y}) - \tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\xi} + \tilde{y} \cdot \tilde{\xi}]} \tilde{a}_1(t, \tilde{\omega}, \tilde{y}, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta} d\tilde{y}$$

avec :

$$(2.8.34) \quad \tilde{a}_1(t, \tilde{\omega}, \tilde{y}, \tilde{\theta}) = a_1^{\epsilon}(\tilde{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{t}}\tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{t}}\tilde{y})$$

Il résulte de (2.8.25) et des hypothèses sur  $a$  que :

$$(2.8.35) \quad \tilde{a}_1 \in S^{m,cl}(\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1} \times K)$$

où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$  et où

$$(2.8.36) \quad \text{supp } \tilde{a}_1 \subset K .$$

On pose :

$$(2.8.37) \quad \psi(\tilde{\omega}, \tilde{y}, \tilde{\theta}) = \phi(\tilde{x}, \tilde{\theta}, \tilde{y}) - \tilde{x} \cdot \tilde{\xi} + \tilde{y} \cdot \tilde{\xi} .$$

Il résulte de (2.8.25) que, pour  $t$  assez grand,  $\psi$  est  $C^\infty$  sur le support de  $\tilde{a}_1$ .

Soit donc à étudier l'intégrale :

$$(2.8.58) \quad \tilde{b}_\varepsilon(t, \tilde{\omega}) = t^{N+n} \iint e^{it^2[\psi(\tilde{\omega}, \tilde{y}, \tilde{\theta})]} \tilde{a}_1(t, \tilde{\omega}, \tilde{y}, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta} d\tilde{y}$$

En vue d'utiliser un théorème de la phase stationnaire (cf. §2.9, Th. 2.9.3), on doit d'abord étudier les points critiques de la phase  $\psi$  par rapport à  $(\tilde{y}, \tilde{\theta})$ .

Les équations des points critiques sont donnés par :

$$(2.8.39) \quad \begin{cases} \check{\phi}'_{\tilde{\theta}} = 0 & \text{i.e } (\tilde{x}, \tilde{\theta}, \tilde{y}) \in C_{\check{\phi}} \\ \check{\phi}'_{\tilde{y}} + \tilde{\xi} = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de l'hypothèse (cf. SCH2), on a alors

$$(2.8.40) \quad \begin{cases} \tilde{x} = \tilde{y} \\ \check{\phi}'_{\tilde{y}} + \tilde{\xi} = 0 \\ \check{\phi}'_{\tilde{x}} = -\tilde{\xi} \end{cases}$$

Les équations (2.2.39) déterminent donc pour tout  $\tilde{\omega} = (\tilde{x}, \tilde{\xi})$  dans  $S^{2n-1}$  un point critique  $(\tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi}))$  (où  $\tilde{\theta}$  est la fonction homogène de degré 1 associé à  $\theta$  (défini en 2.8.12)), tel que

$$(2.8.41) \quad (\tilde{x}, \tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi})) \text{ ne rencontre pas } 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n .$$

Expression de la phase au point critique

Lemme 2.8.5. : Si  $(\tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi}))$  est le point critique de  $\psi$  par rapport à  $(\tilde{y}, \tilde{\theta})$  au point  $\tilde{\omega} = (\tilde{x}, \tilde{\xi})$ , on a :

$$(2.8.42) \quad \tilde{\psi}(\tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi})) = 0 .$$

Démonstration : L'application :

$$\tilde{\omega} \rightarrow \psi(\tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{\omega}))$$

se prolonge naturellement grâce à (2.8.37) et (2.8.41) en une application homogène de degré 2 de  $\mathbb{R}^{2n} \setminus 0$  dans  $\mathbb{R}$  ; c'est l'application :

$$(2.8.43) \quad (\tilde{x}, \tilde{\xi}) \longrightarrow \bigvee \phi(\tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{x}) = \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) .$$

On a :

$$\tilde{\psi}'_{\tilde{x}_i}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \phi'_{x_i}(\tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{x}) + \phi'_{y_i}(\tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{x}) + \sum_j \phi'_{\theta_j}(\tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{x}) \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}_j}{\partial \tilde{x}_i}$$

D'où :

$$(2.8.44) \quad \tilde{\psi}'_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = 0 \text{ compte tenu de (2.8.39) et (2.8.40).}$$

Par ailleurs :

$$\tilde{\psi}'_{\tilde{\xi}_i}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \sum_j \phi'_{\theta_j} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}_j}{\partial \tilde{\xi}_i}$$

D'où :

$$(2.8.45) \quad \tilde{\psi}'_{\tilde{\xi}}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = 0 \text{ (d'après 2.8.39) .}$$

Compte tenu de l'homogénéité de  $\tilde{\psi}$  on déduit, de (2.8.44) et (2.8.45) que :  $\tilde{\psi} \equiv 0$ .

(2.8.42) est ainsi démontré.

Expression du Hessien de la phase  $\psi$  au point critique.

Lemme 2.8.6 :  $(\tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi}))$  est un point critique de  $\psi$  non dégénéré, c.a.d. que

$$\det(\text{Hess}_{\tilde{y}, \tilde{\theta}} \tilde{\psi})(\tilde{\omega}) \neq 0 .$$

Plus précisément, on a :

$$(2.8.46) \quad |\det(\text{Hess}_{\tilde{y}, \tilde{\theta}} \tilde{\psi})(\tilde{\omega})| = |\det(D(\tilde{\phi}))(\tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{x})|$$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que, d'après (2.8.37), on a :

$$(2.8.47) \quad \text{Hess}_{\tilde{y}, \tilde{\theta}} \psi = \text{Hess}_{\tilde{y}, \tilde{\theta}} \phi$$

En ayant en mémoire le schéma 3, rappelons que :  $|\det D(\phi)|$  est la valeur absolue du jacobien de l'application  $h$  définie par :

$$(x, y, \theta) \xrightarrow{h} (y, -\phi'_y, \phi'_\theta) = (y, \eta, \zeta)$$

Considérons maintenant l'application  $(g^{-1} \circ h)$  :

$$(y, \eta, \zeta) \xrightarrow{g^{-1} \circ h} (x(y, \eta, \zeta), \xi(y, \eta, \zeta), \zeta)$$

On peut alors considérer l'application  $h_1$  :

$$(2.8.48) \quad (y, \eta, \zeta) \xrightarrow{h_1} (x(y, \eta, \zeta), \eta, \zeta).$$

L'application  $(h_1 \circ h)$  est alors l'application  $h_2$  :

$$(2.8.49) \quad (x, y, \theta) \xrightarrow{h_2} (x, -\phi'_y, \phi'_\theta)$$

La valeur absolue du jacobien de  $h_2$  est alors :

$$(2.8.50) \quad |\text{Jac}(h_2)| = |\det \text{Hess}_{y, \theta} \phi|$$

On déduit de l'identité  $h_2 = h_1 \circ h$  que

$$(2.8.51) \quad |\det \text{Hess}_{y, \theta} \phi| = |\det D(\phi)| \cdot |\text{Jac}(h_1)|$$

Plaçons nous maintenant en un point tel que  $\phi'_\theta = 0$ .

On sait que pour  $(|y| + |\eta|)$  assez grand :  $x(y, \eta, 0) = y$

et par conséquent :

$$(2.8.52) \quad |\text{Jac}(h_1)| (y, \eta, 0) = 1 \quad \text{pour } |y| + |\eta| \text{ assez grand.}$$

On déduit alors (2.8.46) de (2.8.51), (2.8.52) et (2.8.47) en utilisant l'homogénéité. ■

Le lemme (2.8.6) permet l'utilisation du théorème de la phase stationnaire avec paramètre pour l'étude de (2.8.38). On déduit alors du théorème 2.9.3 que  $\tilde{b}_\varepsilon(t, \tilde{\omega})$  est dans  $S^{m,cl}(\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1})$  et qu'on a

$$(2.8.53) \quad \tilde{b}_\varepsilon(t, \tilde{\omega}) \equiv (2\pi)^{\frac{n+N}{2}} |\det D(\check{\phi})|^{-\frac{1}{2}}(\tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{x}) \\ \cdot e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}(\text{Hess}_{\tilde{y}, \tilde{\theta}\psi})}(\tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi})) \\ \times \tilde{a}_1(t, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\xi})) \text{ modulo } S^{m-2,cl}(\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1})$$

Compte tenu de (2.8.21), (2.8.24) (2.8.30), (2.8.31) et (2.8.34), on obtient :

$$(2.8.54) \quad b(x, \xi) \equiv (2\pi)^{\frac{n+N}{2}} |\det D(\check{\phi})|^{-\frac{1}{2}}(x, \tilde{\theta}(x, \xi), x) \cdot e^{i\frac{\pi}{4} n_\phi} \\ \times a(x, \tilde{\theta}(x, \xi), x) \text{ modulo } \Gamma_1^{m-2}(\mathbb{R}^{2n})$$

pour  $|x| + |\xi|$  assez grand, où  $n_\phi$  est la signature de  $(\text{Hess}_{\tilde{\theta}, y}\psi)$  au point  $(\tilde{x}, \tilde{\theta}, (\tilde{x}, \tilde{\xi}), \tilde{\xi})$  (avec  $(x, \xi) = (|x| + |\xi|)(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ ) et donc un nombre constant car le Hessien est non dégénéré et  $\mathbb{R}^{2n} \setminus 0$  est connexe.

Ceci termine la démonstration de la proposition (2.8.3). ■

Remarque 2.8.7 : Sil existe un symbole homogène au voisinage de  $C_\phi, a_m(x, y, \theta)$ , tel que  $(a - a_m) \in \Gamma_1^{m-1, cl, \phi}$  s'annule sur  $C_\phi$ , on a sous les hypothèses de la proposition (2.8.3) :

$$(2.8.55) \quad b(x, \xi) \sim b_m(x, \xi) + b_{m-2}(x, \xi) + \dots$$

avec :

$$(2.8.56) \quad b_m(x, \xi) = (2\pi)^{\frac{n+N}{2}} (a_m /_{C_\phi} |\det D(\check{\phi})|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} n_\phi} \text{oi}_{\check{\phi}}^{-1}(x, \xi))$$

Remarque 2.8.8 : Dans la démonstration de la proposition (2.8.3), on n'a pas besoin en fait de la proposition (2.8.1). En particulier, on n'a pas besoin d'utiliser un théorème de continuité  $L^2$  pour les opérateurs Fourier Intégraux de ce type.

2.9- Rappels sur le théorème de la phase stationnaire

Dans ce paragraphe, on rappelle sans démonstration les principaux résultats (utilisés au § 2.8 et que nous utiliserons au prochain chapitre) tournant autour de la méthode de la phase stationnaire.

Cas où la phase n'est pas stationnaire :

Soient  $X, Y$  des ouverts de  $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ . On a déjà eu et on aura souvent à étudier le comportement pour  $\tau$  tendant vers l'infini d'intégrales du type

$$(2.9.1) \quad I(x, \tau) = \int_Y e^{i\tau\varphi(x, y)} a(x, y, \tau) dy$$

où  $\varphi \in C^\infty(X \times Y)$  est à valeurs réelles et  $a$  est un symbole dans  $S^m(X \times Y \times \mathbb{R}^+)$ , c.à.d. vérifiant :

(2.9.2) Pour tout compact  $K$  de  $X \times Y$ , pour tout  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^{p+q+1}$ , il existe

$$C_{\alpha, \beta, \gamma}^K \text{ telle que : } |D_x^\alpha D_y^\beta D_\tau^\gamma a(x, y, \tau)| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma}^K \cdot (1 + |\tau|)^{m - |\gamma|}$$

Dans ce genre de problème, une première étape sera toujours de se ramener au cas où  $a$  est nulle pour  $y$  en dehors d'un compact  $K \subset Y$ , hypothèse que l'on fera dans la suite.

Le premier théorème très facile et qu'on a déjà utilisé à de nombreuses reprises est le :

Théorème 2.9.1. Théorème de la phase non-stationnaire : On suppose que

$\varphi'_y \neq 0$  sur  $X \times Y$  (ou sur un voisinage du support de  $a$ ), alors  $I(x, \tau) \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^+)$ .

Cas où la phase a un point critique non dégénéré en  $y$ .

Le théorème précédent nous conduit à l'étude du comportement de  $I$  quand  $\varphi$  possède un point critique.

Si  $\varphi \in C^\infty(X \times Y)$ , on dit que  $(x^0, y^0)$  est un point critique non dégénéré de  $\varphi$  en  $y$  si  $\partial_y \varphi(x^0, y^0) = 0$  et la matrice hessienne  $(\partial_{y_j y_k}^2 \varphi(x^0, y^0) = (Q_{jk})$  est inversible.

Dans ce cas, le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe des voisinages  $U, V$  de  $(x^0, y^0)$  tels que pour tout  $x \in U$ , il existe  $y(x) \in V$  unique vérifiant  $\partial_y \varphi(x, y(x)) = 0$  et  $y(x^0) = y^0$ .

On pose  $Q(x) = \partial_{yy}^2 \varphi(x, y) /_{y=y(x)}$ . C'est une matrice inversible dès que  $U$  est petit.

Le lemme de Morse avec paramètre permet alors de ramener par un changement de variables convenable la phase  $\varphi$  à une phase quadratique :

Théorème 2.9.2 (lemme de Morse avec paramètre) : On suppose que  $(x^0, y^0)$  est un point critique non dégénéré de  $\varphi$  en  $y$ . Alors quitte à diminuer les ouverts  $U, V$ , il existe une fonction  $C^\infty$   $h$  de  $U \times V$  dans  $\mathbb{R}^q$ , telle que, si on pose  $z = h(x, y)$ , on a :

$$(2.9.3) \quad \varphi(x, y) - \varphi(x, y(x)) = \frac{1}{2} {}^t z \cdot Q(x) z \quad \text{pour } (x, y) \in U \times V .$$

De plus,  $h$  est un difféomorphisme en  $y$  pour  $x$  fixé et vérifie

$$(2.9.4) \quad h(x, y(x)) = 0, \quad \partial_y h(x, y) /_{y=y(x)} = I, \quad x \in U$$

( $h$  est appelé le difféomorphisme de Morse).

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème de la phase stationnaire avec paramètre :

Théorème 2.9.3 Théorème de la phase stationnaire avec paramètre : On se place dans les hypothèses du théorème 2.9.2 et on suppose que le symbole  $a \in S^m(X \times Y \times \mathbb{R}^+)$  est nul pour  $(x, y)$  en dehors d'un compact de  $U \times V$ . On pose :

$$Q(x) = \partial_{yy}^2 \varphi(x, y) /_{y=y(x)} \quad \text{et on désigne par } k \quad \text{l'application}$$

$$U \times W \ni (x, z) \rightarrow y = k(x, z) \quad \text{telle que pour } x \text{ dans } U, y \rightarrow k(x, z)$$

soit l'inverse du difféomorphisme de Morse  $y \rightarrow h(x, y)$  :

Alors l'intégrale  $I(x, \tau)$  vérifie :

$$(2.9.5) \quad i) \quad e^{i\tau \varphi(x, y(x))} I(x, \tau) \in S^{m - \frac{1}{2}q} (X \times \mathbb{R}^+) .$$

ii) Ce symbole admet dans  $U \times \mathbb{R}^+$  un développement asymptotique de la forme :

$$(2.9.6) \quad \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{q}{2}} |\det Q(x)|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign } Q(x)} \left[ \sum_{k \geq 0} \frac{\tau^{-k}}{k!} R^k(x, z, \partial_z) \tilde{a}(x, z, \tau) \Big|_{z=0} \right]$$

où  $\tilde{a}(x, z, \tau) = a(x, z, \tau) \cdot \left| \frac{dy}{Dz}(x, z) \right|$  et  $k(x, z, \partial_z) = \frac{i}{2} \langle Q^{-1}(x) \partial_z, \partial_z \rangle$

iii) En particulier, le terme principal de ce développement est donné par :

$$(2.9.7) \quad \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{q}{2}} |\det Q(x)|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign } Q(x)} a(x, y(x), \tau) \text{ mod } S^{m - \frac{1}{2}q - 1}.$$

On a vu au § 2.8, tout l'intérêt de ce théorème.

Cas où la phase a un point critique dégénéré

On suppose ici qu'il n'y a pas d'espace de paramètres  $X$  et on énonce un théorème global.

Théorème 2.9.4 Théorème de la phase stationnaire généralisé (Colin de Verdière) :

Soit  $Y$  une variété riemannienne. Soit  $a \in C_0^\infty(Y)$  et  $\varphi$  dans  $C^\infty(Y)$  une phase à valeurs réelles. On suppose que les points critiques de  $\varphi$  situés dans le support de  $a$  constituent une sous-variété compacte connexe  $W$  de  $Y$  de codimension  $\nu$ . On suppose que  $W$  est une variété critique non dégénérée pour  $\varphi$  (i.e. pour tout  $y \in W$ , le hessien  $\varphi''(y)$  induit sur l'espace normal  $N_y = T_y Y / T_y W$  une forme quadratique non dégénérée  $\varphi''(y)/N_y$ ) et on désigne par  $\sigma$  la signature de  $\varphi''(y)$ . On a alors le comportement asymptotique suivant :

$$(2.9.8) \quad I(\tau) = \int_Y e^{i\tau\varphi(y)} a(y) dy = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{\nu}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma} e^{i\tau\varphi(w)} p(\tau)$$

où  $p(\tau)$  admet pour  $\tau \rightarrow \infty$  un développement asymptotique de la forme :



$$(2.9.9) \quad p(\tau) \sim \sum_{k \geq 0} a_k \tau^{-k}$$

avec :

$$(2.9.10) \quad a_0 = \int a(y) |\det \phi''(y) / N_y|^{-\frac{1}{2}} d_W y$$

où  $d_W y$  désigne la mesure induite sur la sous-variété  $W$ .

2.10 - Retour aux Fourier-Intégraux globaux "classiques"

Toutes les phases apparaissant dans ce paragraphe vérifieront (F1), (F2), (F3), (F4), (H4) et (H5).

La proposition (2.8.3) va nous permettre d'aller plus avant dans l'étude des Fourier-Intégraux globaux "classiques". Revenons tout d'abord à certains résultats démontrés au § 2.3.

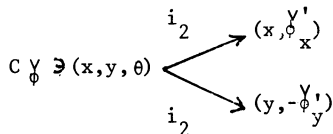
Proposition 2.10.1 : Soit  $F = I(a, \phi)$  dans  $\mathcal{J}_1^{m, \phi, cl}$ . Alors  $FF^*$  et  $F^*F$  sont dans  $G_1^{2m, cl}(\mathbb{R}^n)$ .

De plus, les symboles principaux de  $(FF^*)$  et  $(F^*F)$  sont définis par :

$$(2.10.1) \quad \sigma_{2m}^v(FF^*)(x, \xi) = (2\pi)^{N+n} |a_m / c_\phi^v|^2 |\det D(\phi)|_{c_\phi^v}^{-1} \circ i_1^{-1}(x, \xi)$$

$$(2.10.2) \quad \sigma_{2m}^v(F^*F)(y, \eta) = (2\pi)^{N+n} |a_m / c_\phi^v|^2 |\det D(\phi)|_{c_\phi^v}^{-1} \circ i_2^{-1}(y, \eta)$$

où  $i_1$  et  $i_2$  sont définis par :



et où  $a_m^v$  désigne le terme principal (bien défini au voisinage de  $C_\phi^v$ ) de l'amplitude  $a$  . ■

Démonstration : On va démontrer le théorème pour  $(F, F^*)$ , l'autre cas s'obtient en échangeant les rôles de  $F$  et  $F^*$ . La proposition (2.10.1) est une conséquence immédiate de la :

Proposition 2.10.2 : Soit  $F \in \mathcal{J}_1^{m, \phi, cl}$ , si  $G \in \mathcal{J}_1^{m', \phi^*, cl}$ , alors  $F \circ G$  appartient à  $G_1^{m+m', cl}(\mathbb{R}^n)$ . De plus, si

$$F = I(a, \phi), \quad G = I(b, \phi^*), \quad \underset{C_\phi}{\overset{V}{a}}_m \text{ et } \underset{C_\phi}{\overset{V}{b}}_{m'}$$

sont les symboles principaux homogènes de degré  $m$  et  $m'$  correspondant à  $a$  et  $b$ , le symbole principal de  $F \circ G$   $c_{m+m}$ , est défini par :

$$(2.10.3) \quad \underset{C_\phi}{\overset{V}{c}}_{m+m}(x, \xi) = (2\pi)^{N+n} \left( \underset{C_\phi}{\overset{V}{a}}_m / \underset{C_\phi}{\overset{V}{b}}_{m'} \right) |\det D(\phi)|_{C_\phi}^{-1} \circ i_1^{-1}(x, \xi)$$

où  $\underset{C_\phi}{\overset{V}{b}}_{m'}(x, y, \theta) = \underset{C_\phi}{\overset{V}{b}}_{m'}(y, x, \theta)$  pour  $(x, y, \theta)$  au voisinage de  $C_\phi$ .

Rappelons tout d'abord que par définition la phase  $\phi^*$  est la phase définie sur  $\mathbb{R}_z^n \times \mathbb{R}_\theta^n, \times \mathbb{R}_y^n$  par :

$$(2.10.4) \quad \phi^*(z, \theta', y) = -\phi(y, \theta', z).$$

Considérons donc le Fourier-Intégral  $(F \circ G)$ . D'après la proposition (2.1.4),  $(F \circ G)$  est de la forme :

$$(2.10.5) \quad (F \circ G) = I(c, \psi)$$

où :

$$(2.10.6) \quad c(x, \theta, y) = (a \times b)(x, \theta, y) = a(x, \theta, z) \cdot b(z, \theta', y)$$

et

$$(2.10.7) \quad \psi(x, \theta, y) = (\phi \dot{+} \phi^*)(x, \theta, y) = \phi(x, \theta, z) + \phi^*(z, \theta', y).$$

Compte tenu de (2.10.4), on a :

$$(2.10.8) \quad \psi(x, \theta, y) = \phi(x, \theta, z) - \phi(y, \theta', z).$$

On va appliquer la proposition (2.8.3). Vérifions en les hypothèses. C'est l'objet du lemme :

Lemme 2.10.3 :  $\Lambda_\psi$  est le graphe de l'identité.

Démonstration : Considérons  $C_\psi$

$$C_\psi = \{(x, \theta, y) , \psi'_\theta = 0\}$$

$$(2.10.9) \quad C_\psi = \{(x, \theta, z, \theta', y) , (x, \theta, z) \in C_\phi , (y, \theta', z) \in C_\phi , \\ \phi'_z(x, \theta, z) = \phi'_z(y, \theta', z)\}$$

De (H4), on déduit immédiatement que :

$$(2.10.10) \quad (x, \theta, y) \in C_\psi \iff \begin{cases} x=y \\ \theta=\theta' \end{cases} , (x, \theta, z) \in C_\phi$$

Par définition,  $\Lambda_\psi$  est l'ensemble :

$$(2.10.11) \quad \Lambda_\psi = \{(x, \psi'_x, y, -\psi'_y), (x, \theta, y) \in C_\psi\} .$$

D'après (2.10.10) et (2.10.11), on en déduit que :

$$(2.10.12) \quad \Lambda_\psi = \{(x, \phi'_x(x, \theta, z), x, +\phi'_x(x, \theta, z)), (x, \theta, z) \in C_\phi\} .$$

Comme l'application :  $C_\phi(x, \theta, z) \rightarrow (x, \phi'_x)$  est un difféomorphisme de  $C_\phi$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , on en déduit le lemme. ■

Lemma 2.10.4 : Si  $\psi$  est défini par (2.10.7), on a :

$$(2.10.13) \quad |\text{Det}(D(\psi))(x, \theta, y)| = |\det D(\phi)|^2(x, \theta, z) \text{ pour } (x, \theta, y) \in C_\psi . \\ \text{si } (x, \theta, y) \in C_\psi . \quad \blacksquare$$

D'après (2.1.40), on a :

$$(2.10.14) \quad |\text{Det}(D(\psi))(x, \theta, y)| = |\text{Det } D(\phi)(x, \theta, z)| |\text{Det } D(\phi^*)(z, \theta', y)|$$

Compte tenu de (2.10.4) et (2.1.34), on a :

$$(2.10.15) \quad |\text{Det } D(\phi^*)(z, \theta', y)| = |\text{Det } D(\phi)(y, \theta', z)|$$

(2.10.13) se déduit immédiatement de (2.10.14) et (2.10.15), compte tenu de (2.10.10). ■

Comme dans la démonstration du lemme (2.8.4), on montre également que

$$(2.10.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} c(x, \theta, y) = a(x, \theta, z) \cdot b(z, \theta, x) = (a \cdot \tilde{b})(x, \theta, z) \\ \text{si } (x, \theta, y) \in C_\psi \\ \text{où on a posé : } \tilde{b}(x, \theta, z) = b(z, \theta, x). \end{array} \right.$$

Compte tenu de (2.10.16), (2.10.13) et du lemme (2.8.3), la proposition (2.8.2) résulte de l'application de la proposition (2.8.3) sous réserve de montrer que :

$$(2.10.17) \quad e^{i \frac{\pi}{4} n_\psi} = + 1 .$$

Or pour  $G = F^*$ , on doit trouver un opérateur pseudodifférentiel autoadjoint

positif. Dans ce cas, on voit que nécessairement  $e^{i \frac{\pi}{4} n_\psi} = 1$  puisque les autres termes apparaissant dans le symbole principal de  $(FF^*)$  sont réels positifs

(cf. (2.10.1) qui sans (2.10.17) était démontré modulo la multiplication par un nombre complexe de module 1).

Les deux propositions (2.10.1) et (2.10.2) admettent les corollaires suivants :

Corollaire 2.10.5 (théorème de continuité  $L^2$ ) : Soit  $F = I(a, \phi)$  dans  $\mathcal{J}_1^{0, \phi, cl}$ , alors  $F$  se prolonge en un opérateur continu de  $L^2$  dans  $L^2$ .

Démonstration : Remarquons tout d'abord que, compte tenu de la remarque 2.8.8, on ne tourne pas en rond !

Le corollaire (2.10.5) se déduit immédiatement du théorème de continuité  $L^2$  pour l'opérateur pseudodifférentiel :  $F^*F$  (cf. Remarque 2.3.8).

Corollaire 2.10.6 (Existence d'un F.I.O (inversible)) : Il existe  $F$  dans  $\mathcal{J}_1^{0, \phi, cl}$  et  $G$  dans  $\mathcal{J}_1^{0, \phi^*, cl}$  tels que :

$$(2.10.18) \quad F \cdot G = I + \mathcal{R} \quad G \cdot F = I + \mathcal{R}'$$

avec  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  dans  $G^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

Démonstration : La démonstration est la même qu'au § 2.6 .

Corollaire 2.10.7 (théorème d'Egorov) : Soient F et G définis en (2.10.18).

Si Q est un o.p.d. dans  $G_1^{m,cl}(\mathbb{R}^n)$  de symbole principal  $q_m^V$ , alors GQF est un o.p.d. dans  $G_1^{m,Cl}(\mathbb{R}^n)$  dont le symbole principal  $p_m^V$  vérifie :

$$(2.10.19) \quad p_m^V(y, -\check{\phi}'_y(x, \theta, y)) = q_m^V(x, \check{\phi}'_x(x, \theta, y))$$

pour  $(x, \theta, y) \in C_{\check{\phi}}$ .

Démonstration : On suit la démonstration du théorème (2.6.2) en utilisant la proposition (2.10.2). ■

Nous terminons ce paragraphe par une proposition qui pourrait être le point de départ de la théorie des Fourier-Intégraux globaux classiques associés à une Lagrangienne homogène  $\Lambda$ .

Proposition 2.10.8 : Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux phases vérifiant les hypothèses de ce paragraphe et telles que :

$$(2.10.20) \quad \Lambda_{\check{\phi}_1} = \Lambda_{\check{\phi}_2}$$

Alors  $\mathcal{J}_1^{m, \phi_1, cl} = \mathcal{J}_1^{m, \phi_2, cl}$ .

De plus, supposons que l'on ait deux symboles homogènes de degré m :

$$a_{1m} \in \Gamma_1^{m, cl, \phi_1}(\mathbb{R}^{n+N_1+n}), \quad a_{2m} \in \Gamma_2^{m, cl, \phi_2} \quad \text{tels que :}$$

$$(2.10.21) \quad (2\pi)^{\frac{n+N_1}{2}} (\check{a}_{1m} |\det D(\phi_1)| e^{-\frac{1}{2} i \frac{\pi}{4} \text{sign } \check{\phi}''_{\theta_1 \theta_1}}) / C_{\check{\phi}_1} \circ i_{\check{\phi}_1}^{-1}$$

$$= (2\pi)^{\frac{n+N_2}{2}} (\check{a}_{2m} |\det D(\phi_2)| e^{-\frac{1}{2} i \frac{\pi}{4} \text{sign } \check{\phi}''_{\theta_2 \theta_2}}) / C_{\check{\phi}_2} \circ i_{\check{\phi}_2}^{-1}$$

Alors  $I(a_{1m}, \phi_1) - I(a_{2m}, \phi_2) \in \mathcal{J}_1^{m-2, cl, \phi_1} = \mathcal{J}_1^{m-2, cl, \phi_2}$ .

Démonstration : Lorsque (2.10.20) et (2.10.21) sont vérifiées, on écrira simplement :

$$(2.10.22) \quad (\check{a}_{1m}, \check{\phi}_1) \sim (\check{a}_{2m}, \check{\phi}_2) .$$

Le premier point dans la démonstration est de remarquer que la relation définie en (2.10.22) est stable par composition. C'est l'objet du :

Lemme 2.10.9 : Si

$$(\check{a}_{1m}, \check{\phi}_1) \sim (\check{a}_{2m}, \check{\phi}_2)$$

$$(\check{a}'_{1m}, \check{\phi}'_1) \sim (\check{a}'_{2m}, \check{\phi}'_2) .$$

Alors :

$$(\check{a}_{1m} \times \check{a}'_{1m}, \check{\phi}_1 + \check{\phi}'_1) \sim (\check{a}_{2m} \times \check{a}'_{2m}, \check{\phi}_2 + \check{\phi}'_2) . \blacksquare$$

Il résulte de (2.1.40) que :

$$(2.10.23) \quad |\det D(\phi_i + \phi'_i)| = |\det D(\phi_i)| |\det D(\phi'_i)| \quad i = 1, 2 .$$

On vérifie facilement les différents points du lemme si on vérifie le :

Lemme 2.10.10 (Hörmander) : Supposons que  $\Lambda_{\phi_1}^V = \Lambda_{\phi_2}^V$  ,  $\Lambda_{\phi'_1}^V = \Lambda_{\phi'_2}^V$  , alors

$\Lambda_{\phi_1 + \phi'_1}^V = \Lambda_{\phi_2 + \phi'_2}^V$  et on a :

$$(2.10.24) \quad \begin{aligned} & (\text{sign}(\check{\phi}_1 + \check{\phi}'_1))''_{\theta_1, \theta_1} - \text{sign}(\check{\phi}_1)''_{\theta_1, \theta_1} - \text{sign}(\check{\phi}'_1)''_{\theta'_1, \theta'_1} \\ & = \text{sign}(\check{\phi}_2 + \check{\phi}'_2)''_{\theta_2, \theta_2} - \text{sign}(\check{\phi}_2)''_{\theta_2, \theta_2} - \text{sign}(\check{\phi}'_2)''_{\theta'_2, \theta'_2} \end{aligned}$$

pour les points

$$(2.10.24) \quad \begin{aligned} (x, \theta_1, y) &= (x, \theta_1, y_1, \theta'_1, y) \quad \underline{\text{tels que}} \quad (x, \theta_1, y) \in C_{\phi_1 + \phi'_1}^V \\ (x, \theta_2, y) &= (x, \theta_2, y_2, \theta'_2, y) \quad \underline{\text{tels que}} \quad (x, \theta_2, y) \in C_{\phi_2 + \phi'_2}^V \end{aligned}$$

et tels que

$$i_{\check{\phi}_1 + \check{\phi}'_1}(x, \theta_1, y) = i_{\check{\phi}_2 + \check{\phi}'_2}(x, \theta_2, y) .$$

Démonstration du lemme 2.10.10 (Remarques préliminaires) : Remarquons tout d'abord que cette démonstration est locale (dans des cônes). Le premier point à remarquer est le :

Lemme 2.10.11 : Soit  $\phi$  une phase vérifiant les hypothèses de ce paragraphe, soit  $(x_o, y_o, \theta_o)$  un point de  $C\gamma$ , et  $(x_o, \xi_o, y_o, \eta_o)$  le point correspondant de  $\Lambda\gamma$ . Soit  $\pi_{\Lambda\gamma}$  la restriction à  $\Lambda\gamma$  de l'application  $(x, \xi, y, \eta) \rightarrow (x, y)$ ,  $\pi'_{\Lambda\gamma}$  l'application dérivée. Alors on a :

$$(2.10.25) \quad N - \text{rang } \overset{V}{\phi}''_{\theta\theta} (x_o, y_o, \theta_o) = n - \text{rang } \pi'_{\Lambda\gamma} (x_o, \xi_o, y_o, \eta_o) .$$

Démonstration du lemme 2.10.11 : Le membre de droite de (2.10.25) peut être interprété comme la dimension du noyau de  $\pi'_{\Lambda\gamma}$  ou encore, en utilisant le difféomorphisme de  $C\gamma$  sur  $\Lambda\gamma$ , comme la dimension de l'espace des vecteurs tangents à  $C\gamma$  qui, par l'application tangente à  $(x, y, \theta) \rightarrow (x, y)$  sont envoyés sur 0. Un vecteur  $(t_x, t_y, t_\theta)$  vérifie les propriétés précédentes si et seulement si :

$$t_x = t_y = 0, \quad \sum_j \overset{V}{\phi}''_{\theta_i \theta_j} t_{\theta_j} = 0 .$$

On en déduit immédiatement (2.10.25). ■

Corollaire 2.10.12 : Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux phases telles que  $\Lambda\phi_1 = \Lambda\phi_2$ . Alors

$$(2.10.26) \quad \text{sign}(\overset{V}{\phi_1})''_{\theta_1 \theta_1} - \text{sign}(\overset{V}{\phi_2})''_{\theta_2 \theta_2} \equiv N_1 - N_2 \pmod{2} .$$

Démonstration du corollaire 2.10.12 : On a clairement :

$$\text{sign}(\overset{V}{\phi_i})''_{\theta_i, \theta_i} \equiv \text{rang } (\overset{V}{\phi_i})''_{\theta_i, \theta_i} \pmod{2}, \quad i = 1, 2$$

(2.10.26) se déduit alors immédiatement de (2.10.25) dont le membre de droite ne dépend que de  $\pi'_{\Lambda\gamma}$  ■

Démonstration du lemme 2.10.10 (1ère étape) : dans une première étape, on vérifie que le lemme est vrai si :  $\phi_1^i = \phi_2^i$  et :

$$(2.10.27) \quad \phi_2(x, \theta_2, z) = \phi_2(x, \theta_1, \sigma, z) = \phi_1(x, \theta_1, z) + (A\sigma, \sigma)$$

où  $\sigma \in \mathbb{R}^k$ ,  $A$  est une matrice symétrique non dégénérée ( $k = N_2 - N_1$ ).

On vérifie que  $\phi_2$  ainsi définie est une "bonne" phase dès que  $\phi_1$  l'est et qu'on a :  $\Lambda_{\phi_2}^V = \Lambda_{\phi_1}^V$ .

De plus, on a clairement :

$$(2.10.28) \quad \text{sign}_{\theta_2 \theta_2}(\phi_2^V)'' = \text{sign}_{\theta_1 \theta_2}(\phi_1^V)'' + \text{sign } A.$$

Démontrer le lemme (2.10.10) dans ce cas revient simplement à vérifier que :

$$(2.10.29) \quad \text{sign}(\phi_1^V + \phi_1^V) = \text{sign}(\phi_2^V + \phi_1^V) + \text{sign } A$$

ce qui se déduit immédiatement des définitions et de (2.10.28).

Démonstration du lemme 2.10.10 (2ème étape) : Il résulte de la première étape, que l'on peut se ramener au cas où :

$$(2.10.28)' \quad \text{sign}_{\theta_1 \theta_1}(\phi_1^V)'' = \text{sign}_{\theta_2 \theta_2}(\phi_2^V)'' \quad \text{sign}_{\theta_1' \theta_1'}(\phi_1^V) = \text{sign}_{\theta_2' \theta_2'}(\phi_2^V)''.$$

$$(2.10.28)'' \quad N_1 = N_2 \quad N_1' = N_2'.$$

((2.10.28)' étant vérifiée en un point  $(x_0, \theta_{10}, y_{10}, \theta_{10}', y_{0, \theta_{20}}, y_{20}, \theta_{20}')$  vérifiant (2.10.24') fixé).

En effet, soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux phases telles que :  $\Lambda_{\phi_1}^V = \Lambda_{\phi_2}^V$

Posons :

$$(2.10.29)' \quad \begin{cases} \tilde{\phi}_1(x, \theta_1, \sigma_1, z) = \phi_1(x, \theta_1, z) + (A_1 \sigma_1, \sigma_1) \\ \tilde{\phi}_2(x, \theta_2, \sigma_2, z) = \phi_2(x, \theta_2, z) + (A_2 \sigma_2, \sigma_2) \end{cases}$$

où  $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$ ,  $\sigma_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$ ,  $A_1$  et  $A_2$  sont deux matrices non dégénérées à déterminer.



On cherche  $k_1, k_2, A_1, A_2$  tels que

$$(2.10.30) \quad \begin{cases} k_1 + N_1 = k_2 + N_2 \\ \text{sign}(\check{\phi}_1)''_{\theta_1 \theta_1} = \text{sign}(\check{\phi}_2)''_{\theta_2 \theta_2} \end{cases} \text{ en un point fixé } (x_0, \xi_0, z_0, \zeta_0) \text{ de } \Lambda_{\check{\phi}_1}.$$

Compte tenu de (2.10.29)' on réécrit (2.10.30) sous la forme :

$$(2.10.31)' \quad k_1 + N_1 = k_2 + N_2$$

$$(2.10.31)'' \quad \text{sign}(\check{\phi}_1)''_{\theta_1 \theta_1} + \text{sign } A_1 = \text{sign}(\check{\phi}_2)''_{\theta_2 \theta_2} + \text{sign}(A_2).$$

(2.10.31)'' étant vérifiée en un point  $(x_0, \xi_0, z_0, \zeta_0)$  de  $\Lambda_{\check{\phi}_1}$  fixé.

(2.10.31) est résoluble, compte tenu de (2.10.26) (On peut d'abord se ramener au cas où  $N_1 = N_2$ ). ■

Avant d'entamer la dernière étape du lemme (2.10.10), introduisons la définition suivante :

Définition 2.10.13 : On dira que deux "bonnes" phases  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  sont équivalentes dans des voisinages coniques de points  $(x_0, y_0, \theta_0) \in C_{\check{\phi}}$  et  $(x_0, y_0, \tilde{\theta}_0) \in C_{\check{\tilde{\phi}}}$  s'il existe une application  $C^\infty \tilde{\theta}$  définie dans un voisinage conique  $\Gamma$  de  $(x_0, y_0, \theta_0)$ , homogène de degré 1 par rapport à  $(x, y, \theta)$  telle que :

$$(2.10.32) \quad \check{\tilde{\phi}}(x, y, \tilde{\theta}(x, y, \theta)) = \check{\phi}(x, y, \theta) \text{ dans } \Gamma$$

$$(2.10.33) \quad \det\left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta}(x_0, y_0, \theta_0)\right) \neq 0. \quad \blacksquare$$

L'objet du lemme suivant est de donner des conditions suffisantes pour que deux phases soient équivalentes localement.

Lemme 2.10.14 : Soient  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  deux "bonnes" phases. Alors les phases  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  sont équivalentes dans des voisinages coniques des points  $(x_0, y_0, \theta_0) \in C_{\check{\phi}}$  et  $(x_0, y_0, \tilde{\theta}_0) \in C_{\check{\tilde{\phi}}}$  si et seulement si :

$$(i) \quad \Lambda_{\check{\phi}} = \Lambda_{\check{\tilde{\phi}}} \text{ dans un voisinage conique de } i_{\check{\phi}}(x_0, y_0, \theta_0) = i_{\check{\tilde{\phi}}}(x_0, y_0, \tilde{\theta}_0).$$

(ii)  $N = \tilde{N}$

$$(iii) \quad \text{sign } \check{\phi}_{\theta\theta}''(x_o, y_o, \theta_o) = \text{sign } \check{\tilde{\phi}}_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}}''(x_o, y_o, \tilde{\theta}_o) .$$

La condition est clairement nécessaire, mais la condition suffisante est beaucoup plus délicate.

lère étape : Dans une première étape, on va montrer que  $\check{\tilde{\phi}}$  est localement équivalente à une phase  $\psi$  telle que  $\check{\phi} - \psi$  s'annule à l'ordre 2 sur  $C_{\check{\phi}}$  dans un voisinage conique de  $(x_o, y_o, \theta_o)$ .

Pour cela, considérons l'application  $\theta$  définie dans un voisinage de  $C_{\check{\phi}}$  par :

$$(2.10.34) \quad (x, \check{\phi}'_x(x, y, \theta), \check{\phi}'_{\theta}(x, y, \theta)) = (x, \check{\tilde{\phi}}'_x(x, y, \tilde{\theta}(x, y, \theta)), \check{\tilde{\phi}}'_{\tilde{\theta}}(x, y, \tilde{\theta}(x, y, \theta))) .$$

( $\tilde{\theta}$  est bien définie globalement (sous l'hypothèse H4 sur  $\phi$  et  $\check{\tilde{\phi}}$ ) ou localement sous l'hypothèse (F3) + (F4)).

Alors

$$(2.10.35) \quad \psi(x, y, \theta) = \check{\tilde{\phi}}(x, y, \tilde{\theta}(x, y, \theta)) .$$

est une phase localement équivalente à  $\check{\tilde{\phi}}$ . Montrons donc :

$$(2.10.36) \quad \check{\phi} - \psi \text{ s'annule à l'ordre 2 sur } C_{\check{\phi}} \text{ dans un voisinage conique de } (x_o, y_o, \theta_o) .$$

Remarquons tout d'abord que  $(x, y, \theta) \rightarrow (x, y, \tilde{\theta})$  réalise un difféomorphisme de  $C_{\check{\phi}}$  sur  $C_{\check{\tilde{\phi}}}$ . On déduit alors de (i) et (2.10.34) que :

$$(2.10.37) \quad \begin{cases} (x, y, \theta) \in C_{\check{\phi}} \\ (x, y, \theta) \text{ voisin de } (x_o, y_o, \theta_o) \end{cases} \Rightarrow \check{\phi}'_y(x, y, \theta) = \check{\tilde{\phi}}'_y(x, y, \tilde{\theta}(x, y, \theta)) .$$

Calculons les dérivées de  $\psi$ . On a :

$$(2.10.38) \quad \begin{cases} \psi'_x(x, y, \theta) = \check{\tilde{\phi}}'_x(x, y, \tilde{\theta}) + \check{\tilde{\phi}}'_{\tilde{\theta}} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \\ \psi'_y(x, y, \theta) = \check{\tilde{\phi}}'_y(x, y, \tilde{\theta}(x, y, \theta)) + \check{\tilde{\phi}}'_{\tilde{\theta}} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \\ \psi'_{\theta}(x, y, \theta) = \check{\tilde{\phi}}'_{\tilde{\theta}} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} \end{cases}$$

$\check{\phi} - \check{\psi}$  étant homogène de degré 2 dans un voisinage conique de  $(x_0, y_0, \theta_0)$  on a :

$$(2.10.39) \quad (\check{\phi} - \check{\psi})(x, y, \theta) = 2x \cdot (\check{\phi}'_x - \check{\psi}'_x) + 2y \cdot (\check{\phi}'_y - \check{\psi}'_y) + 2\theta \cdot (\check{\phi}'_\theta - \check{\psi}'_\theta)$$

Compte tenu de (2.10.34), (2.10.35), (2.10.38) et (2.10.39), on vérifie aisément (2.10.36).

2ème étape de la démonstration du lemme (2.10.14) : On suppose donc maintenant

que  $\phi$  et  $\psi$  sont deux phases vérifiant (2.10.36) et que :

$$(2.10.40) \quad \text{sign } \check{\phi}''_{\theta\theta}(x_0, y_0, \theta_0) = \text{sign } \check{\psi}''_{\theta\theta}(x_0, y_0, \theta_0)$$

et montrons que  $\phi$  et  $\psi$  sont localement équivalentes.

Compte tenu de (2.10.36), on peut en utilisant la formule de Taylor, écrire :

$$(2.10.41) \quad \check{\psi}(x, y, \theta) = \check{\phi}(x, y, \theta) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \check{b}_{jk}(x, y, \theta) \cdot \frac{\partial \check{\psi}}{\partial \theta_j}(x, y, \theta) \cdot \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \theta_k}(x, y, \theta)$$

où  $\check{b}_{jk}(x, y, \theta)$  est homogène de degré 0 et définit une matrice symétrique.

On a sur  $C_\phi$  :

$$(2.10.42) \quad \begin{cases} \check{\psi}''_{\theta\theta} = \check{\phi}''_{\theta\theta} (1 + B \cdot \check{\phi}''_{\theta\theta}) \\ \check{\psi}''_{y\theta} = \check{\phi}''_{y\theta} (1 + B \cdot \check{\phi}''_{\theta\theta}) \end{cases} .$$

Il résulte de l'hypothèse  $\det(D(\check{\phi})) \neq 0$  qui implique clairement  $\det D(\check{\psi}) \neq 0$  que :

$$(2.10.43) \quad \det(1 + B \check{\phi}''_{\theta\theta}) \text{ en } (x_0, y_0, \theta_0) \neq 0 .$$

Nous allons maintenant démontrer que  $\psi$  est équivalente à  $\phi$  dans un voisinage de  $(x_0, y_0, \theta_0)$  si  $B$  est suffisamment petit.

On remarque tout d'abord que d'après la formule de Taylor on a :

(2.10.44)

$$\Psi(x, y, \tilde{\theta}) - \Psi(x, y, \theta) = \sum_j (\tilde{\theta}_j - \theta_j) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_j}(x, y, \theta) + \sum_{j,k} (\tilde{\theta}_j - \theta_j)(\tilde{\theta}_k - \theta_k) \cdot \phi_{jk}(x, y, \tilde{\theta}, \theta)$$

où les  $\phi_{jk}$  sont des matrices symétriques homogènes de degré 0.

Posons maintenant :

$$(2.5.45) \quad \tilde{\theta}_j = \theta_j + \sum_k w_{jk}(x, y, \theta) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_k}$$

où les  $w_{jk}$  sont des fonctions homogènes de degré 0 à déterminer.

Alors on obtient :

$$(2.10.46) \quad \Psi(x, \tilde{\theta}) = \Psi(x, \theta)$$

si :

$$(2.10.47) \quad w_{jk} + \sum_{\nu, \mu} w_{\nu j} w_{\mu k} \phi_{\nu\mu}(x, \theta, \tilde{\theta}) = \check{b}_{jk}/2$$

On résout clairement (2.10.47) si  $B$  est suffisamment petit par le théorème d'inversion locale, et, si  $B$  est assez petit, on a également, compte tenu de

$$(2.10.45) : \det\left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta}\right)(x_0, y_0, \theta_0) \neq 0.$$

3ème étape de la démonstration du lemme (2.10.14) : Pour terminer la démonstration du lemme (2.10.14), il reste à montrer que  $\phi$  et  $\psi$  sont localement équivalentes si (2.10.40) est vérifiée, c.à.d. :

$$(2.10.48) \quad \text{sign } \Psi''_{\theta\theta}(x_0, y_0, \theta_0) = \text{sign}[\Psi''_{\theta\theta}(x_0, y_0, \theta_0) + (\phi''_{\theta\theta} B \cdot \phi''_{\theta\theta}(x_0, y_0, \theta_0)] .$$

Compte tenu de la 2ème étape, il suffit de construire une fonction continue de  $\psi_t$  de  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , à valeurs dans la classe des "bonnes" phases dans un voisinage de  $(x_0, y_0, \theta_0)$  et telles que  $\psi_t - \phi$  s'annule au second ordre sur  $C_\Psi$ . Plus précisément, on procède de la manière suivante ; on remarque que compte tenu de la 2ème étape et de 2.10.51, on peut remplacer (à équivalence près) la phase  $\psi$  par la phase :

$$\check{\psi}_1 = \check{\phi} + \frac{1}{2} \sum b_{jk}(x_0, y_0, \theta_0) \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \theta_k}$$

Admettons un instant qu'il existe une application continue de  $[0,1]$  dans l'ensemble des  $N \times N$  matrices  $C$  (telles que  $\det(I+AC) \neq 0$  avec  $A = \phi''_{\theta\theta}(x_0, y_0, \theta_0)$ ) :  $t \rightarrow B_t$  telle que :

$$(2.10.49) \quad B_0 = 0 \quad ; \quad B_1 = B_{(x_0, y_0, \theta_0)}$$

et considérons la phase :

$$(2.10.50) \quad \check{\psi}_t = \check{\phi} + \frac{1}{2} \sum B_{t(j,k)} \cdot \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \theta_k}$$

Compte tenu du choix de  $B_t$ , on vérifie que pour  $(x,y,\theta)$  assez voisin de  $(x_0, y_0, \theta_0)$ ,

on a  $C_{\check{\phi}} = C_{\check{\psi}_t}$  et :

$$(2.10.51) \quad (\check{\psi}_t)'_{\theta} = (1 + \phi''_{\theta\theta} \cdot B_t) \cdot \check{\phi}'_{\theta}$$

Par conséquent, on a pour tout  $s, t \in [0,1]$

$$(2.10.52) \quad \check{\psi}_t = \check{\psi}_s + \frac{1}{2} \sum_{j,k} B_{(t,s)}(x,y,\theta) \cdot \frac{\partial \check{\psi}_t}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial \check{\psi}_t}{\partial \theta_k}$$

avec la propriété que  $B_{t,t}(x,y,\theta) = 0$ .

Compte tenu de (2.10.52), on déduit de la 2ème étape que  $\check{\psi}_t$  est équivalente à  $\check{\psi}_s$  si  $(s-t)$  est assez petit. On a donc par un argument de compacité que  $\phi$  est équivalente à  $\check{\psi}_1$  et donc à  $\check{\psi}$  dans un voisinage conique assez petit de  $(x_0, y_0, \theta_0)$ .

Il ne reste plus qu'à démontrer l'existence de la famille  $B_t$  ; c'est l'objet du lemme :

Lemme 2.10.15 : Soit  $A$  une matrice symétrique  $m \times m$  et soit  $R$  l'ensemble des matrices symétriques  $m \times m$   $C$  telles que  $\det(I+CA) \neq 0$ . Alors deux matrices  $C_1, C_2$  de  $R$  sont dans la même composante connexe si et seulement si  $A+AC_j A$  ont la même signature pour  $j = 1, 2$  ; les rangs sont bien entendu égaux à rang  $A$ .

Démonstration : Soit  $\mathcal{N}$  le noyau de  $A$  et  $\mathcal{N}^\circ$  son supplémentaire orthogonal. Alors  $A\mathcal{N} = 0$  et  $A$  envoie  $\mathbb{R}^m$  sur  $\mathcal{N}^\circ$  avec  $\mathcal{N}$  comme noyau. L'opérateur  $(I+CA)$  est l'identité sur  $\mathcal{N}$ . C'est par conséquent un isomorphisme si et seulement si  $(A+ACA)$  restreint à  $\mathcal{N}^\circ$  est un isomorphisme. Si  $P$  désigne la projection orthogonale sur  $\mathcal{N}^\circ$ , il s'ensuit que  $\det(I+CA) \neq 0$  implique que :

$$\det(I+C_t A) \neq 0 \quad \text{si} \quad C_t = (1-t)C + tPCP$$

de sorte que  $C$  et  $PCP$  sont dans la même composante connexe de  $R$ . De plus,  $C_1$  et  $C_2$  peuvent être joints par un arc dans  $R$  si et seulement si  $PC_1P$  et  $PC_2P$  peuvent être joints par un arc dans  $R$  constitué d'opérateurs nuls sur  $\mathcal{N}$  et à image dans  $\mathcal{N}^\circ$ . On est alors réduit à considérer des opérateurs de  $\mathcal{N}^\circ$  dans  $\mathcal{N}^\circ$ , et l'énoncé du lemme résulte du fait bien connu que dans l'espace des matrices  $k \times k$  symétriques réelles non singulières, les composantes connexes sont constituées des matrices ayant même signature. En effet, l'application  $B \rightarrow A+ABA$  des matrices symétriques dans les matrices symétriques est bijective si  $A$  est non singulière. ■

Fin de la démonstration du lemme (2.10.10) : Compte tenu de la 2ème étape, on peut supposer que (2.10.28) est vérifiée. Compte tenu du lemme (2.10.14),  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont équivalentes, de même que  $\phi'_1$  et  $\phi'_2$ . On en déduit immédiatement que  $(\phi_1 + \phi'_1)$  et  $(\phi_2 + \phi'_2)$  sont localement équivalentes et donc en particulier que :

$$\text{sign}_{\Theta_1 \Theta_1}(\phi_1 + \phi'_1)'' = \text{sign}_{\Theta_2 \Theta_2}(\phi_2 + \phi'_2)''$$

(2.10.24) est ainsi démontré. ■

Remarque 2.10.16 : En suivant la démonstration du lemme (2.10.10), on peut également démontrer que si  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  sont deux phases telles que  $\Lambda_\phi^V = \Lambda_{\tilde{\phi}}^V$  (localement) alors :

$$(2.10.53) \quad \text{sign}_{\Theta\Theta}^V \text{oi}_{\phi-1} - \text{sign}_{\Theta\Theta}^V \text{oi}_{\tilde{\phi}-1} = \sigma$$

où  $\sigma$  est localement constant .

Fin de la démonstration de la proposition 2.10.8.

1ère assertion : Soit  $(F_2, G_2)$  un couple vérifiant (2.10.18) avec :

$$F_2 = I(b_2, \phi_2) , G_2 = I(b_2^*, \phi_2^*) .$$

Considérons :  $I(a_1, \phi_1) \circ G_2$  (où  $I(a_1, \phi_1)$  est un élément de  $\mathcal{J}^{m, \phi_1, cl}$ ).

Il résulte de la proposition (2.10.2) ( $\Lambda_{\phi_1 + \phi_2^*} =$  graphe de l'identité) que  $I(a_1, \phi_1) \circ G_2$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $G^{m, cl}(\mathbb{R}^n)$ .  $F_2$  étant dans  $\mathcal{J}^{m, \phi_2, cl}$ , on en déduit immédiatement que :

$$I(a_1, \phi_1) \equiv (I(a_1, \phi_1) \cdot G_2) F_2$$

est dans  $\mathcal{J}^{m, \phi_2, cl}$ . Ceci démontre la première assertion de la proposition.

2ème assertion : Soient donc  $(a_{1m}, \phi_1)$  et  $(a_{2m}, \phi_2)$  vérifiant (2.10.22).

Compte tenu du lemme (2.10.9), on se ramène, en considérant :

$$I(a_{1m}, \phi_1) \cdot G_2 \text{ et } I(a_{2m}, \phi_2) \cdot G_2$$

au cas où  $\Lambda_{\phi_1} = \Lambda_{\phi_2} =$  graphe de l'identité.

On est alors ramené au cas considéré dans la proposition (2.8.3) sous réserve de montrer que dans (2.8.5) :

$$(2.10.54) \quad n_\phi \equiv \text{sign } \phi''_{\theta\theta} \pmod{8} .$$

Si on se réfère à la démonstration de la proposition 2.8.3, on a :

$$(2.10.55) \quad n_\phi = \text{sign Hess}_{\phi, y} \phi$$

Pour montrer cette dernière propriété, on va utiliser le lemme (2.10.10) avec les phases :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi(x_1, \theta_1, y_1) & \phi_2 &= \langle x_2 - y_2, \theta_2 \rangle \\ \phi_1' &= -y_1 \cdot y_1' & \phi_2' &= -y_2 \cdot y_2' . \end{aligned}$$

On déduit alors de (2.10.24) l'égalité :

$$\text{sign Hess}_{(\theta_1, y_1)} \phi_1 - \text{sign Hess}_{\theta_1} \phi_1 = 0 . \quad \blacksquare$$

III - APPROXIMATION de  $e^{-itA}$  PAR UN OPÉRATEUR FOURIER-INTEGRAL

(D'après B. Helffer et D. Robert).

Dans le chapitre I, on a montré comment on pouvait définir  $e^{-itA}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ , si  $A$  est un opérateur globalement elliptique d'ordre 2, classique, auto-adjoint et positif. On va montrer dans ce chapitre que l'on peut approcher  $e^{-itA}$  dans les classes introduites au chapitre II. On rappellera également quelques résultats classiques sur la théorie de Hamilton Jacobi.

3.1 Construction d'une approximation de  $e^{itA}$

Soit donc  $A$  un opérateur globalement elliptique d'ordre 2, classique, autoadjoint et positif :

$$(3.1.1) \quad A \in G_1^{2,cl}$$

de symbole usuel  $q(x, \xi)$ .

On a donc :

$$(3.1.2) \quad q(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} q_{2-j}(x, \xi) .$$

Le point de départ dans la construction d'une approximation de  $e^{-itA}$  est la relation (1.10.4) démontrée dans la proposition 1.10.9.

$$(3.1.3) \quad \begin{cases} (\frac{1}{i} \partial_t + A) e^{-itA} = 0 \text{ dans } C_t^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{J}, \mathcal{J})) \\ e^{-itA}|_{t=0} = I . \end{cases}$$

On peut en effet légitimement penser que si l'on sait résoudre (3.1.13)

"approximativement", on obtiendra ainsi une approximation de  $e^{-itA}$ .

On cherche donc plus précisément un opérateur dépendant de manière  $C^\infty$  d'un paramètre  $t \in ]-T, T[$  dont le noyau distribution  $K(t, x, y)$  appartient à

$C^\infty(]-T, T[, \mathcal{J}'_{x,y}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$  et qui satisfait à

$$(3.1.4) \quad \begin{cases} (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + q(x, D_x)) K(t, x, y) = R(t, x, y) \\ K(0, x, y) = \delta(x-y) + \tilde{R}(x, y) \end{cases}$$

où  $R(t, x, y)$  est une fonction dans  $C^\infty(]-T, T[, \mathcal{J}'_{x,y}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$  et  $\tilde{R}(x, y) \in \mathcal{J}'_{x,y}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$



On cherche  $K(t,x,y)$  sous la forme du noyau d'un Fourier-Intégral global classique dépendant du paramètre  $t$  :

$$(3.1.5) \quad K(t,x,y) = \int e^{i[S(t,x,\eta)-y,\eta]} a(t,x,\eta) d\eta$$

où

$$(3.1.6) \quad S(t,x,\eta) \in C^\infty(]-T,T[, \Gamma_1^2(\mathbb{R}^{2n}))$$

et vérifie (E1) à (E3) et où :

$$(3.1.7) \quad a(t,x,\eta) \in C^\infty(]-T,T[, \Gamma_1^0(\mathbb{R}^{2n})) .$$

Il résulte alors du théorème (2.6.4) et de l'étude esquissée au § 2.7 que :

$$R(t,x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (D_t + q(x,D_x)) K(t,x,y)$$

est le noyau distribution d'une famille de Fourier intégraux classiques dépendant de manière  $C^\infty$  de  $t \in ]-T,T[$  :

$$(3.1.8) \quad R(t,x,y) = I(r_t, \phi_t)$$

où :

$$(3.1.9) \quad \phi_t(x,\eta,y) = S(t,x,\eta) - y,\eta$$

et :

$$(3.1.10) \quad r_t(x,\eta) \in \Gamma_1^2(]-T,T[, \mathbb{R}^{2n}) .$$

Le problème est de déterminer  $T$ ,  $a$  et  $S$  pour que l'on ait :

$$(3.1.11) \quad r_t \in \Gamma^{-\infty}(]-T,T[, \mathbb{R}^{2n}) .$$

D'après le théorème (2.6.4), on a :

$$(3.1.12) \quad r_t(x,\eta) = [\partial_t(t,x,\eta) \cdot a + \frac{1}{i} \partial_t a + b(t,x,\eta)]$$

où  $b$  admet une décomposition de la forme :

$$(3.1.13) \left\{ \begin{array}{l} b(t,x,\eta) \sim \sum_{\alpha} b_{\alpha}(t,x,\eta) \\ \text{avec } b_{\alpha}(t,x,\eta) = \frac{1}{\alpha!} \left( \frac{\partial g}{\partial \xi^{\alpha}} \right) (x, \partial_x S(t,x,\eta)) [D_y^{\alpha} [e^{i\psi(t,y,x,\eta)} a(t,y,\eta)]] /_{y=x} \\ \text{et } \psi(t,y,x,\eta) = S(t,y,\eta) - S(t,x,\eta) - \langle y-x, \partial_x S(t,x,\eta) \rangle \end{array} \right.$$

Pour résoudre (3.1.11), il nous faut utiliser plus explicitement les hypothèses d'homogénéité que nous avons déjà introduites, à savoir (3.1.2), (3.1.6) et (3.1.7), mais que nous renforcerons sous la forme :

$$(3.1.14) \quad a(t, x, \eta) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{-2j}(t, x, \eta)$$

où les  $a_{-2j}(t, x, \eta)$  sont homogènes de degré  $-2j$  en  $(x, \eta)$  pour  $|x| + |\eta|$  assez grand.

$$(3.1.15) \quad q(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} q_{2-2j}(x, \xi)$$

avec  $q_{2-2j}$  homogène de degré  $(2-2j)$  en  $(x, \xi)$ .

$$(3.1.16) \quad S(t, \lambda x, \lambda \eta) = \lambda^2 S(t, x, \eta), \forall \lambda \geq 1, \forall (x, \eta), |x| + |\eta| \geq 1.$$

On voit alors facilement que  $r_t(x, \eta)$  admet un développement du même type :

$$(3.1.17) \quad r_t(x, \eta) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} r_{2-2j}(t, x, \eta)$$

avec  $r_{2-2j}(t, x, \eta)$  homogène de degré  $(2-2j)$  en  $(x, \eta)$  pour  $(|x| + |\eta|)$  assez grand.

On résoudra alors (3.1.11) en annulant chacun des termes  $r_{2-2j}(t, x, \eta)$  pour  $|x| + |\eta|$  assez grand.

Il est ici plus commode d'introduire les symboles homogènes associés dans  $\mathbb{R}^{2n} \setminus 0$  :  $\check{q}_{2-2j}$ ,  $\check{a}_{-2j}$ ,  $\check{r}_{2-2j}$ ,  $\check{S}(t, x, \eta)$ . L'annulation de  $r_{2-2j}(t, x, \eta)$  pour  $|x| + |\eta|$  assez grand se ramène à résoudre les équations suivantes :

$$(3.1.18) \quad 0 = \check{r}_0(t, x, \eta) = [\partial_t \check{S}(t, x, \eta) + \check{q}_2(x, \partial_x \check{S}(t, x, \eta))] \check{a}_0$$

$$(3.1.19) \quad 0 = \check{r}_0(t, x, \eta) = [\partial_t \check{S}(t, x, \eta) + \check{q}_2(x, \partial_x \check{S}(t, x, \eta))] \check{a}_{-2} + \frac{1}{i} \check{\gamma}_0 [a_0]$$

où  $\check{\gamma}_0$  est l'opérateur différentiel défini par :

$$(3.1.20) \quad \check{\gamma}_0 = \partial_t + \sum_j \partial_{\xi_j} \check{q}_2(x, \partial_x \check{S}(t, x, \eta)) \cdot \partial_{x_j}.$$

On remarque que  $\gamma_0^V$  est un opérateur qui conserve l'homogénéité des symboles.

Plus généralement,  $\tilde{r}_{-2j}^V(t, x, \eta)$  a la forme :

$$(3.1.21) \quad \tilde{r}_{-2j}^V(t, x, \eta) = [\partial_t^V \tilde{S} + q_2^V(x, \partial_x^V \tilde{S})] \tilde{a}_{-2j-2}^V + \gamma_0^V(\tilde{a}_{-2j}^V) + \tilde{f}_{-2j}^V(t, x, \eta)$$

où  $\tilde{f}_{-2j}^V(t, x, \eta)$  est  $C^\infty$  dans  $] -T, T[ \times \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$ , homogène en  $(x, \eta)$  de degré  $-2j$

et ne fait intervenir que les termes  $\tilde{a}_{-2k}^V(x, \xi)$  avec  $k < j$ .

Retournons à (3.1.18). La condition initiale en (3.1.4) et l'annulation de  $\tilde{r}_2^V$  nous conduit au système :

$$(3.1.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^V \tilde{S}(t, x, \eta) + q_2^V(x, \partial_x^V \tilde{S}(t, x, \eta)) = 0 \\ \tilde{S}(0, x, \eta) = x \cdot \eta \end{array} \right.$$

Ce système est appelé l'équation Eiconale.

Soit  $(x_0, \eta_0)$  dans  $\mathbb{R}^{2n} \setminus 0$ . La théorie classique d'Hamilton-Jacobi nous dit

qu'il existe  $T_{x_0, \eta_0} > 0$  et un voisinage  $V_{x_0, \eta_0}$  de  $(x_0, \eta_0)$  dans lequel

$$(3.1.22) \text{ admet une unique solution dans } ] -T_{x_0, \eta_0}, T_{x_0, \eta_0}[ \times V_{x_0, \eta_0}$$

et qu'on a :  $(x, \partial_x^V \tilde{S}(t, x, \eta)) \neq (0, 0)$ .

Compte tenu de l'unicité de la solution et de la compacité de l'ensemble :

$$B = \{(x, \eta), \frac{1}{2} \leq |x| + |\eta| \leq 2\}$$

on déduit l'existence de  $T > 0$  tel que (3.1.22) admette une solution  $\tilde{S}(t, x, \eta)$

dans  $] -T, T[ \times B$ .

On prolonge alors cette solution par homogénéité en posant :

$$\tilde{S}(t, x, \eta) = (|x| + |\eta|)^2 \tilde{S}(t, \frac{x}{|x| + |\eta|}, \frac{\eta}{|x| + |\eta|})$$

pour  $(x, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$ ,  $t \in ] -T, T[$ .

On vérifie alors aisément que  $\check{S}(t, x, \eta)$  est solution de (3.1.22) dans  $] -T, T[ \times \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$  et que l'on a :  $(x, \partial_x \check{S}(t, x, \eta)) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$ .

De plus, quitte à restreindre éventuellement  $T$ , on a, (puisque  $\check{S}(0, x, \eta) = x \cdot \eta$ ) la relation :

$$(3.1.23) \quad \det(\partial_x \partial_\eta \check{S}(t, x, \eta)) \neq 0 \quad \text{dans } ] -T, T[ \times \mathbb{R}^{2n} \setminus 0 .$$

Considérons maintenant l'équation (3.1.19). Compte tenu de (3.1.18) et en ajoutant une condition initiale pour que la condition initiale en (3.1.4) soit satisfaite (modulo en régularisant), on est amené à considérer le système suivant correspondant à ce qu'on appelle la première équation de transport :

$$(3.1.24) \quad \begin{cases} \gamma_0[\check{a}_0] = 0 \\ \check{a}_0(0, x, \eta) = 1 . \end{cases}$$

$\check{\gamma}_0$  étant la somme d'un champ transverse à  $t = 0$  et d'une fonction, on peut résoudre localement et par un argument de compacité et d'unicité, on obtient une solution de (3.1.24) homogène de degré 0 dans  $] -T, T[ \times \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$  en restreignant encore éventuellement  $T$ . Nous donnerons au § 3.2 une expression de  $\check{a}_0$  en utilisant la théorie de Hamilton-Jacobi.

Enfin, en utilisant (3.1.21), (3.1.22) et la connaissance de  $\check{a}_{-k}(t, x, \eta)$  pour  $k < j$ , on résout de la même manière les équations :

$$(3.1.23)' \quad \begin{cases} \check{\gamma}_0(\check{a}_{-2j}) = -\check{f}_{-2j}(t, x, \eta) \\ \check{a}_{-2j}(0, x, \eta) = 0 \end{cases}$$

en remarquant que  $\check{\gamma}_0$  respecte l'homogénéité et que  $\check{f}_{-2j}$  et donc  $\check{a}_{-2j}$  sont homogènes de degré  $-2j$ .

Soit alors  $a(t, x, \eta)$  dans  $\Gamma_1^0, ] -T, T[ (\mathbb{R}^{2n})$  tel que :

$$(3.1.24) \quad a(t, x, \eta) \sim \sum_j a_{-2j}(t, x, \eta)$$

avec  $a_{-2j}(t, x, \eta) = \check{a}_{-2j}(t, x, \eta)$  pour  $|x| + |\eta|$  assez grand .

et  $S(t, x, \eta)$  une phase telle que :

$$(3.1.25) \quad S(t, x, \eta) = \check{S}(t, x, \eta) \quad \text{pour } |x| + |\eta| \geq 1 .$$

On déduit de ce qui précède que  $K(t, x, y)$  défini en (3.1.5) vérifie (3.1.4).

Il résulte de plus de (3.1.23) que l'on a :

$$(3.1.26) \quad \det(\partial_x \partial_\eta S(t, x, \eta)) \neq 0 \quad \text{pour } |x| + |\eta| \geq 1, t \in ]-T, T[$$

La phase  $S(t, x, \eta)$  vérifie donc uniformément par rapport à  $t \in ]-T, T[$  les hypothèses (E1), (E2) et (E3), et par conséquent la phase  $\phi_t$  vérifie (cf. § 2.4) les hypothèses (F1) à (F4). On vérifiera au § 3.2, que l'on peut également choisir  $\phi_t$  de sorte que (H4) soit vérifiée.

Les constructions précédentes ont comme corollaire la proposition suivante qui nous permet d'approcher  $e^{-itA}$  pour  $|t|$  assez petit.

Proposition 3.1.1 : Soit  $A$  un opérateur globalement elliptique d'ordre 2, autoadjoint et positif dont le symbole (classique) admet un développement asymptotique en termes homogènes (cf. 3.1.15).

Alors il existe  $T_0$ , une amplitude  $a(t, x, \eta)$  dans  $C^\infty(]-T_0, T_0[, \Gamma_1^{0, cl}(\mathbb{R}^{2n}))$ , une phase  $S(t, x, \eta)$  homogène de degré 2 (pour  $|x| + |\eta|$  assez grand) telle que si l'on désigne par  $a_t$  l'amplitude :  $(x, y, \eta) \rightarrow a(t, x, \eta)$  et par  $\phi_t$  la phase :

$$(x, \eta, y) \rightarrow S(t, x, \eta) - y, \eta .$$

$e^{-itA} - I(a_t, \phi_t)$  soit un opérateur à noyau dans  $C^\infty(]-T_0, T_0[, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$ .

Démonstration : On sait que  $e^{-itA}$  vérifie (cf. 1.10.4).

$$(3.1.27) \quad \begin{aligned} [(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}) + A] e^{-itA} &= 0 \\ e^{-itA} /_{t=0} &= I \end{aligned} \quad \text{dans } C_t^\infty(\mathcal{L}(\mathcal{I}))$$

Par ailleurs, l'opérateur  $F_t \stackrel{\text{def}}{=} I(a_t, \phi_t)$  vérifie par construction :

$$(3.1.28) \quad \begin{aligned} [(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}) + A] F_t &= R_t \\ F_t /_{t=0} &= I + \tilde{R} \end{aligned} \quad \text{dans } C^\infty(]-T_0, T_0[, \mathcal{L}(\mathcal{I}))$$

Posant :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_t &= F_t - \tilde{R} \\ \tilde{R}_t &= R_t - A \tilde{R} \end{aligned}$$

on déduit de (3.1.27) et (3.1.28) l'identité dans  $C^\infty(]-T_0, T_0[, \mathcal{L}(\mathcal{I}))$  :

$$\tilde{F}_t - e^{-itA} = i \int_0^t e^{-i(t-s)A} \tilde{R}_s ds$$

d'où :

$$(3.1.29) \quad F_t - e^{-itA} = \tilde{R} + i \int_0^t e^{-i(t-s)A} R_s ds .$$

Il est clair que le second membre de (3.1.29) est régularisant, ce qui démontre la proposition 3.1.1 .

Approximation de  $e^{-itA}$  pour  $t \in \mathbb{R}$

La proposition 3.1.1 a permis d'approcher  $e^{-itA}$  pour  $|t| < T_0$  .

Ceci est suffisant pour certains problèmes de théorie spectrale (estimation de la fonction de comptage) mais pour d'autres problèmes, on doit avoir une approximation de  $e^{-itA}$  pour tout  $t$  . Pour l'obtenir, on utilise un "truc" classique en utilisant les propriétés de  $e^{-itA}$  .

Soit  $T_1 < T_0/2$  (on a éventuellement à jouer sur  $T_1$ ) et soit

$$(3.1.30) \quad I_h = ]hT_1, (h+2)T_1[ \quad (h \in \mathbb{Z}) .$$

On approche alors  $e^{-itA}$  pour  $t$  dans  $I_h$  en remarquant tout d'abord que l'on a :

$$(3.1.31) \quad e^{-itA} = e^{-i(t-hT_1)A} (e^{-ihT_1A/|h|})^{|h|}$$

et donc que l'on a :

$$(3.1.32) \quad e^{-itA} = F_{t-hT_1} \cdot (F_{\frac{h}{|h|}T_1})^{|h|} e^{C^\infty(I_h, \mathcal{L}(f', f))}$$

grâce à la proposition 3.1.1).

Il résulte de la proposition (2.4.7) que :

$$F_{t-hT_1} \cdot (F_{\frac{h}{|h|}T_1})^{|h|}$$

est un Fourier-Intégral classique dont la phase est donnée par :

$$(3.1.33) \quad \phi_t^{(h)}(x, \xi, y) = S(t-hT_1, x, n_{|h|+1}) - y_{|h|+1} \cdot n_{|h|+1} + \sum_{j=1}^{|h|} S(T_1, y_{j+1}, n_j) - y_j \cdot n_j .$$

où on a posé :

$$y_1 = y$$

$$\xi = (\eta_1, y_2, \eta_2, \dots, y_{|h|+1}, \eta_{|h|+1}) \in \mathbb{R}^{(2|h|+1)n}$$

où l'amplitude est donnée par :

$$(3.1.34) \quad b_h(t, x, \xi, y) = a(t - hT_1, x, \eta_{|h|+1}) \prod_{j=1}^{|h|} a(T_1, y_{j+1}, \eta_j) .$$

### 3.2 - Quelques rappels sur la théorie d'Hamilton-Jacobi

Soit  $q_2$  une fonction réelle dans  $\Gamma_1^2(\mathbb{R}^n)$ , on associe à  $q_2$  les équations de Hamilton-Jacobi :

$$(3.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t}(t, y, \eta) = \frac{\partial q_2}{\partial \xi}(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t}(t, y, \eta) = - \frac{\partial q_2}{\partial x}(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \\ x(0, y, \eta) = y \\ \xi(0, y, \eta) = \eta \end{array} \right.$$

Il est bien connu qu'une solution de ce système existe pour tout  $t$  car

$(x, \xi) \rightarrow (\frac{\partial q_2}{\partial \xi}, - \frac{\partial q_2}{\partial x})$  est globalement Lipschitzien puisque  $q_2$  est dans  $\Gamma_1^2(\mathbb{R}^{2n})$ .

On suppose de plus que  $q_2$  est elliptique, i. e. :

$$(3.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists R, C > 0 \text{ t. q.} \\ |x| + |\xi| \geq R \implies |q_2(x, \xi)| \geq C (|x|^2 + |\xi|^2) \end{array} \right.$$

Sous l'hypothèse (3.2.2), on voit immédiatement que les trajectoires sont compactes.

On vérifie en effet que :

$$(3.2.3) \quad q_2(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) = q_2(y, \eta)$$

Cette propriété est connue comme étant la propriété de conservation de l'énergie.

Considérons maintenant l'équation aux variations associée à (3.2.1), c.à.d. que

si on pose :

$$(3.2.4) \quad A(t, y, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y}(t, y, \eta) & \frac{\partial x}{\partial \eta}(t, y, \eta) \\ \frac{\partial \xi}{\partial y}(t, y, \eta) & \frac{\partial \xi}{\partial \eta}(t, y, \eta) \end{pmatrix}$$

On sait que :

$$(3.2.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} A(t, y, \eta) = B(t, y, \eta) - A(t, y, \eta)$$

où :

$$(3.2.6) \quad B(t, y, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 q_2}{\partial x \partial \xi} (x, \xi) & \frac{\partial^2 q_2}{\partial \xi \partial \xi} (x, \xi) \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial x \partial x} (x, \xi) & \frac{\partial^2 q_2}{\partial \xi \partial x} (x, \xi) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = x(t, y, \eta) \\ \xi = \xi(t, y, \eta) \end{matrix}$$

Pour  $t = 0$ , on a, compte tenu des conditions initiales de (3.2.1) :

$$(3.2.7) \quad A(0, y, \eta) = I .$$

On déduit de (3.2.5), (3.2.7) et du fait que  $q_2 \in \Gamma_1^2(\mathbb{R}^{2n})$  qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$(3.2.8) \quad \|A(t, y, \eta) - I\| \leq Ct e^{ct} \quad \forall (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} .$$

On obtient ainsi le :

Lemme 3.2.1 : Pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\exists T' > 0$  tel que pour tout  $t$  vérifiant :  
 $|t| \leq T'$ , on ait dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  :

$$\| \partial_y x(t, y, \eta) - I \| + \| \partial_\eta x(t, y, \eta) \| + \| \partial_y \xi(t, y, \eta) \| + \| \partial_\eta \xi(t, y, \eta) - I \| \leq \epsilon$$

En particulier il existe  $T > 0$  tel que :  $\forall t \in ]-T, T[ \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(3.2.10) \quad y \rightarrow x(t, y, \eta) \text{ est un } C^\infty \text{ difféomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \mathbb{R}^n . \blacksquare$$

La deuxième propriété résulte du théorème d'inversion globale.

Désignons alors par :  $x \rightarrow y(t, x, \eta)$  l'application inverse de  $y \rightarrow x(t, y, \eta)$ .

Dérivant (3.2.5) par rapport à  $(y, \eta)$ , on peut montrer le :



Lemme 3.2.2 :

$$\begin{aligned}
 (3.2.11) \quad (y, n) &\rightarrow x_j(t, y, n) \in \Gamma_1^{1, ]-T, T[ }(\mathbb{R}_{y, n}^{2n}), \quad j=1, \dots, n \\
 (y, n) &\rightarrow \xi_j(t, y, n) \in \Gamma_1^{1, ]-T, T[ }(\mathbb{R}_{y, n}^{2n}), \quad j=1, \dots, n \\
 (x, n) &\rightarrow y_j(t, x, n) \in \Gamma_1^{1, ]-T, T[ }(\mathbb{R}_{x, n}^{2n}), \quad j=1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Equation eiconale

La théorie d'Hamilton Jacobi nous dit qu'on peut alors construire pour  $|t| < T$ , une phase  $S(t, x, n)$  solution de :

$$(3.2.12) \quad S(0, x, n) = x \cdot n$$

$$(3.2.13) \quad (\partial_t S)(t, x, n) + q_2(x, \partial_x S(t, x, n)) = 0 \quad \text{pour } |t| < T$$

en posant :

$$\begin{aligned}
 (3.2.14) \quad S(t, x, n) &= y(t, x, n) \cdot n + \\
 &+ \int_0^t (\sum_i \xi_i(s, y, n) \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \xi_i}(x(s, y, n), \xi(s, y, n)) - q_2(x(s, y, n), \xi(s, y, n))) ds, \\
 & \hspace{15em} y=y(t, x, n).
 \end{aligned}$$

Compte tenu du lemme (3.2.2), on vérifie que :

$$(3.2.15) \quad S(t, x, n) \in \Gamma_1^{2, ]-T, T[ }(\mathbb{R}_x^{2n})$$

et que :

$$\begin{aligned}
 (3.2.16) \quad \tilde{S}(t, y, n) &= S(t, x(t, y, n)) = \\
 &= y \cdot n + \int_0^t (\xi \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \xi} - q_2)(x(s, y, n), \xi(s, y, n)) ds
 \end{aligned}$$

appartient également à  $\Gamma_1^{2, ]-T, T[ }(\mathbb{R}_{y, n}^{2n})$ .

De plus, on a (cf. 3.2.21) :

$$(3.2.17) \quad \det(\partial_x \partial_n S)(t, x, n) \geq \delta_0 > 0, \quad \forall (x, n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in ]-T, T[$$

Définissons maintenant le flot hamiltonien  $\phi_t$  par :

$$(3.2.18) \quad \phi_t(y, \eta) = (\phi_t^1(y, \eta), \phi_t^2(y, \eta)) = (x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta))$$

où  $(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta))$  est la solution de (3.2.1).

Pour  $|t| \leq T$ , on a les relations suivantes entre  $S$  et  $\phi_t$  :

$$(3.2.19) \quad (x, \partial_x S(t, x, \eta)) = \phi_t(\partial_\eta S(t, x, \eta), \eta), \quad t \in ]-T, T[$$

et en particulier, on a :

$$(3.2.20) \quad y(t, x, \eta) = \partial_\eta S(t, x, \eta)$$

et par conséquent :

$$(3.2.21) \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(t, x, \eta) = (\partial_{\eta_i x_j}^2 S)(t, x, \eta) .$$

Remarquons enfin que si  $\phi_t(x, \eta, y) = S(t, x, \eta) - y\eta$ ,  $t \in ]-T, T[$  alors :

$$(3.2.22) \quad \Lambda_{\phi_t} = \text{graphe } \phi_t$$

Cela résulte immédiatement de la définition  $\Lambda_{\phi_t}$  et de (3.2.19).

#### Equations de transport :

Considérons maintenant les équations de transport (cf.(3.1.19) et (3.1.20)) qu'on aurait obtenues sans utiliser l'homogénéité. Elles sont du type :

$$(3.2.23) \quad \begin{aligned} & \partial_t b(t, x, \eta) + \sum_j \partial_{\xi_j} q_2(x, \partial_x S(t, x, \eta)) \cdot (\partial_{x_j} b)(t, x, \eta) \\ & + \left( \frac{1}{2} \sum_{i, j} \frac{\partial^2 q_2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(x, \partial_x S) \cdot \partial_{x_i x_j}^2 S + i q_0(x, \partial_x S) \right) b(t, x, \eta) = f(t, x, \eta) \end{aligned}$$

où  $q_0 \in \Gamma_1^0(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $f(t, x, \eta) \in \Gamma_1^{-k, ]-T, T[}(\mathbb{R}^{2n})$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

où  $b$  est cherché également dans  $\Gamma_1^{-k, ]-T, T[}(\mathbb{R}^{2n})$  et vérifiant de plus la condition initiale :

$$(3.2.24) \quad b(0, x, \eta) = \delta_{0,k} \quad (\text{i.e.} = 1 \text{ si } k = 0 \text{ si } k \neq 0) .$$

Classiquement, on résout (3.2.23) et (3.2.24) en intégrant le long des courbes intégrales du champ :  $X = \partial_t + \sum_j \partial_{\xi_j} q_2(x, \partial_x S) \partial_{x_j}$ . Posons :

$$(3.2.25) \quad \begin{cases} z(t) = b(t, x(t, y, \eta), \eta) \\ h(t) = f(t, x(t, y, \eta), \eta) \end{cases}$$

Si  $(b, f)$  vérifient (3.2.23) et (3.2.24),  $(z, h)$  vérifient les équations :

$$(3.2.26) \quad \begin{cases} z'(t) + [1/2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2 q_2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(x, \partial_x S) \cdot \partial_{x_i x_j}^2 S(t, x, \eta) + i q_0(x, \partial_x S)]_{x=x(t, y, \eta)} z(t) = h(t) \\ z(0) = \delta_{0k} . \end{cases}$$

On a utilisé la propriété que :

$$(3.2.27) \quad \partial_t x(t, y, \eta) = \partial_{\xi} q_2(x(t, y, \eta), \partial_x S(t, x(t, y, \eta), \eta))$$

qui résulte de (3.2.1) et de (3.2.19) qu'on réécrit sous la forme :

$$(3.2.28) \quad (\partial_x S)(t, x(t, y, \eta), \eta) = \xi(t, y, \eta) .$$

Posons :  $\tilde{J}(t, y, \eta) = \det(\partial_y x(t, y, \eta))$ . On a :

$$(3.2.29) \quad \tilde{J} \neq 0 \quad \forall t \in ]-T, T[ \quad (\text{cf. 3.2.9}) \quad \text{et} \quad \tilde{J} \in \Gamma^{0, ]-T, T[}(\mathbb{R}_{y, \eta}^{2n})$$

Dérivons maintenant (3.2.27) par rapport à  $y_i$  :

$$(3.2.30) \quad \begin{aligned} \partial_t \left( \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) (t, y, \eta) &= \partial_{\xi_j \xi_k}^2 q_2(x(t, y, \eta), \partial_x S(t, x(t, y, \eta), \eta)) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_i} + \\ &+ (\partial_{\xi_j x_l}^2 q_2) \cdot (\partial_{x_l x_k}^2 S) \cdot \left( \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \end{aligned}$$

On déduit alors de (3.2.30) que :

$$(3.2.31) \quad \begin{aligned} \frac{\partial_t \tilde{J}}{\tilde{J}} &= \sum_j \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_j \cdot \partial \xi_j} (x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 q_2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} (x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \cdot \partial_{x_i x_j}^2 S(t, x(t, y, \eta), \eta) . \end{aligned}$$

Posons alors :

$$(3.2.32) \quad v(t) = (\tilde{J}(t, y, \eta))^{1/2} z(t) .$$

Compte tenu de (3.2.29), on peut vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned} b \in \Gamma_1^{-k, ]-T, T[ }(\mathbb{R}_{x, \eta}^{2n}) &\iff v \in \Gamma_1^{-k, ]-T, T[ }(\mathbb{R}_{y, \eta}^{2n}) \\ f \in \Gamma_1^{-k, ]-T, T[ }(\mathbb{R}_{x, \eta}^{2n}) &\iff h \in \Gamma_1^{-k, ]-T, T[ }(\mathbb{R}_{y, \eta}^{2n}) \end{aligned}$$

et que  $v$  vérifie l'équation :

$$(3.2.33) \quad \begin{cases} v'(t) + i q'_0(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta))v(t) = (\tilde{J}(t, y, \eta))^{1/2} h(t) \\ v(0) = \delta_{0, k} \end{cases}$$

où on a :

$$(3.2.34) \quad q'_0(x, \xi) = q_0(x, \xi) - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_j \partial \xi_j} \quad (x, \xi) \in \Gamma_1^0(\mathbb{R}^{2n}) .$$

L'hypothèse naturelle venant de notre problème (l'opérateur  $A$  est autoadjoint) est la suivante :

$$(3.2.35) \quad q'_0 \text{ ne prend que des valeurs réelles.}$$

On déduit alors aisément de (3.2.42) l'existence pour tout  $h$  dans  $\Gamma_1^{-k, ]-T, T[ }$  d'une solution  $v$  dans  $\Gamma_1^{-k, ]-T, T[ }$  de (3.2.33). Il faut pour cela se rappeler la propriété (que nous avons déjà implicitement utilisée) découlant de (3.2.2) et (3.2.4) :

$$(3.2.36) \quad \begin{cases} \exists C_1 > 0, C_2 > 0 \text{ tels que, } \forall t \in \mathbb{R}, \forall (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \\ C_1 \lambda(y, \eta) \leq \lambda(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \leq C_2 \cdot \lambda(y, \eta) \end{cases}$$

Dans le cas  $k = 0, f = 0$ , on trouve comme solution de (3.2.23) et (3.2.24) :

$$(3.2.37) \quad \begin{aligned} a_0(t, x, \eta) &= \\ &= [\tilde{J}(t, y(t, x, \eta), \eta)]^{-1/2} e^{-i \int_0^t q'_0(x(s, y, \eta), \xi(s, y, \eta)) ds} / y=y(t, x, \eta) \end{aligned}$$

pour  $t \in ]-T, T[, (x, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$  .

Compte tenu de (3.2.29), (3.2.21) et de la définition de  $y(t, x, \eta)$ , on peut réécrire (3.2.37) sous la forme :

$$(3.2.38) \quad \begin{aligned} a_0(t, x, \eta) &= \\ &= [\det(\partial_x \partial_\eta S)(t, x, \eta)]^{1/2} \cdot e^{-i \int_0^t q'_0(\phi_s(y, \eta)) ds} / y=y(t, x, \eta) \end{aligned}$$

pour  $t \in ]-T, T[, (x, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$  .

Le cas homogène retour aux constructions du § 3.1

Si  $q_2$  est supposé homogène de degré 2 pour  $|x| + |\xi|$  assez grand et si  $q_0$  est supposé homogène de degré 0, on vérifie aisément que :

- $(y, \eta) \rightarrow \phi_t(y, \eta)$  est homogène de degré 1 pour  $(y, \eta)$  assez grand
- $(x, \eta) \rightarrow S(t, x, \eta)$  est homogène de degré 2 pour  $(x, \eta)$  assez grand
- $(x, \eta) \rightarrow y(t, x, \eta)$  est homogène de degré 1 pour  $(x, \eta)$  assez grand
- $(x, \eta) \rightarrow a_0(t, x, \eta)$  est homogène de degré 0 pour  $(x, \eta)$  assez grand.

On retrouve ainsi les solutions construites au paragraphe précédent.  
En particulier, on a (cf. 3.1.24 et 3.2.47)

$$(3.2.39) \quad \begin{aligned} \check{a}_0^v(t, x, \eta) = \\ = [\det(\partial_x \partial_\eta \check{S}(t, x, \eta))]^{1/2} \cdot e^{-i \int_0^t \check{q}_0^v(\check{\phi}_s(y, \eta)) ds} / y = y^v(t, x, \eta) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a ainsi montré (ce qui facilite certains points techniques, cf. 2.4.3).

Lemme 3.2.3 : Pour tout  $t \in ]-T, T[$ , la phase

- $(x, \eta, y) \rightarrow \phi_t(x, \eta, y) = S(t, x, \eta) - y\eta$  vérifie les hypothèses :
- (F1) = (H1), (F2) = (H2), (F3), (H4), (H5). ■

Démonstration : On renvoie à (2.4.9) à (2.4.11), compte tenu de (3.2.17).

3.3 - Etude du Fourier Intégral approchant  $e^{-itA}$  .

On a vu en (3.1.32) que, sous certaines hypothèses (cf. 3.1.15), on pouvait approcher  $e^{-itA}$  par un opérateur Fourier Intégral global classique. Les résultats du § 3.2 vont nous permettre de donner des informations plus précises concernant la phase de  $e^{-itA}$  et son amplitude.

Lemme 3.3.1 : Si  $S$  est la phase construite au § 3.2, et  $\phi_t^{(h)}$  est la phase construite en (3.1.33) pour  $t \in I_h$ , on a :

$$(3.3.1) \quad \Lambda_{\phi_t^{(h)}} = \text{graphe } \phi_t^{(h)} \text{ (i.e. l'ensemble des points } (x, \xi, y, \eta) \text{ avec } (x, \xi) = \phi_t^{(h)}(y, \eta)) \text{ .}$$

$$(3.3.2) \quad \Lambda_{\psi_t^{(h)}} = \text{graphe } \psi_t^{(h)} \text{ (flot homogène associé) . } \blacksquare$$

Démonstration : Pour  $h=0$ , la remarque a été faite en (3.2.22). Supposons par exemple  $h > 0$ . Les points critiques de la phase  $\phi_t^{(h)}$  sont définis par les équations :

$$(3.3.3) \quad \begin{aligned} y_1 &= \partial_{\eta_1} S(T_1, y_2, \eta_1) = y \\ \eta_2 &= \partial_{y_2} S(T_1, y_2, \eta_1) \\ y_j &= \partial_{\eta_j} S(T_1, y_{j+1}, \eta_j) \quad j = 2, \dots, h . \\ \eta_{j+1} &= \partial_{y_{j+1}} S(T_1, y_{j+1}, \eta_j) \\ &\vdots \\ y_{h+1} &= \partial_{\eta_{h+1}} S(t-hT_1, x, \eta_{h+1}) \end{aligned}$$

Les  $(2h)n$  premières équations peuvent se réécrire sous la forme (cf.3.2.19) :

$$(3.3.4)_j \quad \phi_{T_1}(y_j, \eta_j) = (y_{j+1}, \eta_{j+1}) \quad j = 1, \dots, h$$

tandis que les  $n$  dernières équations correspondent à :

$$(3.3.4)_{h+1} \quad \phi_{t-T_1}(y_{h+1}, \eta_{h+1}) = (x, \partial_x S(t-hT_1, x, \eta_{h+1})) \text{ .}$$

En particulier, on en déduit que :

$$(3.3.5) \quad \phi_t(y_1, \eta_1) = (x, \partial_x S(t-hT_1, x, \eta_{h+1}))$$

si  $(x, \xi, y) \in C_{\phi_t}^{(h)}$  :

Par définition,

$$\Lambda_{\phi_t}^{(h)} = \{(x, \partial_x S(t-hT_1, x, \eta_{h+1}), y, \eta_1), (x, \xi, y) \in C_{\phi_t}^{(h)}\}.$$

Il résulte de (3.3.5) l'inclusion :

$$\Lambda_{\phi_t}^{(h)} \subset \text{graphe } \phi_t.$$

Inversement, on vérifie que si l'on part d'un point  $(y_1, \eta_1)$  arbitraire et qu'on définit  $(y_j, \eta_j)$  par (3.3.4)<sub>j</sub> et  $x$  par (3.3.4)<sub>h+1</sub>, on définit un point de  $C_{\phi_t}^{(h)}$  dont l'image dans  $\Lambda_{\phi_t}^{(h)}$  est le point  $(\phi_t(y_1, \eta_1), (y_1, \eta_1))$ . Le lemme est ainsi démontré. ■

Le lemme 3.3.1 admet comme conséquence le :

Théorème 3.3.2 : On suppose que le flot  $\phi_t$  admet une période  $\tilde{T} > 0$ , i.e.

$$(3.3.6) \quad \phi_{\tilde{T}}(x, \xi) = (x, \xi), \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus 0.$$

Alors  $e^{-i\tilde{T}A}$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $G_1^{0,cl}(\mathbb{R}^n)$ , dont le symbole  $a_{\tilde{T}}(x, \xi)$  est de la forme :

$$(3.3.7) \quad a_{\tilde{T}}(x, \xi) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{-2j}^{\tilde{T}}(x, \xi)$$

où  $a_{-2j}^{\tilde{T}}(x, \xi)$  est homogène de degré  $(-2j)$  pour  $|x| + |\xi|$  assez grand et où

$$(3.3.8) \quad a_0^{\tilde{T}}(x, \xi) = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma} e^{-i \int_0^{\tilde{T}} \psi'_0(\phi_s(y_0, \eta_0)(x, \xi)) ds}$$

avec  $\sigma \in \mathbb{Z}$ .

Démonstration : Quitte à jouer sur  $T_1$  (cf. 3.1.30), on trouve  $h \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\tilde{T} \in I_h.$$

$e^{i\tilde{T}P}$  est alors un Fourier-Intégral égal (modulo un régularisant) à  $I(b_{\tilde{T}, \phi_{\tilde{T}}}^{(h)})$  où (cf. 3.1.33) et (3.1.34) :

$$(3.3.9) \quad \phi_{\tilde{T}}^{(h)}(x, \xi, y) = S(\tilde{T}-hT_1, x, \eta_{h+1}) - y_{h+1} \eta_{h+1} + \\ + \sum_{j=1}^h (S(T_1, y_{j+1}, \eta_j) - y_j \cdot \eta_j)$$

et

$$(3.3.10) \quad b_{\tilde{T}}^{(h)} \equiv (2\pi)^{-n(h+1)} a_o(\tilde{T}-hT_1, x, \eta_{h+1}) \prod_{j=1}^h a_o(T_1, y_{j+1}, \eta_j) \\ \text{(modulo } \Gamma_1^{-2, cl, \phi_{\tilde{T}}}^h \text{)}$$

où  $a_o$  a été calculé en (3.2.48).

Il résulte alors de (3.3.6), du lemme (3.3.1) et de la proposition (2.8.3) que  $e^{-i\tilde{T}A}$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0, dont on peut calculer le symbole modulo  $\Gamma_1^{-2}(\mathbb{R}^{2n})$  grâce à la formule (2.8.56) :

$$(3.3.11) \quad \tilde{\alpha}_o^{\tilde{T}}(x, \xi) = [ [a_o(\tilde{T}-hT_1, x, \eta_{h+1}) \prod_{j=1}^h a_o(T_1, y_{j+1}, \eta_j) ] \\ \cdot |\det D(\phi_{\tilde{T}}^{(h)})|^{-1/2} ] i_{\phi_{\tilde{T}}^{(h)}}^{-1}(x, \xi, x, \xi) \times e^{i\frac{\pi}{4} \cdot n} \phi_{\tilde{T}}^{(h)}.$$

Or on a, en un point  $i_{\phi_{\tilde{T}}^{(h)}}^{-1}(x, \xi, x, \xi)$  de  $C_{\phi_{\tilde{T}}^{(h)}}$ , les relations (cf. (3.3.4)) :

$$(3.3.12) \quad (y_{j+1}, \eta_{j+1}) = \phi_{jT_1}(x, \xi).$$

On en déduit que, en ce point, on a :



$$\check{a}_o^{\vee}(T_1, y_{j+1}, \eta_j) = \det(\partial_x \partial_\eta \check{S}(T_1, y_{j+1}, \eta_j))^{1/2} e^{-i \int_0^{T_1} q'_o(\phi_s(y_j, \eta_j)) ds} .$$

D'où :

$$(3.3.13) \check{a}_o^{\vee}(T_1, y_{j+1}, \eta_j) = \det(\partial_x \partial_\eta \check{S}(T_1, y_{j+1}, \eta_j))^{1/2} \cdot e^{-i \int_{(j-1)T_1}^{jT_1} q'_o(\phi_s(x, \xi)) ds}$$

De même :

$$(3.3.14) \check{a}_o^{\vee}(\tilde{T}-hT_1, x, \eta_{h+1}) = \det(\partial_x \partial_\eta \check{S}(\tilde{T}-hT_1, x, \eta_{h+1}))^{1/2} \cdot e^{-i \int_{hT_1}^{\tilde{T}} q'_o(\phi_s(x, \xi)) ds}$$

Par ailleurs, on vérifie aisément (cf. 2.3.4), (2.1.4C)) :

$$(3.3.15) \quad |\text{Det } D(\check{\phi}_{\tilde{T}}^{\vee}(h))| = \det(\partial_x \partial_\eta \check{S}(\tilde{T}-hT_1, x, \eta_{h+1})) \prod_{j=1}^h \det(\partial_x \partial_\eta \check{S}(T_1, y_{j+1}, \eta_j)) .$$

Le théorème se déduit alors de (3.3.11), (3.3.13), (3.3.14) et (3.3.15). ■

Remarque 3.3.3 : Il serait intéressant d'interpréter l'indice  $\sigma$  apparaissant dans la formule (3.3.8), mais cela sort des objectifs de ce cours.

### 3.4 Etude de l'exemple de l'oscillateur harmonique

L'objet de ce paragraphe est de réexpliquer, compte tenu de la théorie développée précédemment, les formules apparaissant dans l'introduction, en particulier la formule (0.13). Ces formules sont bien connues et nous ne donnons pas ici la méthode la plus simple pour les obtenir.

Les calculs développés aux § 3.1. et 3.2 conduisent aisément à l'expression du noyau distribution  $K(t, x, y)$  de  $e^{-itP}$  ( $P = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2)$ ) pour  $|t| < \frac{\pi}{2}$  :

$$(3.4.1) \quad K(t, x, y) = \int e^{i(S(t, x, \eta) - y \cdot \eta)} |\text{cost}|^{-1/2} d\eta$$

où  $S(t, x, \eta)$  est définie par :

$$(3.4.2) \quad S(t, x, \eta) = -\frac{x^2 + \eta^2}{2} \operatorname{tg} t + \frac{x \cdot \eta}{\cos t}$$

Les équations eiconales et de transport se résolvent en effet facilement. Il s'agit de déterminer une expression de  $K(t, x, y)$  pour  $|t| \geq \frac{\pi}{2}$ . Considérons l'intervalle  $I = ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ . Dans cet intervalle, la phase  $\phi_t(x, \eta, y) = S(t, x, \eta) - y \cdot \eta$  est bien définie et on a :

$$(3.4.3) \quad \Lambda_{\phi_t} = \{(x, \xi, y, \eta), (x, \xi) = \phi_t(y, \eta)\} = \text{graphe } \phi_t.$$

Par ailleurs, compte tenu de la méthode exposée précédemment, on peut écrire :

$$(3.3.3) \quad (e^{-itP}) = (e^{-i\frac{t}{2}P}) (e^{-i\frac{t}{2}P})$$

et par conséquent, pour  $t \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ , on peut écrire  $e^{-itP}$  sous la forme :

$$(3.4.5) \quad (e^{-itP}) = I((2\pi)^{-2} |\cos \frac{t}{2}|^{-1}, \psi_t), \quad t \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$$

où  $\psi_t$  est la phase :

$$(3.4.6) \quad (x, \theta, y) \rightarrow \psi_t(x, \theta, y) = S(\frac{t}{2}, x, \eta) - z \cdot \eta + S(\frac{t}{2}, z, \eta') - y \eta'$$

avec  $\theta = (\eta, z, \eta')$  .

On vérifie aisément (cf. les définitions introduites en 2.10.21 et 2.10.22) que :

$$(3.4.7) \quad \Lambda_{\phi_t} = \Lambda_{\psi_t} = \text{graphe } \phi_t \quad (t \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[)$$

et que

$$(3.4.8) \quad (|\cos \frac{t}{2}|^{-1} (2\pi)^{-2}, \psi_t) \sim (e^{-i\pi/2} (2\pi)^{-1} |\cos t|^{-1/2}, \phi_t).$$

La proposition (2.10.8) permet alors de conclure (dans ce cas particulier, la phase étant quadratique et le symbole constant, il n'apparaît pas de termes d'ordre inférieur !) que :

$$(3.4.9) \quad (e^{-itP}) = I(e^{-i\pi/2}(2\pi)^{-1} |\cos t|^{-1/2}, \phi_t)$$

pour  $t \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ .

Le membre de droite de (3.4.9) a un sens dans  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  et vérifie l'équation

$$\left(\frac{1}{i} \partial_t + P\right) (I(e^{-i\pi/2}(2\pi)^{-1} |\cos t|^{-1/2}, \phi_t)) = 0$$

pour  $t \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ .

On en déduit que (3.4.9) est valide dans  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ .

Par des méthodes analogues, on obtient aisément l'expression du noyau dans

l'intervalle  $]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$  et on retrouve en particulier la propriété que

$e^{-2i\pi P} = -I$  [ce qui est clair de départ, compte tenu de l'expression des valeurs propres de  $P$ ].

On a donc bien la formule (0.13) de l'introduction :

$$(3.4.10) \quad (e^{-itP})(x, y) = |\cos t|^{-1/2} e^{-i\pi(\frac{k+1}{2})} \int e^{i[-(\frac{x^2+\eta^2}{2})\text{tgt} + \frac{x\eta}{\cos t} - y\eta]} d\eta$$

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < t < \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Que se passe-t-il aux points  $(\frac{\pi}{2} + k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) ? Il suffit d'étudier les

points  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$  (on utilise après que  $e^{-2i\pi P} = -I$ ).

Le problème est ici que l'on ne peut pas paramétrer l'ensemble :

$$\text{graphe } \phi_t = \{(x, \xi, y, \eta) ; (x, \xi) = \phi_t(y, \eta)\}$$

par  $(x, \eta)$  ce qui avait conduit à l'introduction de  $S(t, x, \eta)$  tel que .

graphe  $\phi_t = \{(x, \xi, y, \eta) ; \xi = (\partial_x S)(t, x, \eta), y = (\partial_\eta S)(t, x, \eta)\}$ .

Par contre, pour  $t$  vérifiant :

$$(3.4.11) \quad 0 < t < \pi$$

on peut paramétrer le graphe de  $\phi_t$  par  $(x, y)$ , ce qui conduit à la recherche d'une fonction  $\tilde{S}(t, x, y)$  telle que :

$$(3.4.12) \quad \xi = \partial_x \tilde{S}(t, x, y), \eta = -\partial_y \tilde{S}(t, x, y)$$

de sorte que :

$$(3.4.13) \quad \Lambda_{\tilde{S}_t} = \text{graphe } \phi_t .$$

Le calcul donne l'expression suivante de  $\tilde{S}$  :

$$(3.4.14) \quad \tilde{S}(t, x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} \cotgt - \frac{xy}{\sin t} .$$

Pour  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on vérifie que :

$$(3.4.15) \quad ((2\pi)^{-1} |\cos t|^{-1/2}, \phi_t) \sim ((2\pi)^{-1/2} e^{-i\pi/4} |\sin t|^{-1/2}, \tilde{S}_t)$$

on a donc :

$$(3.4.16) \quad e^{-itP} = I((2\pi)^{-1/2} e^{-i\pi/4} |\sin t|^{-1/2}, \tilde{S}_t)$$

pour  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Le membre de droite a un sens pour  $t \in ]0, \pi[$  et vérifie la même équation que  $e^{-itP}$ . On en déduit que (3.4.15) est valide pour  $t \in ]0, \pi[$ .

Plus généralement, on obtient :

$$(3.4.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{-itP}(x, y) = (2\pi)^{-1/2} e^{i\pi/4} e^{-ik\pi/2} |\sin t|^{-1/2} e^{i[\frac{x^2 + y^2}{2} \cotgt - \frac{xy}{\sin t}]} \\ k\pi < t < (k+1)\pi \end{array} \right.$$

Les formules (3.4.10) et (3.4.16) permettent une description complète de  $e^{-itP}$  pour tout  $t$ .

IV - PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DU SPECTRE D'OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS SUR  $\mathbb{R}^n$   
(d'après B. Helffer et D. Robert).

Dans ce dernier chapitre, on aborde les applications à la théorie spectrale.

4.1 Relation de Poisson.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1.1 : Soit  $\mathcal{A}$  un o.p.d. globalement elliptique, classique, autoadjoint positif dont le symbole  $q$  vérifie :

$$(4.1.1) \quad q \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} q_{2-2j} \quad \text{avec } q_{2-2j} \text{ homogène de degré } 2-2j \quad .$$

On désigne par  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  l'ensemble des périodes des trajectoires périodiques du champ hamiltonien  $H_{q_2}$ , d'énergie  $l$ . Alors :

$$(4.1.2) \quad \text{Support Sing. Trace } e^{-itA} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \quad . \quad \blacksquare$$

Rappelons que  $\text{Trace}(e^{-itA})$  a été définie dans la proposition (1.10.13) et que par définition :

$$(4.1.3) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{t \in \mathbb{R}, \exists (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}, \check{v}_{q_2}(y, \eta) = 1 \text{ et } (\check{x}(t, y, \eta), \check{\xi}(t, y, \eta)) = (y, \eta)\}$$

(cf. le chapitre III pour les définitions de  $\check{v}_{q_2}, \check{x}, \check{\xi}$ ).

Avant de commencer la démonstration du théorème (4.1.1), remarquons qu'on vérifie facilement que :

$$(4.1.4) \quad 0 \text{ est un point isolé de } \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$$

$$(4.1.5) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \text{ est un sous-ensemble fermé de } \mathbb{R} \quad .$$

Démonstration du théorème 4.1.1 : Il s'agit en fait d'établir le résultat suivant :

$$(4.1.6) \quad \text{Soit } \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ tel que : } \text{supp } \theta \cap \mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \emptyset \quad ,$$

alors :

$$(4.1.7) \quad I(\tau) = \text{Trace} \left( \int e^{-itA} \theta(t) e^{it\tau} dt = o(|\tau|^{-\infty}) \right)$$

pour  $|\tau| \rightarrow \infty$ .

Par une partition de l'unité, quitte à diminuer  $T_1$ , on peut se ramener à établir (4.1.7) pour  $\theta \in C_0^\infty(I_h)$  (cf. 3.1.30). Pour simplifier, supposons  $h \geq 0$  et rappelons qu'on a montré au paragraphe 3.1 l'existence de  $I(b_h^t, \phi_t^{(h)})$  tel que (cf. 3.1.32) :

$$(4.1.8) \quad e^{-itA} - I(b_h^t, \phi_t^{(h)}) \in C^\infty(I_h, \mathcal{L}(\mathcal{F}', \mathcal{F})).$$

Or si  $R_t \in C^\infty(I_h, \mathcal{L}(\mathcal{F}', \mathcal{F}'))$ , on vérifie immédiatement que :

$$(4.1.9) \quad \text{Trace} \left( \int R_t \cdot \theta(t) e^{it\tau} dt \right) = \iint \theta(t) R(t, x, x) e^{it\tau} dt dx = o(|\tau|^{-\infty})$$

où  $R(t, x, y)$  désigne le noyau distribution dans  $C^\infty(I_h, \mathcal{L}(\mathbb{R}_{x,y}^{2n}))$  de  $R_t$ . On déduit de (4.1.8) et (4.1.9) que :

$$(4.1.10) \quad I(\tau) = \text{Trace} \int I(b_h^t, \phi_t^{(h)}) \theta(t) e^{it\tau} dt \pmod{o(|\tau|^{-\infty})}.$$

Il suffit donc de montrer que :

$$(4.1.11) \quad I'(\tau) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \text{Trace} \left( \int I(b_h^t, \phi_t^{(h)}) \theta(t) e^{it\tau} dt \right) = o(|\tau|^{-\infty}).$$

On va d'abord d\u00e9montrer qu'on peut calculer directement  $I'(\tau)$ . C'est l'objet du :

Lemme 4.1.2 : Soit  $a_t$  une amplitude dans  $\Gamma_0^{\mu, I_h}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^{(2h+1)n} \times \mathbb{R}_y^n)$  et soit  $\rho \in C_0^\infty(I_h)$ , alors l'op\u00e9rateur :

$$\int \rho(t) I(a_t, \phi_t^{(h)}) dt$$

admet un noyau  $E_\rho(x, y)$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$  donn\u00e9 par l'int\u00e9grale oscillante :

$$(4.1.12) \quad E_\rho(x, y) = \iint e^{i\phi_t^{(h)}(x, \xi, y)} a_t(x, \xi, y) \rho(t) dt d\xi \quad \blacksquare$$

D\u00e9monstration : Il suffit de construire un op\u00e9rateur diff\u00e9rentiel  $L$  du 1er ordre en  $t$  et  $\xi$  tel que :

$$(4.1.13) \quad L(e^{i\phi_t^{(h)}}) = e^{i\phi_t^{(h)}}$$

et tel que :

$$(4.1.14) \quad t_L \text{ envoie } \Gamma_0^{\mu, I_h} \text{ dans } \Gamma_0^{\mu-1, I_h} .$$

Montrons tout d'abord qu'il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2 > 0$  telles que :  
 $\forall t \in \text{supp } \rho, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^{(2h+1)n}, \forall y \in \mathbb{R}^n :$

$$(4.1.15) \quad C_1 \lambda(x, \xi, y) \leq \lambda(|\partial_t \phi_t^{(h)}|^{1/2}, \partial_\xi \phi_t^{(h)}) \leq C_2 \lambda(x, \xi, y) .$$

Compte-tenu de (3.1.33), la deuxième partie de l'inégalité est immédiate. Montrons la première partie ;  $\phi_t^{(h)}$  est une phase vérifiant (H3)\* uniformément pour  $t$  dans le support de  $\rho$  (cf. proposition 2.1.4 et le lemme 3.2.3). On en déduit que :

$$(4.1.16) \quad K_1 \lambda(x, \xi, y) \leq \lambda(x, \partial_x \phi_t^{(h)}, \partial_\xi \phi_t^{(h)}) = \lambda(x, \partial_\xi \phi_t^{(h)}, (\partial_x S)(t - hT_1, x, \eta_{h+1})) .$$

Utilisant l'ellipticité de  $q_2$ , on a :

$$(4.1.17)' \quad \lambda(x, \partial_x S(t - hT_1, x, \eta_{h+1})) \underset{\substack{\leq \\ \text{uniformément} \\ \text{par rapport à } t}}{\leq} \lambda[|q_2(x, \partial_x S)|^{1/2}] .$$

Si on se rappelle que :

$$(4.1.17)'' \quad q_2(x, \partial_x S(t - hT_1, x, \eta_{h+1})) = -\partial_t S(t - hT_1, x, \eta_{h+1})$$

d'après (3.2.13),

$$(4.1.17)''' \quad = -\partial_t \phi_t^{(h)}(t, x, \xi, y)$$

d'après (3.1.33), on démontre facilement (4.1.15).

Posons alors :

$$(4.1.18) \quad R = [1 + |\partial_t \phi_t^{(h)}|^2 + \sum_j |\partial_{\xi_j} \phi_t^{(h)}|^4]$$

et

$$(4.1.19) \quad L = -iR^{-1} [i + (\partial_t \phi_t^{(h)}) \partial_t + \sum_j (\partial_{\xi_j} \phi_t^{(h)})^3 \partial_{\xi_j}]$$

Grâce à (4.1.15) et aux estimations sur  $\phi_t^{(h)}$ , on vérifie que  $L$  satisfait à (4.1.13) et (4.1.14).

On peut alors donner un sens à l'intégrale oscillante (4.1.12), en posant pour  $M_1$  assez grand :

$$(4.1.20) \quad E_\rho(x,y) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \iint e^{i\phi_t^{(h)}(x,\xi,y)} ({}^tL)^{M_1} [a_t(x,\xi,y)\rho(t)] dt d\xi .$$

L'intégrale est en effet convergente. En jouant alors sur  $M_1$ , on obtient grâce à (4.1.15) une décroissance arbitraire (en puissances négatives de  $\lambda(x,y)$ ) de  $E_\rho(x,y)$ . L'étude des dérivées de  $E_\rho(x,y)$  ne pose pas de problèmes différents. Le lemme (4.1.2) est ainsi démontré. ■

On déduit de ce qui précède que, pour  $M=M_1$  fixé assez grand, on a :

$$(4.1.21) \quad \text{Trace} \left( \int \rho(t) I(a_t, \phi_t^{(h)}) dt \right) = \iiint e^{i\phi_t^{(h)}(x,\xi,x)} ({}^tL)^{M_1} [a_t(x,\xi,x)\rho(t)] . dt dx d\xi .$$

Il résulte de (4.2.21) que  $I'(\tau)$  défini en (4.1.11) s'écrit sous la forme :

$$(4.1.22) \quad I'(\tau) = \sum_{j=0}^{M_1} \tau^j \iiint e^{i[\phi_t^{(h)}(x,\xi,x)+t\tau]} b_j(t,x,\xi,x) \theta_j(t) dt dx d\xi$$

où  $\theta_j \in C_0^\infty(I_h)$ ,  $\text{supp } \theta_j \cap \mathcal{L}_\theta = \emptyset$

et  $b_j \in \Gamma_0^{-M_1, I_h}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{(2h+1)n} \times \mathbb{R}^n)$

Quitte à avoir modifié (au départ)  $I(b_h^t, \phi_t^{(h)})$  par un opérateur du type  $R_t$  (ce qui n'est pas important compte-tenu de 4.1.9), on peut également supposer que  $b_h^t$ , et par conséquent les  $b_j$ , vérifient :

$$(4.1.23) \quad b_j(t,x,\xi,y) = 0$$

si  $(x, \eta_{h+1}) \in B_R$  ( $R$  à fixer  $> 0$ ), ou, s'il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq h$  tel que  $(y_{i+1}, \eta_i) \in B_R$ .

On peut alors choisir  $R$  assez grand de sorte que :

$$(4.1.24) \quad \begin{aligned} \phi_t^{(h)}(x,\xi,x) &= \sum_{j=1}^h (\mathcal{S}(T_1, y_{j+1}, \eta_j) - y_j \cdot \eta_j) - y_{h+1} \cdot \eta_{h+1} + \sum_{j=1}^h (\mathcal{S}(T_1, y_{j+1}, \eta_j) - y_j \cdot \eta_j) = \\ &= \phi_t^{(h)}(x,\xi,x) \quad (\text{avec } y_1 = x) \quad \text{si } (t,x,\xi,x) \in \text{supp } b_j . \end{aligned}$$

Le théorème résultera alors du lemme suivant :

Lemme 4.1.3 : Soit  $\tilde{b}(t,x,\xi,y) \in \Gamma_0^{-M_1, I_h}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{(2h+1)n} \times \mathbb{R}^n)$  v\u00e9rifiant (4.1.23) et



(4.1.24) et soit  $\tilde{\theta}$  dans  $C_0^\infty(I_h)$  tels que :

$$(4.1.25) \quad \text{Supp } \tilde{\theta} \cap \mathcal{L}_{\theta} = \emptyset$$

Alors on a :

$$(4.1.26) \quad \int (\tau) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \iiint e^{i[\phi_t^{(h)}(x, \xi, x) + t\tau]} \tilde{\theta}(t, x, \xi, x) \tilde{\theta}(t) dt d\xi dx \\ = 0 (|\tau|^{-\infty}) \quad \text{pour } |\tau| \rightarrow \infty .$$

D\u00e9monstration : Posons :

$$(4.1.27) \quad \tilde{\phi}(t, x, \xi, \tau) = \phi_t^{(h)}(x, \xi, x) + t\tau$$

et soit  $\mathcal{A}(\tau, \varepsilon)$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{(2h+1)n}$  constitu\u00e9 des  $(t, x, \xi)$  tels que :

$$(4.1.28) \quad (t, x, \xi) \in \mathcal{A}(\tau, \varepsilon) \iff \begin{cases} t \in \text{supp } \tilde{\theta} \\ |\tilde{\phi}_t'|^2 + \sum_j |\tilde{\phi}_{x_j}'|^4 + \sum_j |\tilde{\phi}_{\xi_j}'|^4 \leq \varepsilon \tau^2 . \end{cases}$$

On va montrer qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $\tau_0 > 0$  tel que, pour  $|\tau| \geq |\tau_0|$ ,  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  :

$$(4.1.29) \quad \mathcal{A}(\tau, \varepsilon) \subset \{ (t, x, \xi) \ , \ 0 < C_0 \leq \lambda(x, \eta_{h+1}) |\tau|^{-1/2} \leq C_0' \\ 0 < C_j \leq \lambda(y_{j+1}, \eta_j) |\tau|^{-1/2} \leq C_j' \} \quad j = 1, \dots, h .$$

On notera simplement

$$\lambda(x, \eta_{h+1}) \approx |\tau|^{1/2} \\ \lambda(y_{j+1}, \eta_j) \approx |\tau|^{1/2}$$

en convenant que les constantes apparaissant dans l'\u00e9quivalence ne d\u00e9pendent pas de  $\tau$  et de  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ).

Remarquons tout d'abord qu'il r\u00e9sulte de (4.1.28) que :

$$(4.1.30) \quad |\partial_t S(t - hT_1, x, \eta_{h+1}) + \tau|^2 \leq \varepsilon \tau^2 \quad \text{dans } \mathcal{A}(\tau, \varepsilon) .$$

On d\u00e9duit de (4.1.30) qu'il existe  $\varepsilon_1$  tel que :

$$(4.1.31) \quad |\partial_x S(t-hT_1, x, \eta_{h+1})| \approx |\tau| \quad \text{dans } \mathcal{A}(\tau, \varepsilon) \quad (\varepsilon \leq \varepsilon_1) \quad .$$

Compte-tenu de (4.1.17), on obtient alors que :

$$(4.1.32) \quad \lambda(x, \partial_x S(t-hT_1, x, \eta_{h+1})) \approx |\tau|^{1/2} \quad \text{dans } \mathcal{A}(\tau, \varepsilon) \quad (|\tau| \geq \tau_1, \varepsilon \leq \varepsilon_1) \quad .$$

Il résulte alors du §2.3 (hypothèse (G2) et (G3) ) que :

$$(4.1.33) \quad \lambda(x, \eta_{h+1}) \approx |\tau|^{1/2} \quad \text{dans } \mathcal{A}(\tau, \varepsilon) \quad (|\tau| \geq \tau_1, \varepsilon \leq \varepsilon_1) \quad .$$

On a utilisé ici et on réutilisera la propriété suivante :

$$(4.1.34) \quad \lambda(y, \eta) \approx \lambda(y, (\partial_x S)(s, y, \eta)) \approx \lambda((\partial_\eta S)(s, y, \eta), \eta)$$

pour  $s \in [-T_1, T_1]$  .

Reprenons l'exploitation de (4.1.28). On obtient maintenant :

$$(4.1.35) \quad |(\partial_{\eta_1} S)(T_1, y_2, \eta_1) - x| \leq \varepsilon^{1/4} |\tau|^{1/2}$$

et

$$(4.1.36) \quad |(\partial_x S)(t-hT_1, x, \eta_{h+1}) - \eta_1| \leq \varepsilon^{1/4} |\tau|^{1/2} \quad .$$

De (4.1.32) et (4.1.36), on déduit l'existence de  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$  et de  $\tau_2 \geq \tau_1$ , tels que :

$$(4.1.37) \quad \lambda(x, \eta_1) \approx |\tau|^{1/2} \quad \text{dans } \mathcal{A}(\tau, \varepsilon) \quad (|\tau| \geq \tau_2, \varepsilon \leq \varepsilon_2) \quad .$$

De (4.1.37), (4.1.35) et (4.1.34), on déduit alors l'existence de  $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ ,  $\tau_3 \leq \tau_2$  tels que :

$$(4.1.38) \quad \lambda(y_2, \eta_1) \approx |\tau|^{1/2} \quad \text{dans } (\tau, \varepsilon) \quad (|\tau| \geq \tau_3, \varepsilon \leq \varepsilon_3) \quad .$$

En itérant le procédé, on montre finalement (4.1.29). ■

Soit maintenant  $\chi$  une fonction égale à +1 sur  $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$  et à support dans  $[-1, +1]$  et posons :

$$(4.1.39) \quad \zeta_\varepsilon(t, x, \xi, \tau) = \chi \left( \frac{|\tilde{\phi}_t^i|^2 + \sum_j |\tilde{\phi}_{x_j}^i|^4 + \sum_j |\tilde{\phi}_{\xi_j}^i|^4}{\varepsilon |\tau|^2} \right) .$$

Décomposons  $\tilde{b}$  sous la forme :

$$(4.1.40) \quad \tilde{b} = \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 \quad \text{avec} \quad \tilde{b}_1 = \zeta_\varepsilon \tilde{b}$$

Considérons tout d'abord  $\tilde{b}_2$ . Le support de  $\tilde{b}_2$  est contenu dans le complémentaire de  $\mathcal{A}(\tau, \varepsilon/2)$ . Pour estimer la contribution de  $\tilde{b}_2$  dans (4.1.26), on introduit l'opérateur

$$(4.1.41) \quad M = \frac{1}{i} \frac{\tilde{\phi}_t^i \partial_t + \sum_i \tilde{\phi}_{x_i}^i \partial_{x_i} + \sum_i \tilde{\phi}_{\xi_i}^i \partial_{\xi_i}}{|\tilde{\phi}_t^i|^2 + \sum_i |\tilde{\phi}_{x_j}^i|^4 + \sum_j |\tilde{\phi}_{\xi_j}^i|^4}$$

On a alors :

$$(4.1.42) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_2(\tau) &= \iiint e^{i\tilde{\phi}(t, x, \xi, \tau)} \tilde{b}_2(t, x, \xi, \tau) \tilde{\theta}(t) dt d\xi dx \\ &= \iiint e^{i\tilde{\psi}(t, x, \xi, \tau)} ({}^t\tilde{M})^k \tilde{b}_2(t, x, \xi, \tau) \tilde{\theta}(t) dt d\xi dx \end{aligned}$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  .

Compte tenu des conditions sur le support de  $b_2$ , on en déduit que :

$$(4.1.43) \quad \mathcal{J}_2(\tau) = O(|\tau|^{-\infty})$$

On doit cependant vérifier que, pour ne pas perdre en  $(x, \xi)$ , ce que nous gagnons en  $\tau$ , on a l'équivalence suivante :

$$(4.1.44) \quad \forall (t, x, \xi) \notin \mathcal{A}(\tau, \varepsilon/2), \quad \lambda(x, \xi, |\tau|^{\frac{1}{2}}) \approx \lambda(|\tilde{\phi}_t^i|^{\frac{1}{2}}, |\tilde{\phi}_x^i|, |\tilde{\phi}_\xi^i|)$$

Or on déduit de (4.1.15) que :

$$\begin{aligned} \lambda(x, \xi) &\leq \lambda(|\partial_t S|^{\frac{1}{2}}, (\partial_\xi \phi_t^{(h)})(x, \xi, x)) \\ &\leq \lambda(|\partial_t S + \tau|^{\frac{1}{2}}, |\partial_\xi \tilde{\phi}|, |\tau|^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq \lambda(|\tilde{\phi}'_t|^{\frac{1}{2}}, |\tilde{\phi}'_\xi|, |\tau|^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq \lambda(|\tilde{\phi}'_t|^{\frac{1}{2}}, |\tilde{\phi}'_x|, |\tilde{\phi}'_\xi|) \text{ car } (t, x, \xi) \notin \mathcal{R}(\tau, \frac{\varepsilon}{2}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 4.1.4 : Dans l'estimation de  $\mathcal{J}_2(\tau)$  (défini en (4.1.42)), on n'a pas utilisé l'hypothèse 4.1.25. ■

Considérons maintenant :

$$(4.1.45) \quad \mathcal{J}_1(\tau) = \iiint e^{i\tilde{\phi}(t, x, \xi, \tau)} b_1(t, x, \xi, t) \tilde{\theta}(t) dt, d\xi, dx .$$

Posant  $(x, \xi) = |\tau|^{\frac{1}{2}}(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ , on obtient, compte tenu de (4.1.24) et (4.1.29), que :

$$(4.1.46) \quad \mathcal{J}_1(\tau) = |\tau|^{(h+1)n} \iiint e^{i|\tau| \tilde{\psi}_\pm(t, \tilde{x}, \tilde{\xi})} \tilde{\chi}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \tilde{c}(t, \tilde{x}, \tilde{\xi}, \tau) \tilde{\theta}(t) . dt d\tilde{x} d\tilde{\xi}$$

pour  $|\tau| \geq \tau_0$  ( $\tau_0$  assez grand)

où  $\tilde{\chi}(\tilde{x}, \tilde{\xi})$  est une fonction  $C^\infty$  à support compact sur le support duquel on a :

$$(4.1.47) \quad \begin{cases} |\tilde{x}| + |\tilde{\eta}_{h+1}| \geq c_0 > 0 \\ |\tilde{y}_{j+1}| + |\tilde{\eta}_j| \geq c_0 > 0 \end{cases} \quad j=1, \dots, h$$

où :

$$(4.1.48) \quad \tilde{c}(t, \tilde{x}, \tilde{\xi}, \tau) = \tilde{b}(t, |\tau|^{\frac{1}{2}}\tilde{x}, |\tau|^{\frac{1}{2}}\tilde{\xi}, |\tau|^{\frac{1}{2}}\tilde{x}) \tilde{\theta}(t)$$

et où :

$$(4.1.49) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}_{\pm}^{\vee}(t, \tilde{x}, \tilde{\xi}) &= S(t-hT_1, \tilde{x}, \tilde{\eta}_{h+1}) \cdot \tilde{y}_{h+1} \cdot \tilde{\eta}_{h+1} \\ &+ \sum_{j=2}^h (S(T_1, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{\eta}_j) \cdot \tilde{y}_j \cdot \tilde{\eta}_j) + S(T_1, \tilde{y}_2, \tilde{\eta}_1) \cdot \tilde{x} \cdot \tilde{\eta}_1 \pm t \\ &\quad (\pm \text{dépendant du signe de } \tau) . \end{aligned}$$

Mais compte tenu de (4.1.47) la phase  $\tilde{\psi}_{\pm}^{\vee}$  est  $C^{\infty}$  sur le support de  $\tilde{\chi}$ .

On va alors utiliser une légère extension du théorème de la phase non-stationnaire (cf. Th. 2.9.1) dont la démonstration est immédiate.

Lemme 4.1.5 : Soit  $m \rightarrow f(m)$  une fonction  $C^{\infty}$  réelle sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  et  $g(m, \rho)$  une fonction  $C^{\infty}$  sur  $\Omega \times [\tau_0, +\infty[$  telle que :

$$(4.1.50) \quad \text{supp } g \subset K \times [\tau_0, +\infty[ \text{ où } K \text{ est un compact de } \Omega .$$

$$(4.1.51) \quad |D_m^{\alpha} g(m, \rho)| \leq C_{\alpha} |\rho|^{\delta |\alpha|} \text{ avec } \delta < 1 .$$

$$(4.1.52) \quad f'(m) \neq 0 \text{ pour } m \in K .$$

Alors

$$(4.1.53) \quad \tilde{I}(\tau) = \int e^{i\rho f(m)} g(m, \rho) dm = O(\rho^{-\infty}), \quad \rho \rightarrow +\infty . \quad \blacksquare$$

On applique le lemme (4.1.5) pour l'étude de l'intégrale  $\int_1^{\tau} (\tau)$  avec :

$$|\tau| = \rho, \quad \delta = \frac{1}{2}, \quad m = (t, \tilde{x}, \tilde{\xi})$$

$$f(m) = \tilde{\psi}_{\pm}^{\vee}(t, \tilde{x}, \tilde{\xi}), \quad \tilde{g}(m) = \tilde{\theta}(t) \tilde{\chi}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \tilde{b}(t, |\tau|^{\frac{1}{2}} \tilde{x}, |\tau|^{\frac{1}{2}} \tilde{\xi}, |\tau|^{\frac{1}{2}} \tilde{x})$$

Pour que le lemme s'applique, il reste à vérifier la condition (4.1.52).

Considérons d'abord le cas où  $\tau \rightarrow -\infty$

Si  $f'(m)$  était nul en un point, on aurait :

$$\partial_t^V \mathcal{S}(t-hT_1, \mathbf{x}, \eta_{h+1})^{-1} = 0$$

ce qui est impossible car  $\partial_t^V \mathcal{S}(t-hT_1, \mathbf{x}, \eta_{h+1}) < 0$  d'après l'équation eiconale et la positivité de  $\overset{V}{q}_2$ .

Remarque 4.1.6 :

$$\mathcal{J}_1(\tau) = 0(|\tau|^{-\infty}) \text{ pour } \tau \rightarrow -\infty$$

Compte tenu de la remarque (4.1.4), on a :

$$\mathcal{J}(\tau) = 0(|\tau|^{-\infty}) \text{ pour } \tau \rightarrow -\infty$$

et pour démontrer (4.1.54) on n'a pas utilisé l'hypothèse (4.1.25). ■

Ceci sera utilisé au § 4.2.

Considérons maintenant le cas où  $\tau \rightarrow +\infty$ , et cherchons les points critiques éventuels de la phase  $\overset{V}{\Psi}_{\pm}(t, \mathbf{x}, \xi)$  situés dans le support de

$$(t, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\xi}) \rightarrow \tilde{\partial}(t) \tilde{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\xi}) \tilde{\mathbf{b}}(t, |\tau| \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}, |\tau| \frac{1}{2} \tilde{\xi}, |\tau| \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}).$$

Ces points critiques sont déterminés par les équations :

$$(4.1.54)' \quad \partial_t^V \mathcal{S}(t-hT_1, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\eta}_{h+1}) = -1$$

$$(4.1.55) \quad \partial_x^V \mathcal{S}(t-hT_1, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\eta}_{h+1}) = \tilde{\eta}_1$$

$$(4.1.56) \quad \partial_{\tilde{\eta}_{h+1}} \mathcal{S}(t-hT_1, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\eta}_{h+1}) = \tilde{y}_{h+1}$$

$$(4.1.57)_j \quad \begin{cases} \partial_{\tilde{y}_{j+1}} \mathcal{S}(T_1, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{\eta}_j) = \tilde{\eta}_{j+1} \\ \partial_{\tilde{\eta}_j} \mathcal{S}(T_1, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{\eta}_j) = \tilde{y}_j \end{cases} \quad j = 1, \dots, h$$

(4.1.54)' et (4.1.55) impliquent que :

$$(4.1.58) \quad \overset{V}{q}_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\eta}_1) = 1$$

Des autres équations, on déduit, comme dans la démonstration du théorème (3.3.2):

$$(4.1.59) \quad (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\eta}_1) = \overset{V}{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\eta}_1).$$

(4.1.58) et (4.1.59) disent justement que  $t \in \mathcal{L}_\theta$  ce qui est exclu par (4.1.25) et l'hypothèse que  $t \in \text{supp } \tilde{\theta}$ .

Il n'y a donc pas de points critiques sur le support de l'amplitude.

Le lemme (4.1.3) et donc le théorème (4.1.1) sont démontrés. ■

#### 4.2 - Formule de Weyl avec reste

Dans le paragraphe précédent, nous avons localisé les singularités de la distribution tempérée  $\text{Tr}(e^{-itA})$  (A d'ordre 2). Ce paragraphe est consacré à l'étude de la singularité à l'origine de cette trace. Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , à support contenu dans  $] -T_2, T_2 [$  où  $T_2$  est choisi de telle sorte que :

$$(4.2.1) \quad ] -T_2, T_2 [ \cap \mathcal{L}_\theta = \{0\} .$$

On suppose de plus que :

$$(4.2.2) \quad \varphi \text{ est paire}$$

$$(4.2.3) \quad \varphi(0) = 1 .$$

Posons

$$(4.2.4) \quad I(\tau) = \text{Tr} \left[ \int e^{-itA} \varphi(t) e^{it\tau} dt \right]$$

On a alors le théorème :

Théorème 4.2.1 : Sous les hypothèses du théorème (4.1.1) et de ce paragraphe, on a

$$(4.2.5) \quad \text{i) } I(\tau) = o(|\tau|^{-\infty}), \tau \rightarrow -\infty$$

$$(4.2.6) \quad \text{ii) } I(\tau) \sim \sum_{j \geq 0} c_j \cdot \tau^{n-1-j}, \tau \rightarrow +\infty$$

où les  $c_j$  ( $j \geq 0$ ) sont des nombres réels ne dépendant que du symbole de A.

De plus,

$$(4.2.7) \quad c_0 = (2)^{-n+1} \int_{q_2=1} \frac{dS}{|\nabla_{q_2}|}$$

où  $dS$  est la densité riemannienne sur l'hypersurface  $\mathbb{V}_2 = 1$ .

Enfin, si  $n = 1$ , on a :

$$(4.2.8) \quad c_1 = 0 \quad \text{si} \quad n = 1 .$$

Démonstration : Le point i) a été démontré au paragraphe précédent (cf. Remarque 4.1.6) .

En procédant comme au paragraphe précédent, on se ramène modulo  $O(|\tau|^{-\infty})$  à l'étude de l'intégrale suivante :

$$(4.2.9) \quad \begin{aligned} \tilde{I}(\tau) = & \iiint e^{i(S(t,x,n) - x \cdot n + t \cdot \tau)} a(t,x,n) \cdot \varphi(t) \\ & \cdot \chi(|\tau|^{-\frac{1}{2}}(|x|+|n|)) dt dx dn \end{aligned}$$

où  $\chi$  est égale à 1 sur un intervalle de la forme  $[\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{C}_0]$  et à support dans  $[\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{2}, 2\tilde{C}_0]$  avec  $0 < \tilde{\varepsilon}_0 < \tilde{C}_0$  .

En effet, sur le support de  $(1-\chi)$ , on peut, par un choix convenable de  $\varepsilon_0$  et  $C_0$ , et compte tenu de (4.1.29) (avec  $h=0$ ), utiliser les intégrations par partie introduites en (4.1.41) et (4.1.42).

On remarque maintenant que modulo  $O(|\tau|^{-N+n})$  ( $N$  arbitraire), il suffit de regarder :

$$(4.2.10) \quad I^N(\tau) = \sum_{0 \leq j < N} I_j(\tau)$$

avec

$$\begin{aligned} I_j(\tau) = & \iiint e^{i(S(t,x,n) - x \cdot n + t \cdot \tau)} a_{-2j}(t,x,n) \varphi(t) \\ & \times \chi(|\tau|^{-\frac{1}{2}}(|x|+|n|)) dt dx dn . \end{aligned}$$

On regarde donc un terme du type  $I_j(\tau)$ . Le changement de variable :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= |\tau|^{\frac{1}{2}} x \\ \tilde{n} &= |\tau|^{-\frac{1}{2}} n \end{aligned}$$

nous conduit à :



$$(4.2.11) \quad I_j(\tau) = |\tau|^{n-j} \iiint e^{i(S(t,x,\eta) - x \cdot \eta + t)} \chi_{-2j}(t,x,\eta) \varphi(t) \\ \times \chi(|x| + |\eta|) dt dx d\eta .$$

Il s'agit donc de montrer que  $I_j(\tau)$  a un développement asymptotique de la forme :

$$(4.2.12) \quad I_j(\tau) \sim \tau^{n-j-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} C_j^k \tau^{-k} \right) \\ \text{lorsque } \tau \text{ tend vers } +\infty .$$

On va appliquer le théorème de la phase stationnaire généralisée (Th. 2.9.4) dont nous allons maintenant vérifier que les hypothèses sont satisfaites.

On a

$$\begin{cases} \phi(y) = \phi(t,x,\eta) = \overset{\vee}{S}(t,x,\eta) - x\eta + t \\ a(y) = a(t,x,\eta) = \overset{\vee}{a}_{-2j}(t,x,\eta) \varphi(t) \cdot \chi(|x| + |\eta|) \end{cases}$$

$a$  est dans  $C_0^\infty$  grâce à  $\chi$  et  $\phi$  est  $C^\infty$  sur le support de  $a$ .

Déterminons maintenant la variété critique  $W$ . Elle est définie par les équations

$$(4.2.13) \quad \begin{cases} t \in \text{supp } \varphi \\ \partial_t \overset{\vee}{S}(t,x,\eta) + 1 = 0 \\ \partial_x \overset{\vee}{S}(t,x,\eta) = \eta \\ \partial_\eta \overset{\vee}{S}(t,x,\eta) = x \end{cases}$$

Mais comme on l'a vu au paragraphe précédent, (4.2.13) implique que  $t \in \overset{\vee}{\mathcal{L}} \cap \text{supp } \varphi$  et donc finalement que, au dessus du support de  $a$ ,  $W$  est défini par les équations :

$$(4.2.14) \quad t = 0, \quad \overset{\vee}{q}_2(x,\eta) = 1 .$$

Compte tenu de l'ellipticité et de l'homogénéité de  $\overset{\vee}{q}_2$ , on a :

$$(4.2.15) \quad \text{grad}_{x,\eta} \overset{\vee}{q}_2 \neq 0 \text{ sur } \overset{\vee}{q}_2 = 1$$

et, par conséquent,  $W$  est une sous-variété  $C$  de codimension 2 de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .  
on a donc :

$$(4.2.16) \quad v = 2$$

Calculons maintenant  $(\text{Hess } \phi'')$  sur la base orthonormée  $(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \eta})$  en un point de  $W$ . On a :

$$(\text{Hess } \phi'')_{(o, x, \eta)} = \begin{pmatrix} \partial_{tt}^2 \check{S} & \partial_t \partial_x \check{S} & \partial_t \partial_\eta \check{S} \\ \partial_t \partial_x \check{S} & \partial_{xx}^2 \check{S} & \partial_{x\eta}^2 \check{S} - I \\ \partial_t \partial_\eta \check{S} & \partial_{\eta x}^2 \check{S} - I & \partial_{\eta\eta}^2 \check{S} \end{pmatrix}_{(o, x, \eta)}$$

Compte tenu de (3.1.22), on obtient :

$$(4.2.17) \quad (\text{Hess } \phi'')_{(o, x, \eta)} = \begin{pmatrix} \partial_{tt}^2 \check{S} & -\frac{\partial \check{q}_2}{\partial x}(x, \eta) & -\frac{\partial \check{q}_2}{\partial \eta}(x, \eta) \\ -\frac{\partial \check{q}_2}{\partial x}(x, \eta) & 0 & 0 \\ \frac{\partial \check{q}_2}{\partial \eta}(x, \eta) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant :  $(\text{Hess } \phi''/N)_{(o, x, \eta)}$ .

On choisit comme base orthonormée de

$$N_{(o, x, \eta)} : \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\text{grad}_{x, \eta} \check{q}_2}{|\nabla \check{q}_2|}$$

Dans cette base,  $(\text{Hess } \phi''/N)_{(o, x, \eta)}$  devient la matrice  $2 \times 2$ .

$$(4.2.18) \quad (\text{Hess } \phi''/N)_{(o, x, \eta)} = \begin{pmatrix} \partial_{tt}^2 \check{S} & -|\nabla \check{q}_2| \\ -|\nabla \check{q}_2| & 0 \end{pmatrix}_{(o, x, \eta)}$$

On voit alors immédiatement que le Hessien transverse est non dégénéré et que :

$$(4.2.19) \quad \sigma = 0$$

$$(4.2.20) \quad \det(\text{Hess } \phi''/N)_{(o,x,\eta)} = - |\nabla^V q_2(x,\eta)|^2 .$$

Toutes les hypothèses du théorème sont donc satisfaites et on en déduit (4.2.12).

Examinons plus en détail  $I_o(\tau)$  dont le premier terme donnera le calcul de  $c_o$ .

Il résulte de (2.9.10) et (4.2.20) que :

$$I_o(\tau) = c_o \tau^{n-1} + O(|\tau|^{n-2})$$

avec

$$c_o = \left( \int_W \check{a}_o(o,x,\eta) |\nabla^V q_2(x,\eta)|^{-1} dv_W(y) \right) (2\pi)^{-n} \times 2\pi.$$

Mais: ( $\check{a}_o(o,x,\eta) = 1$ ), d'où la formule (4.2.7).

Lorsque  $n=1$ , on remarque que  $c_1 \tau^{-1}$  ne peut provenir que du 2ème terme de  $I_o(\tau)$ , car le premier terme de  $I_1(\tau)$  qui pourrait contribuer est nul (car  $\check{a}_1(o,x,\eta) = 0$ ).

Au voisinage d'un point  $(o,x,\eta)$  de  $W$ , on peut prendre comme système de coordonnées :

$$(t,x,\eta) \rightarrow (t,r,\omega)$$

où :

$$\omega(\lambda x, \lambda \eta) = \omega(x, \eta)$$

$$r(t,x,\eta) = \frac{\check{S}(t,x,\eta) - x \cdot \eta}{t}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, l'intégrale  $I_o(\tau)$  s'écrit :

$$I_o(\tau) = |\tau| \int_{\omega} \left( \int_t \int_r e^{i\tau t(r-1)} \chi(t,\omega,r) \tilde{b}(t,\omega) dr dt \right) d\omega .$$

avec :

$$\tilde{\chi}(t,\omega,r) \equiv \psi(\omega)$$

et on a :

$$(4.2.21) \quad I_o(\tau) = c_o + O(|\tau|^{-\infty})$$

(on peut utiliser ici le théorème 2.9.3, l'opérateur  $R$  qui apparaît dans ce théorème est alors :  $\frac{i}{2} \partial_t \cdot \partial_r$ ).

Remarque 4.2.2 : Plus généralement, on peut démontrer de la même manière que :

$$(4.2.22) \quad c_n = 1 .$$

Remarque 4.2.3 : On peut réécrire  $\int_{\{q_2=1\}} \frac{dS}{|\nabla q_2|}$  en utilisant la mesure de Leray.

Considérons la fonction  $C^\infty$  pour  $s > 0$  :

$$(4.2.23) \quad h(s) = \iint_{q_2^V(x, \xi) < s} dx \cdot d\xi .$$

Alors on a :

$$(4.2.24) \quad h'(s) = \int_{\{q_2=1\}} \frac{dS}{|\nabla q_2|} .$$

Plus généralement, il existe sur  $\{q_2^V = s\}$  ( $s > 0$ ) une mesure  $\omega_s$  notée  $\frac{dx \wedge d\xi}{d q_2^V}$  telle que :

$$h(t) = \int_0^t \left( \int_{q_2^V=s} \omega_s \right) ds .$$

Notons que, en un point où, par exemple  $\frac{\partial q_2^V}{\partial x_n} \neq 0$ , l'expression de  $\frac{dS}{|\nabla q_2^V|}$  dans les coordonnées  $(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_1, \dots, \xi_n)$  est simplement :

$$\frac{dx_1 \dots dx_{n-1} \quad d\xi_1 \dots d\xi_n}{\left| \frac{\partial q_2^V}{\partial x_n} \right|}$$

Rappelons maintenant que  $I(\tau)$  n'est autre que :

$$(4.2.25) \quad I(\tau) = \sum_j \hat{\phi}(\lambda_j - \tau) = \int \hat{\phi}(\mu - \tau) dN(\mu)$$

où  $dN(\mu)$  désigne la mesure de Stieltjes associée à la fonction croissante, continue à droite, à support dans  $[0, +\infty[$ ,  $N(\lambda)$ , définie par :

$$(4.2.26) \quad N(\lambda) = \{ \# j \mid \lambda_j \leq \lambda \}$$

Pour déduire du comportement asymptotique de  $I(\tau)$  le comportement asymptotique de  $N(\lambda)$ , on doit utiliser le théorème Taubérien suivant :

Théorème 4.2.5 : Soit  $\rho$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  une fonction vérifiant :

$$(4.2.27) \quad \begin{cases} \rho \geq 0, \rho(0) > 0, \hat{\rho} \text{ à support compact, } \hat{\rho}(0) = 1 \\ \hat{\rho} \text{ paire} \end{cases}$$

Soit  $\lambda \rightarrow N(\lambda)$  une fonction croissante, continue à droite, à support dans  $[0, +\infty[$ .

On suppose que  $N$  est à croissance polynômiale et qu'il existe  $C_0 \geq 0$  telle que :

$$(4.2.28) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda - \mu) dN(\mu) \sim C_0 \lambda^{n-1} + (n-1)O(\lambda^{n-2}) + O(\lambda^{n-3}), \lambda \rightarrow +\infty.$$

On a alors :

$$(4.2.29) \quad N(\lambda) \sim \frac{C_0}{n} \lambda^n + O(\lambda^{n-1}) \text{ pour } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Avant de démontrer le théorème, faisons deux remarques préliminaires.

Remarque 4.2.6 : Dans le cas où  $N(\lambda)$  est défini par (4.2.26),  $N$  est bien à croissance polynômiale. Ceci résulte de (1.9.35). ■

Remarque 4.2.7 : Il existe des fonctions  $\rho$  vérifiant (4.2.27) et telles que le support  $\hat{\rho}$  soit arbitrairement petit.

En effet, soit  $\psi$  une fonction paire réelle dans  $C_0^\infty$ , non nulle en 0 et à support dans  $] -T, T[$ ,  $(\psi * \psi)$  est non nulle en 0, positive et à support dans  $] -2T, 2T[$ . Si on normalise  $\psi$ , on peut donc supposer que  $(\psi * \psi)(0) = 1$ .

La transformée de Fourier inverse  $\rho$  de  $(\psi * \psi)$  vérifie toutes les propriétés indiquées. De plus,  $\rho$  est également paire. ■

La démonstration du théorème (4.2.5) repose sur les lemmes suivants :

Lemme 4.2.8 : Sous les hypothèses (4.2.27) et (4.2.28), il existe  $\gamma > 0$  telle que pour tout  $K > 0$ , tout  $\lambda$ , on ait :

$$(4.2.30) \quad \int_{|\lambda-\mu| \leq K} dN(\mu) \leq \gamma(1+K)^n (1+|\lambda|)^{n-1}$$

Démonstration : Soit  $0 < \delta < \rho(0)$  et soit  $[-K_0, K_0]$  un intervalle où  $\rho \geq \delta$ .

On a alors trivialement :

$$(4.2.31) \quad \delta \int_{|\lambda-\mu| \leq K_0} dN(\mu) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) .$$

Or, on a l'estimation :

$$(4.2.32) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) \leq C(1+|\lambda|)^{n-1} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Pour  $\lambda \geq -C$ , (4.2.32) résulte immédiatement de l'hypothèse (4.2.28) ; pour  $\lambda < 0$  on va même montrer :

$$(4.2.33) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) = O(|\lambda|^{-\infty}) .$$

pour  $\lambda \rightarrow -\infty$

En effet, le support de la mesure (dN) est dans  $[0, +\infty[$ . La décroissance de  $\rho$  à  $1^\infty$  conduit alors à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) \leq \frac{C_M}{(1+|\lambda|)^M} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN(\mu)}{(|\mu|+1)^M}$$

pour tout  $M$  assez grand. Les intégrales apparaissant ici ont un sens car  $N$  est à croissance polynômiale. On déduit alors de (4.2.31) et (4.2.32) :

$$(4.2.34) \quad \int_{|\lambda-\mu| \leq K_0} dN(\mu) \leq C_1 (1+|\lambda|)^{n-1}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

Soit maintenant  $K$  quelconque. Il existe  $\ell \in \mathbb{N}$  tel que :

$$(4.2.35) \quad (\ell-1)K_0 \leq K \leq \ell K_0 .$$

On écrit alors :

$$\int_{|\lambda-\mu| \leq K} dN(\mu) \leq \int_{|\lambda-\mu| \leq \ell K_0} dN(\mu) \leq \sum_{j=0}^{\ell-1} \int_{jK_0 \leq |\lambda-\mu| \leq (j+1)K_0} dN(\mu)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\ell-1} \left[ \int_{|\lambda+jK_0+\frac{K_0}{2}-\mu| \leq \frac{K_0}{2}} dN(\mu) + \int_{|\lambda-jK_0-\frac{K_0}{2}-\mu| \leq \frac{K_0}{2}} dN(\mu) \right]$$

$$\leq 2C_1 \sum_{j=0}^{\ell-1} [1+|\lambda|+(j+\frac{1}{2})K_0]^{n-1}$$

$$(4.2.36) \quad \int_{|\lambda-\mu| \leq K} dN(\mu) \leq 2C_1 \left(1+\frac{K}{K_0}\right) \left(1+\frac{K_0}{2}+|\lambda|+K\right)^{n-1}$$

(4.2.30) se déduit alors immédiatement de (4.2.36).

Lemme 4.2.9 : Sous les hypothèses du lemme (4.2.8), pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $K > 0$  tel que :

$$(4.2.37) \quad \left| \int_{|\lambda-\mu| \geq K} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) \right| \leq \varepsilon \lambda^{n-1} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad \lambda \geq 1$$

$$(4.2.38) \quad \int_{\mu > \lambda+K} \left( \int_{-\infty}^{\lambda} \rho(\tau-\mu) d\tau \right) dN(\mu) \leq \varepsilon \lambda^{n-1} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad \lambda \geq 1$$

$$(4.2.39) \quad \int_{\mu < \lambda-K} \left( \int_{\lambda}^{+\infty} \rho(\tau-\mu) d\tau \right) dN(\mu) \leq \varepsilon \lambda^{n-1} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad \lambda \geq 1$$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que  $\rho$  étant dans  $\mathcal{J}$ , il existe pour tout  $M \geq 1$ , une constante  $C_M > 0$  telle que :

$$(4.2.40) \quad |\rho(u)| \leq C_M \cdot (1+|u|)^{-M}, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Montrons d'abord (4.2.37) :

On a :

$$\begin{aligned}
 \int_{|\lambda-\mu| \geq K} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) &\leq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \in \mathbb{N}}} \int_{K+k \leq |\lambda-\mu| \leq K+k+1} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) \\
 &\leq \sum_{k > 0} \left[ \int_{|\lambda+K+k+\frac{1}{2}-\mu| \leq \frac{1}{2}} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|\lambda-K-k-\frac{1}{2}-\mu| \leq \frac{1}{2}} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) \right] \\
 &\leq 2C_M \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(1+K+k)^M} \gamma \left(\frac{3}{2}\right)^n \left[\frac{3}{2} + |\lambda| + K+k\right]^{n-1} \\
 &\leq \tilde{C}_M (1+|\lambda|)^{n-1} \sum_{k \geq 0} (1+K+k)^{n-1-M}
 \end{aligned}$$

Choissant par exemple :  $M = n+2$ , il vient :

$$\int_{|\lambda-\mu| \geq K} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) \leq \tilde{C}_{n+2} (1+|\lambda|)^{n-1} (1+K)^{-1} \sum_{k \geq 0} (1+k)^{-2} .$$

D'où :

$$(4.2.41) \quad \int_{|\lambda-\mu| \geq K} \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) \leq \tilde{C}_n (1+K)^{-1} (1+|\lambda|)^{n-1} .$$

(4.2.37) résulte immédiatement de (4.2.41).

Démontrons maintenant (4.2.38)

Remarquons tout d'abord que l'on a :

$$(4.2.42) \quad \int_{-\infty}^{\lambda} \rho(\tau-\mu) d\tau = \int_{-\infty}^{\lambda-\mu} \rho(u) du = \tilde{\rho}(\lambda-\mu)$$



où  $u \rightarrow \tilde{\rho}(u)$  vérifie une estimation du type (4.2.40) pour  $u$  négatif.

Or  $\{\mu > \lambda + K\}$  implique que  $(\lambda - \mu)$  est négatif ; la démonstration suit alors presque identiquement celle de (4.2.37).

La démonstration de (4.2.39) est analogue à (4.2.38). ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème (4.2.5). Intégrons la formule asymptotique (4.2.28) de  $-1$  à  $\tau$  ( $\tau > 0$ ). On a :

On a :

$$\int_{-1}^{\tau} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda - \mu) dN(\mu) \right) d\lambda = \frac{C_0}{n} \tau^n + O(\tau^{n-1}) .$$

Par ailleurs, il résulte de (4.2.33) que :

$$\int_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda - \mu) dN(\mu) d\lambda \leq C .$$

On a donc :

$$(4.2.43) \quad \int_{-\infty}^{\tau} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda - \mu) dN(\mu) \right) d\lambda = \frac{C_0}{n} \tau^n + O(\tau^{n-1}), \quad \tau \rightarrow +\infty$$

Il nous reste maintenant à réinterpréter le membre de gauche de (4.2.43). On réécrit ce terme sous la forme :  $A+B+C$  avec :

$$(4.2.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \int_{\mu > \tau + K} \left( \int_{-\infty}^{\tau} \rho(\lambda - \mu) d\lambda \right) dN(\mu) \\ B = \int_{\mu > \tau - K} \left( \int_{-\infty}^{\tau} \rho(\lambda - \mu) d\lambda \right) dN(\mu) \\ C = \int_{|\mu - \tau| \leq K} \left( \int_{-\infty}^{\tau} \rho(\lambda - \mu) d\lambda \right) dN(\mu) \end{array} \right.$$

Le terme  $A$  se majore grâce à (4.2.38).

Pour le terme  $B$ , on remarque que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda - \mu) d\lambda = 1 \quad (\hat{\rho}(0) = 0)$$

et que par conséquent :

$$B = \int_{\mu < \tau - K} dN(\mu) - \int_{\mu < \tau - K} \left( \int_{\tau}^{+\infty} \rho(\lambda - \mu) d\lambda \right) dN(\mu) = B_1 + B_2.$$

Le terme  $B_2$  se majore grâce à (4.2.39).

Pour  $B_1$ , on remarque que :

$$B_1 = N(\tau) - \int_{\tau - K \leq \mu \leq \tau} dN(\mu) = N(\tau) + B_3.$$

( $B_3$ ) et (C) se majorent simplement (en utilisant (4.2.30)) par un  $O(|\tau|^{n-1})$ .

On déduit de toutes ces remarques que :

$$(4.2.45) \quad \int_{-\infty}^{\tau} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda - \mu) dN(\mu) \right) d\lambda = N(\tau) + A + B_2 + B_3 + C \\ = N(\tau) + O(\tau^{n-1}), \quad (\tau \rightarrow +\infty)$$

Le théorème résulte de la conjonction de (4.2.43) et (4.2.45).

Théorème 4.2.10 - Formule de Weyl avec reste : Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur pseudodifférentiel elliptique, strictement positif, formellement autoadjoint d'ordre  $m > 0$  et dont le symbole admet une décomposition de la forme :

$$(4.2.46) \quad q \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} q_{m-2j}.$$

Alors la fonction de comptage  $N_A(\lambda)$  définie en (4.2.26) a asymptotiquement le comportement suivant :

$$(4.2.47) \quad N_A(\lambda) = (2\pi)^{-n} \left( \iint_{\tilde{q}_m(x, \xi) \leq 1} dx d\xi \right) \lambda^{\frac{2n}{m} + O(\lambda^{-2(n-1)/m})}, \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

Démonstration : Dans une première étape, on se ramène au cas où  $m=2$ .

En effet, sous les hypothèses du théorème, l'opérateur  $A$  associé à  $\mathcal{A}$  admet une puissance fractionnaire  $A^{2/m}$  qui s'écrit comme un opérateur pseudodifférentiel dans  $G_1^{2,cl}(\mathbb{R}^n)$ . C'était l'objet du théorème (1.11.1) (tout au moins si  $m \in \mathbb{N}$ ). De plus, un examen attentif de la formule (1.11.6) montre que, sous l'hypothèse (4.2.46), on a dans cette formule :  $d_{jk}=0$  si  $j$  est impair. On en déduit alors que  $A^{2/m}$  est un o.p.d qui vérifie également (4.2.46) et dont le symbole principal est :

$$(4.2.48) \quad \sigma_2(A^{2/m}) = (q_m^{2/m}(x, \xi))^{2/m}.$$

On remarque maintenant que :

$$(4.2.49) \quad \iint_{q_m^{2/m}(x, \xi) \leq 1} dx d\xi = \iint_{q_m^{2/m}(x, \xi) \leq 1} dx d\xi.$$

et que :

$$(4.2.50) \quad N_{A^{2/m}}(\lambda^{2/m}) = N_A(\lambda).$$

On déduit donc aisément de (4.2.48) à (4.2.50) que l'on peut se limiter dans la démonstration du théorème au cas où  $m=2$ .

Démonstration du cas  $m=2$  : Il résulte du théorème (4.2.1) et de la formule (4.2.25) que :

$$(4.2.51) \quad \int \hat{\varphi}(\mu - \tau) dN(\mu) \sim \sum_{j \geq 0} C_j \tau^{n-1-j}.$$

où  $\varphi$  vérifie les hypothèses (4.2.1) à (4.2.3).

Soit maintenant  $\rho$  vérifiant (4.2.27). Compte tenu de la remarque (4.2.7), on peut choisir  $\rho$  de sorte que si l'on pose :

$$(4.2.52) \quad \varphi(t) = \int e^{-it\tau} \rho(\tau) d\tau$$

$\varphi$  vérifie (4.2.1) à (4.2.3).

On déduit de (4.2.51) et (4.2.52) que :

$$(4.2.53) \quad \int \rho(\lambda-\mu) dN(\mu) \sim (2\pi)^{-1} \sum_{j \geq 0} c_j \cdot \lambda^{n-1-j}$$

(avec  $c_1 = 0$  si  $n = 1$ ).

Il résulte alors du théorème (4.2.5) et de (4.2.53) que :

$$(4.2.54) \quad N(\lambda) = (2\pi)^{-1} \frac{c_0}{n} \cdot \lambda^n + o(\lambda^{n-1}) \text{ pour } \lambda \rightarrow +\infty .$$

Rappelons que (cf. 4.2.7) :

$$(4.2.55) \quad c_0 = (2\pi)^{-n+1} \int_{\{\check{q}_2=1\}} \frac{dS}{|\check{\nabla} \check{q}_2|}$$

Le coefficient de  $\lambda^n$  dans (4.2.54) est donc :

$$(4.2.56) \quad (2\pi)^{-n} \cdot \frac{1}{n} \int_{\{\check{q}_2=1\}} \frac{dS}{|\check{\nabla} \check{q}_2|}$$

Reprenant les notations de la remarque (4.2.3), on calcule aisément :

$$(4.2.57) \quad \int_{\check{q}_2 \leq 1} dx d\xi = h(1) = \int_0^1 h'(s) ds = \int_0^1 s^{n-1} h'(1) ds = \frac{h'(1)}{n}$$

(grâce à l'homogénéité de  $\check{q}_2$ ).

On obtient ainsi (4.2.47) dans le cas  $m = 2$ . Ceci termine la démonstration du théorème (4.2.10).

### 4.3 - Spectres d'opérateurs et trajectoires classiques périodiques

Soit  $\mathcal{R}$  un opérateur pseudodifférentiel de symbole :

$$(4.3.1) \quad q \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} q_{2-2j}$$

globalement elliptique, autoadjoint, strictement positif.

On fait l'hypothèse (cf. 3.3.6) :

Le flot  $\phi_t^V$  associé au champ de vecteurs

$$(4.3.2) \quad H_{q_2}^V = \left( \frac{\partial q_2^V}{\partial \xi}, -\frac{\partial q_2^V}{\partial x} \right)$$

est complètement périodique de plus petite période  $T > 0$ , i.e. on a :

$$\phi^T(y, \eta) = (y, \eta), \quad \forall (y, \eta) \neq 0$$

et l'hypothèse :

$$(4.3.3) \quad \frac{1}{T} \int_0^T q_0^V(\phi^s(x, \xi)) ds$$

est indépendant de  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$

$$\left( \text{ici } q_0^V = q_0^V - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 q_2^V}{\partial x_j \partial \xi_j} \right) .$$

On posera alors :

$$(4.3.4) \quad \gamma = \frac{1}{T} \int_0^T q_0^V(\phi^s(x, \xi)) ds.$$

Remarque 4.3.1 : Lorsque  $n$  est égal à 1, les hypothèses (4.3.2) et (4.3.3) sont automatiquement vérifiées car  $(q_2^V = 1)$  est décrit par une orbite et l'expression définie en (4.3.3) est indépendante du point choisi sur l'orbite. ■

Il résulte du théorème (3.3.2) le théorème suivant :

Théorème 4.3.2 : Sous les hypothèses (4.3.1) et (4.3.2),  $e^{-iTA}$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $G_1^0(\mathbb{R}^n)$  dont le symbole vérifie :

$$a_T(x, \xi) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{-2j}^T(x, \xi) .$$

Si de plus (4.3.3) est vérifié, il existe  $\sigma \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$(4.3.5) \quad e^{-iTA} = e^{i\frac{n}{4}\sigma} e^{-i\gamma T} + V(T) ;$$

avec  $V(T) \in G_1^{-2}(\mathbb{R}^n)$ .

Théorème 4.3.3 : Sous les hypothèses (4.3.1) à (4.3.3), il existe  $R$  dans  $G_1^{-2}(\mathbb{R}^n)$  tel que :

$$(4.3.6) \quad [A, R] = 0$$

$$(4.3.7) \quad \text{Spectre}(A+R) \subset \left\{ \frac{2\pi}{T} (j+\tilde{\sigma}) , j \in \mathbb{Z} \right\}$$

avec

$$(4.3.8) \quad \tilde{\sigma} = -\frac{\sigma}{8} + \gamma \frac{T}{2\pi} .$$

Corollaire 4.3.4 : Il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que

$$(4.3.9) \quad \text{Spectre}(A) \subset \bigcup_{j \geq 1} \left[ \frac{2\pi}{T} (j+\tilde{\sigma}) - \frac{C_0}{j}, \frac{2\pi}{T} (j+\tilde{\sigma}) + \frac{C_0}{j} \right] .$$

Démonstration du théorème 4.3.3 : On déduit de (4.3.5) que :

$$(4.3.10) \quad e^{-2i\pi \left[ \frac{T}{2\pi} A - \tilde{\sigma} \right]} = I + W$$

avec  $[W, A] = 0$  et  $W \in G_1^{-2}(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $\varphi_j$  désigne une base vecteurs propres de  $A$ , on a alors :

$$(4.3.11) \quad W \varphi_j = v_j \cdot \varphi_j$$

et,  $W$  étant compact de  $L^2$  dans  $L^2$  (proposition (1.6.11), on a :

$$(4.3.12) \quad v_j \rightarrow 0 , j \rightarrow +\infty .$$

On déduit de (4.3.12) l'existence de  $j_0$  tel que :

$$(4.3.13) \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } : \forall j \geq j_0 , \text{ on ait } : |v_j| \leq \frac{1}{2} .$$

On cherche à construire un opérateur  $F$  dans  $G_1^{-2}(\mathbb{R}^n)$  tel que :

$$(4.3.14) \quad [F, A] = 0$$

$$(4.3.15) \quad e^F = I + W$$

Posant alors :

$$(4.3.16) \quad R = i \frac{F}{T}$$

on obtiendra le théorème (4.3.3).

On définit abstraitement  $F$  en posant :

$$(4.3.17) \quad \begin{cases} F \varphi_j = \log_{\theta_j} (1 + v_j) \varphi_j, & \text{si } j < j_0 \\ F \varphi_j = \text{Log} \cdot (1 + v_j) \varphi_j = \left( \sum_{p \geq 1} (-1)^{p+1} \frac{v_j^p}{p} \right) \varphi_j, & \text{si } j \geq j_0 \end{cases}$$

où  $\log_{\theta_j} (1 + v_j)$  est une détermination arbitraire du logarithme.  $F$  vérifie clairement (4.3.14) et (4.3.15) et le seul point qui reste à montrer est l'appartenance de  $F$  à  $G_1^{-2}(\mathbb{R}^n)$ .

On vient de construire un logarithme "abstrait" de  $(I+W)$  ; montrons maintenant comment on peut construire un logarithme approché pseudodifférentiel de  $(I+W)$  (modulo un régularisant), il s'agira ensuite de comparer ces deux logarithmes.

Si on regarde formellement la série :

$$(4.3.18) \quad \sum_{p \geq 1} (-1)^{p+1} \frac{W^p}{p}$$

on remarque que le terme général de la série :  $(-1)^{p+1} \frac{W^p}{p}$  est dans  $G_1^{-2p}(\mathbb{R}^n)$ .

On sait alors qu'il existe  $H$  dans  $G_1^{-2}(\mathbb{R}^n)$  tel que, pour tout  $N$ , on ait :

$$(4.3.19) \quad H - \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} \frac{W^p}{p} \in G_1^{-2(N+1)}(\mathbb{R}^n).$$

Introduisons enfin les opérateurs  $W_0$  et  $F_0$  définis par :

$$(4.3.20) \quad \begin{cases} W_0 \varphi_j = 0 & \text{si } j < j_0 \\ W_0 \varphi_j = W \varphi_j & \text{si } j \geq j_0 \end{cases}$$

et

$$(4.3.21) \quad F_0 = \sum_{p \geq 1} (-1)^{p+1} \frac{W_0^p}{p} \text{ (dans } \mathcal{L}(L^2, L^2)) \text{ .}$$

La série définissant  $F_0$  en (4.3.21) est normalement convergente car il résulte de (4.3.20) et (4.3.13) que :  $\|W_0\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq \frac{1}{2}$  .

Remarquons maintenant que, compte tenu de (4.3.11), (4.3.17), (4.3.20) et (4.3.21):

$$(4.3.22) \quad F - F_0 \text{ est régularisant (on utilise que } \varphi_j \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$$

$$(4.3.23) \quad W^p - W_0^p \text{ (pour tout } p) \text{ .}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le :

Lemme 4.3.5 :  $H - F \in G^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  .

Démonstration : Compte tenu de (4.3.22), il suffit de montrer que :

$$(4.3.24) \quad H - F_0 \text{ est régularisant.}$$

Or, pour tout  $N \geq 1$ , on a dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  :

$$(4.3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} H - F_0 = \left( H - \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} \frac{W^p}{p} \right) + \left( \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} \frac{(W^p - W_0^p)}{p} \right) \\ \quad - \left( F_0 - \sum_{p=1}^N \frac{(-1)^{p+1}}{p} W_0^p \right) \\ H - F_0 = A_N + B_N - C_N \end{array} \right. \text{ .}$$

Or  $A_N^-$  est dans  $G^{-2(N+1)}(\mathbb{R}^n)$  d'après (4.3.19),  $B_N$  est dans  $G^{-\infty}$  d'après (4.3.23), il reste à examiner :

$$(4.3.26) \quad C_N = F_0 - \sum_{p=1}^N \frac{(-1)^{p+1}}{p} W_0^p = W_0^{N+1} \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{W_0^{p-N-1}}{p}$$



qu'on peut réécrire sous la forme :

$$(4.3.27) \quad C_N = W_0^{N-1-M} \left( \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^{p+1} \cdot W_0^{p-N-1} \right) W_0^M$$

Sous la forme (4.3.27), on voit immédiatement que :

$$(4.3.28) \quad C_N \in \mathcal{L}(B^{-N+1}, B^{N-1})$$

car  $W_0^p$  est un o.p.d. et

$$\left( \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^{p+1} W_0^{p-N-1} \right) \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$$

On déduit alors de ce qui précède, en variant les choix de N que

$$(4.3.29) \quad H-F_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(B^{-k}, B^k) = \mathcal{L}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$$

(4.3.24) (et donc le lemme) est démontré.

Démonstration du corollaire 4.3.4 : On définit  $\mu_j$  par :

$$(4.3.30) \quad R\varphi_j = \mu_j \varphi_j \quad (\text{cf. 4.3.16 et 4.3.17}).$$

On a :

$$\mu_j = \frac{i}{T} \text{Log}(1+v_j) \quad (\text{pour } j > j_0).$$

Il résulte du théorème (4.3.3) que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , il existe  $\tilde{j} \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$(4.3.31) \quad \lambda_j + \mu_j = \frac{2\pi}{T} (\tilde{j} + \tilde{\sigma}).$$

On remarque maintenant que  $AR$  est dans  $G_1^0(\mathbb{R}^n)$  et que, par conséquent, il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $j$  dans  $\mathbb{N}$ , on ait :

$$(4.3.32) \quad |\lambda_j \cdot \mu_j| \leq C.$$

Remarquons ensuite que, lorsque  $j$  tend vers  $l^\infty$ ,  $\lambda_j$  tend vers  $+\infty$  et  $\mu_j$  tend vers 0. On en déduit qu'il existe  $j_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $j \geq j_1$ , il existe  $\tilde{j} \geq 1$  tel que (3.4.31) soit vérifié et tel que :

$$(4.3.33) \quad \lambda_j \geq \frac{2\pi}{T} (\tilde{j} + \tilde{\sigma}) - 1 \geq 1 .$$

On déduit alors de (4.3.31) à (4.3.33) que, pour tout  $j \geq j_1$ , il existe  $\tilde{j} \in \mathbb{N}$  tel que :

$$(4.3.34) \quad \left| \lambda_j - \frac{2\pi}{T} (\tilde{j} + \tilde{\sigma}) \right| \leq \frac{C}{\frac{2\pi}{T}(\tilde{j} + \tilde{\sigma}) - 1} \leq \frac{C_0}{\tilde{j}}$$

Le corollaire s'en déduit en remarquant que, quitte à changer la constante  $C_0$ , on peut toujours absorber dans l'intervalle  $[\frac{2\pi}{T}(1+\sigma) - C_0, \frac{2\pi}{T}(1+\sigma) + C_0]$  un nombre fini de valeurs propres.

Remarque 4.3.6 : Le corollaire (4.3.5) a un caractère insatisfaisant car il ne dit pas s'il y a réellement des valeurs propres de  $A$  dans l'intervalle

$$(4.3.35) \quad I_j = \left[ \frac{2\pi}{T} (j + \tilde{\sigma}) - \frac{C_0}{j}, \frac{2\pi}{T} (j + \tilde{\sigma}) + \frac{C_0}{j} \right] .$$

On peut définir, pour étudier ce problème, une notion de multiplicité approchée en posant :

$$(4.3.36) \quad d_j = \text{Card}\{h; \lambda_h \in I_j\}$$

$\lambda_h$  étant la suite croissante des valeurs propres de  $A$  répétées suivant leurs multiplicité.

Il résulte immédiatement de la définition de (4.3.36) que :

$$(4.3.37) \quad d_j \leq N\left(\frac{2\pi}{T}(j + \tilde{\sigma}) + C_0\right) - N\left(\frac{2\pi}{T}(j + \tilde{\sigma}) - C_0 - 1\right)$$

On déduit alors de (4.2.29) que :

$$(4.3.38) \quad d_j = O(j^{n-1}), \quad j \rightarrow \infty .$$

Il est en fait possible de démontrer, sous des hypothèses supplémentaires raisonnables, l'existence d'un polynôme  $P_{n-1}$  de degré  $(n-1)$  et d'un entier  $j_0$  tel que, pour  $j \geq j_0$ , on ait :

$$(4.3.39) \quad d_j = P_{n-1}(j + \tilde{\sigma}) .$$

Dans le cas où  $n=1$ , on obtient ainsi l'existence de  $j_0$  tel que, pour  $j \geq j_0$ , on ait :  $d_j = 1$  . ■

NOTES ET COMMENTAIRES

Chapitre I : A l'exception du § 1.12, nous suivons la présentation du livre de Subin [SU]. Toutefois, dans ce livre, l'auteur écrit le chapitre consacré à ces questions postérieurement à l'étude des mêmes questions sur une variété compacte où il présentait les résultats de l'article de L. Hörmander [27]. Ici, nous avons fait une présentation ne nécessitant aucune connaissance préalable (hormis des connaissances d'analyse fonctionnelle et de théorie des distributions). Nous admettrons cependant un théorème classique de Caldéron-Vaillancourt sur la continuité  $L^2$  des opérateurs pseudodifférentiels dans la classe  $OPS_{0,0}^0$  (cf. par exemple le livre de R. Coifman et Y. Meyer [CO-ME]).

§ 1.2 : Pour les idées de base conduisant à la notion d'intégrale oscillante, on renvoie à L. Hörmander [26] et aux livres [DU], [CHA-PI] ou [TR]. La théorie classique des o.p.d. est due à Kohn-Nirenberg [30], L. Hörmander [25], et A. et J. Unterberger [39]. Elle a connu de grands développements depuis avec les travaux de R. Beals et C. Feffermann [6], R. Beals [2], L. Hörmander [28], A. Unterberger [40].

§ 1.4 : Le formalisme antiwick ne nous sera pas très utile pour la suite, mais nous l'avons utilisé ici pour donner une démonstration très simple de la continuité  $L^2$ . La continuité  $L^2$  des opérateurs de  $G_0^0$  résulte de la théorie classique mentionnée ci-dessus.

Pour l'étude fine de ces questions et des références, nous renvoyons à [CO-ME].

§ 1.5 : On a volontairement développé ici un cas très particulier étudié (en vue d'application à l'hypoellipticité) par V.V. Grusin [17] et dans un cadre voisin (en vue d'applications à la physique) par Grossmann-Loupias - Stein [16] ou plus récemment par A. Voros [41]. En fait des théories beaucoup plus générales ont été développées par l'école soviétique (cf. les références du livre de Subin [SU]), par R. Beals [2], D. Robert [32] ou, plus récemment, par L. Hörmander [29].

§ 1.6 : On suit ici l'approche du livre de Subin [SU]. On aurait pu également utiliser la théorie de l'interpolation holomorphe (cf. par exemple le livre de Lions - Magenes [LI-MA]). Notons que dans des classes d'opérateurs pseudodifférentiels très générales, l'étude des espaces de Sobolev naturellement associés est plus délicate (cf. l'article de R. Beals [5] qui travaille dans des classes

de L. Hörmander [28] ou l'article de N. Lerner [31] qui travaille dans les classes de A. Unterberger [40]).

§ 1.7 : Pour la théorie des opérateurs à indice, on pourra consulter le livre de Dunford - Schwartz [DU-SCH].

§ 1.8 : Ce paragraphe est développé dans un contexte plus général dans le livre de Subin [SU], chez Beals [2] ou chez Robert [32].

§ 1.10 : On a préféré détailler ici un calcul fonctionnel élémentaire pour les opérateurs autoadjoints à résolvante compacte. Ce n'est bien entendu qu'un cas particulier d'une théorie très générale (cf. Dunford - Schwartz [DU-SCH]).

§ 1.11 : Le théorème (1.11.1) est démontré dans un contexte plus général par D. Robert [32]. Antérieurement, dans le cas des opérateurs elliptiques sur une variété compacte, le résultat était connu depuis les travaux de R. Seeley [34].

Le théorème (1.11.2) est dû à D. Robert [33] (cf. également une extension de ce travail due à A.M. Charbonnel [8]) qui s'est inspiré de travaux de R. Strichartz [35].

§ 1.12 : Ce paragraphe est consacré à la présentation dans un cas particulier de résultats de R. Beals [3]. On donnera des applications de ce théorème au chapitre II. Pour une présentation de résultats voisins, nous renverrons au livre de Taylor [TA] ou à la monographie de R. Coifman et Y. Meyer [CO-ME].

Chapitre II : Le chapitre II est au départ tiré de notre article avec D. Robert [23] qui traite d'un cas plus général. On a profité du cas particulier considéré ici pour présenter une théorie plus élaborée (et en particulier une théorie des Fourier-Intégraux globaux "classiques" (ou homogènes)). Cette présentation a dans notre esprit surtout un intérêt pédagogique. Il est en effet probable que les résultats de ce chapitre (dans le cas homogène) se déduiraient des résultats généraux du livre L. Boutet de Monvel et V.V. Guillemin [BO-GU] (cf. également [7]) sur les opérateurs de Toeplitz, théorie qui contient le cas considéré ici et le cas des Fourier-Intégraux de L. Hörmander [26]. Toutefois, la compréhension de cette théorie est peut-être difficile pour beaucoup et nous présentons ici, sous une forme en principe self-contained, une théorie qui nous semble plus accessible aux analystes.

§ 2.1 : Nous avons (avec D. Robert) introduit cette classe dans un cadre plus général [23] où l'utilisation des classes de Asada-Fujiwara [1] était interdite. Elle a des analogies avec la classe de F.I.O introduite dans [27] pour les besoins

de la théorie spectrale. C'est dans l'article de J. Chazarain [11] que nous avons découvert tout l'intérêt de ces classes. Il faut préciser qu'il y a en plus dans les classes de Asada-Fujiwara l'introduction d'un petit paramètre  $h$ . Pour l'utilisation de ces classes dans ce contexte, nous renvoyons à [11],[20],[21] et [33].

Le théorème d'inversion globale admis dans la démonstration du lemme (2.1.15) est démontré par exemple dans [SCH].

Le théorème (2.1.6) est admis. Sa démonstration [1] est basée, comme pour le théorème de Caldéron-Vaillancourt, sur le lemme de Cotlar (cf. [CO-ME]). On donnera cependant des démonstrations dans des cas particuliers (cf. Remarque 2.3.8, Corollaire 2.10.5). Remarquons enfin que les théorèmes de composition sont plus simples dans cette théorie que dans la théorie classique où on devait introduire la notion d'opérateurs proprement supportés.

§ 2.2 : L'analogie avec la théorie classique des Fourier-Intégraux [26] est évidente. On observera toutefois que l'absence d'homogénéité oblige à faire des hypothèses dans un voisinage convenable de  $C_\phi$  et d'utiliser des théorèmes d'inversion globale.  $\Lambda_\phi$  est une sous-variété Lagrangienne (cf. [DU]) de  $R^{4n}$  globalement difféomorphe à  $R^{2n}$ .

§ 2.3 : L'étude du cas particulier où la phase  $\phi$  est de la forme  $S(x,\theta)-y.\theta$  est intéressante car c'est la forme sur laquelle on tombe naturellement dans les applications (cf. chapitre III). L'étude de  $F^*F$  est ici particulièrement simple et donne le théorème de continuité  $L^2$  pour  $F$ . C'est selon ce schéma qu'on démontre la continuité  $L^2$  d'un Fourier-Intégral classique d'ordre 0 dans [26]. Le lemme (2.3.7) est un cas très particulier d'un théorème de Segal. On peut remplacer  $\mathcal{F}$  par un élément quelconque  $U$  du groupe métaplectique (cf. [LE],[28]) (revêtement à 2 feuillets du groupe symplectique) et on obtient alors que  $U^{-1} B U$  est un o.p.d. dont le symbole de Weyl  $\tilde{b}$  est défini par  $\tilde{b}(x,\xi) = b(\chi_u^{-1}(x,\xi))$  où  $\chi_u$  est la transformation symplectique associée à  $U$  (cf. [28]).

§ 2.4 : La classe des F.I.O globaux "classiques" introduite ici est celle qui est "isomorphe" à la théorie classique de [26] (cf. [7]). Remarquons toutefois qu'on ne peut manier ici des phases homogènes partout et qu'on doit introduire l'hypothèse d'homogénéité simplement dans un voisinage conique de  $C_\phi$ .

§ 2.5 : Ce paragraphe est repris tel quel de notre article avec D. Robert [23], à ceci près qu'on ne considère dans cet article que des phases de la forme considérée au § 2.3 (plus générales par ailleurs).

§ 2.6 : Le théorème d'Egorov ne nous servira pas dans la suite mais, comme c'est dans la théorie classique un des théorèmes qui est à la base de l'introduction de cette théorie (cf. par exemple [TA],[TR]), il nous a semblé intéressant d'en donner une démonstration dans le cadre considéré au § 2.3. La démonstration donnée ici est voisine de la démonstration originelle de ce théorème. Nous reviendrons sur ce théorème dans un cadre différent au § 2.10. Signalons des démonstrations de nature différente du théorème d'Egorov dans le livre de M. Taylor [TA] (et dans un cas particulier dans notre article [23] (en suivant une idée de R. Beals [4])).

§ 2.8 : La proposition 2.8.1 figure toujours sous une forme ou une autre dans toute théorie de F.I.O. La démonstration que nous donnons ici est très simple. Elle s'appuie sur le théorème de Beals, la continuité dans des chaînes d'espaces des F.I.O considérés et la proposition (2.2.7). Elle suit la démarche de notre article avec D. Robert [23]. Cependant, elle ne donne pas le symbole principal de l'opérateur pseudodifférentiel. Dans des cas particuliers (cf. [23]), on peut contourner cette difficulté. Dans le cas homogène (F.I.O globaux classiques), on redémontre cette proposition par une voie plus classique en s'appuyant sur des théorèmes de phase stationnaire (cf. § 2.9). Cette fois-ci, on n'a plus besoin d'avoir de théorèmes de continuité dans les  $B^s$  et en étudiant ensuite  $F * F$ , on pourra au contraire en déduire des théorèmes de continuité  $L^2$  pour  $F$ . L'avantage de cette approche est qu'on détermine le symbole principal de l'o.p.d. (formule 2.8.5). Ceci sera utilisé aux chapitres III et IV et permettra les développements du § 2.10.

§ 2.9 : Nous rappelons dans ce paragraphe les théorèmes classiques de la phase stationnaire et non stationnaire. Nous avons choisi de ne pas en donner les démonstrations détaillées, non qu'elles soient difficiles, mais parce qu'elles sont clairement exposées dans [CHA-PI] ou [DU]. Le théorème (2.9.4) est dû à Colin de Verdière. On peut en trouver une démonstration dans [10].

§ 2.10 : On présente ici la théorie des F.I.O globaux classiques. On s'est inspiré de l'article de L. Hörmander [26], en s'efforçant d'être self-contained et de ne pas parler des notions d'indice de Maslov et de Lagrangiennes.

Il faut cependant être conscient que ce choix a ses limites et qu'il faudrait recourir à toutes ces notions pour définir une notion de symbole principal

intrinsèque. Il a toutefois, pour les applications que nous avons en vue dans les chapitres qui suivent, peu d'inconvénients (si ce n'est l'interprétation du nombre  $\sigma$  apparaissant dans le théorème 4.3.2) et a l'avantage (je l'espère) de ne pas décourager les analystes.

Chapitre III :

§ 3.1 : La démarche suivie est classique. Utilisant la formule de composition d'un o.p.d. et d'un F.I.O., on cherche  $e^{-itA}$  sous la forme d'un F.I.O. satisfaisant à  $(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + A) e^{-itA} = 0$  pour  $|t|$  petit. Utilisant l'homogénéité, on met en évidence une équation eiconale et des équations de transport que l'on résout grâce à la théorie d'Hamilton-Jacobi. L'approximation pour  $t$  grand se fait en utilisant les propriétés du groupe à un paramètre  $t \rightarrow e^{-itA}$ .

Remarquons qu'ici on n'a pas besoin d'une phase linéaire en  $t$  comme dans l'article de L. Hörmander [27]. Ceci s'explique par le fait que l'on n'étudiera pas le noyau distribution des projecteurs  $P_\lambda$  sur l'espace engendré par les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres inférieures à  $\lambda$ .

§ 3.2 : On rappelle ici l'essentiel de la théorie de Hamilton-Jacobi. Pour une exposition "qualitative" de cette théorie, nous renvoyons aux livres de mécanique mais surtout à l'excellent livre de Arnold [AR]. On a ici précisé les résultats en introduisant des estimations dans des classes de symboles. L'exposition donnée ici s'inspire des articles de Y. Chazarain [11] et de Helffer-Robert [20], [21] qui travaillent dans des classes différentes (adaptées au problème  $h$  petit).

§ 3.3 : Dans le cadre classique, nous renvoyons au livre de Guillemin-Sternberg [GU-STE]. Le calcul fait ici n'a été possible que grâce à la proposition (2.8.3). Dans notre article avec D. Robert [23], on verra une approche très différente donnant des informations moins précises mais susceptibles de marcher dans un contexte plus général.

§ 3.4 : On trouvera les formules démontrées ici par exemple dans le livre de Fedoriuk et Maslov [FE-MA].

Chapitre IV : Ce chapitre expose dans un cas particulier une partie de nos résultats avec D. Robert [23].

§ 4.1 : Des théorèmes de ce type ont été montrés dans le cadre des o.p.d. sur une variété compacte par J. Chazarain [10]. Pour des résultats voisins

(comportement semi-classique), nous renvoyons à J. Chazarain [11] et à nos articles avec D. Robert [20], [21].

§ 4.2 : Ce paragraphe est consacré à l'étude de  $N(\lambda)$ . Conceptuellement, il est assez proche de l'article de L. Hörmander [27]. Le théorème principal est le théorème (4.2.10). La nouveauté (par rapport aux articles antérieurs à 1980) est que l'on obtient par cette méthode le meilleur reste.

Initialement, on peut renvoyer pour ce type de théorème aux travaux de Tulovskii - Subin [38] (cf. également [SU]), à la thèse de D. Robert [32] et au travail de L. Hörmander [29] qui obtiennent des contrôles du reste moins précis (mais dans un cadre plus général) par des méthodes pseudodifférentielles; Dans le cas des opérateurs différentiels, ce théorème a d'abord été obtenu par des méthodes très différentes par Guillemin-Sternberg [19] et Helffer-Robert [20]. L. Boutet de Monvel [7] a également expliqué comment on pourrait le déduire de la théorie des opérateurs de Toeplitz [BO-GU]. Une autre technique (qui ne donne pas le meilleur reste) consiste à trouver un opérateur unitaire qui par conjugaison transporte le problème sur  $R^n$  en un problème sur une variété compacte. Cette technique est présentée dans l'article de Guillemin - Sternberg [19] et apparaît également, dans le cas  $n=1$ , dans des travaux plus anciens de Gelfand (communication personnelle du professeur Subin). Elle est détaillée et explicitée dans un exposé de M. Gouleau [15]. Tout récemment, D. Robert nous a transmis des preprints de H. Tamura [36],[37] dont les méthodes, différentes, s'appliqueraient à des cas non homogènes. Signalons enfin des travaux de Feigin (cf. [44]) dont l'existence nous a été signalée par le professeur Subin et des articles en préparation de A. Mohammed (cf.[45]). Nous avons détaillé ici la démonstration du théorème Taubérien dû à L.Hörmander [27] et Duistermaat - Guillemin [14]. Cette démonstration n'est qu'esquissée dans les articles mentionnés et nous avons profité ici d'une rédaction d'un exposé de D. Robert à Nantes.

§ 4.3 : Compte tenu des théorèmes démontrés précédemment, nous avons suivi la démonstration de Y. Colin de Verdière [12] (cf. également [43]) pour le cas d'une variété compacte. Le théorème démontré ici est un cas particulier d'un théorème plus général démontré dans notre article avec D. Robert [23].

Toutefois, les résultats obtenus au §3.3 nous ont permis de présenter, dans le cas particulier considéré ici, une démonstration un peu différente. Signalons que dans notre article avec D. Robert [23], d'autres théorèmes sont démontrés traitant du cas non périodique.



Comme nous l'avons remarqué, le cas  $n=1$  est un cas où les hypothèses de ce paragraphe sont automatiquement vérifiées. On a développé avec D. Robert [24] des résultats beaucoup plus fins correspondant à ce cas et qui généralisent des résultats de A. Voros [42] sur l'oscillateur quartique.

ARTICLES DE RÉFÉRENCE

- [1] K. ASADA - D. FUJIWARA. On some oscillatory transformation in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , Japan J. Math. 4 (1978) p 299-361.
- [2] R. BEALS. A general calculus of pseudo-differential operators Duke Math. J.42 (1975) p 1-42.
- [3] R. BEALS. Characterization of pseudo-differential operators and applications. Duke Math. J.44 (1977) p 45-57.
- [4] R. BEALS. Propagation des singularités pour des opérateurs du type  $D_t^2 - \square_b$ . Conf. n°19. Journées EDP St Jean de Monts 1980.
- [5] R. BEALS. Weighted distribution spaces and pseudo-differential operators, Journal d'Analyse Mathématique (1981).
- [6] R. BEALS - C. FEFFERMAN. Spatially inhomogeneous pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), p 1-24.
- [7] L. BOUTET DE MONVEL. Opérateurs à coefficients polynomiaux, espace de Bargman et opérateurs de Toeplitz, Sémin. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1980. Exposé n°11 bis.
- [8] A.M. CHARBONNEL. Calcul fonctionnel à plusieurs variables pour des opérateurs pseudo-différentiels sur  $\mathbb{R}^n$ . Israël Journal of Math. Vol.45, n°1, 1983, p.69-89.
- [9] A.M. CHARBONNEL. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. CRAS t. 293 (21 septembre 1981).
- [10] J. CHAZARAIN. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. Inv. Math. 24 (1974) p 65-82.
- [11] J. CHAZARAIN. Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique. Comm. in P.D.E. n°6 (1980), p595-644.

## BIBLIOGRAPHIE

- [12] Y. COLIN DE VERDIERE. Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques, *Comm. Math. Helvetici* 54 (1979) p 508-522.
- [13] Y. COLIN DE VERDIERE. Spectre conjoint d'opérateurs qui commutent. *Duke Math. J.* 46, 1979, p 169-182.
- [14] J.J. DUISTERMAAT - V.V. GUILLEMIN. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Inventiones Math.* 29 (1975) p 39-79.
- [15] M. GOULEAU. Liens entre la théorie spectrale des opérateurs elliptiques globaux sur  $R^n$  et des opérateurs elliptiques sur une variété compacte. *Seminaire de Nantes* 80-81.
- [16] A. GROSSMANN - G. LOUPIAS et E.M. STEIN. An algebra of pseudo-differential operators and quantum mechanics in phase space. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 18.2 (1968), p 343-368.
- [17] V.V. GRUSIN. Pseudo-differential operators on  $R^n$  with bounded symbols. *Functional Analysis and Applications* (1970).
- [18] V.V. GUILLEMIN. Lectures on spectral properties of elliptic operators, *Duke Math. J.* (1977) p 485-517.
- [19] V.V. GUILLEMIN - S. STERNBERG. The metaplectic representation, Weyl operators and spectral theory. *Journal of Functional Analysis* 81-82.
- [20] B. HELFFER - D. ROBERT. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Ann. Inst. Fourier* tome XXXI Fasc 3 (1981) p 169-223.
- [21] B. HELFFER - D. ROBERT. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Pise. Série IV, Vol. IX n°3* (1982).
- [22] B. HELFFER - D. ROBERT. Comportement asymptotique précisé du spectre d'opérateurs globalement elliptiques dans  $R^n$ . *Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz* 1980-81. Exposé n°11
- [23] B. HELFFER - D. ROBERT. Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs

## BIBLIOGRAPHIE

- pseudodifférentiels sur  $\mathbb{R}^n$ . Comm. in P.D.E. (1982), 795-882.
- [24] B. HELFFER - D. ROBERT. Asymptotique des niveaux d'énergie pour des hamiltoniens à un degré de liberté. Duke Math. Journal (1982) Vol. 49, n° 4.
- [25] L. HÖRMANDER. Pseudodifferential operators and hypoelliptic operators. Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.10 (1966) p 138-183.
- [26] L. HÖRMANDER. Fourier Integral operators I. Acta Math., 127 (1971) p 79-183.
- [27] L. HÖRMANDER. The spectral function of an elliptic operator Acta. Math.121 (1968) p 173-218.
- [28] L. HÖRMANDER. The Weyl calculus of pseudodifferential operators. Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), p 359-443.
- [29] L. HÖRMANDER. On the asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in  $\mathbb{R}^n$ . Arkiv för Math. 17 n°2 (1979), p 296-313.
- [30] J. KOHN - L. NIRENBERG. An algebra of pseudodifferential operators. Comm. Pure Appl. Math, vol 18 (1965) p 269-305.
- [31] N. LERNER. Sur les espaces de Sobolev généraux associés aux classes récentes d'opérateurs pseudodifférentiels. C.R.A.S. t 289 (26 Novembre 1979).
- [32] D. ROBERT. Propriétés spectrales d'opérateurs pseudo-différentiels. Comm. in P.D.E. 3 (1978) p 755-826.
- [33] D. ROBERT. Calcul fonctionnel sur les opérateurs admissibles et applications. Journal of Functional Analysis, Vol. 45, n°1 (1982).
- [34] R. SEELEY. Complex powers of an elliptic operator. Singular Integrals, Proc. Symp. Pure Math. 10, American Math. Society (1967), p 288-307.
- [35] R. STRICHARTZ. A functional calculus for elliptic pseudodifferential operators. Amer. J. of Math. 94 (1972) p 711-722.
- [36] H. TAMURA. Asymptotics formulas with remainder estimates for eigenvalues of Schrödinger operators. Comm. in P.D.E., Vol. 7 n°1, p. 1-54 (1982)

## BIBLIOGRAPHIE

- [37] H. TAMURA. Asymptotics formulas with Sharp remainder estimates for eigenvalues of elliptic second order operators . Duke Math.J. Vol. 49(1),1982, p.87-119.
- [38] V.N. TULOVSKII et M.A. SUBIN. on the asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in  $\mathbb{R}^n$  . Math. USSR Sbornik 21 (1973), p 565-583.
- [39] A. et J. UNTERBERGER. Opérateurs pseudodifférentiels. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-71 Exposé 3 et 4.
- [40] A. UNTERBERGER. Opérateurs métadifférentiels. Proceedings du Meeting des Houches (1979). Lecture Notes in Physics.
- [41] A. VOROS. An algebra of pseudodifferential operators and the asymptotics of quantum mechanics. J. of Funct. Analysis 29 n°1 (1978) p 104-132.
- [42] A. VOROS. Oscillateur quartique et méthodes semi-classiques. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-80 Exposé n°6.
- [43] A. WEINSTEIN. Asymptotics of eigenvalue. Cluster for the Laplacian plus a potential. Duke Math. J.44 (1977) p 883-892.
- [44] V.I. FEIGIN. Sharp estimates of the remainder in the spectral asymptotic for pseudodifferential operators in  $\mathbb{R}^n$ ; Funct. Anal. Appl. (16)(3),1982, p.88-89.
- [45] A. MOHAMMED. Théorie spectrale pour des opérateurs pseudodifférentiels. Thèse à Nantes (1983).

OUVRAGES DE RÉFÉRENCE

- [AR] V. ARNOLD. Mathematical methods of mechanics, Springer-Verlag.
- [BO-GU] L. BOUTET DE MONVEL - V.V. GUILLEMIN. The spectral theory of Toeplitz operators, Annals of Math. Studies 99 Princeton 1981.
- [CHA-PI] J. CHAZARAIN - A. PIRIOU. Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. Gauthier-Villars (Paris).
- [CO-ME] R. COIFMAN - Y. MEYER. Au-delà des opérateurs pseudodifférentiels, Astérisque 57 SMF(1978).
- [DU] J.J. DUISTERMAAT. Fourier. Integral operators, Courant Inst. Math. Sc. New-York Univ. (1973).
- [DU-SCH] N. DUNFORD - J.T. SCHWARTZ. Linear operators (I,II,III) Interscience.
- [FE-MA] M.V. FEDORIUK - V.P. MASLOV. Semi-classical approximation in quantum mechanics, Reidel 1981.
- [GU-STE] V.V. GUILLEMIN - S. STERNBERG. Geometric asymptotics, mathematical surveys n°14, A.M.S. (1977).
- [LE] J. LERAY. Analyse lagrangienne en mécanique quantique, cours au collège de France 76-77.
- [LI-MA] J.L. LIONS - E. MAGENES. Problèmes aux limites elliptiques non homogènes. Dunod (1968).
- [MA] V.V. MASLOV. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques (traduction) Dunod.

## BIBLIOGRAPHIE

- [SCH] J.T. SCHWARTZ. Non linear functional analysis. Gordon Breach (1969).
- [SU] M.A. SUBIN. Pseudodifferential operators and spectral theory. Nauka Moscow (1978) (in Russian).
- [TA] M. TAYLOR. Pseudodifferential and Fourier-integral operators (Tome I et II). Plenum 1980.

Bernard HELFFER  
Université de Nantes  
Département de Mathématiques  
2, Chemin de la Houssinière  
44072 NANTES Cedex (France)

## *ABSTRACT*

The purpose of this book is to give a self contained presentation of the spectral theory for globally elliptic differential operators on  $\mathbb{R}^n$  (generalizing the harmonic oscillator).

First we recall the theory of global pseudo-differential operators and the classical spectral theory. Then, we study classes of global Fourier-integral operators and present in a particular case results obtained in collaboration with D. Robert which are analogous for globally elliptic operators to the well known results for the elliptic operators on a compact manifold.