

Astérisque

La propagation des ondes

Astérisque, tome 111 (1984), p. 91-208

http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__111__91_0

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>



LA PROPAGATION DES ONDES

TABLE DES MATIÈRES

I. Introduction	94
II. Les paquets d'ondes	107
III. L'équation de Schrödinger	125
IV. Le spectre d'une onde	137
V. Le spectre, propriété locale	157
VI. Transformations canoniques linéaires	163
VII. Comparaison du spectre dynamique d'une fonction d'onde avec le front d'onde d'une distribution	174
VIII. Exemples de distributions et leurs spectres	190
Bibliographie	207

I. INTRODUCTION

La propagation des ondes est certainement, avec les mouvements célestes, l'un des premiers phénomènes physiques dont la fascination a poussé des hommes à en entreprendre l'étude, il y a bien longtemps. Ce phénomène a donc vraisemblablement contribué, pour une part décisive, à l'émergence de la pensée scientifique, et tout particulièrement en ce qui concerne la physique. En effet, les vagues de la mer, les ronds dans l'eau, sont des phénomènes qui restent égaux à eux-mêmes en tous temps et en tous lieux, et c'est précisément leur lancinante régularité qui exerce la fascination. Cette régularité, cette périodicité, que l'on retrouve dans les mouvements célestes, est justement la cause principale de la pensée mathématique : c'est la régularité de la rotation diurne, du passage des saisons, et des lunaisons qui a permis aux hommes de mesurer le temps, c'est-à-dire de le représenter mentalement par un nombre ; plus tard c'est la découverte des cordes vibrantes (phénomène ondulatoire par excellence) qui a fourni à Pythagore l'argument le plus séduisant de sa philosophie, puisqu'il permettait de réduire (1) l'harmonie musicale, c'est-à-dire quelque chose que l'on attribuait à la sensibilité de l'artiste, à une loi mathématique également très belle par sa simplicité.

Aujourd'hui, les phénomènes ondulatoires sont la base même de toute la physique : la découverte de la nature ondulatoire de la lumière, puis des ondes hertziennes, et enfin de la mécanique quantique nous ont amenés à concevoir toute la matière comme une agitation perpétuelle de nature ondulatoire qui seule peut expliquer, lorsqu'on n'en retient que la structure macroscopique, les formes qu'elle prend dans l'univers que nous observons. C'est précisément une étude

(1) Ah ! que ce mot est devenu lourd de sens !

macroscopique de la propagation des ondes que nous souhaitons entreprendre ici. Comme il apparaîtra très clairement dans la suite, cette étude macroscopique n'est rien d'autre, au fond, qu'une nouvelle manière d'envisager le passage à la limite de la mécanique quantique à la mécanique classique, mais avec un point de vue mathématique radicalement différent de ceux employés par les classiques (notamment Hadamard, puis Hörmander). Commençons par donner une idée de ce que nous entendons par "étude macroscopique".

Supposons que nous observions des ronds dans l'eau ; après tout, il est bien connu que toute théorie scientifique peut développer, et développe en fait, ses concepts à partir de quelques exemples simples : c'est ainsi que la théorie des probabilités, entre autres, peut être expliquée entièrement, y compris dans ses aspects les plus raffinés, uniquement à partir de l'examen du jeu de pile ou face. Notre jeu de pile ou face, ce sera les ronds dans l'eau. Plusieurs méthodes d'investigation peuvent être envisagées. Un physicien commencera par remarquer que l'ondulation n'affecte qu'une couronne circulaire, la surface de l'eau restant calme à l'extérieur de cette couronne, que les ondulations sont formées de vaguelettes successives circulaires et équidistantes (la distance radiale entre deux crêtes successives varie peu). Puis, il notera les paramètres qui lui paraissent caractéristiques du système : les rayons, intérieur et extérieur, de la couronne circulaire, ainsi que la distance radiale entre deux crêtes consécutives, ou longueur d'onde. Enfin, il observera à l'aide d'instruments de mesure que les deux rayons, ainsi que la longueur d'onde, sont approximativement proportionnels au temps qui s'est écoulé, pourvu que ce temps ne devienne pas trop long.

Un mathématicien (classique) aura une attitude très différente. Après avoir observé les ronds pendant quelque temps, il tentera, comme le physicien, de dégager quelques paramètres significatifs. Mais il n'y parviendra pas, parce que la distance radiale (par exemple) entre deux crêtes consécutives ne sera pas toujours exactement la même pour tous les intervalles, ou encore parce que les

rayons de la couronne ne pourront pas être définis de façon bien nette, car sur le bord de la couronne, les ondulations ne disparaissent pas brusquement, mais s'évanouissent insensiblement. Déçu par cette réalité qui refuse sa loi, blessé dans son amour-propre, il reconstruira un monde idéal où les ondes n'auront plus rien à voir avec les ronds dans l'eau, car ce seront des classes d'équivalence, modulo une relation assez complexe, de triplets $(J, \{\alpha_{jr}\}_{j \in J, r \in \mathbb{N}}, \{\omega_j\})$ où J est un ensemble fini et les $\{\alpha_{jr}\}_{j \in J, r \in \mathbb{N}}, \{\omega_j\}_{j \in J}$ des familles de fonctions sur un certain ensemble. "Mais au moins", dira-t-il pour se justifier, "avec des ondes comme celles-ci, je peux définir la longueur d'onde en un point, même si elle est variable".

Notre lecteur connaît certainement l'un et l'autre de ces deux personnages venus méditer au bord de l'eau, et connaît certainement leur dispute, et les arguments de cette dispute. D'une part, l'homme pratique que, selon l'autre, les raisonnements hasardeux mènent tout droit à l'aventure, et d'autre part le formaliste obsessionnel qui selon le premier ne peut produire qu'un verbiage abscons. Ces deux personnages ont eu bien des velléités de rencontre, voire de collaboration pluridisciplinaire, mais aveuglés soit par la passion, soit par le poids des habitudes, ils ne se sont jamais compris. Nous, par contre, c'est-à-dire toi, lecteur, devant cette page, et moi, qui l'ai remplie jadis, nous pouvons les observer sans être concernés par toutes ces faiblesses humaines, et porter sur eux un regard d'une objectivité absolue. Nous allons alors tenter de comprendre l'origine de leurs difficultés, et profiter ainsi de notre situation.

Par exemple, l'un des problèmes rencontrés par le second personnage, et qui n'a causé aucune difficulté au premier, était le suivant : la longueur d'onde, c'est-à-dire la distance (radiale) entre deux vaguelettes consécutives, pourrait varier sensiblement du bord intérieur de la couronne à son bord extérieur, d'où la tentation de la considérer comme une fonction de la distance au centre, ou plus généralement (en l'absence de symétrie circulaire) comme une fonction du point. Mais comment définir cela ? Car si l'on se place en un point bien précis,

il est impossible d'y trouver une succession de vaguelettes, seul moyen pourtant de définir la longueur d'onde ; on peut se trouver juste sur la crête d'une vaguelette, mais la crête suivante se trouve en un autre point, où la longueur d'onde est censée pouvoir être différente ! Le physicien résoud ce problème d'une manière bien simple : pour lui, le point est une position que l'on repère par des mesures, et qui est donc entachée d'une incertitude ; le "point" est en réalité une tache, c'est une "petite région". Si cette petite région contient une succession de vaguelettes, et que celles-ci y restent à peu près équidistantes, la valeur (également entachée d'incertitude) de la longueur d'onde y est bien définie. Mais un tel raisonnement est totalement inaccessible au mathématicien de type classique. Voici un autre problème à propos des ronds dans l'eau : le "bord" de la couronne, avons-nous dit, n'est pas un cercle limitant une région où les vagues ont une hauteur non nulle et une autre où l'eau est calme ; en fait, on passe progressivement d'une région où les vagues ont une hauteur non négligeable à une région où elles ont une hauteur négligeable ; le "bord" est alors défini, mais avec une certaine incertitude, si l'épaisseur de la région intermédiaire est négligeable. Ou encore : au bout d'un temps trop long, les ronds dans l'eau finissent par être trop étalés et aplatis, de sorte que les rayons ou la longueur d'onde perdent leur signification, mais il est impossible de dire qu'il existe un instant précis t_0 avant lequel telles ou telles propriétés sont exactement vérifiées, car les propriétés commencent à s'altérer dès le début.

En conclusion, ce qui est anxiogène pour le mathématicien classique, et même insupportable puisqu'il finit par fuir le réel pour un monde idéal (celui des mathématiques "pures", par opposition à celles qui sont impures, c'est-à-dire souillées par le péché de l'incertitude et de l'approximation) c'est la contradiction entre le concept formel de nombre, et le concept physique qui ne voit dans le nombre qu'un résultat de mesure intrinsèquement entaché d'erreur. Cette contradiction n'a cessé de s'amplifier depuis près d'un demi-siècle, la mathématique devenant de plus en plus axiomatique et abstraite. Les physiciens-

théoriciens ont fait face bien souvent en renonçant à la rigueur logique que la mathématique formelle aurait permise car celle-ci avait acquis une lourdeur prohibitive. Les mathématiciens, soucieux avant tout de rigueur, ont choisi l'axiomatique et se sont réfugiés dans l'abstraction. Tout le monde sait que le refus des faits ne peut mener qu'à l'aggravation de la contradiction car ce sont toujours les faits qui ont le dernier mot. Mais aujourd'hui, cette contradiction peut être résolue par le dépassement de la mathématique formelle classique. Ce dépassement consiste à lui ajouter cette contradiction elle-même sous la forme de la pluralité des modèles (1). Il devient alors possible, en jouant sur l'existence simultanée de deux modèles d'une même théorie mathématique, l'un appelé standard et l'autre non-standard, de produire des concepts extraordinairement proches des idées heuristiques de la physique théorique, qui en préservent le caractère concret et qui en même temps gardent intacte la rigueur logique que prétendait apporter la mathématique formelle. Par exemple, la notion de halo traduit parfaitement le concept physique dont nous parlions plus haut, qui ne voit dans le nombre qu'un résultat de mesure intrinsèquement entaché d'erreur.

Nous sommes maintenant en état de comprendre en quoi va consister l'étude macroscopique d'une onde : lorsque la longueur d'onde est trop petite pour être distinguée à l'oeil nu, on ne peut plus distinguer non plus les vagues individuelles. Mais on observera des phénomènes à grande échelle, dont le comportement sera le résultat du mouvement ondulatoire microscopique. Ces phénomènes macroscopiques seront caractérisés par un certain nombre de paramètres (également macroscopiques par leur grandeur numérique) sous-tendus par la structure microscopique invisible. Par exemple, l'observation de la lumière ne nous permet pas de voir les vagues électromagnétiques. Nous ne distinguons que l'intensité lumineuse, c'est-à-dire la distribution de l'énergie dans l'espace.

(1) Nous nous référons ici à la théorie des modèles. Voir par exemple ROBINSON Non Standard Analysis Chapitre I.

Cette intensité est un des paramètres macroscopiques. Mais il est bien connu que le déplacement d'une onde met en évidence un autre paramètre, le vecteur d'onde ou impulsion. C'est un vecteur dont la direction est celle du mouvement des vaguelettes, et dont le module est lié à la longueur d'onde par la relation de L. de Broglie :

$$(1) \quad |p| = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

où \hbar est la constante de Planck réduite ($\approx 1,054 \cdot 10^{-34}$ U.S.I.). Autrement dit, l'étude macroscopique fait abstraction de la forme des vaguelettes (peu importe, par exemple, qu'elles soient sinusoidales ou non) et de nombreux autres détails pour ne retenir que ce qui est essentiel, d'un certain point de vue, du moins. Il est alors possible de tenir un discours mathématique sur des objets (les ondes) dont le comportement exact, microscopique, est arbitrairement compliqué. A l'inverse, la mathématique classique est obligée le plus souvent (pas toujours) soit de n'envisager que des ondes typiques, déterminées a priori par un petit nombre de paramètres (comme la célèbre onde plane monochromatique), soit de construire ad hoc des objets abstraits à l'aide de triplets et de classes d'équivalence. Il va de soi, après ce que nous avons dit, que les paramètres macroscopiques n'ont aucune signification à l'échelle microscopique ; par exemple, dans une onde irrégulière où les vaguelettes ne sont pas équidistantes, il peut y avoir un spectre d'impulsions, mais la notion même de longueur d'onde est impossible à définir. Nous avons déjà parlé du cas plus simple où la longueur d'onde est variable ; pour la définir, il fallait à l'intérieur de chaque point (c'est-à-dire, de chaque halo) une infinité de vaguelettes équidistantes, cette équidistance ne variant sensiblement que si on change de halo.

Ainsi l'étude macroscopique de l'optique ondulatoire aboutit à l'optique géométrique, et l'étude macroscopique de la mécanique ondulatoire à la mécanique

(1) Nous considérons ici des ondes quantiques ; on aurait une formule analogue pour des ronds dans l'eau vus de très haut, ou pour tout autre phénomène ondulatoire.

classique. Mais l'analyse non standard permet de connaître mathématiquement l'aspect macroscopique de n'importe quel système de la mécanique ondulatoire, alors que les études traditionnelles du passage à la limite lorsque \hbar est rendu nul devaient s'en tenir à des fonctions d'onde convenables. Ce dernier fait se manifeste de façon très parlante même sur les aspects les plus élémentaires de la théorie ; ainsi, la distribution de l'intensité lumineuse (ou de la probabilité de présence d'une particule) sera pour nous, en général, une mesure de Borel positive (ou une mesure de probabilité). Il est bien plus naturel, pour un physicien ou un probabiliste, de représenter une distribution d'intensité par une mesure de Borel que par une fonction, puisqu'on peut alors envisager des points focaux ou des caustiques avec le concept mathématique adéquat ; mais cela était impossible avec les méthodes traditionnelles. En effet, si $\omega(x)$ est une fonction d'onde non-standard, nous avons $\int |\omega(x)|^2 dx = 1$, et par conséquent, pour toute fonction standard φ , continue et à support compact, nous avons l'inégalité :

$$\left| \int |\omega(x)|^2 \varphi(x) dx \right| \leq \text{Sup} |\varphi|$$

qui signifie que $\varphi \mapsto \text{St}[\int |\omega(x)|^2 \varphi(x) dx]$ est une mesure de Radon, qui représente la distribution macroscopique de l'intensité ; le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel cette mesure est absolument continue, qui est un fermé, sera constitué par les caustiques ; et les points où cette mesure présente une masse seront des points focaux. C'est donc une considération extrêmement simple (elle tient en une inégalité évidente) qui nous permet une description naturelle et fort tentante, mais pourtant inaccessible à l'analyse classique.

La notion de paquet d'ondes imaginée par les créateurs de la mécanique quantique mérite alors un examen approfondi. Ce concept est, lui aussi, totalement inaccessible pour l'analyse classique ; c'est-à-dire que non seulement il est impossible de reproduire rigoureusement les raisonnements heuristiques de Louis de Broglie ou P.A.M. Dirac (voir [3] et [4]), mais il est même impossible d'en produire une définition qui garde un tant soit peu le caractère concret de la notion heuristique. D'ailleurs, il n'existe pas de pareille tentative qui

nous soit connue, l'abstraction et la lourdeur en étant de toute façon prohibitives. Les chapitres II et III de cet article se proposent de combler cette lacune ; ils sont consacrés à la définition et à l'étude des propriétés symplectiques et de propagation des paquets d'ondes. Mais avant de les aborder, il serait bon de commencer par quelques considérations élémentaires et tout à fait classiques, que l'on pourra trouver par-ci, par-là, dans la bonne littérature (par exemple [2], pages 62 à 68).

A cause de l'impossibilité mathématique d'envisager les paquets d'ondes d'une manière générale, on a souvent recouru à l'examen de cas particuliers avec lesquels il était possible d'effectuer des calculs explicites. Nous allons donc examiner des solutions de l'équation de Schrödinger dans le vide :

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u$$

où $\hbar \approx 10^{-34}$ U.S.I. est la constante de Planck réduite, qui ont la forme gaussienne ; puisque l'interprétation probabiliste nous impose la condition

$\int |u(t, x)|^2 dx = 1$, nous allons prendre comme valeur initiale

$$u(0, x) = (\pi\epsilon)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{2\epsilon}} + \frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x$$

n étant la dimension de l'espace ($x \in \mathbb{R}^n$). Pour le moment, nous ne faisons aucune hypothèse quant à l'ordre de grandeur du paramètre ϵ ; on constatera simplement que $|u(0, x)|^2$, qui doit représenter la densité de probabilité de présence, est une fonction gaussienne centrée en x_0 , dont l'écart-type est $\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$.

Pour calculer la valeur de la solution à l'instant t , on utilise la méthode classique de Fourier. Posons $\hat{u}(t, p) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int u(t, x) e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} dx$;

l'équation de Schrödinger se transforme alors en

$$i\hbar \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{|p|^2}{2m} \hat{u}$$

(avec $|p|^2 = \sum_{j=1}^n p_j^2$) qui est une équation différentielle ordinaire dépendant

du paramètre p . Celle-ci se résoud en

$$\hat{u}(t,p) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{|p|^2}{2m} t} \hat{u}(0,p).$$

Or, on peut calculer explicitement $\hat{u}(0,p) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int u(0,x) e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} dx$ et cela donne :

$$\hat{u}(0,p) = (\pi\eta)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{|p-p_0|^2}{2\eta} - \frac{i}{\hbar} x_0 \cdot (p-p_0)}$$

donc également une gaussienne, mais avec l'écart-type $\sqrt{\frac{\eta}{2}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\epsilon}}$. Ainsi nous obtenons

$$\hat{u}(t,p) = (\pi\eta)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{|p|^2}{2m} t - \frac{|p-p_0|^2}{2\eta} - \frac{i}{\hbar} x_0 \cdot (p-p_0)}$$

utilisant l'identité $|p|^2 = |p-p_0|^2 + 2p \cdot p_0 - |p_0|^2$ et posant $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\eta} + \frac{i}{\hbar} \frac{t}{m}$, il vient :

$$\hat{u}(t,p) = (\pi\eta)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{|p-p_0|^2}{2\alpha} - \frac{i}{\hbar} (x_0 + \frac{t}{m} p_0) \cdot p + \frac{i}{\hbar} \frac{|p_0|^2}{2m} t + \frac{i}{\hbar} x_0 \cdot p_0}.$$

Nous pouvons maintenant revenir à $u(t,x)$ en appliquant la transformation de Fourier inverse :

$$u(t,x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int \hat{u}(t,p) e^{+\frac{i}{\hbar} p \cdot x} dp$$

qui peut elle aussi être calculée explicitement et nous donne :

$$u(t,x) = \left(\frac{\pi\beta}{\epsilon}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{4} - \frac{|x-x_0 - \frac{t}{m} p_0|^2}{2\beta} + \frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x - \frac{i}{\hbar} \frac{|p_0|^2}{2m} t}$$

avec $\beta = \frac{\hbar^2}{\alpha} = \epsilon + i\hbar \frac{t}{m}$; nous pouvons encore, dans l'exposant, séparer la partie réelle et la partie imaginaire pour obtenir :

$$u(t,x) = \left(\frac{\pi \hbar^2}{\epsilon}\right)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \hbar^2 \frac{t^2}{m^2}} \frac{|x-x_0 - \frac{t}{m} p_0|^2}{2}} + i \frac{\hbar t}{m} \frac{|x-x_0 - \frac{t}{m} p_0|^2}{2} + \frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x - \frac{i}{\hbar} \frac{|p_0|^2}{2m} t$$

de sorte que la densité de probabilité à l'instant t est :

$$|u(t,x)|^2 = \left[\frac{\pi(\epsilon^2 + \hbar^2 \frac{t^2}{m^2})^{-\frac{n}{2}}}{\epsilon} \right] e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \hbar^2 \frac{t^2}{m^2}} \frac{|x-x_0 - \frac{t}{m} p_0|^2}{2}}$$

On voit immédiatement que c'est une gaussienne centrée au point $x_0 + \frac{t}{m} p_0$, et dont l'écart-type est

$$\sqrt{\frac{\epsilon^2 + \hbar^2 \frac{t^2}{m^2}}{2\epsilon}}$$

Le centre de cette distribution gaussienne s'est donc déplacé de x_0 en $x_0 + \frac{p_0}{m} t$; c'est une fonction linéaire de t , et le déplacement s'est donc effectué avec la vitesse constante $v_0 = \frac{p_0}{m}$; cela nous permet d'interpréter le paramètre p_0 comme la quantité de mouvement mv_0 de ce déplacement. Mais on remarquera que ce paramètre ne figure dans l'expression de $u(0,x)$ que par l'intermédiaire d'une exponentielle imaginaire, et par conséquent il disparaît dans la densité de probabilité $|u(0,x)|^2$. Nous mettons là le doigt sur un principe capital de la mécanique ondulatoire : la connaissance même exacte de la distribution de probabilité $|u(0,x)|^2$ à l'instant 0 ne détermine absolument pas son comportement macroscopique ultérieur ; pour cela, nous avons besoin du paramètre supplémentaire p_0 , l'impulsion qui est un paramètre macroscopique, mais qui reflète néanmoins la structure ondulatoire, microscopique, sous-jacente. Ce paramètre p_0 ne se manifeste macroscopiquement que dans le mouvement (le déplacement du paquet d'ondes) mais on peut aussi l'appréhender statiquement,

c'est-à-dire de manière instantanée, si on a accès à la structure microscopique de l'onde. En ce sens, on peut dire que la cause du mouvement observable préexiste sous la forme d'une structure microscopique ondulatoire (on pourra lire [2], chap. 8, § 13 : "Momentum and Energy, a Description of Causal Aspects of Matter").

Mais ce n'est pas tout. Les phénomènes liés à l'écart-type révèlent un autre aspect de la question. Si l'écart-type initial $\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ est macroscopique, égal à 1 par exemple, la densité de probabilité de présence aura un étalement macroscopique, qui d'ailleurs se conservera au cours du temps puisque dans

$$\sqrt{\frac{\epsilon^2 + \hbar^2 \frac{t^2}{m^2}}{2\epsilon}}$$

$\hbar \frac{t}{m}$ sera négligeable devant ϵ (sauf si $\frac{t}{m}$ devient énorme, très supérieur à 10^{34} USI). Les choses deviennent intéressantes si ϵ est petit. Dans ce cas, la distribution $|u(0,x)|^2$ est concentrée au voisinage immédiat de x_0 , le diamètre de ce voisinage étant de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$. Il se produit alors des phénomènes très différents selon que ϵ est petit par rapport à $\frac{\hbar}{m}$ ou non. Pour fixer les idées, rappelons que pour un électron $m \sim 10^{-30}$ kg, d'où $\frac{\hbar}{m} \sim 10^{-4}$ m²/sec; pour un proton $\frac{\hbar}{m} \sim 10^{-7}$ m²/sec, et pour un grain de poussière $\frac{\hbar}{m} \sim 10^{-22}$ m²/sec. Commençons par examiner le cas du grain de poussière; son diamètre étant, disons, de 0,1 mm, il est absurde de prétendre connaître sa position avec une précision de 1A°. Considérons le donc comme étant localisé par une distribution gaussienne avec $\sqrt{\epsilon} = 0,1\text{mm}$, d'où $\epsilon = 10^{-8}$ m². Au bout d'un temps t , l'écart-type devient $\sqrt{\frac{10^{-16} + 10^{-44} t^2}{2 \cdot 10^{-8}}}$ m, qui reste de l'ordre de 0,1mm tant que t ne devient pas très grand devant 10^{14} sec \approx 3 millions d'années (nous supposons évidemment que cette particule se trouve dans le vide, dans les espaces intergalactiques par exemple). Avant que les seules fluctuations quantiques aient porté l'incertitude sur la position à 1cm, il s'écoulerait 10^{16} sec, soit trois cents millions d'années. Nous pouvons donc considérer que pendant des temps finis, aucun

changement n'intervient dans le mouvement de ce grain. Voyons maintenant le cas du proton. Supposons que, à l'instant 0, nous connaissions sa position, c'est-à-dire la distribution de sa probabilité de présence, avec une précision de 0,1mm ; alors $\epsilon = 10^{-8} \text{ m}^2$. Tant que le temps reste inférieur à 0,1 sec, l'écart-type reste du même ordre ; dans les expériences sur la physique des particules, $\frac{1}{10}$ sec, c'est très largement l'éternité. Donc cette fois encore, il n'y a pas de changement notable : avec un "flou" de 0,1mm, le proton décrit un mouvement rectiligne et uniforme ; ce "flou" correspond à peu près à la trace qu'il peut laisser dans une chambre à bulles. Mais supposons au contraire qu'au lieu de la chambre à bulles, on ait utilisé des méthodes sophistiquées et qu'à l'instant 0 nous ayons réalisé, pour ce proton, une distribution de la probabilité de présence extrêmement aigüe, avec un écart-type de $1 \text{ A}^\circ = 10^{-10} \text{ m}$. Alors

$\epsilon = 10^{-20} \text{ m}^2$; à l'instant t , l'écart-type sera de l'ordre de $\sqrt{\frac{10^{-40} + 10^{-14} t^2}{10^{-20}}} = \sqrt{10^{-20} + 10^6 t^2}$; au bout de $t = 10^{-11}$ sec, qui est une durée tout de même longue à l'échelle nucléaire (10^{-23} sec. est le temps de réaction caractéristique), l'écart-type aura atteint 100 A° , c'est-à-dire que l'incertitude sur la position aura été multipliée par 100. Au bout de 10^{-10} sec, elle aura atteint 1000 A° . Avec un électron, la dispersion aurait atteint 100 A° au bout de 10^{-14} sec. (ce qui est encore long à l'échelle nucléaire).

Les conclusions que nous pouvons tirer de ces quelques exemples sont les suivantes :

a) le "paquet d'ondes" se propage, selon les lois (macroscopiques) prévues par la mécanique classique, pendant un temps qui peut être considéré comme long avant de se disperser,

b) ce temps est d'autant moins long que la dispersion initiale était plus faible (1).

(1) On peut considérer la dispersion progressive comme un effet d'une incertitude sur l'impulsion ; la conclusion b) est alors une expression du principe d'incertitude de Heisenberg.

L'analyse élémentaire que nous venons de présenter ne concernait que des distributions gaussiennes ; cela paraît tout à fait naturel puisqu'il s'agit d'une dispersion provenant de fluctuations aléatoires autour d'une moyenne. Mais le paquet d'ondes est une solution de l'équation de Schrödinger ; pour une particule dans le vide, avec l'hamiltonien $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$, le caractère gaussien de la dispersion est conservé, comme le montre la forme explicite de la solution en fonction du temps. Il n'y a plus aucune raison pour qu'il en soit encore ainsi avec un hamiltonien quelconque, en particulier si nous ajoutons un potentiel. Exiger que la probabilité de présence doive toujours présenter une dispersion de type exactement gaussien est incompatible avec une description des lois du mouvement en termes d'équations aux dérivées partielles linéaires. L'attitude qui a toujours prévalu a été de considérer des paquets d'ondes de dispersion arbitraire, mais dont l'écart-type est petit. D'où la nécessité d'une théorie mathématique où la probabilité de présence serait représentée par une véritable mesure de probabilité, exacte, mais macroscopiquement seulement (et ce serait une mesure ponctuelle de Dirac pour un paquet d'ondes localisé en un point), qui serait la trace macroscopique d'une solution exacte de l'équation aux dérivées partielles, et qui se propagerait selon les lois de la mécanique classique. Ce vieux rêve n'a jamais pu être réalisé, sauf de manière heuristique, c'est-à-dire non rigoureuse (voir [3], chap. V, ou [4] § 40, par exemple). Aujourd'hui, ce vieux rêve peut être réalisé grâce à l'analyse non standard.

Il existe cependant des travaux mathématiques que l'on peut interpréter légitimement, même si ce n'était pas leur intention consciente, comme une tentative de résoudre ce problème. Bien entendu, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, ces travaux n'ont pu être menés à bien qu'en s'abstrayant totalement de tout contenu physique. Que cette abstraction ait été consciente et intentionnelle (elle était de toute façon inévitable), ou qu'au contraire elle ait été l'effet de l'ignorance ou du mépris ne change rien, ni à la valeur de ces travaux, ni à leur rapport, qui reste d'ailleurs à analyser, avec le problème physique qui

nous concerne. Ainsi, des auteurs tels que Lars Hörmander, J. Bros, D. Iagolnitzer, Mikio Sato et ses élèves, K.G. Andersson, et bien d'autres, sont parvenus à démontrer des théorèmes de propagation en extrayant, par des procédés divers, une trace, une sorte de quintessence, des solutions d'équations aux dérivées partielles, de façon que cette trace se propage selon les lois de l'optique géométrique **dérivées** de l'équation. Cette trace, appelée selon les cas et selon les auteurs front d'onde, support essentiel, ou spectre singulier, ne peut pas s'interpréter correctement (malgré les tentatives, au demeurant passionnantes, de Iagolnitzer, par exemple) comme la trace macroscopique de quelque chose. Ces travaux parviennent à des résultats extrêmement puissants, mais irrémédiablement abstraits.

La lecture de cet article montrera tout ce que nous devons à ces travaux, bien que nous adoptions, pour notre part, un point de vue très différent. Au chapitre II, l'idée des "transformations intégrales canoniques" nous vient tout droit des opérateurs intégraux de Fourier, de Lars Hörmander. L'usage que nous en faisons au chapitre III s'inspire également de cet auteur. Enfin, la notion de spectre qui est définie au chapitre IV, et qui a été difficile à dégager car il a fallu bien des tâtonnements, n'aurait probablement pas pu être trouvée si nous n'avions pas été guidé en partie par celle, pré-existante, de front d'onde.

II. LES PAQUETS D'ONDES

Selon les principes de la mécanique ondulatoire, si $\psi(x)$ désigne la fonction d'onde d'un corpuscule, $|\psi(x)|^2$ est la densité de probabilité de le trouver au point x . La notion de paquet d'ondes, imaginée par les créateurs de la mécanique ondulatoire, avait pour but de décrire une situation où la particule se trouve, avec probabilité proche de 1, dans une petite région de l'espace, c'est-à-dire que presque toute la masse de $|\psi|^2$ est concentrée dans cette petite région. Mais en prenant le carré du module on perd une grande partie de

l'information, puisqu'on fait disparaître la dynamique ondulatoire de la fonction d'onde, qui est représentée par une exponentielle imaginaire. Les premiers auteurs avaient immédiatement remarqué que, pour que le paquet d'ondes possède une impulsion, il fallait que la petite région fût néanmoins grande à l'échelle de la longueur d'onde. Or, le concept mathématique de mesure, qui devait servir à la description rigoureuse d'une densité de probabilité dont toute la masse serait concentrée en un point ("fonction" de Dirac), est incapable de décrire la fonction d'onde correspondante car il faudrait pouvoir, pour cela, imaginer à l'intérieur de la masse ponctuelle de notre mesure de Dirac, une infinité d'oscillations. En revanche, une fonction non-standard d'un type particulier (à déterminer correctement) va nous permettre une description mathématique satisfaisante.

Ces paquets d'ondes devront donc être concentrés en un point (dans le halo de ce point) et y présenter une infinité d'oscillations. En outre, ils devront servir à l'étude des équations aux dérivées partielles et à la propagation de leurs solutions, et par conséquent les propriétés de ces paquets d'ondes devront s'adapter à la transformation de Fourier et aux transformations canoniques. C'est pourquoi, après divers tâtonnements, nous sommes arrivés aux définitions que voici :

DEFINITIONS. Soit ε un nombre infiniment petit (positif) donné une fois pour toutes, et que tout le monde aura reconnu.

1. Soit c une fonction appartenant à $*L^2(\mathbb{R}^n)$, de norme finie. Nous dirons que c varie lentement si pour tout multi-indice $\alpha \neq 0$, $(i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x})^\alpha c$ appartient à $*L^2(\mathbb{R}^n)$ et est de norme infiniment petite.

2. Soit c une fonction appartenant à $*L^2(\mathbb{R}^n)$ dont la norme n'est ni infiniment grande, ni infiniment petite (ce que nous noterons $\|c\| \sim 1, \|c\|$ est du même ordre que 1). Nous dirons que c est concentrée en un point x_0 (standard) si pour tout multi-indice $\alpha \neq 0$, $(x-x_0)^\alpha c$ appartient à $*L^2(\mathbb{R}^n)$ et est de norme infiniment petite.

3. Un paquet d'ondes sera alors une fonction de la forme

$$u(x) = c(x)e^{+\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x}$$
, où c est à la fois une fonction qui varie lentement et qui est concentrée en un point x_0 , et où p_0 est un élément de \mathbb{R}^n .
Le couple (x_0, p_0) s'appellera le spectre dynamique du paquet d'ondes ; x_0 est la position et p_0 l'impulsion.

4. Nous dirons que le paquet d'ondes u est normalisé (ou normé, ou unitaire) si $\|u\| = 1$.

Remarques. Le choix de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ comme espace fonctionnel de base est motivé par bien des raisons. Tout d'abord par le fait que dans la mécanique quantique, les fonctions d'onde sont de carré intégrable et que cela y revêt une signification physique très profonde, qu'il serait vain de prétendre contourner. D'un point de vue plus terre-à-terre, de pure technique mathématique, il est motivé par les propriétés de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ relativement à la transformation de Fourier (formule de Plancherel) qui jouera un très grand rôle dans toute la suite.

La définition que nous avons donnée pour les paquets d'ondes fait intervenir l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Cela peut paraître curieux pour une chose aussi locale qu'un paquet d'ondes ; mais nous pourrons toujours considérer un paquet d'ondes sur un ouvert standard de \mathbb{R}^n comme la restriction d'un paquet d'ondes euclidien ; ou mieux encore, comme le produit d'un paquet d'ondes euclidien par une fonction standard, C^∞ et à support compact contenu dans cet ouvert. Inversement, étant donné un paquet d'ondes sur un ouvert de \mathbb{R}^n , nous pourrons toujours le multiplier par une fonction C^∞ à support compact avant de le "plonger" dans l'espace euclidien. Pour l'analyse sur les variétés, ou pour l'intégration, il se pose aussi le problème du changement de variable ; que devient un paquet d'ondes après changement de variable ? Le théorème suivant y répond.

THÉORÈME 1. Soit D un difféomorphisme standard, d'un ouvert standard U de \mathbb{R}^n sur un ouvert standard V de \mathbb{R}^n . Soit u un paquet d'ondes identiquement nul

en dehors d'un compact standard K , contenu dans U ; alors $u \circ D^{-1}$ (prolongé par 0 en dehors de V) est aussi un paquet d'ondes sur \mathbb{R}^n . Si (x_0, p_0) est le spectre de u , celui de $u \circ D^{-1}$ est $(D(x_0), {}^t J_D(x_0) \cdot p_0)$, où $J_D(x_0)$ est la matrice jacobienne de D^{-1} au point x_0 , et ${}^t J_D(x_0)$ sa transposée.

Démonstration. Posons $v = u \circ D^{-1}$; v est lui aussi à support compact standard, et si $u(x) = c(x) e^{+\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x}$, nous aurons $v(y) = c \circ D^{-1}(y) e^{+\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot D^{-1}(y)}$.

Si nous introduisons la fonction

$$d(y) = c \circ D^{-1}(y) \cdot e^{+\frac{i}{\hbar} [D^{-1}(y) - J_D(x_0) \cdot y] \cdot p_0}$$

nous pouvons écrire

$$v(y) = d(y) e^{+\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot J_D(x_0) \cdot y}.$$

Or, par définition de la transposée d'une matrice :

$$p_0 \cdot J_D(x_0) \cdot y = {}^t J_D(x_0) p_0 \cdot y.$$

En conséquence de quoi, la démonstration de notre théorème consiste à vérifier que $d(y)$ varie lentement et est concentrée en $y_0 = D(x_0)$. Que d appartienne à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est évident, puisqu'elle est à support compact. Examinons alors les dérivées successives de d ; on remarquera que la fonction $D^{-1}(y) - J_D(x_0) \cdot y$ a pour point critique y_0 , et s'écrit donc $C^{\text{te}} + |y - y_0|^2 \chi(y)$, où χ est une fonction différentiable dans tout V (et standard). Un calcul rapide montre que les dérivées

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^\alpha \cdot e^{+\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot [D^{-1}(y) - J_D(x_0) \cdot y]}$$

sont toutes de la forme

$$[(y - y_0)^\alpha R_0(y) + \sum_{k=1}^N \hbar^k R_k(y)] e^{+\frac{i}{\hbar} [D^{-1}(y) - J_D(x_0) \cdot y] \cdot p_0}$$

où les R_k ($k = 0, \dots, N$) sont toutes des fonctions standard dérivables. Par ailleurs, les dérivées de $c \circ D^{-1}$ sont toutes de la forme

$$\sum_k \sum_\beta [(i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^\beta c] \circ D^{-1}(y) \hbar^k R_{\beta, k}(y)$$

où les $R_{\beta,k}$ sont encore des fonctions standard différentiables ; or, dans le compact $D(K)$, les fonctions R_k et $R_{\beta,k}$ sont évidemment majorées par des constantes standard ; si nous appliquons alors successivement la formule de Leibniz, puis l'inégalité de Minkowski pour les normes dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, nous obtenons le résultat voulu.

Pour prouver que les $\|(y-y_0)^{\alpha}d\|$ sont infiniment petits, il suffit de prouver que les $\|[D(x)-D(x_0)]^{\alpha}c\|$ le sont (cela se voit en faisant le changement de variable $x = D^{-1}(y)$ dans l'intégrale $\int_{D(K)} |(y-y_0)^{\alpha}d(y)|^2 dy$). Mais puisque D est différentiable, la formule de Taylor nous dit que :

$$D(x) - D(x_0) = M(x) \cdot (x-x_0)$$

où $M(x)$ est une matrice (carrée d'ordre n) dont les coefficients sont des fonctions standard différentiables sur U , qui sont donc majorées sur K par des constantes standard. A nouveau, il n'y a plus qu'à appliquer l'inégalité de Minkowski.

Le théorème 1 est ainsi démontré.

On pourra noter que la propriété, pour un paquet d'ondes, d'être normé est conservée si D est une isométrie ; la notion de paquet d'ondes normé pourra donc s'étendre aux variétés riemanniennes.

Le lecteur curieux ou sceptique aura pu trouver bien exigeantes les définitions 1 et 2. Pourquoi ne pas prendre tout simplement des fonctions à supports compacts comme dans le théorème 1 ? Il est vrai que pour l'usage que nous en ferons, cela conviendrait, d'autant plus que cet usage est purement technique, un peu à la manière des espaces $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz ; en effet, les paquets d'ondes ne sont pas les objets que nous voulons étudier dans cet article, mais constituent un outil d'analyse pour ces objets. Les propriétés que nous avons choisi de retenir ont pour principale justification la commodité. Ainsi, un exemple frappant de cette commodité est fourni par le théorème suivant, qui montre que les propriétés 1 et 2 s'échangent (et se conservent donc conjointement) par la transformation de Fourier.

Contrairement à ce qui se passe en Analyse classique, il existe en Analyse non-standard plusieurs sortes de transformations de Fourier, aux propriétés très différentes. Ainsi, nous ferons usage des deux transformations de Fourier suivantes :

- la première, que nous appellerons la transformée de Fourier standard, est simplement l'extension de la classique :

$$\mathcal{F}.f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

- l'autre, que nous appellerons transformation de Fourier des physiciens, ou non-standard :

$$\hat{f}(p) = (2\pi \hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} f(x) dx .$$

Toutes deux sont des isométries de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^n)$. (Formule de Plancherel).

THÉOREME 2. Si u est un paquet d'ondes de spectre (x_0, p_0) , sa transformée de Fourier des physiciens, \hat{u} , est aussi un paquet d'ondes, de spectre $(p_0, -x_0)$.

Démonstration : Il est bien connu que

$$\widehat{ih \frac{\partial}{\partial x} \alpha c}(p) = p^\alpha \hat{c}(p)$$

$$\widehat{x^\alpha c}(p) = (i\hbar \frac{\partial}{\partial p})^\alpha \hat{c}(p) .$$

Si notre paquet d'ondes s'écrit

$$u(x) = c(x_0 - x) e^{\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x}$$

nous aurons :

$$\hat{u}(p) = e^{\frac{i}{\hbar} x_0 \cdot p_0} \hat{c}(p_0 - p) e^{-\frac{i}{\hbar} x_0 \cdot p} .$$

Or, \hat{c} possède bien les propriétés nécessaires (elle varie lentement et est concentrée en 0) puisque d'après la formule de Plancherel :

$$\begin{aligned} \|\hat{c}\| &= \|c\| \\ \|(i\hbar \frac{\partial}{\partial p})^\alpha \hat{c}\| &= \|x^\alpha c\| \\ \|p^\alpha \hat{c}\| &= \|(i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^\alpha c\| . \end{aligned}$$

On peut donner un théorème analogue pour les transformations de Fourier partielles :

THÉOREME 2a. Soit I une partie de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et J son complémentaire. La transformation de Fourier partielle associée à cette partition sera :

$$\hat{u}(x_I, p_J) = (2\pi\hbar)^{-\frac{l}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{j \in J} x_j p_j} u(x) dx_J$$

où (x_I, p_J) est l'élément de \mathbb{R}^n obtenu en remplaçant dans (x_1, x_2, \dots, x_n) les x_j tels que $j \in J$ par p_j , tandis que les x_j tels que $j \in I$ restent inchangés, où l est le nombre d'éléments de J , et où $dx_J = \prod_{j \in J} dx_j$ (autrement dit, l'intégration porte seulement sur les variables x_j telles que $j \in J$).

Alors, si u est un paquet d'ondes de spectre (x_0, p_0) , $\hat{u}(x_I, p_J)$ est aussi un paquet d'ondes, de spectre (x_1, p_1) avec $x_{1j} = x_{0j}$, $p_{1j} = p_{0j}$ lorsque $j \in I$, et $x_{1j} = p_{0j}$, $p_{1j} = -x_{0j}$ lorsque $j \in J$. En outre $\|\hat{u}\| = \|u\|$.

La démonstration est, à quelques modifications mineures près, la même que pour le théorème précédent.

Ainsi, la propriété d'être un paquet d'ondes est conservée par la transformation de Fourier des physiciens, complète ou partielle. Elle ne serait évidemment pas conservée par la transformation de Fourier standard. Ces propriétés d'invariance peuvent déjà nous faire soupçonner la nature symplectique des paquets d'ondes ; ce soupçon va maintenant se confirmer, car nous allons voir que le fait d'être un paquet d'ondes est aussi invariant par des transformations intégrales beaucoup plus générales que la transformation de Fourier.

DEFINITION. Soit χ une transformation canonique standard, libre, d'un ouvert Ω de l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur un autre Ω' , et soit ϕ sa fonction génératrice, telle que :

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \\ q &= +\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (x, p) = \chi(y, q) .$$

Que χ soit libre implique que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, y)$ est non dégénérée. Nous appellerons transformation intégrale canonique associée à χ une transformation

$$\mathfrak{F}_{\chi, a} u(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(x, y)} a(x, y) u(y) dy$$

où $a(x, y)$ est une fonction standard, indéfiniment dérivable, à support compact contenu dans le domaine de définition de la fonction génératrice, que nous appellerons le poids.

Ces transformations intégrales canoniques ont un air de famille avec des notions mathématiques qui existent déjà. Pour le lecteur spécialiste, elles évoqueront certainement l'opérateur canonique de Maslov ([15] chap. 2) ; peut être aussi les représentations de $Sp_2(n)$ (revêtement à deux feuilletés du groupe symplectique) chez J. Leray ([13]) et même les opérateurs intégraux de Fourier chez Hörmander ([10]). Nos transformations intégrales canoniques en sont distinctes, mais certainement pas indépendantes. Il serait intéressant de mieux connaître les relations entre tous ces objets.

Nos transformations, comme on va s'en rendre compte en lisant la suite, ont, lorsqu'elles opèrent sur les paquets d'ondes, des propriétés semblables aux transformations de Fourier. Nous allons démontrer successivement une formule d'inversion et une formule de Plancherel. Ces formules perdront bien sûr toute validité si on les fait opérer sur des fonctions "étendues", c'est-à-dire non concentrées en un seul point.

THÉOREME 3 (formule d'inversion). Soit u un paquet d'ondes de spectre dynamique (y_0, q_0) et χ une transformation canonique standard. Nous supposons pour simplifier que la fonction génératrice de χ , $\phi(x, y)$, est égale à $q_0 y$ sur le sous-espace $\{x = x_0\}$, avec $(x_0, p_0) = \chi(y_0, q_0)$, c'est-à-dire que $\phi(x_0, y) - q_0 y$ ne dépend pas de y (1). Posons alors :

$$\hat{u}(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(x,y)} a(x,y)u(y)dy$$

où $a(x, y)$ est le poids, c'est-à-dire une fonction standard, C^∞ , à support compact contenu dans le domaine de définition de ϕ . Dans ces conditions, si pour un autre poids $b(x, z)$ on pose

$$v(z) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{+\frac{i}{\hbar}\phi(x,z)} b(x,z)\hat{u}(x)dx$$

alors la fonction v est infiniment voisine, dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, de la fonction

$$\frac{a(x_0, y_0)b(x_0, y_0)}{|\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)|} u.$$

Démonstration. Nous laissons pour le moment de côté la question de savoir si v est un paquet d'ondes (en fait, il l'est) ; ce sera l'objet du théorème suivant.

Une application très simple du théorème de Fubini nous donne l'identité :

$$(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{*\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\hbar}\phi(x,z)} b(x,z)\hat{u}(x)dx = \int_{*\mathbb{R}^n} [(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{*\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{\hbar}[\phi(x,y)-\phi(x,z)]} a(x,y)b(x,z)dx] u(y)dy.$$

(1) Pour l'usage que nous ferons plus loin de ce théorème, cette condition n'est pas gênante, car elle sera vérifiée. Mais de toute façon, si elle n'était pas vérifiée, on pourrait s'y ramener par un changement de variable (cf. théorème 1).

Nous allons prouver que le second membre est infiniment proche, dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, de la fonction

$$\frac{a(x_0, y_0) b(x_0, y_0)}{|\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)|} u(z)$$

ce qui nous donnera bien la formule d'inversion.

Or, soit $X(x, y, z)$ la fonction (indéfiniment dérivable) à valeurs dans \mathbb{R}^n , telle que :

$$\phi(x, y) - \phi(x, z) = (z - y) \cdot [X(x, y, z) - q_0] .$$

D'après les hypothèses que nous avons faites sur ϕ , cette fonction est identiquement nulle dès que $x = x_0$, et $x \mapsto X(x, y, z)$ est un difféomorphisme (standard) dans un voisinage de x_0 , pourvu que $|y - y_0| < \eta$ et $|y - z| < \epsilon$ avec ϵ et η assez petits, mais standards. En outre, nous supposons, puisque le choix des supports des fonctions a et b est arbitraire, que

$$\text{supp}(ab) \cap \{(x, y, z) \mid |y - z| < \epsilon\} \subset U$$

où U est un ouvert de \mathbb{R}^{3n} sur lequel

$$(x, y, z) \mapsto (X(x, y, z), y, z)$$

est un difféomorphisme.

Ecrivons le paquet d'ondes $u(y)$ sous la forme $u(y) = c(y) e^{\frac{i}{\hbar} q_0 y}$,

où c varie lentement ; nous avons alors :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar} q_0 z} \cdot (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{\frac{i}{\hbar} \phi(x, z)} b(x, z) \hat{u}(x) dx &= e^{-\frac{i}{\hbar} q_0 z} v(z) = \\ &= \int [(2\pi\hbar)^{-n} \int e^{-\frac{i}{\hbar} [\phi(x, y) - q_0 y - \phi(x, z) + q_0 z]} a(x, y) b(x, z) dx] c(y) dy . \end{aligned}$$

Le difféomorphisme $x \rightarrow X(x, y, z)$ nous permet de faire dans cette intégrale un changement de variable ; ainsi

$$v(z) = e^{\frac{i}{\hbar} q_0 z} \int [(2\pi\hbar)^{-n} \int e^{\frac{i}{\hbar} (y-z) X} J(X, y, z) b(x(X, y, z), z) a(x(X, y, z), y) dx] c(y) dy$$

où $J(X, y, z)$ est le jacobien du changement de variable ; celui-ci vérifie les

relations

$$J(X(x_0, y, z), y, z) = \left| \det \frac{\partial X}{\partial x} (x_0, y, z) \right|^{-1}$$

et pour $y = z$:

$$J(X(x_0, z, z), z, z) = \left| \det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} (x_0, z) \right|^{-1} .$$

En effet, pour $y = z$, $\frac{\partial X}{\partial x} (x_0, z, z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} (x_0, z) .$

Posons $F(X, y, z) = J(X, y, z)b(x(X, y, z), z)a(x(X, y, z), y) .$ C'est une fonction standard, C^∞ , à support compact contenu dans U , et sa valeur au point $(0, z, z)$ est :

$$F(0, z, z) = \left| \det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} (x_0, z) \right|^{-1} a(x_0, z)b(x_0, z) .$$

Ainsi, nous sommes amenés à

$$e^{-\frac{i}{\hbar} q_0 z} v(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \hbar^{-n} \hat{F}\left(\frac{y-z}{\hbar}, y, z\right) c(y) dy$$

où $\hat{F}(\Xi, y, z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{iX \cdot \Xi} F(X, y, z) dX$ est la transformée de Fourier standard de F (par rapport à X), et est donc elle-même une fonction standard. Voyons les propriétés de cette fonction. F était indéfiniment dérivable et à support compact ; donc $\hat{F}(\Xi, y, z)$ est, pour y, z fixés, une fonction de Ξ à décroissance rapide (qui est d'ailleurs identiquement nulle si y et z sont assez grands). L'idée de la démonstration est alors la suivante : puisque $\hat{F}(\Xi, y, z)$ est une fonction standard, C^∞ , à décroissance rapide, il est clair que $\hbar^{-n} \hat{F}\left(\frac{y-z}{\hbar}, y, z\right)$ sera une fonction (non standard) dont presque toute la masse sera concentrée dans le halo de $\{y = z\}$, et même dans la galaxie d'ordre h de $\{y = z\}$. Or, puisque la fonction c telle que $u(x) = c(x)e^{\frac{i}{\hbar} q_0 x}$ varie lentement à l'échelle de \hbar , $\hbar^{-n} \hat{F}\left(\frac{y-z}{\hbar}, y, z\right)$ va se comporter envers c comme $\delta(y-z)$. Reprenons cela de façon précise. Nous voulons montrer que

$$\int \left| Ku(z) - (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \hbar^{-n} \hat{F}\left(\frac{y-z}{\hbar}, y, z\right) c(y) dy e^{\frac{i}{\hbar} q_0 z} \right|^2 dz$$

avec $K = \frac{a(x_0, y_0)b(x_0, y_0)}{|\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)|}$, est infiniment petit ; cela équivaut évidemment

à montrer que

$$\int |Kc(z) - (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \hat{F}(\frac{y-z}{h}, y, z)c(y)dy|^2 dz$$

est infiniment petit. Pour cela, posons $Z = \frac{y-z}{h}$. Alors :

$$\int \hat{F}(\frac{y-z}{h}, y, z)c(y)dy = \int \hat{F}(Z, z+hZ, z)c(z+hZ)dZ .$$

Nous allons décomposer notre expression comme suit :

$$Kc(z) - (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \hat{F}(Z, z+hZ, z)c(z+hZ)dZ = I_1(z) + I_2(z) + I_3(z)$$

avec

$$I_1(z) = Kc(z) - (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \hat{F}(Z, z, z)c(z)dZ$$

$$I_2(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \hat{F}(Z, z, z)[c(z) - c(z+hZ)]dZ$$

$$I_3(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int [\hat{F}(Z, z+hZ, z) - \hat{F}(Z, z, z)]c(z+hZ)dZ .$$

Nous pouvons voir tout de suite que $\|I_1\|$ est infiniment petit ; en effet

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \hat{F}(Z, z, z)dZ = F(0, z, z) = \frac{a(x_0, z)b(x_0, z)}{|\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, z)|} ;$$

c'est une fonction indéfiniment dérivable de z , et K est sa valeur en $z = y_0$; donc $|K - F(0, z, z)| \leq M|z - y_0|$, M étant une constante standard, et par conséquent

$$\|I_1\|^2 \leq M^2 \int |z - y_0|^2 |c(z)|^2 dz$$

qui est infiniment petit puisque c est concentrée en y_0 .

Pour montrer que $\|I_2\|$ et $\|I_3\|$ sont infiniment petits eux aussi, il nous faut quelques lemmes techniques.

LEMME 1. Pour tout $\alpha \geq 0$, il existe une constante standard C_α telle que

$$\sup_{y, z, Z} |Z|^{2\alpha} |\hat{F}(Z, y, z)| \leq C_\alpha .$$

LEMME 2. Pour tout $\alpha \geq 0$, il existe une constante standard B_α telle que

$$\sup_{y, z, Z} |Z|^{2\alpha} \left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} (Z, y, z) \right| \leq B_\alpha .$$

(Ce serait d'ailleurs ainsi pour toutes les dérivées de \hat{F}).

Démontrons par exemple le lemme 1 (pour le lemme 2 c'est pratiquement pareil). Nous avons

$$|Z|^{2\alpha} \hat{F}(Z, y, z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{iZ \cdot X} (-\Delta)^\alpha F(X, y, z) dX$$

où Δ est le laplacien opérant sur la variable X . Or, la fonction F est à support compact et indéfiniment dérivable, donc aussi $(-\Delta)^\alpha F$, et par conséquent la fonction

$$y, z \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta^\alpha F(X, y, z)| dX$$

est bornée, et il en va donc de même de $|Z|^{2\alpha} \hat{F}(Z, y, z)$, qui est bornée en les trois variables.

Comme corollaire nous avons aussi le

LEMME 3. Pour tout $\alpha \geq 0$, il existe une constante standard A_α telle que

$$\sup_{y, z} \int |Z|^{2\alpha} |\hat{F}(Z, y, z)|^2 dZ \leq A_\alpha .$$

Nous allons maintenant examiner $\|I_2\|$ et $\|I_3\|$. D'après la formule des accroissements finis :

$$c(z+nZ) - c(z) = \int_0^n Z \cdot \frac{\partial c}{\partial z}(z+tZ) dt$$

$$\hat{F}(Z, z+nZ, z) - \hat{F}(Z, z, z) = \int_0^n Z \cdot \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}(Z, z+tZ, z) dt$$

d'où on déduit, en utilisant l'inégalité de Schwarz-Hölder :

$$|I_2(z)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int |\hat{F}(z, z, z)| \left[\int_0^{\hbar} |z| \left| \frac{\partial c}{\partial z}(z+tZ) \right| dt \right] dz$$

$$|I_2(z)|^2 \leq (2\pi)^{-n} \int (1+|z|^{2\alpha}) |\hat{F}(z, z, z)|^2 dz \cdot \int \frac{\left[\int_0^{\hbar} |z| \left| \frac{\partial c}{\partial z}(z+tZ) \right| dt \right]^2}{1+|z|^{2\alpha}} dz .$$

Mais nous avons aussi

$$\left[\int_0^{\hbar} |z| \left| \frac{\partial c}{\partial z}(z+tZ) \right| dt \right]^2 \leq \hbar |z|^2 \int_0^{\hbar} \left| \frac{\partial c}{\partial z}(z+tZ) \right|^2 dt$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_2(z)|^2 dz \leq (2\pi)^{-n} \sup_z \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z|^{2\alpha}) |\hat{F}(z, z, z)|^2 dz \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\hbar} \frac{\hbar |z|^2 \left| \frac{\partial c}{\partial z}(z+tZ) \right|^2}{1+|z|^{2\alpha}} dt dz dz .$$

Or, d'après le lemme 3 :

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \int (1+|z|^{2\alpha}) |\hat{F}(z, z, z)|^2 dz \leq A_{\alpha}$$

et d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\hbar} \frac{\hbar |z|^2 \left| \frac{\partial c}{\partial z}(z+tZ) \right|^2}{1+|z|^{2\alpha}} dt dz dz &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\hbar} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial c}{\partial z}(z+tZ) \right|^2 dz \right] \frac{\hbar |z|^2}{1+|z|^{2\alpha}} dt dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\hbar} \left\| \frac{\partial c}{\partial z} \right\|^2 \frac{\hbar |z|^2}{1+|z|^{2\alpha}} dt dz = \hbar^2 \left\| \frac{\partial c}{\partial z} \right\|^2 \cdot \int \frac{|z|^2}{1+|z|^{2\alpha}} dz . \end{aligned}$$

Si α est assez grand ($> \frac{n}{2} + 1$), $\int \frac{|z|^2}{1+|z|^{2\alpha}} dz$ est une constante standard ; par hypothèse, c varie lentement, donc $\hbar^2 \left\| \frac{\partial c}{\partial z} \right\|^2 \ll 1$; cela prouve bien que $\|I_2\| \ll 1$.

Pour I_3 nous pouvons procéder d'une manière analogue :

$$I_3(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} c(z+\hbar Z) \int_0^{\hbar} z \cdot \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}(z, z+tZ, z) dt dz$$

$$|I_3(z)|^2 \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|z|^2 |c(z+\hbar Z)|^2}{1+|z|^{2\alpha}} dz \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z|^{2\alpha}) \left[\int_0^{\hbar} \left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}(z, z+tZ, z) \right| dt \right]^2 dz .$$

Mais $\int_0^{\hbar} \left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}(Z, z+tZ, z) \right| dt \leq \hbar \sup_{y,z} \left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}(Z, y, z) \right|$, et alors il vient :

$$|I_3(z)|^2 \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|Z|^2 |c(z+\hbar Z)|^2}{1+|Z|^{2\alpha}} dZ \cdot \hbar^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|Z|^{2\alpha}) \sup_{y,z} \left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}(Z, y, z) \right|^2 dZ.$$

Le lemme 2 a montré que $Z \mapsto \sup_{y,z} \left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}(Z, y, z) \right|$ est une fonction à décroissance rapide, donc l'intégrale

$$(2\pi)^{-n} \int (1+|Z|^{2\alpha}) \sup_{y,z} \left| \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}(Z, y, z) \right|^2 dZ$$

a une valeur définie, qui est standard puisque $\frac{\partial \hat{F}}{\partial y}$ est une fonction standard, et que nous désignerons par M . En intégrant par rapport à z :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_3(z)|^2 dz \leq \hbar^2 M \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|Z|^2 |c(z+\hbar Z)|^2}{1+|Z|^{2\alpha}} dZ dz = \hbar^2 M \int \frac{|Z|^2}{1+|Z|^{2\alpha}} dZ \cdot \|c\|^2$$

donc $\|I_3\| \leq \hbar \cdot C \cdot \|c\|$, où C est une constante standard.

Notre formule d'inversion est ainsi démontrée.

COROLLAIRE. Soit v un paquet d'ondes et

$$u(x) = \mathfrak{F}_{\phi, a} \cdot v(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(x,y)} a(x,y)v(y) dy.$$

Alors :

$$\|u\| \approx \frac{|a(x_0, y_0)|}{\sqrt{|\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)|}} \|v\|.$$

Démonstration. Pour toute fonction $w(x, z)$ (non nécessairement standard) nous avons l'identité :

$$\int w(x, z) u(x) dx = \int \left[(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(x,y)} a(x,y)w(x, z) dx \right] v(y) dy$$

(rappelons que le poids a est toujours supposé à support compact). Choisissons

$w(x, z) = \overline{u(x)}$. Alors :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \int \left[(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(x,y)} a(x,y)u(x)dx \right] v(y)dy \\ &= \int \left[(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{+\frac{i}{\hbar}\phi(x,y)} a(x,y)u(x)dx \right] v(y)dy . \end{aligned}$$

Mais d'après la formule d'inversion, l'expression entre crochets est infiniment proche, dans $*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, de

$$\frac{|a(x_0, y_0)|^2}{\left| \det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right|} v$$

et par conséquent :

$$\|u\|^2 \simeq \frac{|a(x_0, y_0)|^2}{\left| \det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right|} \|v\|^2 .$$

N.B. Ce corollaire peut être considéré comme une généralisation de la formule de Plancherel à toutes les transformations intégrales canoniques ; mais il ne faut pas oublier qu'elle n'est valable que pour les paquets d'ondes, alors que la véritable transformation de Fourier conserve la norme de n'importe quelle fonction de $*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'examiner complètement la transformation des paquets d'ondes :

THÉORÈME 4. Soit χ une transformation canonique standard, définie sur un ouvert U de l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Supposons que χ soit libre, de fonction génératrice $\phi(x,y)$. Désignons par $\mathfrak{F}_{\chi,a}$ la transformation intégrale de poids $a(x,y)$ associée à χ .

Alors, si u est un paquet d'ondes de spectre dynamique $(y_0, q_0) \in U$, $\mathfrak{F}_{\chi,a} \cdot u$ est un paquet d'ondes de spectre $(x_0, p_0) = \chi(y_0, q_0)$, et de plus

$$\|\mathfrak{F}_{\chi, a} \cdot u\| \approx \frac{|a(x_0, y_0)|}{\sqrt{|\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)|}} \|u\| .$$

Démonstration. Soit v un paquet d'ondes de spectre (y_0, q_0) , et $u = \mathfrak{F}_{\chi, a} \cdot v$.

Nous avons à prouver que pour tout multi-indice $\alpha \neq 0$, $\|(x-x_0)^\alpha u\|$ et

$\|(i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^\alpha c\|$ sont infiniment petits, c étant la fonction telle que $u(x) = c(x)e^{\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x}$. Or, nous pouvons écrire

$$(x-x_0)^\alpha u(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \phi(x, y)} c_\alpha(x, y) v(y) dy$$

avec $c_\alpha(x, y) = (x-x_0)^\alpha a(x, y)$. D'après le corollaire précédent

$$\|(x-x_0)^\alpha u\| \approx \frac{|c_\alpha(x_0, y_0)|}{\sqrt{|\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)|}} \|v\|$$

mais dès que $\alpha \neq 0$, $c_\alpha(x_0, y_0) = 0$, d'où le résultat.

D'autre part, si $c(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x} u(x)$:

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^\alpha c(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int (i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^\alpha (e^{-\frac{i}{\hbar} [\phi(x, y) + p_0 \cdot x]} a(x, y) v(y) dy .$$

Mais

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^\alpha (e^{-\frac{i}{\hbar} [\phi(x, y) + p_0 \cdot x]} a(x, y)) = (\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) + p_0)^\alpha a(x, y) e^{-\frac{i}{\hbar} [\phi(x, y) + p_0 \cdot x]} + R(x, y)$$

où $R(x, y)$ est une fonction dont le support est un compact standard (le même

que le support de a), et dont les valeurs sont de l'ordre de \hbar : $|R(x, y)| \leq \hbar C$

avec C standard. Cela montre que $(i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^\alpha c$ est infiniment proche, dans

$*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, de la fonction :

$$x \mapsto (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} [\phi(x, y) + p_0 \cdot x]} (\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) + p_0)^\alpha a(x, y) v(y) dy .$$

Mais d'après le corollaire précédent, la norme dans $*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ de cette fonction est infiniment proche de

$$\frac{[\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0, y_0) + p_0]^\alpha a(x_0, y_0)}{\sqrt{|\det \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x_0, y_0)|}} \|v\|$$

et il en va donc de même pour $\|(\text{in } \frac{\partial}{\partial x})^\alpha c\|$. Or, dès que $\alpha \neq 0$, $[\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0, y_0) + p_0]^\alpha = 0$, d'où le résultat.

Les résultats que nous avons démontrés pour les transformations intégrales canoniques utilisent d'une façon essentielle le fait que l'application canonique associée est libre ; en effet, les dénominateurs $\det \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x_0, y_0)$ s'annulent si χ n'est pas libre. Pourtant, il est parfois utile d'envisager des transformations de paquets d'ondes par des transformations canoniques non libres (ainsi, au chapitre suivant, nous rencontrerons des transformations canoniques voisines de l'identité, qui n'est pas libre). D'ailleurs, on peut considérer les transformations de Fourier comme des transformations intégrales (de poids 1) associées à des transformations canoniques non libres, qui échangent les coordonnées. De manière précise, pour toute partition (I, J) de $\{1, 2, \dots, n\}$, nous pouvons appeler $A_{I, J}$ l'application $(x, p) \mapsto (x', p')$ avec $x'_j = x_j$ et $p'_j = p_j$ pour $j \in I$, mais $x'_j = p_j$ et $p'_j = -x_j$ pour $j \in J$. (C'est par exemple l'identité si $J = \emptyset$). Les applications $A_{I, J}$ sont toutes canoniques, mais la seule qui soit libre correspond à $I = \emptyset$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Or, une application canonique non libre peut toujours être composée avec au moins l'une des $A_{I, J}$ pour en donner une autre qui est libre (voir par exemple le livre de V. Arnol'd, [1], page 265). Il est assez naturel de considérer une transformation de Fourier partielle correspondant à la partition (I, J) comme une transformation intégrale, de poids 1, associée à l'application canonique $A_{I, J}$. Lorsque nous aurons affaire à une application canonique non libre χ , nous prendrons

alors une $A_{I,J}$ telle que $\chi \circ A_{I,J}^{-1} = \chi_1$ soit libre, et au lieu d'appliquer une transformation intégrale $\mathfrak{F}_{\chi_1,a}$ à un paquet d'ondes u , nous l'appliquons à $\mathfrak{F}_{I,J} \cdot u$, la transformée de Fourier partielle de u . Cela revient à considérer $\mathfrak{F}_{\chi_1,a} \circ \mathfrak{F}_{I,J}$ comme une transformation intégrale canonique associée à l'application canonique non libre χ , mais le procédé ne la détermine pas de manière univoque, car il peut y avoir le choix entre plusieurs $A_{I,J}$ pour que $\chi \circ A_{I,J}^{-1}$ soit libre. Pour l'usage que nous en ferons, cela n'est pas bien gênant.

III. L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

Les idées que nous présentons ici s'inspirent largement de celles, heuristiques, que les physiciens avaient développées aux débuts de la mécanique ondulatoire. Toutefois, le concept physique de paquet d'ondes, tel qu'on peut le trouver chez Louis de Broglie ou P.A.M. Dirac (voir [3] et [4]), est moins sophistiqué que celui que nous avons introduit au précédent chapitre ; peu importaient la variation des dérivées aux ordres élevés, et la décroissance rapide aux grandes distances : elles sont de toute façon inobservables. Seules importaient la localisation et les oscillations en un point. C'est pourquoi nous allons introduire dans ce chapitre le bon concept, celui d'"onde élémentaire", qui sera le concept mathématique parfaitement rigoureux le plus proche des vieilles idées. Mais la notion précédente de "paquet d'ondes" sera un outil d'analyse extrêmement précieux.

DÉFINITION. Nous appellerons "onde élémentaire" de spectre (x_0, p_0) tout élément de $*L^2(\mathbb{R}^n)$ infiniment voisin d'un paquet d'ondes de spectre (x_0, p_0) .

Une onde élémentaire est donc un objet moins régulier qu'un paquet d'ondes ; un paquet d'ondes appartient toujours à $*C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et peut être dérivé tant qu'on veut. Ce n'est plus le cas pour une onde élémentaire quelconque. Il va de soi que deux ondes élémentaires infiniment voisines dans $*L^2(\mathbb{R}^n)$ ont le

même spectre, mais la réciproque est fautive.

Le présent chapitre est entièrement consacré à la démonstration du théorème suivant :

THÉOREME 5. Soit $H(x,p)$ un hamiltonien auto-adjoint (c'est-à-dire tel que l'opérateur différentiel $H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})$ soit un opérateur auto-adjoint sur $*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ que pour simplifier nous supposons polynômial en p , et considérons l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) u$$

Alors, toute solution $u(t,x)$ qui est une onde élémentaire à l'instant $t = 0$ reste à tout instant fini ultérieur une onde élémentaire. En outre, si (x_0, p_0) est le spectre dynamique de $u(0,x)$, le spectre dynamique de $u(t,x)$ sera (x_t, p_t) , où (x_t, p_t) est la solution du système hamiltonien classique (et standard) :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x,p)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)$$

Autrement dit, les ondes élémentaires solutions de l'équation de Schrödinger se propagent le long des trajectoires classiques.

Le plan général de la démonstration est le suivant :

a) A l'aide d'une transformation canonique χ vérifiant les conditions du théorème 4, et dont nous démontrerons l'existence, nous transformons l'hamiltonien $H(x,p)$ en un hamiltonien $K(q) = H(x_0, q)$ qui ne dépend que de q , dans un voisinage de x_0 .

b) Pour l'équation de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial v}{\partial t}(t,q) = K(q)v(t,q)$ il est facile de voir que si $v(0,q)$ est un paquet d'ondes, il en sera de même pour $v(t,q)$, le spectre se propageant le long des trajectoires classiques du système hamiltonien.

c) On montre qu'il existe une fonction $a(x, q)$, standard, C^∞ , à support compact contenant (x_0, p_0) et contenu dans le domaine de définition de χ , telle que, si $i\hbar \frac{\partial v}{\partial t} - K(q)v = 0$, $i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} - H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})u \ll \hbar$ pour $u(t) = \mathfrak{F}_{\chi, a} \cdot v(t)$.

d) On montre à l'aide de la formule d'inversion que pour toute donnée initiale w_0 qui est une onde élémentaire de spectre (x_0, p_0) , il existe un paquet d'ondes v_0 tel que $u_0 = \mathfrak{F}_{\chi, a} \cdot v_0$ soit infiniment voisin de w_0 .

e) $i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} - H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})u$, qui est $\ll \hbar$ d'après c), est suffisamment petit pour que, en utilisant des méthodes de perturbations, on puisse prouver que la solution $w(t)$ de l'équation $i\hbar \frac{\partial w}{\partial t} - H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})w = 0$ avec $w(0) \approx u_0$ reste infiniment voisine, pour tout t fini, de $u(t) = \mathfrak{F}_{\chi, a} \cdot v(t)$; or pour tout t fini, $v(t)$ reste un paquet d'ondes, donc aussi $u(t)$. Il ne reste plus qu'à constater que le spectre de $u(t)$ se propage convenablement.

f) Le raisonnement suivi jusqu'ici est valable dans un voisinage suffisamment petit de (x_0, p_0) , mais peut être fait au voisinage de tout point où l'hamiltonien est défini, conduisant ainsi à un résultat global.

PROPOSITION 1. Soit $H(x, p)$ un hamiltonien ; au voisinage de tout point (x_0, p_0) de l'espace des phases tel que $\frac{\partial H}{\partial p}(x_0, p_0) \neq 0$, il existe une transformation canonique $\chi : (y, q) \mapsto (x, p)$ telle que :

i) $\chi(x_0, p_0) = (x_0, p_0)$

ii) $H(x, p) = H(x_0, q(x, p))$

iii) χ possède une fonction génératrice $\phi(x, q)$ telle que $\phi(x_0, q) = x_0 \cdot q$ et $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial q}(x_0, p_0) = I$ (matrice unité).

Démonstration : l'existence de la transformation χ est liée à l'existence de solutions $\phi(x, q)$ de l'équation de Hamilton-Jacobi $H(x, \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, q)) = H(x_0, q)$.

Or, une conséquence bien connue du théorème d'intégrabilité de Fröbenius (voir par exemple [5] Théorème 3.6.3. page 108) nous garantit l'existence de telles

solutions, dépendant du paramètre q , pour des conditions initiales arbitraires sur une hypersurface de \mathbf{R}^n transversale à $\frac{\partial H}{\partial p}(x_0, p_0)$. Afin que soient vérifiées les deux conditions de iii), ainsi que les conditions du théorème 3, il suffit de choisir convenablement ces conditions initiales. Voyons cela en détail.

Nous avons supposé $\frac{\partial H}{\partial p}(x_0, p_0) \neq 0$; cela signifie que pour au moins un $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\frac{\partial H}{\partial p_k}(x_0, p_0) \neq 0$. Dans ce cas, l'hyperplan $\{x_k = x_{0,k}\}$, qui contient x_0 , est transversal à $\frac{\partial H}{\partial p}(x_0, p_0)$. Sur cet hyperplan, nous prendrons comme conditions initiales :

$$\phi(x, q) = x \cdot q \quad ;$$

cela entraîne immédiatement $\phi(x_0, q) = x_0 \cdot q$ et ainsi la première condition de iii) est satisfaite. La condition i) équivaut à

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, p_0) = p_0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q}(x_0, p_0) = x_0 \quad .$$

Avec les seules conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs de $\phi(x, q)$ pour $x_k = x_{0,k}$, nous avons automatiquement :

$$\forall j \neq k \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_0, p_0) = p_{0,j}$$

$$\forall i \quad \frac{\partial \phi}{\partial q_i}(x_0, p_0) = x_{0,i} \quad .$$

Il reste juste à vérifier que $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x_0, p_0) = p_{0,k}$. Or, dans l'équation de Hamilton-Jacobi, nous pouvons considérer $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x, q)$ comme fonction implicite ; d'après le théorème du même nom, on en déduit que nécessairement $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x_0, p_0) = p_{0,k}$.

Un raisonnement analogue va nous donner la deuxième condition de iii).

En effet, les valeurs de ϕ pour $x_i = x_{0,k}$ impliquent aussitôt :

$$\forall j \neq k, \forall i \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial q_i}(x_0, p_0) = \delta_{ij}$$

et pour obtenir $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial q_i}(x_0, p_0) = \delta_{ik}$, nous pouvons utiliser aussi le théorème

des fonctions implicites, d'une manière évidente. La proposition est ainsi démontrée.

Bien entendu, elle ne permet pas de réduire un hamiltonien là où $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$; mais pour examiner la propagation des ondes élémentaires, il n'est pas indispensable de recourir à des transformations canoniques voisines de l'identité. En faisant par exemple une translation (qui est une transformation canonique) on se ramène à la proposition 1, sauf si $\frac{\partial H}{\partial p}$ est identiquement nul, cas qui se traite directement. Nous y reviendrons à la fin.

PROPOSITION 2. Soit $v(t, q)$ la solution de l'équation $i\hbar \frac{\partial v}{\partial t} = K(q)v$ telle que $v(0) = v_0$ soit un paquet d'ondes de spectre $(p_0, -x_0)$. Alors pour tout t fini, $v(t)$ est un paquet d'ondes de spectre $(p_0, -x_0 - t \frac{\partial K}{\partial q}(p_0))$. Il existe en outre une fonction standard a, C^∞ , à support compact contenant (x_0, p_0) telle que, si on pose

$$u(t, x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{+\frac{i}{\hbar}\phi(x, q)} a(x, q)v(t, q) dq$$

$u(t, x)$ est solution de l'équation

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})u + \hbar R(t, x)$$

où $\|R(t)\|$ est, uniformément en t dans un voisinage standard de $t=0$, majoré par une constante infiniment petite.

Démonstration. Nous avons évidemment

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{+\frac{i}{\hbar}\phi(x, q)} a(x, q) i\hbar \frac{\partial v}{\partial t}(t, q) dq .$$

Calculons $H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})u(t, x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int [H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \cdot (e^{+\frac{i}{\hbar}\phi} a)]v(t, q) dq$; cela

revient à calculer l'expression entre crochets, et c'est un problème classique

(voir Landau-Lifschitz [11] § 53. L'idée a été développée par Leray dans une

présentation extrêmement formelle, voir [13]). Dans cet article, nous avons choisi

de supposer $H(x,p)$ polynôme en p pour ne pas alourdir l'exposé ; il est alors facile de retrouver le résultat suivant :

$$\begin{aligned} H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) (e^{+\frac{i}{\hbar}\phi} a)(x, q) &= \\ &= [H(x, \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, q)) a(x, q) + i\hbar H_1(x, q) + \dots + (i\hbar)^N H_N(x, q)] e^{+\frac{i}{\hbar}\phi(x, q)} \end{aligned}$$

où N est le degré du polynôme $H(x,p)$, et les $H_j(x, q)$ pour $j = 1, 2, \dots, N$ des fonctions formées par les dérivées de ϕ et a , et par conséquent standards, indéfiniment dérivables, et à supports compacts. Comme $H(x, \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, q))$ est par hypothèse égal à $K(q)$, nous voyons que :

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \cdot u(t, x) = \sum_{j=1}^N (i\hbar)^j \mathfrak{F}_{\chi, H_j} \cdot v(t, x) \cdot$$

Ainsi, pour n'importe quelle fonction standard a prise comme poids, nous obtenons un "reste" de l'ordre de \hbar ; mais cela ne suffit pas pour mener à bien la suite des opérations. C'est pourquoi nous devons fabriquer a de manière à rendre ce reste infiniment petit par rapport à \hbar ; il suffit pour cela que le premier terme du membre de droite ci-dessus le soit, c'est-à-dire que $\mathfrak{F}_{\chi, H_1} \cdot v(t)$ soit infiniment petit. D'après le corollaire du théorème 3, il suffit pour cela que $H_1(x, q)$ soit identiquement nul dans un voisinage de (x_0, p_0) : alors, tant que le spectre de $v(t)$, (x_t, p_t) , reste dans ce voisinage (donc pour t assez petit), $\mathfrak{F}_{\chi, H_1} \cdot v(t)$ sera infiniment petit. Or, l'équation $H_1(x, q) = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre en a (n'oublions pas que ϕ est déjà déterminé par l'équation de Hamilton-Jacobi) qui n'est autre que l'équation dite "de transport" (cf. Landau-Lifschitz, Mécanique quantique, § 46, Maslov IIe partie chapitre 3, § 2 et 3, Leray § 1 N° 7, Hörmander-Duistermaat page 200, etc etc [12], [15], [14], [10]). De façon précise, cette équation de transport s'écrit :

$$\frac{\partial H}{\partial p}(x, \frac{\partial\phi}{\partial x}) \cdot \frac{\partial a}{\partial x} = M a$$

où M est un polynôme à coefficients standards de $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$, et est par conséquent une fonction standard. L'équation de transport est une équation standard.

Nous nous plaçons toujours dans les conditions de la proposition 1. Nous pouvons donc appliquer le même théorème d'existence que pour l'équation de Hamilton-Jacobi ; ainsi, la fonction a existe pour des conditions initiales arbitraires sur un des hyperplans $x_j = x_{0,j}$. Nous choisirons évidemment comme valeur initiale une fonction égale à 1 dans tout un voisinage de (x_0, p_0) , mais à support compact suffisamment petit.

Avec une fonction $a(x, q)$ ainsi déterminée, nous sommes donc assurés d'avoir, pour tout t appartenant à un intervalle $]-\epsilon, +\epsilon[$ de \mathbb{R} , avec ϵ standard assez petit, $H_1(x_t, p_t) = 0$, si (x_t, p_t) est la solution du système hamiltonien

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= \frac{\partial H}{\partial p}(x_t, p_t) \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x_t, p_t) \end{aligned}$$

pour les conditions initiales (x_0, p_0) . D'après le corollaire du théorème 3, il en résulte que pour tout $t \in]-\epsilon, +\epsilon[$:

$$\|\mathfrak{F}_{\chi, H_1} \cdot v_t\| \approx 0.$$

Mais puisque, par ailleurs, pour les $j > 1$, les $\|\mathfrak{F}_{\chi, H_j} \cdot v_t\|$ restent bornées par des constantes standard (toujours d'après le corollaire du théorème 3 et parce que les H_j sont des fonctions standard), nous voyons que

$$\|i\pi \frac{\partial u}{\partial t} - H(x, -i\pi \frac{\partial}{\partial x})u\| = \left\| \sum_{j=1}^N (i\pi)^j \mathfrak{F}_{\chi, H_j} \cdot v_t \right\| \ll \pi$$

et la proposition 2 est ainsi démontrée.

PROPOSITION 3. Soit $R(t, x)$ une fonction interne qui pour tout t appartenant à un intervalle $]-\epsilon, +\epsilon[$ de \mathbb{R} avec ϵ standard est de carré intégrable,

c'est-à-dire que $R(t) \in *L^2(\mathbb{R}^n)$, et supposons que $\forall t \in]-\epsilon, +\epsilon[$, $\|R(t)\| \ll \hbar$.

Soient alors $u(t, x)$ la solution de

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) u(t, x) + R(t, x) \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

et $w(t, x)$ la solution de

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) &= H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) w(t, x) \\ w(0, x) &= w_0(x) . \end{aligned}$$

Alors, si $\|u_0 - w_0\| \approx 0$, on aura aussi pour tout $t \in]-\epsilon, +\epsilon[$ $\|u(t) - w(t)\| \approx 0$.

Démonstration. Posons $V(t) = u(t) - w(t)$. Alors V est solution de l'équation

$$i\hbar \frac{\partial V}{\partial t} = H \cdot V + R$$

et $\|V(0)\| \approx 0$. Multiplions les deux membres de cette équation par $-\frac{i}{\hbar} \bar{V}$;

cela donne l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} \cdot \bar{V} = (-\frac{i}{\hbar} HV) \bar{V} - \frac{i}{\hbar} R \bar{V} .$$

En lui ajoutant sa propre conjuguée et en intégrant le tout sur $*\mathbb{R}^n$, il vient :

$$\frac{\partial (\|V\|^2)}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} \int \langle HV, V \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle -\frac{i}{\hbar} R, V \rangle .$$

Puisque H est auto-adjoint, $\langle HV, V \rangle$ est réel et par conséquent :

$$\left| \frac{\partial (\|V\|^2)}{\partial t} \right| \leq 2 \left\| -\frac{i}{\hbar} R \right\| \|V\|$$

ce qui implique évidemment

$$\left| \frac{\partial (\|V\|)}{\partial t} \right| \leq \left\| -\frac{i}{\hbar} R \right\|$$

et puisque $\left\| -\frac{i}{\hbar} R \right\|$ est infiniment petit quel que soit $t \in]-\epsilon, +\epsilon[$, il en

résulte que $\|V(t)\| \approx \|V(0)\| \approx 0$.

Naturellement, la proposition 3 ne peut plus être vraie si H n'est pas auto-adjoint, car si $\int m \langle HV, V \rangle$ est non nul et $\gg \hbar, \|V\|$ va présenter des variations infiniment grandes dans des intervalles de temps standards aussi petits que l'on voudra. Rappelons que l'hypothèse d'un hamiltonien auto-adjoint est liée à la conservation de la masse totale ; du point de vue mathématique, cela signifie que la norme de w sera conservée : $\|w(t)\| = \|w(0)\|$. Du point de vue physique, cela signifie que si la particule représentée par la fonction d'onde w a la probabilité 1 d'être quelque part à l'instant 0, elle aura encore la probabilité 1 d'être quelque part aux instants ultérieurs, c'est-à-dire qu'il est impossible que par exemple elle disparaisse ou se dédouble spontanément (1). En l'absence de cette propriété, la notion même de propagation individuelle perd son sens. Nous disons cela pour bien marquer que l'hypothèse d'un hamiltonien auto-adjoint n'a rien d'abusif.

Nous avons maintenant les moyens pour achever la démonstration du théorème 5. Rappelons la position du problème : nous voulons prouver que si une solution $w(t, x)$ de l'équation $i\hbar \frac{\partial w}{\partial t} = H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})w$ est, à l'instant $t = 0$, une onde élémentaire de spectre (x_0, p_0) alors elle sera aussi, à tout instant t fini, une onde élémentaire, de spectre (x_t, p_t) , x_t et p_t étant les coordonnées et l'impulsion de la particule classique à l'instant t .

Ainsi, w_0 est infiniment voisin d'un certain paquet d'ondes u_1 . Supposons d'abord que $\frac{\partial H}{\partial p}(x_0, p_0) \neq (0, 0, \dots, 0)$; à l'aide d'une transformation canonique χ convenable nous pouvons transformer l'hamiltonien $H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})$ en un hamiltonien $K(q) = H(x_0, q)$ dans tout un voisinage standard de (x_0, p_0) , et cette transformation canonique est libre (Proposition 1). La transformation intégrale associée à χ va transformer $u_1(x)$ en un paquet d'ondes $v_0(q)$.

(1) En mécanique quantique relativiste, ce principe n'est plus valable et doit être remplacé par un autre plus général.

Soit alors $v_t(q)$ la solution de

$$i\hbar \frac{\partial v_t}{\partial t} = K(q)v_t(q)$$

égale à v_0 pour $t = 0$. Autrement dit :

$$v_t(q) = e^{-\frac{i}{\hbar}tK(q)} v_0(q) .$$

On vérifiera facilement que v_t est un paquet d'ondes en p_0 , d'impulsion $-y_t = -x_0 - t \frac{\partial K}{\partial q}(p_0)$; en effet, on peut l'écrire sous la forme $v_t(q) =$

$$c_t(q) e^{-\frac{i}{\hbar}y_t \cdot q}, \text{ avec } c_t(q) = e^{-\frac{i}{\hbar}[tK(q) + x_0 \cdot q - y_t \cdot q]} c_0(q), c_0(q) \text{ étant la fonction}$$

telle que $v_0(q) = c_0(q) e^{-\frac{i}{\hbar}x_0 \cdot q}$. $v_0(q)$ est un paquet d'ondes de spectre

$(p_0, -x_0)$. Or $tK(q) + x_0 \cdot q - y_t \cdot q = t[K(q) - \frac{\partial K}{\partial q}(p_0) \cdot q]$ présente un point critique

en $q = p_0$; $c_0(q)$ est, par hypothèse, concentrée en $q = p_0$. En dérivant à tous les ordres la fonction $c_t(q)$ on voit, compte tenu des propriétés de c_0 , qu'elle varie lentement; en outre, il est évident qu'elle est concentrée en p_0 puisque $|c_t(q)| = |c_0(q)|$.

Appliquons alors à v_t la transformation intégrale de la proposition 2; cela va nous donner un paquet d'ondes u_t de spectre (x_t, p_t) . D'après la formule d'inversion (théorème 3), $u_0 \approx u_1$ et donc aussi $w_0 \approx u_0$. Mais, si le poids a est choisi de manière à vérifier l'équation de transport (Proposition 2), u_t sera solution d'une équation

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) u + R(t, x)$$

avec $\|R(t)\| \ll \hbar$ pour $t \in]-\epsilon, +\epsilon[$, ϵ étant standard. Donc, d'après la proposition 3, w_t sera, pour tout $t \in]-\epsilon, +\epsilon[$, infiniment voisin de u_t qui, lui, d'après le théorème 4, (1) est un paquet d'ondes de spectre (x_t, p_t) . Le théorème 5

(1) En toute rigueur, ce serait d'après une variante (mais immédiate) du théorème 4; en effet la transformation canonique χ de la proposition 1, voisine de l'identité n'est pas libre; (x_t, p_t) n'est pas l'image par χ du spectre de v_t , mais du spectre de \tilde{v}_t : voir les remarques à la fin du chapitre II.

est ainsi démontré, sauf au voisinage des points où $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$.

Voyons ce que nous pouvons faire au voisinage d'un point (x_0, p_0) tel que $\frac{\partial H}{\partial p}(x_0, p_0) = 0$. Nous ne sommes plus assurés de l'existence d'une transformation canonique qui nous ferait passer à l'hamiltonien $K(q) = H(x_0, q)$. Mais le passage à $H(x_0, q)$ n'était pas absolument indispensable (nous l'avons choisi parce que c'était le plus simple qui nous donnait à coup sûr $\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \neq 0$) et nous pouvons faire d'autres transformations canoniques qui nous donneront aussi un nouvel hamiltonien ne dépendant que de q , mais autre que $H(x_0, q)$. Par exemple, les translations sont des applications canoniques très simples qui peuvent nous ramener en un point (x_1, p_1) où $\frac{\partial H}{\partial p} \neq 0$ et où nous pouvons appliquer les résultats précédents; alors $K(q)$ sera $H(x_1, q)$ et non plus $H(x_0, q)$. Soit donc $\tau(y, q) = (z, r) = (y+X, q+P)$ une translation dans l'espace des phases. Par une telle translation, un paquet d'ondes $u(y)$ sera transformé en le paquet d'ondes $\mathfrak{F}_\tau \cdot u(z) = e^{+\frac{i}{\hbar} P \cdot z} u(z-X)$, dont le spectre est évidemment celui de u translaté par τ . On remarquera que cette transformation \mathfrak{F}_τ qui opère ainsi sur les paquets d'ondes n'est autre que la transformation intégrale canonique associée à l'application canonique τ , avec un poids égal à 1. En effet, celle-ci est :

$$\mathfrak{F}_{1, \tau} \cdot u(z) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \psi(z, q)} \tilde{u}(q) dq$$

où $\psi(z, q) = (z-X) \cdot q - P \cdot z$ est la fonction génératrice de τ et

$$\tilde{u}(q) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{\frac{i}{\hbar} q \cdot y} u(y) dy$$

la transformée de Fourier inverse de u . Contrairement aux transformations intégrales associées à des transformations canoniques quelconques avec des poids quelconques, celle-ci est exactement inversible, c'est-à-dire que $\mathfrak{F}_{1, \tau} \circ \mathfrak{F}_{1, \tau}^{-1} = \mathfrak{F}_{1, \tau}^{-1} \circ \mathfrak{F}_{1, \tau} = \text{Id}$, avec le signe = et non \approx . En outre, c'est une isométrie de $*L^2(\mathbb{R}^n)$: si par exemple w est infiniment voisin d'un paquet d'ondes u , alors $\mathfrak{F}_{1, \tau} \cdot w$ sera infiniment voisin du paquet d'ondes $\mathfrak{F}_{1, \tau} \cdot u$.

Or, si u est solution de $i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = H(x, i\hbar \frac{\partial}{\partial x})u$, avec $u(0, x) = u_0(x)$, $\mathfrak{F}_{1, \tau} \cdot u$ est solution de la même équation, mais avec $\mathfrak{F}_{1, \tau} \cdot u(0, x) = \mathfrak{F}_{1, \tau} \cdot u_0(x)$, et H remplacé par $\tau H \tau^{-1}$. Supposons qu'il existe (x_1, p_1) tel que $\frac{\partial H}{\partial p}(x_1, p_1) \neq 0$. Les raisonnements précédents sont alors applicables au voisinage de (x_1, p_1) . L'équivalence que nous venons de définir avec $\mathfrak{F}_{1, \tau}$ montre que ces résultats sont également vrais en (x_0, p_0) .

Enfin, il reste le cas où, dans tout l'ouvert de définition, $\frac{\partial H}{\partial p}(x, p) = 0$. Mais cela veut dire que H ne dépend que de x (c'est alors un polynôme de degré 0 en p). Dans ce cas, le problème se résoud directement de manière très simple, puisque la solution de $i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = H(x)u$, avec $u(0) = u_0$, est égale à :

$$u(t, x) = e^{-\frac{i}{\hbar} t H(x)} u_0(x)$$

dont la loi de propagation est analogue à ce que nous avons déjà vu plus haut avec $v_t(q)$.

Ceci achève la démonstration du théorème 5.

Vers la fin, en examinant la situation où $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$, nous avons pu pressentir que, au fond, la seule astuce vraiment incontournable était de transformer canoniquement l'hamiltonien $H(x, p)$ en un autre qui ne dépendait que de x , ou que de p . Il y a d'innombrables manières d'y parvenir et nous avons simplement fait un choix, sans prétendre que c'est le meilleur. C'est une pure question de goût. Par exemple, Hörmander et Duistermaat ([10], pages 196-202) ont préféré transformer $H(x, p)$ en p_n , mais dans un contexte assez différent, tout de même, et ce n'est pas de tout repos !

IV. LE SPECTRE D'UNE ONDE

Une onde élémentaire est une onde particulièrement simple : elle est concentrée en un seul point et possède une impulsion bien déterminée (macroscopiquement, ne l'oublions pas). C'est pourquoi nous lui avons donné ce nom ; son spectre dynamique est constitué d'un seul élément de l'espace de phases. Dans ce chapitre, nous allons étudier des fonctions non-standard bien plus générales, dont le spectre pourra être une partie fermée quelconque de l'espace des phases.

DEFINITION. Nous dirons qu'une fonction interne ω , définie sur ${}^*\mathbb{R}^n$, est une fonction d'onde si elle vérifie les propriétés suivantes :

i) $\omega \in {}^*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n) \cap {}^*\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

ii) $\int |\omega(y)|^2 dy = \|\omega\|^2$ est fini (~ 1)

iii) Pour tout élément infiniment petit V de ${}^*\mathbb{R}^n$, $\int |\omega(y+nV) - \omega(y)|^2 dy$ est infiniment petit.

iv) Pour tout $A > 0$, infiniment grand, $\int_{|x| \geq A} |\omega(x)|^2 dx$ est infiniment petit.

Une fonction d'onde sera normalisée si en outre :

v) $\|\omega\| = 1$.

L'exigence que $\omega \in {}^*\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est de pure commodité ; en fait, le réservoir de fonctions que nous offre le modèle non-standard est tellement immense que nous ne devons pas tenir cette commodité pour une restriction de la généralité. L'attitude traditionnelle qui veut que l'on énonce toujours les résultats de la façon la plus générale possible perd ici toute validité. La propriété iii) signifie que les variations de ω ne sauraient excéder l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$ en moyenne quadratique. La propriété iv) est duale de la précédente par la transformation de Fourier non-standard (lemme 4 ci-dessous). Elle signifie que toute la masse de la densité $|\omega|^2$ est concentrée dans la galaxie principale de

\mathbb{R}^n , c'est-à-dire que la probabilité de détecter l'électron à de très grandes distances est nulle.

LEMME 4. Soit ω une fonction interne sur ${}^*\mathbb{R}^n$, vérifiant les conditions i) et ii) ci-dessus. Alors ω vérifie iii) si et seulement si $\hat{\omega}$ vérifie iv), et de même $\hat{\omega}$ satisfait iii) si et seulement si ω satisfait iv). Autrement dit, les conditions iii) et iv) s'échangent par la transformation de Fourier des physiciens.

Démonstration : d'emblée, il est clair que, pour que ω vérifie iii), il faut et il suffit que, pour tout élément infiniment petit R de ${}^*\mathbb{R}^n$, $\int |e^{iR \cdot x} - 1|^2 |\hat{\omega}(x)|^2 dx$ soit infiniment petit ; en effet, $[e^{iR \cdot x} - 1] \hat{\omega}(x)$ est la transformée de Fourier non standard de $\omega(x + \mathfrak{R}) - \omega(x)$. Nous sommes donc ramenés à montrer l'équivalence entre cette dernière condition et iv). Pour cela :

a) Supposons que pour tout $A \gg 1$, $\int_{|x| \geq A} |\omega(x)|^2 dx \simeq 0$; alors, pour tout R infiniment petit dans ${}^*\mathbb{R}^n$, posons $A = |R|^{-\frac{1}{2}}$; si $|x| \leq A$, on a évidemment $|R \cdot x| \leq \frac{1}{A}$, donc $|e^{iR \cdot x} - 1| \leq \frac{1}{A}$, et par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{{}^*\mathbb{R}^n} |e^{iR \cdot x} - 1|^2 |\omega(x)|^2 dx &= \int_{|x| \leq A} |e^{iR \cdot x} - 1|^2 |\omega(x)|^2 dx + \int_{|x| \geq A} |e^{iR \cdot x} - 1|^2 |\omega(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{A^2} \|\omega\|^2 + 4 \int_{|x| \geq A} |\omega(x)|^2 dx \end{aligned}$$

$\ll 1$

b) Réciproquement, supposons que pour tout R infiniment petit dans ${}^*\mathbb{R}^n$, $\int |e^{iR \cdot x} - 1|^2 |\omega(x)|^2 dx \simeq 0$. La fonction $R \rightarrow \int |e^{iR \cdot x} - 1|^2 |\omega(x)|^2 dx$ est continue sur ${}^*\mathbb{R}^n$; en particulier, chacune des fonctions $\xi \rightarrow \int |e^{i\xi \cdot x_j} - 1|^2 |\omega(x)|^2 dx$ (où x_j est la j ième composante de x) pour $j = 1, 2, \dots, n$, est continue sur ${}^*\mathbb{R}$, donc son maximum sur tout intervalle $[-\epsilon, +\epsilon]$ ($\epsilon \simeq 0$) est infiniment petit, et par conséquent aussi sa moyenne :

$$\forall j = 1, 2, \dots, n \quad \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |e^{i\xi x_{j-1}}|^2 |\psi(x)|^2 dx \right] d\xi \approx 0$$

Or :

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |e^{i\xi x_{j-1}}|^2 |\psi(x)|^2 dx \right] d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |e^{i\xi x_{j-1}}|^2 d\xi \right] |\psi(x)|^2 dx$$

Il est facile de calculer l'expression entre crochets dans le second membre :

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |e^{i\xi \cdot x_{j-1}}|^2 d\xi = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (1 - \cos \xi x_j) d\xi = 2 \left[1 - \frac{\sin \epsilon x_j}{\epsilon x_j} \right] ;$$

mais $\frac{\sin \epsilon x_j}{\epsilon x_j}$ n'est proche de 1 que pour ϵx_j petit : par exemple pour $|x_j| \geq \frac{3\pi}{4\epsilon}$, $\left| 1 - \frac{\sin \epsilon x_j}{\epsilon x_j} \right| \geq \frac{2}{3}$. D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |e^{i\xi x_{j-1}}|^2 |\psi(x)|^2 dx \right] d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} 2 \left(1 - \frac{\sin \epsilon x_j}{\epsilon x_j} \right) |\psi(x)|^2 dx \\ &\geq \int_{|x_j| \geq \frac{3\pi}{4\epsilon}} 2 \left(1 - \frac{\sin \epsilon x_j}{\epsilon x_j} \right) |\psi(x)|^2 dx \\ &\geq \frac{4}{3} \int_{|x_j| \geq \frac{3\pi}{4\epsilon}} |\psi(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion que pour tout ϵ infiniment petit et > 0 , et pour tout $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\int_{|x_j| \geq \frac{1}{\epsilon}} |\psi(x)|^2 dx \approx 0$$

Pour en déduire ce que nous voulions démontrer, il suffit maintenant de remarquer que la réunion, pour j variant de 1 à n , des ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| \geq \frac{1}{\epsilon}\}$ est le complémentaire, dans \mathbb{R}^n , du cube $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j = 1, 2, \dots, n, |x_j| < \frac{1}{\epsilon}\}$, qui est contenu dans la boule $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < A\}$ si $A = \frac{\sqrt{n}}{\epsilon}$, et cela pour tout $\epsilon \approx 0$.

Nous allons maintenant donner un théorème important qui nous permettra de définir le spectre dynamique d'une fonction d'onde.

THÉOREME 6. Soit ω une fonction d'onde. Pour toute onde élémentaire normalisée c , de spectre dynamique $(0,0)$, posons :

$$f_{\omega,c}(x,p) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(z) \overline{c(x-z)} e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot z} dz.$$

Il existe une mesure standard, positive, μ_ω , qui est indépendante du choix de c , sur tout l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, telle que, pour toute fonction c du type indiqué, la densité $|f_{\omega,c}|^2$ soit infiniment proche, pour la topologie vague des mesures, de μ_ω . La masse totale de μ_ω est égale à $St(\|\omega\|^2)$, et sa fonction caractéristique est donnée par la formule:

$$F_o(p,X) = St \left[\int_{\mathbb{R}^n} \omega(y+\hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy \right]$$

DEFINITIONS. Cette mesure est appelée la mesure spectrale de ω ; son support, le spectre dynamique de ω (c'est un ensemble fermé).

Avant de passer à la démonstration du théorème, il serait bon de discuter un peu de la signification dynamique de cette mesure spectrale. La fonction $f_{\omega,c}(x,p)$ peut aussi être écrite à l'aide du produit scalaire de $*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$:

$$f_{\omega,c}(x,p) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \omega, u_{c,x,p}$$

où $u_{c,x,p}(z) = c(x-z) e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot z}$ (c'est une onde élémentaire de spectre (x,p)).

Il est bien connu que si $|\omega(x)|^2$ est la densité de la probabilité de présence (dont la trace macroscopique, comme nous l'avons signalé dans l'introduction, est une mesure), par contre la distribution de probabilité de l'impulsion sera décrite par $|\hat{\omega}(p)|^2$; mais pour une onde ω , qui n'est pas élémentaire, et qui

a donc une extension spatiale macroscopique, on peut tout naturellement se demander quelle est la distribution de probabilité pour l'impulsion en un point de l'espace, car $|\hat{w}(p)|^2$ est une distribution globale. Une tentative classique de définir mathématiquement une telle distribution localisée a été faite par Wigner ; la fonction de Wigner est définie comme suit :

$$W_{\omega}(x,p) = (2\pi\hbar)^{-n} \int \omega(x + \frac{z}{2}) \overline{\omega(x - \frac{z}{2})} e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot z} dz$$

et elle peut s'interpréter comme la densité en phase d'un mélange statistique. On peut même prouver, de façon élémentaire, que si ω est la fonction d'onde d'une particule libre (le cas envisagé dans l'introduction), ce mélange statistique se propage bien comme on le souhaitait. Le malheur, c'est que la fonction de Wigner n'est pas positive, et ne représente donc pas une vraie distribution de probabilité.

Or, une façon toute naturelle de tester une fonction d'onde ω , pour voir si elle possède en un point x une forte concentration d'impulsion en p , est de vérifier si elle entre en résonance avec une onde élémentaire dont le spectre est précisément (x,p) ; une telle résonance se manifestera dans le produit scalaire $\langle \omega, u_{c,x,p} \rangle$: celui-ci prendra des valeurs grandes si la résonance a lieu. Ainsi $|f_{\omega,c}(x,p)|^2$ ou, mieux, μ_{ω} , sera une bonne mesure de cette résonance. Nous voyons que μ_{ω} est la représentation parfaite de la distribution de probabilité en phase.

Démonstration du théorème 6. Nous allons examiner la transformée de Fourier standard de la densité $|f_{\omega,c}(x,p)|^2$, c'est-à-dire :

$$F(P,X) = \iint |f_{\omega,c}(x,p)|^2 e^{+i(P \cdot x + X \cdot p)} dx dp$$

et constater ensuite qu'elle possède une partie standard qui est la fonction

caractéristique d'une mesure μ ayant toutes les propriétés voulues. Commençons donc par calculer $F(P, X)$.

Posons $c_x(y) = c(x-y)$. Nous pouvons alors écrire que $f_{\omega, c}(x, p) = \widehat{\omega \bar{c}_x}(p)$ (où $\widehat{}$ désigne toujours la transformée de Fourier non-standard). Donc $|f_{\omega, c}(x, p)|^2 = \widehat{\omega \bar{c}_x}(p) \cdot \overline{\widehat{\omega \bar{c}_x}(p)}$. La transformée de Fourier standard, par rapport à la seule variable p , de cette expression, est alors :

$$\int_{*\mathbb{R}^n} \widehat{\omega \bar{c}_x}(p) \cdot \overline{\widehat{\omega \bar{c}_x}(p)} e^{iX \cdot p} dp.$$

Par le changement de variable $p = h\xi$, cela devient :

$$\int_{*\mathbb{R}^n} \left[\widehat{\omega \bar{c}_x}(h\xi) \right] \overline{\left[\widehat{\omega \bar{c}_x}(h\xi) \right]} e^{i h X \cdot \xi} d\xi.$$

Or $\widehat{\omega \bar{c}_x}(h\xi)$ est la transformée de Fourier standard inverse de $\omega \bar{c}_x$; donc notre expression est finalement égale à la convolution des transformées respectives de $\widehat{\omega \bar{c}_x}(h\xi)$ et $\overline{\widehat{\omega \bar{c}_x}(h\xi)}$, c'est-à-dire à :

$$\int_{*\mathbb{R}^n} \overline{\omega \bar{c}_x}(y) \omega \bar{c}_x(hX+y) dy = \int_{*\mathbb{R}^n} \overline{\omega(y+hX)} \omega(y) \overline{c(x-y-hX)} c(x-y) dy.$$

Pour avoir $F(P, X)$ il nous faut encore appliquer la transformation de Fourier (standard) à la variable x ; pour alléger l'écriture, posons encore

$$\begin{aligned} \omega_X(y) &= \omega(y+hX) \\ b_X(y) &= \overline{c(y+hX)} c(y). \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$F(P, X) = \int_{*\mathbb{R}^n} \omega_X(y) \overline{\omega(y)} \left[\int_{*\mathbb{R}^n} b_X(x-y) e^{+iP \cdot x} dx \right] dy = \int_{*\mathbb{R}^n} \omega_X(y) \overline{\omega(y)} e^{+iP \cdot y} dy \cdot \int_{*\mathbb{R}^n} b_X(x) e^{+iP \cdot x} dx.$$

Ainsi, $F(P, X)$ est le produit de la transformée de Fourier standard de $\omega_X \bar{\omega}$,

par la transformée de Fourier standard de b_X . Nous allons maintenant prouver que la première possède une partie standard qui existe pour tous (P, X) finis et qui est continue en (P, X) , et que la seconde est, pour tous (P, X) finis, infiniment proche de 1. Pour cela, nous utilisons les inégalités de Hölder :

$$\left| \int_{*\mathbb{R}^n} \omega(y+nX) \overline{\omega(y)} e^{+iP \cdot y} dy \right| \leq \left(\int_{*\mathbb{R}^n} |\omega(y+nX)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{*\mathbb{R}^n} |\omega(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \|\omega\|^2 \sim 1.$$

Donc la partie standard existe, puisque c'est majoré par une constante finie.

Pour la continuité, écrivons pour tous $V, R \in *(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{*\mathbb{R}^n} \omega_{X+V}(y) \overline{\omega(y)} e^{+i(P+R) \cdot y} dy - \int_{*\mathbb{R}^n} \omega_X(y) \overline{\omega(y)} e^{+iP \cdot y} dy \right| \leq \\ & \leq \int_{*\mathbb{R}^n} |\omega_{X+V}(y) - \omega_X(y)| |\omega(y)| dy + \int_{*\mathbb{R}^n} |\omega_X(y) \omega(y)| |e^{iR \cdot y} - 1| dy \\ & \leq \|\omega\| \left(\int_{*\mathbb{R}^n} |\omega(y+nV) - \omega(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + \|\omega\| \left(\int_{*\mathbb{R}^n} |e^{iR \cdot y} - 1|^2 |\omega(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Or, d'après la définition même des fonctions d'onde (conditions iii et iv) et le lemme 4, ces deux derniers termes sont infiniment petits dès que R et V le sont ; d'après un théorème de Robinson, cela suffit à prouver que la fonction standard $X, P \mapsto \text{St} \left[\int \omega_X(y) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy \right]$ est continue ([17], page 116, théorème 4.5.10).

$$\text{Voyons maintenant la fonction } \int_{*\mathbb{R}^n} b_X(y) e^{iP \cdot y} dy = \int_{*\mathbb{R}^n} \overline{c(y+nX)} c(y) e^{iP \cdot y} dy.$$

Par hypothèse, c est infiniment voisine, dans $*\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, d'une fonction c_0 qui varie lentement et est concentrée en 0, c'est-à-dire telle que, pour tout multi-indice $\alpha \neq 0$, $\|x^\alpha c_0\|$ et $\|(i\pi \frac{\partial}{\partial x})^\alpha c_0\|$ sont infiniment petits. Il est clair que

$$\int_{*\mathbb{R}^n} \overline{c_0(y+nX)} c_0(y) e^{iP \cdot y} dy \simeq \int_{*\mathbb{R}^n} \overline{c(y+nX)} c(y) e^{iP \cdot y} dy$$

pour tous X, P de ${}^*\mathbf{R}^n$ (pas nécessairement finis) ; cela se voit très bien en prenant l'inégalité de Schwartz-Hölder. Il suffit donc de montrer que

$$\int_{{}^*\mathbf{R}^n} \overline{c_0(y+nX)} c_0(y) e^{iP \cdot y} dy \text{ est infiniment voisin de } 1 \text{ pour tous } X, P \text{ finis.}$$

Pour cela, appliquons à $c_0(y+nX)$ la formule des accroissements finis :

$$c_0(y+nX) = c_0(y) + nX \cdot \int_0^1 \frac{\partial c_0}{\partial y}(y+t nX) dt$$

d'où

$$\int_{{}^*\mathbf{R}^n} \overline{c_0(y+nX)} c_0(y) e^{iP \cdot y} dy = \int_{{}^*\mathbf{R}^n} |c_0(y)|^2 e^{iP \cdot y} dy + \int_{{}^*\mathbf{R}^n} \int_0^1 nX \cdot \frac{\partial c_0}{\partial y}(y+t nX) c_0(y) e^{iP \cdot y} dt dy .$$

Or, par l'inégalité de Hölder, le dernier terme se majore comme suit :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{{}^*\mathbf{R}^n} \int_0^1 nX \cdot \frac{\partial c_0}{\partial y}(y+t nX) c_0(y) e^{iP \cdot y} dt dy \right| \leq \\ & \leq \int_{{}^*\mathbf{R}^n} \int_0^1 n|X| \left| \frac{\partial c_0}{\partial y}(y+t nX) \right| |c_0(y)| dt dy \\ & \leq \int_0^1 n|X| \left(\int_{{}^*\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial c_0}{\partial y}(y+t nX) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{{}^*\mathbf{R}^n} |c_0(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ & \leq |X| \|n \frac{\partial c_0}{\partial y}\| \|c_0\| \end{aligned}$$

et les propriétés de c_0 font que cela est infiniment petit si $|X|$ est fini.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que $\int |c_0(y)|^2 e^{iP \cdot y} dy \simeq 1$ pour P fini.

On le voit instantanément à ce que $|c_0(y)|^2$ est une représentation de la mesure de Dirac $\delta(y)$, dont la transformée de Fourier est 1. De façon précise :

$$\int_{{}^*\mathbf{R}^n} |c_0(y)|^2 e^{iP \cdot y} dy - 1 = \int_{{}^*\mathbf{R}^n} (e^{iP \cdot y} - 1) |c_0(y)|^2 dy$$

qui est majoré par $\int |P \cdot y| |c_0(y)|^2 dy \leq |P| \|\sqrt{|y|} c_0\| \simeq 0$.

Considérons alors l'application standard définie de la façon suivante : à tout (P, X) standard, appartenant à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, on associe

$$F_0(P, X) = \text{St}[F(P, X)] = \text{St}\left[\int_{*\mathbb{R}^n} \omega(y + \hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy\right] .$$

La dernière expression montre bien que $F_0(P, X)$ ne dépend pas du choix de c .

Cette fonction standard est continue comme nous avons déjà vu. En outre

$F_0(0, 0) = \text{St}(\|\omega\|^2)$; en effet, $F_0(0, 0) = \text{St}\left[\iint |f_{\omega, c}(x, p)|^2 dx dp\right]$. Il suffit donc de s'assurer que $\iint |f_{\omega, c}(x, p)|^2 dx dp \simeq \|\omega\|^2$; mais puisque $f_{\omega, c}(x, p) = \widehat{\omega c_x}(p)$,

la formule de Plancherel nous donne

$$\iint |f_{\omega, c}(x, p)|^2 dp = \int |\omega \bar{c}_x(y)|^2 dy$$

pour tout $x \in *\mathbb{R}^n$, et par conséquent :

$$\iint |f_{\omega, c}(x, p)|^2 dx dp = \iint |\omega(y)|^2 |c(x-y)|^2 dx dy = \|\omega\|^2 \|c\|^2 = \|\omega\|^2 .$$

Pour que, compte tenu de ce que nous venons de dire, $F_0(P, X)$ soit la fonction caractéristique d'une mesure positive de masse totale $\text{St}(\|\omega\|^2)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit, d'après le célèbre théorème de Bochner, qu'en plus des propriétés que nous venons d'établir, elle soit encore une fonction de type positif. Or, pour toute fonction c , $F(P, X)$ est une fonction non standard de type positif, puisque c est la fonction caractéristique de la densité positive $|f_{\omega, c}(x, p)|^2$; autrement dit, pour toute famille $\{P_j, X_j\}_{0 \leq j \leq N}$ (où N est un entier non nécessairement standard) d'éléments de $*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, et toute famille $\{Z_j\}_{0 \leq j \leq N}$ de nombres complexes (non nécessairement standards) nous avons :

$$\sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N F(P_j - P_k, X_j - X_k) Z_j \bar{Z}_k \geq 0 .$$

Evidemment cette inégalité reste encore vraie si N , P_j , X_j , Z_j sont tous standards ; alors la partie standard de la somme ci-dessus est elle aussi ≥ 0 ; cette partie standard étant tout simplement

$$\sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N F_0(P_j - P_k, X_j - X_k) Z_j \bar{Z}_k$$

pour tous N, P_j, X_j, Z_j standard, cela montre que, d'après le théorème de Bochner, F_0 est bien la fonction caractéristique d'une mesure positive μ_ω sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; qui est indépendante de c puisque F_0 l'est. Du fait que $F \approx F_0$, on déduit que la densité $|f_{\omega,c}(x,p)|^2$ est infiniment proche de μ_ω pour la topologie vague.

Ceci achève la démonstration du théorème 6.

Afin d'illustrer la signification de ce théorème, et pour montrer que la notion de spectre qu'il dégage est compatible avec celle du chapitre II concernant les paquets d'ondes, ou avec celle du chapitre III pour les "ondes élémentaires", calculons la mesure μ_ω si ω est un paquet d'ondes d'impulsion p_0 , concentré en x_0 , c'est-à-dire si $\omega(y) = a(x_0 - y)e^{\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot y}$, où a est concentré en 0 et varie lentement. Comme nous n'avons pas de formule qui nous donne directement μ_ω , mais que nous en avons une qui nous donne explicitement sa fonction caractéristique, nous allons commencer par calculer celle-ci :

$$F_0(P, X) = \text{St} \left[\int_{*\mathbb{R}^n} \omega(y + \hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy \right].$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{*\mathbb{R}^n} \omega(y + \hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy &= \int_{*\mathbb{R}^n} a(x_0 - y - \hbar X) \overline{a(x_0 - y)} e^{i(X \cdot p_0 + P \cdot y)} dy \\ &= e^{i(X \cdot p_0 + P \cdot x_0)} \int_{*\mathbb{R}^n} a(y - \hbar X) \overline{a(y)} e^{-i \cdot P \cdot y} dy. \end{aligned}$$

Par un raisonnement déjà employé plus haut, on montre facilement que

$\int a(y - \hbar X) \overline{a(y)} e^{-iP \cdot y} dy \approx 1$ pour tous X, P standards et par conséquent

$F_0(P, X) = e^{i(X \cdot p_0 + P \cdot x_0)}$, où l'on reconnaît la fonction caractéristique de $\delta(x - x_0, p - p_0)$; le spectre d'un paquet d'ondes se confond donc bien avec le support de sa mesure spectrale.

Un autre exemple très parlant est celui de l'onde plane monochromatique,

de la forme $\omega(x) = e^{\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x}$. Comme celle-ci n'est pas dans $*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, et ne peut de toute façon pas représenter un système physique réel (cf. [3] chap. V. §1), les physiciens ont toujours considéré des fonctions d'onde de la forme $\omega(x) = a(x)e^{\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x}$, où la fonction a varie très lentement, mais vérifie néanmoins la condition que $\int |a(x)|^2 dx$ est fini. Prenons donc pour $a(x)$ une fonction standard, C^∞ , et telle que $\int |a(x)|^2 dx \sim 1$. Alors

$$\int_{*\mathbb{R}^n} \omega(y+\hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy = \int_{*\mathbb{R}^n} a(y+\hbar X) \overline{a(y)} e^{iP \cdot y} dy \cdot e^{iX \cdot p_0}.$$

Si nous désignons par $\chi(P)$ la transformée de Fourier standard de $|a|^2$, nous obtenons $F_0(P, X) = \chi(P) e^{iX \cdot p_0}$, qui est la transformée de Fourier, ou fonction caractéristique, de $\mu_\omega(x, p) = |a(x)|^2 \delta(p - p_0)$, dont le support est manifestement ce que la tradition faisait prévoir.

Plus généralement, pour une fonction d'onde $\omega(x) = a(x) e^{\frac{i}{\hbar} \varphi(x)}$, où $a(x)$ est comme dans l'exemple précédent, et où $\varphi(x)$, la phase ou eikonale, est une fonction standard, C^∞ , telle que $\det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \neq 0$, il est facile de calculer :

$$F_0(P, X) = \int |a(x)|^2 e^{i[X \cdot \text{grad } \varphi(x) + P \cdot x]} dx.$$

Cette fonction est la fonction caractéristique de la mesure

$$\mu_\omega(x, p) = |a(x)|^2 \delta(p - \text{grad } \varphi(x))$$

dont le support est $\text{Sp}(\omega) = \{(x, p) | p = \text{grad } \varphi(x)\} \cap \text{Supp } a$, résultat lui aussi prophétisé par la tradition depuis la nuit des temps.

Voici un dernier exemple très instructif : cherchons le spectre d'une fonction d'onde de la forme suivante :

$$\omega(x) = (\pi \hbar)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{i}{2\hbar} |x|^2}$$

Si $\hbar^2 \ll \epsilon \ll 1$, nous avons là un paquet d'ondes de spectre $(0,0)$ et nous avons déjà examiné ce cas ; mais si $\epsilon \sim \hbar^2$? Calculons :

$$\begin{aligned} & \int \omega(y+\hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy = \\ & = (\pi\epsilon)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{|y+\hbar X|^2 + |y|^2}{2\epsilon} + iP \cdot y} dy \\ & = e^{-\frac{\hbar^2}{2\epsilon}|X|^2 + i\frac{\hbar}{2}X \cdot P - \frac{\epsilon}{4}|P|^2} . \end{aligned}$$

Si nous posons $\alpha = \text{St}\left(\frac{\hbar^2}{\epsilon}\right)$, nous avons, puisque $e^{i\frac{\hbar}{2}X \cdot P - \frac{\epsilon}{4}|P|^2} \simeq 1$,

$F_0(P, X) = e^{-\frac{\alpha}{2}|X|^2}$, donc :

$$\mu_{\omega}(x, p) = (2\pi\alpha)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|p|^2}{2\alpha}} \delta(x) .$$

Dans ce cas, le spectre de ω est $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que ω représente une onde concentrée en un point, mais étalée en impulsion selon une gaussienne de variance α , qui n'est pas infiniment petit si $\epsilon \sim \hbar^2$. On peut évidemment considérer ce phénomène comme une n -ième manifestation du principe d'incertitude de Heisenberg.

Ces exemples sont tous classiques, et montrent que notre mesure μ_{ω} et la notion de spectre d'onde qui en dérive coïncident bien avec la notion ancienne, intuitive et heuristique, que les physiciens avaient pressentie, mais que par exemple la fonction de Wigner ne pouvait décrire qu'imparfaitement. Ainsi, nous avons pu constater que la nouvelle notion de spectre appliquée à un paquet d'ondes, ou plus généralement à une onde élémentaire redonnait bien le spectre attribué auparavant à ces seuls objets. On peut alors se demander si le fait d'avoir un spectre réduit à un seul point caractérise les ondes élémentaires. Rappelons qu'au chapitre précédent nous avons défini les ondes élémentaires comme étant simplement des éléments de ${}^*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dont le halo contient au moins un paquet d'ondes. Il se fait que oui :

PROPOSITION 4. Soit ω une fonction d'onde dont le spectre dynamique est réduit à un point (x_0, p_0) , et dont la mesure spectrale est par conséquent de la forme $C \delta(x-x_0, p-p_0)$, où C est une constante standard ($C = \text{St}[\|\omega\|^2]$). Alors il existe un paquet d'ondes u infiniment voisin, dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, de ω , et dont le spectre, tel qu'il a été défini au chapitre II, est (x_0, p_0) .

Démonstration : il suffit évidemment d'en faire la preuve pour $x_0 = 0$ et $p_0 = 0$, ce qui allège déjà beaucoup l'écriture. Puisque la mesure spectrale est par hypothèse $C \delta(x, p)$, nous devons avoir pour tous α et β standards, et > 0 :

$$\int_{|x| \geq \alpha} \int C \delta(x, p) dx dp = \int_{|p| \geq \beta} \int C \delta(x, p) dx dp = 0$$

et donc, pour un choix arbitraire de la fonction c :

$$\int_{|x| \geq \alpha} \int |f_{\omega, c}(x, p)|^2 dx dp \approx 0, \quad \int_{|p| \geq \beta} \int |f_{\omega, c}(x, p)|^2 dx dp \approx 0.$$

Nous avons déjà vu en utilisant la formule de Plancherel (puisque $f_{\omega, c}(x, p) = \widehat{\omega c_x}(p)$) que $\int |f(x, p)|^2 dp = \int |\omega(y)|^2 |c(x-y)|^2 dy$, d'où :

$$\int_{|x| \geq \alpha} \int |f_{\omega, c}(x, p)|^2 dx dp = \int |\omega(y)|^2 \left[\int_{|x| \geq \alpha} |c(x-y)|^2 dx \right] dy.$$

Il est immédiat, à cause de la nature de la fonction c , que la fonction entre crochets est ≈ 0 si $|y| < \alpha$ et $|y| \neq \alpha$, et ≈ 1 si $|y| > \alpha$ et $|y| \neq \alpha$.

On en déduit

$$\int |\omega(y)|^2 \left[\int_{|x| \geq \alpha} |c(x-y)|^2 dx \right] dy \approx \int_{|y| \geq \alpha} |\omega(y)|^2 dy$$

et par conséquent que $\int_{|y| \geq \alpha} |\omega(y)|^2 dy \approx 0$. Nous voudrions aussi prouver une propriété analogue pour $\widehat{\omega}$: $\int_{|q| \geq \beta} |\widehat{\omega}(q)|^2 dq \approx 0$ (pour tout β standard, > 0).

Pour cela, nous partirons de :

$$\int_{|p| \geq \beta} \int |f_{\omega, c}(x, p)|^2 dx dp \approx 0.$$

Afin de pouvoir suivre le même raisonnement que pour la précédente relation, commençons par constater que $f_{\omega, c}(x, p) = e^{\frac{i}{\hbar} x \cdot p} f_{\widehat{\omega}, \widehat{c}}(p, -x)$. En effet, si on pose $u_{c, x, p}(z) = c(x-z) e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot z}$, on peut écrire, puisque la transformation de Fourier est unitaire :

$$f_{\omega, c}(x, p) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \langle \omega, u_{c, x, p} \rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \langle \widehat{\omega}, \widehat{u_{c, x, p}} \rangle .$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \widehat{u_{c, x, p}}(r) &= (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int c(x-z) e^{\frac{i}{\hbar} (p-r) \cdot z} dz = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int c(z) e^{\frac{i}{\hbar} (p-r) \cdot (x-z)} dz = \\ &= \widehat{c}(p-r) e^{\frac{i}{\hbar} (p-r) \cdot x} = u_{\widehat{c}, p, -x}(r) e^{\frac{i}{\hbar} x \cdot p} , \text{ ce qui montre bien ce que nous voulions.} \end{aligned}$$

Mais alors $|f_{\omega, c}(x, p)|^2 = |f_{\widehat{\omega}, \widehat{c}}(p, -x)|^2$ et nous pouvons donc obtenir

$$\int_{|q| \geq \beta} |\widehat{\omega}(q)|^2 dq \simeq 0 \text{ exactement comme nous avons obtenu précédemment}$$

$$\int_{|y| \geq \alpha} |\omega(y)|^2 dy \simeq 0 . \text{ Ces propriétés ont la conséquence suivante : si nous multi-}$$

plions ω ou $\widehat{\omega}$ par une fonction standard continue et bornée, et qui prend la valeur 1 à l'origine, nous obtenons quelque chose qui est infiniment voisin de ω ou $\widehat{\omega}$ (respectivement). Soient χ et ψ deux telles fonctions ; d'après la formule de Plancherel, puisque $\|\psi \cdot \widehat{\omega} - \widehat{\omega}\| \simeq 0$, on a aussi $\|\widetilde{\psi \widehat{\omega}} - \omega\| \simeq 0$;

$$\text{or } \widetilde{\psi \widehat{\omega}} = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \widetilde{\psi} * \omega ; \text{ mais}$$

$$(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \widetilde{\psi}(x) = (2\pi\hbar)^{-n} \int \psi(p) e^{+\frac{i}{\hbar} x \cdot p} dp = \hbar^{-n} F^{-1} \psi\left(\frac{x}{\hbar}\right) ,$$

où $F^{-1} \psi(X) = (2\pi)^{-n} \int \psi(p) e^{iX \cdot p} dp$ est la transformée de Fourier standard inverse de ψ ($F^{-1} \psi$ est donc une fonction standard ; nous supposons que ψ et χ sont à décroissances rapides, ou même à supports compacts). Posons

$$\Phi(x) = \hbar^{-n} F^{-1} \psi\left(\frac{x}{\hbar}\right) . \text{ Nous avons ainsi vérifié que, dans } *L^2(\mathbb{R}^n) , \Phi * \omega \simeq \omega .$$

On en déduit d'abord que :

$$\int_{|x| \geq \alpha} |\Phi * \omega(x)|^2 dx \simeq \int_{|x| \geq \alpha} |\omega(x)|^2 dx \simeq 0 .$$

En effet $||\mathfrak{F} * \omega(x)|^2 - |\omega(x)|^2| \leq |\mathfrak{F} * \omega(x) - \omega(x)| \cdot |\mathfrak{F} * \omega(x) + \omega(x)|$, donc en prenant l'inégalité de Hölder-Schwarz :

$$|\int_{|x| \geq \alpha} |\mathfrak{F} * \omega(x)|^2 - |\omega(x)|^2 dx| \leq ||\mathfrak{F} * \omega - \omega|| \cdot (||\mathfrak{F} * \omega|| + ||\omega||) \simeq 0.$$

Mais puisqu'il en est ainsi, on peut encore en déduire que $\chi \cdot \mathfrak{F} * \omega$ est infiniment proche, dans $*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, de ω . Nous avons ainsi construit un élément de $*\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ qui est infiniment voisin de ω . Il reste à vérifier que cet élément est un paquet d'ondes de spectre $(0,0)$, c'est-à-dire une fonction concentrée en 0 et variant lentement. Comme nous avons largement le choix pour les fonctions χ et ψ , nous les supposons à supports compacts, inclus dans les boules de rayon A par exemple. Il est alors facile de se rendre compte que pour tout multi-
 indice γ non nul, $||p^\gamma \psi \hat{\omega}||$ et $||x^\gamma \chi \cdot \mathfrak{F} * \omega||$ sont infiniment petits. En effet, pour tout α standard, >0 , aussi petit que l'on veut, $\int_{|p| \geq \alpha} |\psi(p)\hat{\omega}(p)|^2 dp \simeq 0$; d'autre part, nous avons l'inégalité

$$\begin{aligned} \int |p^\gamma \psi(p)\hat{\omega}(p)|^2 dp &\leq \sup_{|p| \leq \alpha} |p^{2\gamma}| \int_{|p| \leq \alpha} |\psi(p)\hat{\omega}(p)|^2 dp + \\ &+ \sup_{\alpha \leq |p| \leq A} |p^{2\gamma}| \int_{|p| \geq \alpha} |\psi(p)\hat{\omega}(p)|^2 dp \leq \alpha^{2|\gamma|} ||\hat{\omega}||^2 + i.p. \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout standard $\alpha > 0$, aussi petit que l'on veut, le membre de gauche de cette inégalité est infiniment petit. Exactement de la même manière, on pourra prouver que $||x^\gamma \chi \cdot \mathfrak{F} * \omega||$ est infiniment petit. Or $||p^\gamma \psi \hat{\omega}|| = ||(i\pi \frac{\partial}{\partial x})^\gamma \cdot \mathfrak{F} * \omega||$; pour prouver alors que $||(i\pi \frac{\partial}{\partial x})^\gamma \chi \cdot \mathfrak{F} * \omega||$ est infiniment petit, il suffit d'écrire la formule de Leibnitz-Hörmander; on supposera évidemment que χ est indéfiniment dérivable; puisqu'elle est standard, il va de soi que tous les $(i\pi \frac{\partial}{\partial x})^\gamma \chi$ sont infiniment petits, dès que $|\gamma| > 0$.

La proposition est ainsi démontrée : la définition, donnée au chapitre III, du spectre d'une onde élémentaire est parfaitement compatible avec la définition générale du spectre d'une fonction d'onde.

Au début de ce chapitre, nous avons fait remarquer que le spectre est en fait l'ensemble des points (x,p) tels que les paquets d'ondes de spectre

$\{x, p\}$ soient en résonance avec ω ; nous allons maintenant donner un théorème qui permettra encore une autre interprétation : une onde ω est une superposition d'ondes élémentaires modulée par l'amplitude $f(x, p)$. De façon précise :

THÉOREME 7. Soit ω une fonction d'onde, $c(y)$ une onde élémentaire de spectre $(0, 0)$, et $f_{\omega, c}(x, p)$ l'amplitude qui leur est associée au théorème 6. Alors nous avons pour ω la représentation intégrale : (si $\|c\| = 1$)

$$\omega(y) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{*\mathbb{R}^n \times *\mathbb{R}^n} f_{\omega, c}(x, p) c(x-y) e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot y} dx dp.$$

Démonstration. Nous avons vu, au début de la démonstration du théorème 6, que $f_{\omega, c}(x, p) = \omega \widehat{c_x}(p)$, avec $c_x(y) = c(x-y)$. Par conséquent, la formule d'inversion de Fourier nous permet d'écrire : (si $\|c\| = 1$)

$$(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{*\mathbb{R}^n} f_{\omega, c}(x, p) e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot y} dp = \omega \overline{c_x}(y) = \omega(y) \overline{c(x-y)}$$

d'où

$$\begin{aligned} (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{*\mathbb{R}^n \times *\mathbb{R}^n} f_{\omega, c}(x, p) c(x-y) e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot y} dp dx &= \int_{*\mathbb{R}^n} \omega(y) |c(x-y)|^2 dx \\ &= \omega(y) \int_{*\mathbb{R}^n} |c(x)|^2 dx = \omega(y) . \end{aligned}$$

Il peut être utile dans certains cas de pouvoir déceler, directement sur la fonction $\int \omega(y+\hbar X) \omega(y) e^{iP \cdot y} dy$ si ω est ou n'est pas une fonction d'onde, c'est-à-dire si elle satisfait ou non les conditions ii) à iv) de la définition. Nous avons vu plus haut que si ω est une fonction d'onde, alors $\int \omega(y+\hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy$ prend des valeurs finies pour tous X, P finis, et est macroscopiquement continue (S -continuous). La réciproque est vraie :

THÉOREME 8. Soit $\omega \in *L^2(\mathbb{R}^n) \cap *C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour que ω soit une fonction d'onde, c'est-à-dire vérifie les conditions ii) à iv) de la définition, il faut et il suffit que la fonction

$$(P, X) \mapsto \int_{*\mathbb{R}^n} \omega(y+\hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy$$

soit finie pour tout (P, X) fini et macroscopiquement continue. Autrement dit,
il faut et il suffit que la fonction standard

$$(P, X) \mapsto \text{St} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \omega(y + \hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy \right]$$

soit définie et continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Posons $F(P, X) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(y + \hbar X) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy$.

Il est immédiat que, pour tout $X, P \mapsto F(P, X)$ est la transformée de Fourier standard de $\omega(y + \hbar X) \overline{\omega(y)}$, $P \mapsto F(P, 0)$ celle de $|\omega(y)|^2$, et $e^{i\hbar X \cdot P} F(P, 0)$ celle de $|\omega(y + \hbar X)|^2$. Or $|\omega(y + \hbar X) - \omega(y)|^2 \equiv |\omega(y + \hbar X)|^2 + |\omega(y)|^2 - 2\text{Re} \omega(y + \hbar X) \overline{\omega(y)}$, dont la transformée de Fourier est :

$$(e^{i\hbar X \cdot P} + 1)F(P, 0) - F(P, X) - \overline{F(P, X)}$$

et par conséquent

$$\int |\omega(y + \hbar X) - \omega(y)|^2 dy = 2F(0, 0) - F(0, X) - \overline{F(0, X)}$$

Si F est macroscopiquement continue, cela est évidemment infiniment petit dès que X est infiniment petit, puisque $F(0, 0) = \|\omega\|^2$ est réel.

De la même façon nous avons :

$$|e^{iR \cdot y} - 1|^2 |\omega(y)|^2 = [2 - e^{iR \cdot y} - e^{-iR \cdot y}] |\omega(y)|^2$$

dont la transformée de Fourier est :

$$P \mapsto 2F(P, 0) - F(P+R, 0) - F(P-R, 0)$$

d'où

$$\int |e^{iR \cdot y} - 1|^2 |\omega(y)|^2 dy = 2F(0, 0) - F(R, 0) - F(-R, 0)$$

qui effectivement est infiniment petit dès que R l'est, pourvu que F soit macroscopiquement continue, de sorte que l'on peut conclure à l'aide du lemme 4.

Une autre formule utile serait une expression directe de la mesure spectrale, au lieu d'une formule qui ne donne que sa fonction caractéristique. Il se fait que pour la plupart des calculs explicites, comme dans les exemples que nous avons présentés plus haut, c'est cette dernière qui est la plus pratique.

Mais dans certains raisonnements, il peut être commode de pouvoir écrire une sorte de densité de la mesure spectrale, comme l'indique le théorème que voici :

THÉORÈME 9. Soit ω une fonction d'onde et μ sa mesure spectrale. Alors, pour toute fonction - test φ appartenant à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ des fonctions standard, différentiables, à décroissance rapide :

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \int \varphi d\mu = \text{St}[(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \int \omega(x) \overline{\widehat{\omega}(p)} e^{-\frac{i}{\hbar}x \cdot p} \varphi(x,p) dx dp] .$$

Démonstration : $(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \omega(x) \overline{\widehat{\omega}(p)} e^{-\frac{i}{\hbar}x \cdot p}$ est une densité sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; mais contrairement à $|f_{\omega,c}(x,p)|^2$, elle n'est pas positive. Il est facile de calculer la fonction caractéristique de cette densité ; c'est

$$\begin{aligned} F(P,X) &= (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \int \omega(x) \overline{\widehat{\omega}(p)} e^{-\frac{i}{\hbar}x \cdot p + i(X \cdot p + P \cdot x)} dx dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) [(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\omega}(p) e^{\frac{i}{\hbar}(x - \hbar X) \cdot p} dp] e^{iP \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) \overline{\omega(x - \hbar X)} e^{iP \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x + \hbar X) \overline{\omega(x)} e^{iPx} dx \cdot e^{i\hbar P \cdot X} \end{aligned}$$

Lorsque P et X sont finis, ceci est $\approx \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x + \hbar X) \overline{\omega(x)} e^{iP \cdot x} dx$, où nous

reconnaissons l'expression qui, au théorème 6, nous donnait la fonction caractéristique de μ . Ainsi, pour tous P, X finis :

$${}^*F_0(P,X) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \int e^{i(Px + Xp)} d^*\mu \approx \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x + \hbar X) \overline{\omega(x)} e^{iP \cdot x} dx \approx F(P,X) .$$

Désignons par $\mathfrak{F}(P,X)$ la transformée de Fourier (standard) de φ , de telle sorte que

$$(2\pi n)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}^* \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) \overline{\omega(p)} e^{-\frac{i}{n} x \cdot p} \varphi(x, p) dx dp = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}^* F(P, X) \overline{\Phi(P, X)} dP dX .$$

D'après ce qui a précédé, nous avons pour tout compact standard K de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\iint_{K}^* F(P, X) \overline{\Phi(P, X)} dP dX \approx \iint_{K}^* F_0(P, X) \overline{\Phi(P, X)} dP dX .$$

Ceci étant vrai pour tout compact standard, nous en déduisons, à l'aide du lemme de Robinson, ou principe de permanence, qu'il existe un ensemble interne K_0 de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, contenant $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pour lequel on a encore

$$\iint_{K_0}^* F(P, X) \overline{\Phi(P, X)} dP dX \approx \iint_{K_0}^* F_0(P, X) \overline{\Phi(P, X)} dP dX .$$

Il est alors facile de constater que

$$\iint_{K_0}^* F(P, X) \overline{\Phi(P, X)} dP dX \approx 0$$

et

$$\iint_{K_0}^* F_0(P, X) \overline{\Phi(P, X)} dP dX \approx 0 .$$

En effet, pour tout $(P, X) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, fini ou non, on a $|F(P, X)| \leq \|\omega\|^2$ et $|F_0(P, X)| \leq \text{St} \|\omega\|^2$, c'est-à-dire que F et F_0 sont uniformément majorées par des constantes finies. Or Φ est, de même que φ , un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, et par conséquent, pour tout entier (standard) N ,

$$\text{Sup}_{K_0} [(1+|X|+|P|)^N |\Phi(P, X)|] \approx 0 .$$

Si nous choisissons N assez grand pour que $(1+|X|+|P|)^{-N}$ soit intégrable, nous aurons même $\iint_{K_0}^* (1+|X|+|P|)^{-N} dP dX \approx 0$; or :

$$\left| \iint_{K_0}^* F(P, X) \overline{\Phi(P, X)} dP dX \right| \leq \text{Sup} |F| \cdot \text{Sup}_{K_0} |(1+|X|+|P|)^{N*} \Phi| \int_{K_0}^* \frac{dP dX}{(1+|X|+|P|)^N}$$

$$\left| \iint_{K_0}^* F_0(P, X) \overline{\Phi(P, X)} dP dX \right| \leq \text{Sup} |F_0| \cdot \text{Sup}_{K_0} |(1+|X|+|P|)^{N*} \Phi| \int_{K_0}^* \frac{dP dX}{(1+|X|+|P|)^N} .$$

De tout cela, il résulte finalement que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}^* \int_{\mathbb{R}^n}^* F(P, X) \overline{\Phi}(P, X) dP dX \approx \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}^* \int_{\mathbb{R}^n}^* F_0(P, X) \overline{\Phi}(P, X) dP dX$$

et par conséquent :

$$(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}^* \int_{\mathbb{R}^n}^* \omega(x) \overline{\widehat{\omega}(p)} e^{-\frac{i}{\hbar}x \cdot p} \varphi(x, p) dx dp \approx \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \varphi d\mu$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Ce résultat mérite quelques commentaires. La formule n'est valable que pour des fonctions φ suffisamment lisses ; avec une mesure ou une densité positive, cela entraînerait automatiquement que la formule s'étendrait à toutes les fonctions continues nulles à l'infini : il suffirait d'appliquer l'inégalité de la moyenne. On peut faire cela, par exemple, avec les densités $|f_{\omega, c}(x, p)|^2$: il est alors vrai que pour toute fonction standard, continue, et nulle à l'infini, φ :

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \varphi d\mu = \text{St} \left[\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}^* |f_{\omega, c}(x, p)|^2 \varphi(x, p) dx dp \right]$$

comme c'était indiqué dans l'énoncé du théorème 6. Mais pour une densité oscillante telle que $(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \omega(x) \overline{\widehat{\omega}(p)} e^{-\frac{i}{\hbar}x \cdot p}$, l'inégalité de la moyenne ne nous donnerait rien d'intéressant. En effet, comme on le voit de toute évidence, l'amplitude des oscillations de cette densité est infinie, de l'ordre de $(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}}$; ce qui fait que cette densité donne des intégrales finies pour des fonctions φ suffisamment lisses (et standard) est la moyennisation : sur le halo de chaque point, une telle fonction φ se comporte comme une constante ; et, bien que la densité effectue, dans le halo de chaque point, une infinité d'oscillations d'amplitude infinie autour de zéro, la moyenne (sur des distances macroscopiques) de ces oscillations est néanmoins toujours finie. Un tel phénomène se produit aussi, quoique d'une manière différente, avec des objets classiques : par exemple, δ' (la dérivée de la mesure de Dirac) est une distribution très singulière à l'origine, mais sa moyenne sur tout intervalle $]-\epsilon, +\epsilon[$ est nulle. On comprend alors mieux pourquoi le théorème 9 peut perdre sa validité pour des fonctions,

même standard, qui ne sont que continues ; il y a des fonctions continues très irrégulières, comme par exemple la célèbre fonction continue de Weierstrass, qui n'est dérivable en aucun point. Nous avons d'ailleurs déjà rencontré ce phénomène dans les chapitres précédents : avec la transformation de Fourier non-standard, ou avec les transformations intégrales canoniques.

V. LE SPECTRE, PROPRIÉTÉ LOCALE

Au chapitre précédent, nous avons dégagé la notion de spectre, par l'intermédiaire de la mesure spectrale ; celle-ci, comme d'ailleurs l'ensemble des méthodes que nous avons employées, reposait sur la structure euclidienne de \mathbb{R}^n (transformations de Fourier, convolution, etc.). Or le spectre, considéré comme le concept mathématique qui doit décrire l'impulsion d'une onde en tout point de l'espace, apparaît d'emblée comme quelque chose de local (et même micro-local, dans un sens analogue, mais un peu plus précis, à celui qu'a ce mot chez Hörmander ou Sato). Il y a donc toutes les raisons de penser que le rôle joué par la structure euclidienne est une pure apparence, un effet secondaire des techniques, au demeurant très commodes, que nous avons utilisées. Nous ne sommes d'ailleurs pas les premiers : la définition du front d'onde d'une distribution chez Hörmander, du moins celle qui est utilisable, repose aussi sur la transformation de Fourier. Et bien des démonstrations "élégantes" de propriétés locales des distributions utilisent la transformation de Fourier, car il est vrai que c'est un outil merveilleux.

Le problème de la localisation pouvait d'ailleurs être tout simplement ignoré s'il ne s'agissait que des fonctions d'onde sur un ouvert de \mathbb{R}^n : on pourrait toujours prolonger par 0 à l'extérieur, avec un raccordement bien sage dans le halo de la frontière (on s'en tiendrait à des ouverts assez réguliers). Mais la localisation devient inévitable lorsqu'on veut définir et analyser des fonctions d'onde sur les variétés. Fort heureusement, nous pouvons profiter d'une propriété de localisation de la mesure spectrale, et donc aussi du spectre, dont voici l'énoncé :

THÉOREME 10. Soit ω une fonction d'onde, et soit φ une fonction standard sur \mathbb{R}^n , indéfiniment dérivable et à support compact ; il est évident que $\varphi\omega$ est encore une fonction d'onde. Nous avons alors la relation :

$$\mu_{\varphi\omega}(x,p) = |\varphi(x)|^2 \mu_{\omega}(x,p)$$

c'est-à-dire que la mesure spectrale de $\varphi\omega$ est absolument continue par rapport à celle de ω , avec la densité relative $|\varphi(x)|^2$ (qui est, notons le bien, indépendante de p) .

Démonstration. La fonction caractéristique de $\mu_{\varphi\omega}$ est :

$$\begin{aligned} F_{\varphi\omega}(P,X) &= \text{St}[\int \omega(y+nX) \overline{\omega(y)} \varphi(y+nX) \varphi(y) e^{iP \cdot y} dy] \\ &= \text{St}[\int \omega(y+nX) \overline{\omega(y)} |\varphi(y)|^2 e^{iP \cdot y} dy] . \end{aligned}$$

Posons alors :

$$F_{\varphi}(P,X) = \int \omega(y+nX) \overline{\omega(y)} |\varphi(y)|^2 e^{iP \cdot y} dy ;$$

c'est la transformée de Fourier (standard) du produit des fonctions $y \mapsto \omega(y+nX) \overline{\omega(y)}$ et $y \mapsto |\varphi(y)|^2$, donc la convolution de leurs transformées, c'est-à-dire que

$$F_{\varphi}(P,X) = (2\pi)^{-n} \int F(Q,X) S(P-Q) dQ$$

où $F(Q,X) = \int \omega(y+nX) \overline{\omega(y)} e^{iP \cdot y} dy$ et $S(P) = \int |\varphi(y)|^2 e^{iP \cdot y} dy$. $S(P)$ est évidemment une fonction standard, indéfiniment dérivable, et à décroissance rapide.

Donc :

$$\begin{aligned} F_{\varphi\omega}(P,X) &= (2\pi)^{-n} \text{St}[\int F(Q,X) S(P-Q) dQ] \\ &= (2\pi)^{-n} \int F_{\varphi}(Q,X) S(P-Q) dQ \end{aligned}$$

où F_{φ} est la fonction caractéristique de μ_{ω} ; la deuxième égalité se démontre comme suit : pour tout $\epsilon > 0$, standard, mais aussi petit que l'on voudra,

$|F(Q,X) - F_{\varphi}(Q,X)| \leq \epsilon$ pour tout (Q,X) appartenant à une boule infiniment grande K_{ϵ} de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, contenant $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, puisque $\forall (Q,X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, F_{\varphi}(Q,X) \approx F(Q,X)$

(principe de permanence). Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{K_0} F(Q, X) S(P-Q) dQ - \int_{K_0} F_0(Q, X) S(P-Q) dQ \right| \\ & \leq \int_{K_0} |F(Q, X) - F_0(Q, X)| |S(P-Q)| dQ \\ & \leq \epsilon \int |S(Q)| dQ . \end{aligned}$$

Or $\int |S(Q)| dQ$ est une constante standard indépendante de ϵ , et l'inégalité est vraie pour tout $\epsilon > 0$ standard ; donc le membre de gauche est infiniment petit. Par ailleurs, les restes de ces intégrales, c'est-à-dire

$$\int_{K_0} F(Q, X) S(P-Q) dQ \quad \text{et} \quad \int_{K_0} F_0(Q, X) S(P-Q) dQ$$

sont infiniment petits (nous avons déjà suivi un raisonnement semblable dans la démonstration du théorème 9), puisqu'on peut les majorer respectivement par

$$\|\omega\|^2 \int_{K_0} |S(P-Q)| dQ \quad \text{et} \quad \text{St}(\|\omega\|^2) \int_{K_0} |S(P-Q)| dQ$$

qui sont infiniment petits à l'évidence (si P est fini), la fonction S étant intégrable. Ainsi nous avons l'égalité purement standard

$$F_{0, \varphi}(P, X) = (2\pi)^{-n} \int F_0(Q, X) S(P-Q) dQ$$

qui n'est rien d'autre que la formule de l'énoncé, mais exprimée en termes de fonctions caractéristiques.

Le théorème qui vient d'être démontré a pour conséquence immédiate l'invariance du spectre par localisation ; en effet, il résulte de la formule que :

$$\text{Sp}(\varphi \omega) = \text{Supp}(\varphi) \cap \text{Sp}(\omega)$$

pour toute fonction standard φ , indéfiniment dérivable et à support compact.

Si nous nous donnons une famille $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ de telles fonctions, dont les supports recouvrent \mathbb{R}^n de manière localement finie (ce qui entraîne évidemment par

transfert que l'extension $\{\varphi_j\}_{j \in J} \in {}^*J$ est une famille de fonctions dont les supports recouvrent ${}^*\mathbb{R}^n$, alors

$$\text{Sp}(\omega) = \bigcup_{j \in J} \text{Sp}(\varphi_j \omega)$$

pour toute fonction d'onde ω . Cette égalité montre bien le caractère en fait purement local du spectre. Elle va nous permettre d'étendre la notion de spectre à des fonctions non standard plus générales que les fonctions d'onde envisagées par la définition du chapitre précédent ; des fonctions qui ne seront plus du tout liées à la structure euclidienne ; il suffira qu'elles soient localement des fonctions d'onde. Les conditions i) à iv) de la définition des fonctions d'onde seront donc remplacées par :

DÉFINITION. Nous dirons qu'une fonction interne ω , définie sur un ouvert standard ${}^*\Omega$ de ${}^*\mathbb{R}^n$, est localement une fonction d'onde si

i) $\omega \in {}^*C^\infty(\Omega)$

ii) Pour toute fonction φ standard, C^∞ , et à support compact inclus dans Ω , $\int |\varphi(x)|^2 |\omega(x)|^2 dx$ est non infiniment grand. Il revient au même de dire que pour tout ouvert standard U , contenu dans Ω et relativement compact, $\int_U |\omega(x)|^2 dx$ est non infiniment grand.

iii) Pour tout élément infiniment petit V de ${}^*\mathbb{R}^n$, et toute fonction φ comme en ii), $\int |\varphi(x)|^2 |\omega(x+{}^*V) - \omega(x)|^2 dx$ est infiment petit.

A partir de cette définition, on voit très simplement comment attribuer un spectre à une fonction d'onde locale ω . En effet, il suffit de prendre une famille $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ de fonctions standard, C^∞ , à supports compacts, et telle que la réunion de tous les supports remplisse Ω . Chaque $\varphi_j \omega$, prolongée en dehors de Ω par 0, peut être considérée comme une fonction d'onde sur \mathbb{R}^n (les conditions de la définition ci-dessus ont été prévues exprès pour cela, et la condition supplémentaire iv) du chapitre précédent sera automatiquement vérifiée puisque φ_j a un support borné) et possède une mesure spectrale, donc

un spectre ; ces spectres se recollent, en corollaire immédiat du théorème 10, mais évidemment, les mesures spectrales, elles, n'ont plus aucune raison de se recoller. Il n'existe donc plus, sauf cas particulier, de mesure spectrale définie sur Ω pour une fonction d'onde locale. On remarquera que la restriction d'une onde locale à un ouvert plus petit est une opération bien définie et fort simple, et que le spectre de la restriction est alors la restriction du spectre (propriété de faisceau).

Si nous avons en vue une analyse sur les variétés différentiables, il faut également savoir comment se transforme le spectre lorsqu'on effectue un changement de coordonnées. Pour cette situation là, nous disposerons du théorème suivant, qui s'exprime lui aussi dans une formule très simple.

THÉOREME 11. Soit ω une fonction d'onde dont le support est un compact standard K (c'est-à-dire que $\omega(x) = 0$ si $x \notin K$). Soit Φ un difféomorphisme standard sur un ouvert Ω (standard) contenant K . Alors

$$\mu_{\omega \circ \Phi^{-1}} = \Phi^* \mu_{\omega}$$

où la transformation Φ^* est définie, pour les mesures sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$, par la formule

$$\int_{\Phi(\Omega) \times \mathbb{R}^n} \Phi^* \mu(x, p) \varphi(x) \psi(p) dx dp = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^n} \mu(y, q) \left| \det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y) \right| \varphi \circ \Phi(y) \psi \left({}^t \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y)^{-1} \cdot q \right) dy dq$$

vérifiée par toutes fonctions φ et ψ standard, continues, et à supports compacts, respectivement sur $\Phi(\Omega)$ et \mathbb{R}^n . Ou bien plus brièvement en notation fonctionnelle :

$$\Phi^* \mu(x, p) = \left| \det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\Phi^{-1}(x)) \right| \mu(\Phi^{-1}(x), {}^t \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\Phi^{-1}(x)) \cdot p) .$$

Démonstration. Soient donc comme convenu φ et ψ des fonctions-test standard. D'après une propriété bien connue des mesures bornées, il suffit de prouver le résultat en remplaçant les fonctions ψ par les fonctions $p \mapsto e^{iX \cdot p}$, où X parcourt \mathbb{R}^n . Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{\Phi(\Omega) \times \mathbb{R}^n} \int \mu_{\omega \circ \Phi^{-1}}(x, p) e^{iX \cdot p} \varphi(x) dx dp \simeq \\ & \simeq \int_{\star \Phi(\Omega)} \omega \circ \Phi^{-1}(x + \hbar X) \overline{\omega \circ \Phi^{-1}(x)} \varphi(x) dx = \\ & = \int_{\star \Omega} \omega(y + \hbar Y + \hbar^2 R(y, X)) \overline{\omega(y)} \varphi \circ \Phi(y) | \det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y) | dy \end{aligned}$$

où $\hbar^2 R(y, X)$ est le reste dans le développement de Taylor de $\Phi^{-1}(x + \hbar X)$ et $Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y)^{-1} \cdot X$. Ce reste étant de l'ordre de \hbar^2 en moyenne quadratique, et l'intégration se faisant sur le compact $\star K$ dont le volume est fini, il est clair, compte tenu de la propriété iii) des fonctions d'onde locales, que l'intégrale ci-dessus est infiniment voisine de

$$\int_{\star \Omega} \omega(y + \hbar Y) \overline{\omega(y)} \varphi \circ \Phi(y) | \det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y) | dy .$$

Or, cette dernière expression a pour partie standard

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^n} \int \mu_{\omega}(y, q) | \det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y) | e^{iY \cdot q} \varphi \circ \Phi(y) dy dq .$$

(Cela résulte immédiatement de la définition de μ_{ω} , cf. théorème 6) et par conséquent nous avons l'égalité entre expressions standard :

$$\iint \mu_{\omega \circ \Phi^{-1}}(x, p) e^{iX \cdot p} \varphi(x) dx dp = \iint \mu_{\omega}(y, q) | \det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y) | e^{iY \cdot q} \varphi \circ \Phi(y) dy dq .$$

Il ne reste plus alors qu'à remarquer que $Y \cdot q = X \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y)^{-1} q$ pour obtenir le résultat énoncé.

Ce théorème nous donne immédiatement l'action du changement de coordonnées sur le spectre d'une onde ; en effet, de $\mu_{\omega \circ \Phi^{-1}} = \Phi^* \mu_{\omega}$ nous déduisons :

$$(x, p) \in \text{Sp}(\omega \circ \Phi^{-1}) \Leftrightarrow (\Phi^{-1}(x), {}^t \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\Phi^{-1}(x)) \cdot p) \in \text{Sp}(\omega)$$

c'est-à-dire que $\text{Sp}(\omega \circ \Phi^{-1}) = \{(x, p) | (\Phi^{-1}(x), {}^t \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\Phi^{-1}(x)) \cdot p) \in \text{Sp}(\omega)\}$.

Le lecteur familier avec la géométrie différentielle aura immédiatement remarqué, à la vue de cette dernière formule, que sur une variété différentiable, le spectre d'une onde sera une partie (fermée) de l'espace fibré cotangent. Que dire de plus quant à l'analyse ondulatoire sur les variétés différentiables ? Il nous semble qu'avec les théorèmes 10 et 11 nous avons tout ce qu'il faut pour la pratiquer. Continuer à écrire ne peut nous mener qu'au déroulement de définitions qui vont de soi, ou à la répétition en plus lourd, en termes de cartes, de fibrés, et de sections, de ce qui a déjà été dit. Le mieux est donc d'arrêter là ce chapitre. Insistons néanmoins sur le fait suivant : sur une variété, on se servira évidemment d'une partition de l'unité pour localiser une fonction d'onde dans une famille de cartes locales. Chaque "élément" ainsi isolé de la fonction d'onde possédera une mesure spectrale ; mais comme la mesure spectrale dépend hermitiquement, et non pas linéairement, de la fonction d'onde, la partition de l'unité ne peut pas permettre le recollement de ces mesures spectrales ; par contre, d'après le théorème 10, ce recollement est possible pour le spectre dynamique de la fonction d'onde.

VI. TRANSFORMATIONS CANONIQUES LINÉAIRES

Au chapitre II, nous avons vu qu'à toute transformation canonique de l'espace des phases, on pouvait associer des transformations intégrales opérant sur des paquets d'ondes. Les propriétés de ces transformations intégrales étaient assez proches de propriétés de la transformation de Fourier comme la formule de Plancherel ou la formule d'inversion. Mais ces dernières étaient exactes pour la transformation de Fourier, et approchées seulement pour nos transformations intégrales. Nous allons prouver maintenant qu'à une application canonique linéaire on peut associer une transformation intégrale de poids $a=1$, pour laquelle les formules d'inversion et "de Plancherel" sont exactes. (Nous en avons déjà rencontré à la fin du chapitre III, associées aux translations de l'espace des phases).

La fonction génératrice d'une application canonique linéaire est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, que l'on peut décomposer ainsi :

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} x \cdot Ax + x \cdot By + \frac{1}{2} y \cdot Cy$$

où A , B , et C sont des matrices carrées d'ordre n ; A et C peuvent être supposées symétriques, et l'application canonique est libre si et seulement si B est inversible.

Si ω est un élément quelconque de l'espace ${}^* \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, sa transformée, associée à l'application canonique χ de fonction génératrice $\Phi(x, y)$, sera donnée par :

$$\Psi(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \Phi(x, y)} \omega(y) dy = \mathfrak{F}_{\chi} \cdot \omega(x)$$

D'après la forme de $\Phi(x, y)$, il apparaît instantanément que la transformation \mathfrak{F}_{χ} est la composée de trois sortes de transformations élémentaires :

i) Pour toute matrice symétrique A , on pose

$$Q_A \cdot \omega(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} x \cdot Ax} \omega(x)$$

ii) Pour toute matrice inversible B , on pose

$$S_B \cdot \omega(x) = |\det B|^{\frac{1}{2}} \omega(Bx)$$

iii) La transformation de Fourier

$$\mathfrak{F} \cdot \omega(x) = \hat{\omega}(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} x \cdot y} \omega(y) dy$$

En effet : $\mathfrak{F}_{\chi} = Q_A \circ S_{t_B} \circ \mathfrak{F} \circ Q_C$. On constatera que chacune de ces trois types de transformations est unitaire (c'est un isomorphisme de l'espace de Hilbert ${}^* \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$). Il en est donc de même de \mathfrak{F}_{χ} . Les trois types de transformations ci-dessus sont bien connus ; par exemple, ils sont étudiés au début de [13] (chap. I, § 1), à une différence près toutefois : dans la définition des S_B , nous ne prenons pas en compte le signe de $\det B$, c'est-à-dire l'indice d'inertie de B ; nous n'avons donc pas à choisir une

détermination pour $(\det B)^{\frac{1}{2}}$, ce qui signifie que l'indice de Maslov ne joue aucun rôle dans notre théorie ; c'était évident : l'indice de Maslov est un effet quantique qui subsiste dans l'approximation dite semi-classique, mais qui ne peut laisser aucune trace à l'échelle où les phénomènes apparaissent complètement classiques.

On vérifiera facilement que l'inverse de \mathfrak{F}_χ , qui d'après notre décomposition est égal à $Q_{-C} \circ \mathfrak{F}^{-1} \circ S_{t_B^{-1}} \circ Q_{-A}$ est tout simplement la transformation $\mathfrak{F}_{\chi^{-1}}$ associée à χ^{-1} . Nous avons donc de ce fait une formule d'inversion analogue à celle de Fourier, et exacte. En outre, les transformations \mathfrak{F}_χ s'appliquent à tous les éléments de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, et non pas aux seuls paquets d'ondes. La première question qui se pose alors est : comment se transforme la mesure spectrale (et le spectre) d'une fonction d'onde ? La réponse est celle qu'on attendait :

THÉOREME 12 : Soit χ une application canonique linéaire et libre ; si ω est une fonction d'onde, alors $\psi = \mathfrak{F}_\chi \cdot \omega$ est aussi une fonction d'onde ; la mesure spectrale de ψ est l'image par χ de la mesure spectrale de ω :
pour toute fonction-test $\varphi(x,p)$,

$$\langle \mu_\psi, \varphi \rangle = \langle \mu_\omega, \varphi \circ \chi \rangle$$

Démonstration : Commençons par donner l'expression matricielle de l'application canonique χ ; par définition :

$$(x,p) = \chi(y,q) \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \\ q = +\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} p = -Ax - By \\ q = {}^t Bx + Cy \end{cases}$$

où ${}^t B$ est la transposée de B qui, rappelons-le, est inversible.

On en déduit :

$$\begin{aligned}x &= -{}^t B^{-1} C y + {}^t B^{-1} q \\p &= (A {}^t B^{-1} C - B) y - A {}^t B^{-1} q\end{aligned}$$

c'est-à-dire que la matrice de χ , d'ordre $2n$, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} - {}^t B^{-1} C & + {}^t B^{-1} \\ A {}^t B^{-1} C - B & - A {}^t B^{-1} \end{pmatrix}$$

Pour calculer la mesure spectrale de ψ en fonction de celle de ω , nous allons successivement étudier la transformation de la mesure spectrale par chacune des transformations i), ii), et iii), puis composer le tout. La première assertion du théorème, à savoir que la propriété d'être une fonction d'onde est conservée par ces transformations, est immédiate. Pour des raisons de commodité, nous commencerons par regarder comment se transforme non la mesure spectrale elle-même, mais sa fonction caractéristique dont nous avons vu, au cours de la démonstration du théorème 6 (chapitre IV), qu'elle était donnée par la formule :

$$F_{\omega}(P, X) = \text{St} \left[\int \omega(x + \mathfrak{H}X) \overline{\omega(x)} e^{iP \cdot x} dx \right]$$

Pour la fonction $Q_A \cdot \omega$, cela donne :

$$\begin{aligned}F_{Q_A \cdot \omega}(P, X) &= \text{St} \left[\int e^{-\frac{i}{\mathfrak{H}} \left(\frac{1}{2}(x + \mathfrak{H}X) \cdot A(x + \mathfrak{H}X) - \frac{1}{2} x \cdot Ax \right) + iP \cdot x} \omega(x + \mathfrak{H}X) \overline{\omega(x)} dx \right] \\&= \text{St} \left[\int e^{i(P \cdot x - AX \cdot x)} \omega(x + \mathfrak{H}X) \overline{\omega(x)} dx \cdot e^{-i\mathfrak{H}X \cdot AX} \right]\end{aligned}$$

Or pour toute valeur finie de X , $e^{-i\mathfrak{H}X \cdot AX} \simeq 1$, donc

$$F_{Q_A \cdot \omega}(P, X) = \text{St} \left[\int e^{i(P - AX) \cdot x} \omega(x + \mathfrak{H}X) \overline{\omega(x)} dx \right] = F_{\omega}(P - AX, X)$$

D'une manière analogue, pour les transformations S_B :

$$\begin{aligned}F_{S_B \omega}(P, X) &= \text{St} \left[\int S_B \omega(x + \mathfrak{H}X) \overline{S_B \omega(x)} e^{iP \cdot x} dx \right] \\&= \text{St} \left[\int \omega(Bx + \mathfrak{H}BX) \overline{\omega(Bx)} e^{iP \cdot x} |\det B| dx \right] \\&= \text{St} \left[\int \omega(y + \mathfrak{H}BX) \overline{\omega(y)} e^{i {}^t B^{-1} P \cdot y} dy \right]\end{aligned}$$

(nous avons fait le changement de variable $y = Bx$, sachant que $P \cdot B^{-1} y = {}^t B^{-1} P \cdot y$).

Ce qui donne finalement :

$$F_{S_B \omega}(P, X) = F_{\omega}({}^t B^{-1} P, BX)$$

Enfin, pour la transformation de Fourier \mathfrak{F} , nous avons :

$$F_{\hat{\omega}}(P, X) = \text{St} \left[\int \hat{\omega}(x + \hbar X) \overline{\hat{\omega}(x)} e^{iP \cdot x} dx \right]$$

Or, $\hat{\omega}(x + \hbar X)$ est la transformée de Fourier de $e^{-iX \cdot y} \omega(y)$ et $\hat{\omega}(x) e^{-iP \cdot x}$ est la transformée de $\omega(y - \hbar P)$; puisque la transformation de Fourier est unitaire, nous avons l'égalité :

$$\int \hat{\omega}(x + \hbar X) \overline{\hat{\omega}(x)} e^{iP \cdot x} dx = \int \omega(y) e^{-iX \cdot y} \overline{\omega(y - \hbar P)} dy$$

c'est-à-dire :

$$F_{\hat{\omega}}(P, X) = \overline{F_{\omega}(X, -P)}$$

ou encore, puisque la mesure spectrale est une mesure réelle :

$$F_{\hat{\omega}}(P, X) = F_{\omega}(-X, P)$$

Si maintenant nous composons toutes ces transformations, selon la formule (indiquée plus haut) $\mathfrak{F}_X = Q_A \circ S_{t_B} \circ \mathfrak{F} \circ Q_C$, il vient :

$$F_{\psi}(P, X) = F_{\omega}(-CB^{-1}P + [CB^{-1}A - {}^t B]X, B^{-1}P - B^{-1}AX)$$

Autrement dit :

$$\int e^{i(P \cdot x + X \cdot p)} \mu_{\psi}(dx, dp) = \int e^{i(Q \cdot y + Y \cdot q)} \mu_{\omega}(dy, dq)$$

où on a posé :

$$Q = -CB^{-1}P + [CB^{-1}A - {}^t B]X$$

$$Y = B^{-1}P - B^{-1}AX$$

En transposant cette transformation linéaire, nous obtenons :

$$Q \cdot y + Y \cdot q = P \cdot x + X \cdot p$$

avec

$$x = -{}^t B^{-1}C y + {}^t B^{-1}q$$

$$p = [A {}^t B^{-1}C - B]y - A {}^t B^{-1}q$$

où on reconnaît instantanément la transformation canonique χ ; ainsi pour les fonctions de la forme

$$\varphi_{P,X}(x,p) = e^{i(P \cdot x + X \cdot p)}$$

nous avons prouvé que

$$\langle \mu_\psi, \varphi_{P,X} \rangle = \langle \mu_\omega, \varphi_{P,X} \circ \chi \rangle$$

Et d'après une propriété bien connue des mesures de Radon, cela suffit pour étendre cette dernière égalité à toutes les fonctions-test, et la démonstration du théorème est achevée.

*
* *

Les transformations canoniques linéaires, et les transformations intégrales unitaires qui leur sont associées, sont des outils qui vont nous permettre de déduire des résultats de propagation analogues à ceux du chapitre III, mais pour des fonctions d'onde quelconques, non nécessairement élémentaires. Toutefois, de tels résultats ne peuvent être obtenus par cette méthode que pour certains hamiltoniens quadratiques, qui seuls se transforment canoniquement lorsqu'on leur applique des transformations linéaires.

Proposition 5 : Un hamiltonien de la forme $H(x,p) = \frac{1}{2} p \cdot Mp + Ax \cdot Mp + \frac{1}{2} Ax \cdot MAx$ (où $x \cdot y$ désigne le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n et où M et A sont des matrices carrées symétriques) peut être transformé canoniquement en un hamiltonien qui ne dépend que de la coordonnée et non de l'impulsion. Par exemple il peut être transformé en $K(y) = \frac{1}{2} y \cdot Dy$ par la transformation canonique χ de fonction génératrice $\mathfrak{F}(x,y) = \frac{1}{2} x \cdot Ax + x \cdot By + \frac{1}{2} y \cdot Cy$, si $D = {}^t BMB$, indépendamment de la matrice $C : H(x, -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}(x,y)) = K(y)$.

Démonstration : Il suffit de calculer. Si $(x,p) = \chi(y,q)$:

$$y = -B^{-1}Ax - B^{-1}p$$

$$q = ({}^t B - CB^{-1}A)x - CB^{-1}p$$

d'où :

$$\begin{aligned} K(y) &= \frac{1}{2}y \cdot Dy = \frac{1}{2}B^{-1}(Ax+p) \cdot DB^{-1}(Ax+p) \\ &= \frac{1}{2}p \cdot {}^tB^{-1}DB^{-1}p + Ax \cdot {}^tB^{-1}DB^{-1}p + \frac{1}{2}Ax \cdot {}^tB^{-1}DB^{-1}Ax \\ &= H(x,p) = H(x, -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y)) \end{aligned}$$

Notons bien que les hamiltoniens envisagés par cette proposition n'ont pas la forme la plus générale d'un hamiltonien quadratique ; en particulier, le terme mixte $Ax \cdot Mp$ ne peut être identiquement nul sans que H se réduise à $\frac{1}{2}p \cdot Mp$.

Nous voudrions dès lors poursuivre comme au chapitre III : montrer que si $H(x,p)$ et $K(y)$ se correspondent par χ , les équations de Schrödinger respectives :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\psi \quad \text{et} \quad i\hbar \frac{\partial \omega}{\partial t} = K\omega$$

ont des solutions qui se correspondent par la transformation intégrale canonique \mathfrak{F}_χ . La proposition que voici nous garantit que ce programme est réalisable :

Proposition 6 : Soient $H(x,p)$ et $K(y)$ les hamiltoniens indiqués à la proposition 5. Alors, pour que la fonction $\psi(t,x)$ soit solution de l'équation de Schrodinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\psi$$

il faut et il suffit que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi(t) = \mathfrak{F}_\chi \cdot \omega(t)$, où $\omega(t,y)$ est solution de l'équation

$$i\hbar \frac{\partial \omega}{\partial t} = [K(y) + \frac{i\hbar}{2} \sum_{i,j} A_{ij} M_{ij}] \omega$$

Démonstration : L'opérateur différentiel hamiltonien est :

$$H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j} M_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - i\hbar \sum_{i,j,k} A_{ij} M_{ik} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2} Ax \cdot MAx$$

Si on pose $\psi = \mathfrak{F}_\chi \cdot \omega$, c'est-à-dire :

$$\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \Phi(x,y)} \omega(y) dy$$

alors :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x,y) e^{-\frac{i}{\hbar}\Phi(x,y)} \omega(y) dy$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + i\hbar \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right] e^{-\frac{i}{\hbar}\Phi(x,y)} \omega(y) dy$$

$$\text{donc } H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \int \left[H(x, -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y)) + \frac{i\hbar}{2} \sum_{i,j} M_{ij} A_{ij} \right] e^{-\frac{i}{\hbar}\Phi(x,y)} \omega(y) dy$$

ce qu'on peut aussi écrire, en appliquant la proposition 5 :

$$H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\psi = \mathcal{F}_X \cdot [(K + i\hbar \beta)\omega]$$

où on a posé $\beta = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} A_{ij}$. Par ailleurs, il est immédiat que :

$$\mathcal{F}_X \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ce qui achève la démonstration.

Après cette préparation technique, nous voici en mesure de prouver le principal théorème de ce chapitre, sur la propagation des solutions de l'équation de Schrödinger :

Théorème 13 : Soit un hamiltonien $H(x,p) = \frac{1}{2}p \cdot Mp + Ax \cdot Mp + \frac{1}{2}Ax \cdot MAx$, où M et A sont des matrices carrées symétriques d'ordre n . Soit $\psi(t,x)$ la solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\psi$$

correspondant à la valeur initiale $\psi(0,x) = \psi_0(x)$. Alors :

a) si ψ_0 est une fonction d'onde, $\psi_t(x) = \psi(t,x)$ est pour tout t fini (non infiniment grand) une fonction d'onde ;

b) pour tout t standard, on a pour les mesures spectrales des ψ_t la relation :

$$\mu_{\psi_t}(x + tM[p + Ax], p - tAM[p + Ax]) = e^{2\beta t} \mu_{\psi_0}(x,p)$$

avec $2\beta = A \cdot M = \sum_{i,j} A_{ij} M_{ij}$, qui signifie que μ_{ψ_t} est, au coefficient (non nul) $e^{2\beta t}$ près, l'image de μ_{ψ_0} par le flot hamiltonien \mathcal{H}_t engendré par

$H(x,p)$.

c) le spectre dynamique de ψ_t est, pour tout t standard, l'image du spectre dynamique de ψ_0 par le flot hamiltonien H_t .

Démonstration : D'après la proposition 6 , $\psi_t = \mathcal{F}_\chi \cdot \omega_t$, où ω_t est la solution de l'équation

$$i\hbar \frac{\partial \omega}{\partial t} = [K + i\hbar \beta] \omega$$

dont la valeur initiale est $\omega_0 = \mathcal{F}_\chi^{-1} \cdot \psi_0$; or cette équation se résoud immédiatement :

$$\omega(t,y) = e^{[-\frac{i}{\hbar}K(y) + \beta]t} \omega_0(y) = e^{\beta t} Q_{tD} \cdot \omega_0(y)$$

Cette formule explicite montre que $\omega(t)$ est une fonction d'onde dès lors que ω_0 en est une. Donc $\psi(t)$ sera une fonction d'onde dès que ψ_0 le sera. Nous savons ainsi calculer la mesure spectrale de $Q_{tD} \omega_0$ en fonction de celle de ω_0 , ce qui nous donne :

$$\mu_{\omega_t}(x,p - tDx) = e^{2\beta t} \mu_{\omega_0}(x,p)$$

Puisque $\psi_t = \mathcal{F}_\chi \cdot \omega_t$, nous pouvons déduire du théorème 12 que :

$$\mu_{\psi_t}({}^tB^{-1}[p - tDx] , -Bx - A{}^tB^{-1}p + tA{}^tB^{-1}Dx) = \mu_{\omega_t}(x, p - tDx)$$

(comme d'après la proposition 5 nous avons le choix de C , nous prenons $C=0$ pour simplifier). En particulier pour $t=0$:

$$\mu_{\psi_0}({}^tB^{-1}p , -Bx - A{}^tB^{-1}p) = \mu_{\omega_0}(x,p)$$

Par conséquent :

$$\mu_{\psi_t}({}^tB^{-1}p - t{}^tB^{-1}Dx , -Bx - A{}^tB^{-1}p + tA{}^tB^{-1}Dx) = e^{2\beta t} \mu_{\psi_0}({}^tB^{-1}p , -Bx - A{}^tB^{-1}p)$$

ou encore, en posant $y = {}^tB^{-1}p$, $q = -Bx - A{}^tB^{-1}p$, et compte-tenu de ce que ${}^tB^{-1}D{}^tB^{-1} = M$:

$$\mu_{\psi_t}(y + tM[q + Ay] , q - tAM[q + Ay]) = e^{2\beta t} \mu_{\psi_0}(y, q)$$

Il reste à vérifier que la transformation :

$$(y, q) \mapsto (y_t, q_t) = (y + tM[q + Ay], q - tAM[q + Ay])$$

est bien le flot hamiltonien \mathbb{H}_t ; pour cela, dérivons par rapport à t :

$$\begin{aligned} \dot{y}_t &= M(q + Ay) \\ \dot{q}_t &= -AM(q + Ay) \end{aligned}$$

en ajoutant membre à membre, on voit que $\dot{q}_t + A\dot{y}_t = 0$, c'est-à-dire que pour tout t , $q_t + Ay_t = q + Ay$; on a donc aussi :

$$\begin{aligned} \dot{y}_t &= M(q_t + Ay_t) \\ \dot{q}_t &= -AM(q_t + Ay_t) \end{aligned}$$

et on vérifie directement que $\frac{\partial H}{\partial p}(x, p) = M(p + Ax)$ et $\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) = AM(p + Ax)$, ce qui montre que (y_t, q_t) est bien la solution du système hamiltonien associé à $H(x, p)$, de valeur initiale (y, q) .

Enfin, l'assertion C) du théorème est une conséquence immédiate de ce qui précède, puisque $e^{2\beta t}$ ne s'annule jamais.

*
* * *

Pour clore ce chapitre, disons encore quelques mots sur le problème des caustiques. Une caustique est une surface qui doit son nom au fait qu'elle est le lieu des points où "ça brûle". Nous avons déjà dit dans l'introduction que la mathématique classique était incapable de changer cette formulation, "ça brûle", en définition mathématique. C'est pourquoi, dans tous les écrits classiques, on propose de définir les caustiques comme enveloppes de rayons lumineux, ou comme développée de surface d'onde. Ces définitions ont l'inconvénient de ne convenir qu'à des "ondes" de la forme particulière $a(x)e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(x)}$, forme qui se prête mal à l'étude de l'équation de Schrödinger : c'est une forme qui, pour une onde, n'a rien de naturel si on exige, comme on est bien obligé de le faire dans les théories asymptotiques, que les fonctions a et φ varient lentement à l'échelle de \hbar (c'est-à-dire que a et φ sont fixes tandis que $\hbar \rightarrow 0$). Au contraire, si nous adoptons un point de vue macroscopique, la

densité $|\omega(x)|^2$, pour une fonction d'onde ω , apparaîtra comme une mesure de Borel sur \mathbb{R}^n , que nous désignons par I_ω (I , de intensité). Il est facile de montrer la relation suivante entre I_ω et la mesure spectrale μ_ω de ω :

$$I_\omega(\Omega) = \mu_\omega(\Omega \times \mathbb{R}^n)$$

pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^n (et donc pour tout ensemble mesurable). Il revient au même de dire que pour toute fonction (standard) φ sur \mathbb{R}^n , continue et à support compact :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dI_\omega(x) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu_\omega(x, p) ;$$

mais cela revient à prendre $X = 0$ dans la relation :

$$\iint \varphi(x) e^{iX \cdot p} d\mu_\omega(x, p) = \text{St}[\int \omega(x + iX) \overline{\omega(x)} \varphi(x) dx]$$

qui est une conséquence déjà connue des propriétés de la fonction caractéristique (à condition que φ soit C^∞ , à support compact : voir théorème 9 ; mais les fonctions C^∞ sont denses dans les fonctions continues). Autrement dit, I_ω est l'image de μ_ω par la projection $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, p) \mapsto x$. On peut écrire :

$$I_\omega(x) = \int \mu_\omega(x, p) dp .$$

Ces considérations permettent de tenir sur les caustiques le discours mathématique rêvé : à la fois le plus naturel, le plus général, et le plus rigoureux.

VII. COMPARAISON DU SPECTRE DYNAMIQUE D'UNE
FONCTION D'ONDE AVEC LE FRONT D'ONDE D'UNE DISTRIBUTION

Comme nous l'avons signalé à la fin de l'introduction, il y a une forte ressemblance entre le spectre dynamique d'une fonction d'onde, et des notions bien connues comme le front d'onde d'une distribution (Hörmander [10]), le support essentiel (J. Bros et D. Iagolnitzer [19] ou le spectre singulier d'une hyperfonction (Sato, Kawaf, Kashiwara). Divers auteurs ont cherché à comparer ces trois dernières notions. Ainsi, il apparaît assez clairement, et ceci fut observé par Hörmander lui-même, que le front d'onde d'une distribution est l'homologue en classe C^∞ du spectre singulier. Plus récemment, il a été démontré par J.M. Bony (voir [18]), que le support essentiel et le spectre singulier étaient la même chose, approchée par des voies différentes. Il reste donc, maintenant, à comparer le spectre dynamique à tout cela. Nous allons préciser les analogies, mais aussi montrer les différences en analysant une série d'exemples au chapitre suivant.

La première analogie qui vient à l'esprit est que dans les deux cas, nous avons une partie fermée de l'espace des phases, ou plus généralement (sur les variétés) du fibré cotangent (1). La première différence qui apparaît est que le spectre dynamique d'une fonction d'onde n'a aucune raison d'être constitué de demi-droites (dans chaque fibre cotangente). Pour la commodité de notre comparaison, nous conviendrons que le front d'onde inclut toujours la section nulle du fibré, c'est-à-dire que les demi-droites contiennent leur

(1) Dans le cas du front d'onde, seule la direction de l'impulsion intervient ; il est donc constitué, dans chaque fibre cotangente, d'une réunion de demi-droites issues de l'origine (section nulle) ; certains auteurs le considèrent donc comme une partie du fibré en co-sphères, ce qui est une différence de pure forme. Pour nous, tout au long de cet article, il sera une partie du fibré cotangent, constituée de demi-droites.

origine. (Notons que les auteurs font généralement le contraire : ils excluent la section nulle ; de sorte que le front d'onde d'une fonction indéfiniment dérivable est vide ; pour nous, il se réduit dans ce cas à la section nulle. Cette convention ne change rien à la nature du concept, mais allégera nos énoncés de comparaison). Le fait que le spectre dynamique peut être un ensemble fermé quelconque de l'espace des phases, et non nécessairement un ensemble conique est un apport spécifique de l'analyse non-standard. En effet, chez Hörmander comme chez Iagolnitzer, c'est le comportement à l'infini d'une certaine transformée de Fourier le long d'une demi-droite qui décide de l'appartenance de cette demi-droite au front d'onde ou au support essentiel alors que nous, dans le cas du spectre dynamique, nous avons opéré une réduction (changement d'échelle) de ce qui se passe à l'infini d'ordre $\frac{1}{h}$ de l'espace (ou de la fibre cotangente), qui nous permet de l'observer point par point, et non direction par direction.

Ces premières observations que tout spécialiste pourra faire ne nous disent évidemment rien sur la correspondance entre les deux termes. Tout d'abord, si nous voulons comparer le spectre dynamique d'une fonction d'onde au front d'onde d'une distribution, il nous faut auparavant mettre en correspondance, d'une manière naturelle, les distributions et les fonctions d'onde. Nous commencerons donc par prouver que, étant donnée une distribution à support compact sur \mathbb{R}^n , on peut lui associer une classe de fonctions d'onde qui approchent la distribution, et qui ont toutes le même spectre dynamique ; puis nous montrerons que ce spectre est contenu dans le front d'onde de la distribution (avec la convention faite plus haut, d'inclure la section nulle). Des exemples variés permettront ensuite de se convaincre que le spectre dynamique est le plus souvent distinct du front d'onde : dans la plupart des cas, il est sensiblement plus petit.

A

Nous savons que les distributions peuvent être représentées par des fonctions non-standard (Robinson [5], pp 133-145). Il est facile de deviner que l'on peut choisir ces représentants de telle sorte que leurs variations n'excèdent pas l'ordre de $\frac{1}{h}$ en moyenne quadratique (condition iii) de la définition d'une fonction d'onde locale). Mais on se rendra compte assez rapidement que des représentants ainsi choisis ne peuvent, pour la plupart des distributions, être en même temps des fonctions d'onde : c'est la condition ii) d'avoir une moyenne quadratique finie sur tout compact standard, qui s'y oppose. Par exemple, la fonction d'onde élémentaire :

$$\rho(x) = (\pi\epsilon)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{|x|^2}{2\epsilon}} \quad h^2 \ll \epsilon \ll 1$$

ne peut représenter que la distribution nulle : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\int \rho(x) \varphi(x) dx \approx 0$.

Par contre $(4\pi\epsilon)^{-\frac{n}{4}} \rho$ sera un représentant de la distribution de Dirac δ :

$\int (4\pi\epsilon)^{-\frac{n}{4}} \rho(x) \varphi(x) dx \approx \varphi(0)$. Cet exemple montre que l'on peut représenter la

distribution δ par une fonction d'onde multipliée par une constante infiniment grande. Il se trouve que cela est possible pour toutes les distributions.

Rappelons que nous désignons par \hat{u} la transformée de Fourier non standard d'une fonction (interne) u :

$$\hat{u}(p) = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int u(x) e^{-\frac{i}{h} p \cdot x} dx$$

et par Fu sa transformée de Fourier standard :

$$Fu(p) = \int u(x) e^{i p \cdot x} dx$$

dont l'inverse est

$$F^{-1}u(p) = (2\pi)^{-n} \int u(x) e^{-i p \cdot x} dx$$

Nous pouvons alors énoncer :

Proposition 7 : Soit T une distribution sur \mathbb{R}^n , à support compact. Pour toute fonction ϕ standard, indéfiniment dérivable, à support compact, et telle que

$\Phi(0) \neq 0$, posons :

$$u(p) = \Phi(p) F^{-1} T \left(\frac{p}{h} \right) ;$$

il est évident que $u \in {}^*C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap {}^*\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. La relation

$$\hat{w} = \frac{u}{\|\|u\|}$$

définit alors une fonction d'onde w sur ${}^*\mathbb{R}^n$; en outre la fonction interne
 $(2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \frac{\|\|u\|}{\Phi(0)} w$ est un représentant de la distribution T : elle est infiniment
proche de T pour la topologie des distributions (disons dans ${}^*\mathcal{S}'$ pour fixer
les idées).

Démonstration : Nous allons vérifier pour w les conditions i) à v) de la définition des fonctions d'onde (chapitre IV).

i) T étant supposée de support compact, $F^{-1}T$ est analytique donc $F^{-1}T \left(\frac{p}{h} \right)$ est dans ${}^*C^\infty$; Φ étant à support compact, il est clair alors que $u \in {}^*C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap {}^*\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, donc aussi \hat{w} ; on en déduit que $w \in {}^*\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, mais également, puisque \hat{w} est à support compact, que $w \in {}^*C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ii) et v) sont satisfaits par construction : $\|\|w\| = \|\|\hat{w}\| = 1$

iii) est satisfait par construction : il suffit que \hat{w} vérifie iv), ce qui est immédiat puisque le support de \hat{w} est un compact standard.

iv) est plus difficile à établir. Soit $v = \|\|u\|w$, de sorte que $\hat{v} = u$; nous allons montrer, d'une part, que pour tout A infiniment grand, et pour tout N entier standard, $\int_{|x| \geq A} |v(x)|^2 dx \ll h^N$; d'autre part, que la constante $\|\|u\|$ est, quelle que soit la distribution T , petite devant une puissance entière de $\frac{1}{h}$, mais grande devant une puissance entière de h : il existe N_0 et N_1 , entiers standard, tels que $h^{N_1} \ll \|\|u\| \ll h^{-N_0}$.

On en déduit alors ce que nous voulons. Pour cela, commençons par observer que $v = \rho * T$, où ρ est une fonction interne telle que $F^{-1}\rho(p) = (h/2\pi)^{n/2} \Phi(hP)$, ou encore, ce qui revient au même, $\hat{\rho} = \Phi$ ou $\rho(x) = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} F\Phi \left(\frac{x}{h} \right)$. Or, puisque Φ est standard, indéfiniment dérivable, et à support compact, $F\Phi$

est également standard, indéfiniment dérivable, et à décroissance rapide :
 $F\Phi \in \mathcal{S}$. Il existe donc pour tout entier N standard, une constante standard C_N telle que :

$$|F\Phi(x)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N}$$

et de même pour toutes les dérivées de $F\Phi$. On en déduit que pour ρ ainsi que toutes ses dérivées (d'ordre standard) $\rho^{(k)}$:

$$|\rho^{(k)}(x)| \leq \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} C_N^k \pi^{N-\frac{n}{2}-k}}{(\pi + |x|)^N} \leq \frac{C_N^k \pi^{N-\frac{n}{2}-k}}{|x|^N}$$

Or T est une distribution à support compact, donc $\rho * T$ vérifie une inégalité semblable pour $|x|$ assez grand⁽¹⁾ : pour tout entier standard N , il existe une constante standard B_N , telle que

$$|v(x)| = |\rho * T(x)| \leq \frac{B_N \pi^{N-\frac{n}{2}-k}}{(|x|-K)^N} \text{ pour } |x| > K ,$$

(1) Cette propriété n'est pas assez remarquable pour être connue ; pour la démontrer, on part du fait que T , distribution à support compact, est une somme finie de dérivées à un certain ordre de fonctions continues à supports compacts contenus dans un voisinage arbitraire de celui de T (voir le livre de Schwartz [21] , théorème XXVI, page 91) : $T = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(k_{\alpha})}$. D'où

$$\rho * T = \sum_{\alpha} \rho * f_{\alpha}^{(k_{\alpha})} = \sum_{\alpha} \rho^{(k_{\alpha})} * f_{\alpha} ; \text{ mais pour chaque } \alpha :$$

$$\rho^{(k_{\alpha})} * f_{\alpha}(x) = \int \rho^{(k_{\alpha})}(x-y) f_{\alpha}(y) dy ;$$

donc, si nous choisissons la constante K telle que les supports des f_{α} soient contenus dans la boule de rayon K , l'inégalité de la moyenne nous permet de conclure pour $|x| > K$:

$$|\rho^{(k_{\alpha})} * f_{\alpha}(x)| \leq \frac{C_N^{k_{\alpha}} \pi^{N-\frac{n}{2}-k_{\alpha}}}{(|x|-K)^N} \int |f_{\alpha}(x)| dx$$

LA PROPAGATION DES ONDES

où K est une constante standard choisie telle que par exemple le support de T soit contenu dans la boule de rayon $K-1$.

Donc, pour tout A infiniment grand :

$$\int_{|x| \geq A} |v(x)|^2 dx \leq B_N^2 \hbar^{2N-n} \int_{|x| \geq A} \frac{dx}{(|x|-K)^{2N}} \ll \hbar^{2N-n}$$

(il est clair que $\int_{|x| \geq A} \frac{dx}{(|x|-K)^{2N}}$ est infiniment petit pourvu que $N > \frac{n}{2}$)

D'autre part, nous avons à évaluer l'ordre de grandeur de $\|u\|$; cela peut encore se faire à l'aide du théorème de la moyenne ; en effet, nous pouvons majorer $F^{-1}T(P)$ par un polynôme, puisque T est une distribution : $|F^{-1}T(P)| \leq C(1+|P|)^{N_0}$ où C et N_0 sont standard > 0 ; soit alors R standard tel que le support de Φ soit inclus dans la boule de rayon R ; nous avons

$$\int |\Phi(p)F^{-1}T(\frac{p}{\hbar})|^2 dp \leq \text{Sup}|\Phi|^2 \cdot \int_{|p| \leq R} |F^{-1}T(\frac{p}{\hbar})|^2 dp \leq \text{Sup}|\Phi|^2 C^2 (1 + \frac{R}{\hbar})^{2N_0}$$

d'où $\|u\| \leq \text{Sup}|\Phi| \cdot C \cdot (R+1)^{N_0} \cdot \hbar^{-N_0}$. Puis nous pouvons minorer $\Phi(p)$ par, disons, $\frac{|\Phi(0)|}{2}$, dans une boule de rayon ha autour de l'origine, puisque $\Phi(0) \neq 0$ par hypothèse (a standard > 0) ; donc :

$$\int_{|p| \leq \hbar a} |\Phi(p)F^{-1}T(\frac{p}{\hbar})|^2 dp \geq \int_{|p| \leq \hbar a} |\Phi(p)F^{-1}T(\frac{p}{\hbar})|^2 dp \geq \frac{|\Phi(0)|^2}{4} \int_{|p| \leq \hbar a} |F^{-1}T(\frac{p}{\hbar})|^2 dp$$

mais en faisant le changement de variable $p = \hbar P$,

$$\int_{|p| \leq \hbar a} |F^{-1}T(\frac{p}{\hbar})|^2 dp = \hbar^n \int_{|P| \leq a} |F^{-1}T(P)|^2 dP$$

et par conséquent $\|u\| \geq \hbar^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{|\Phi(0)|}{2} \left(\int_{|P| \leq a} |F^{-1}T(P)|^2 dP \right)^{\frac{1}{2}}$; or $B = \frac{|\Phi(0)|}{2} \left(\int_{|P| \leq a} |F^{-1}T(P)|^2 dP \right)^{\frac{1}{2}}$

est une constante standard qui ne peut être nulle car, T étant à support compact, $F^{-1}T$ est analytique. On conclut alors que w vérifie la condition

iv) par les inégalités :

$$\int_{|x| \geq A} |\omega(x)|^2 dx = \frac{1}{\|u\|^2} \int_{|x| \geq A} |v(x)|^2 dx \leq \frac{1}{B^2 \hbar^{2n}} \cdot \int_{|x| \geq A} |v(x)|^2 dx \ll \hbar^{2N-2n}$$

pour tout A infiniment grand et tout entier standard $N > \frac{n}{2}$; cela prouve bien que $\int_{|x| \geq A} |\omega(x)|^2 dx$ est infiniment petit, et même que c'est infiniment plus petit que toutes les puissances standard de \hbar . ω est donc bien une fonction d'onde normalisée.

Il reste maintenant à prouver que $(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \|u\| \omega = (2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} v$ est infiniment proche, dans ${}^*S'$, de la distribution $\Phi(0)T$; puisque $v = \rho * T$, cela revient à prouver que $(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \rho \approx \Phi(0)\delta$ (δ : distribution de Dirac) ou, ce qui est équivalent, que $(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} F\rho \approx \Phi(0)$ dans ${}^*S'$; or $(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} F\rho(P) = \Phi(\hbar P)$. Par définition de la topologie de S' , nous avons donc à prouver que pour toute partie bornée B de S ,

$$\sup_{\varphi \in B} \left| \int [\Phi(0) - \Phi(\hbar P)] \varphi(P) dP \right| \approx 0 ; \text{ or pour toute partie bornée } B \text{ de } S,$$

il existe une fonction $k \geq 0$, continue, à décroissance rapide, et qui majore uniformément les éléments de B ([21], page 235) :

$$\forall \varphi \in B \quad |\varphi(x)| \leq k(x)$$

$$\text{Par conséquent } \sup_{\varphi \in B} \left| \int [\Phi(0) - \Phi(\hbar P)] \varphi(P) dP \right| \leq \int |\Phi(0) - \Phi(\hbar P)| k(P) dP \leq$$

$$\int_{|P| \leq A} |\Phi(0) - \Phi(\hbar P)| k(P) dP + \int_{|P| \geq A} |\Phi(0) - \Phi(\hbar P)| k(P) dP$$

$$\leq \sup_{|P| \leq A} |\Phi(0) - \Phi(\hbar P)| \cdot \int k(P) dP + 2 \sup_{|P| \geq A} |\Phi| \int k(P) dP ;$$

il suffit donc, pour parvenir à nos fins, de choisir A infiniment grand tel que

$$\sup_{|P| \leq A} |\Phi(0) - \Phi(\hbar P)| \approx 0 \text{ (c'est possible d'après le lemme de Robinson).}$$

La proposition est ainsi entièrement démontrée.

Remarque : Nous avons vu au cours de cette démonstration que $\|u\| \geq \hbar^{\frac{n}{2}} B$, donc

$(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \|u\| \geq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} B$, c'est-à-dire que la constante par laquelle il faut multiplier ω pour obtenir un représentant de T ne peut en aucun cas être

infiniment petite. Nous pouvons être assurés que cette constante est finie si T est une fonction ; en effet, dans ce cas elle appartient à l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, puisqu'elle est à support compact, et par conséquent

$$\int_{|p| \leq R} |F^{-1}T(\frac{p}{\hbar})|^2 dp = \hbar^n \int_{|P| \leq \frac{R}{\hbar}} |F^{-1}T(P)|^2 dP \leq \hbar^n \|T\|^2$$

d'où

$$\frac{n}{\hbar^2} B \leq \|u\| \leq \text{Sup} |\Phi| \cdot \|T\| \cdot \frac{n}{\hbar^2}$$

La constante $(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \|u\|$ sera au contraire infiniment grande lorsque la distribution T sera d'ordre assez élevé. Mais il faut noter que $\|u\|$ n'excédera jamais toutes les puissances finies de $\frac{1}{\hbar}$ en ordre de grandeur ; comme l'indique la démonstration ci-dessus, cela provient de ce que T est une distribution ; si T était une hyperfonction, $\|u\|$ pourrait avoir n'importe quel ordre de grandeur. Ainsi, nous pouvons interpréter une distribution T comme une fonction d'onde vue au microscope (ou à l'oeil nu lorsque c'est une fonction au sens usuel) :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \langle T, \varphi \rangle = \text{St}[(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \frac{\|u\|}{\Phi(0)} \int \omega(y) \varphi(y) dy]$$

mais la fonction d'onde ω n'est pas définie univoquement à partir de T ; elle dépend du choix de Φ . Nous avons vu que, indépendamment du choix de Φ , $(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \frac{\|u\|}{\Phi(0)} \omega$ est infiniment voisin de T dans ${}^*g'$ (et donc aussi dans ${}^*D'$), mais les différents ω ne sont pas tous infiniment voisins les uns des autres dans ${}^*\mathbb{L}^2$. Il n'y a donc pas, entre les distributions à support compact et les fonctions d'onde, de correspondance qui mérite d'être qualifiée de canonique. Une conséquence de cela est le fait suivant, que tout praticien pourra observer : dans les problèmes où les distributions constituent un très bon concept (par exemple les équations de l'électrostatique), les fonctions d'onde en seront un médiocre ; à l'inverse, lorsque les fonctions d'onde constituent le concept idoine (exemple : l'équation de Schrödinger), les distributions seront inadéquates. C'est pourquoi il y a tout lieu de penser que, pour chaque type

de problème nécessitant une extension de la notion usuelle de fonction, c'est une extension spécifique, adaptée à son champ particulier, qu'il convient d'introduire, plutôt qu'une extension universelle.

B

Etant donné une distribution T à support compact et une fonction Φ comme dans la section précédente, nous allons maintenant examiner la mesure spectrale de la fonction d'onde qui leur est associée. Pour cela, nous partirons d'une formule démontrée plus haut (chapitre IV, théorème 9) qui donne la mesure spectrale ; pour des fonctions-test χ et ψ appartenant chacune à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la mesure spectrale de la fonction d'onde ω est donnée par :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[(\frac{2\pi}{\hbar})^{-\frac{n}{2}} \iint \omega(x) \overline{\hat{\omega}(p)} e^{-\frac{i}{\hbar} x \cdot p} \chi(x) \psi(p) dx dp \right] = \text{St} \left[\int \widehat{\chi \omega}(p) \overline{\hat{\omega}(p)} \psi(p) dp \right]$$

Or par construction $\hat{\omega}(p) = \frac{u(p)}{\|u\|}$ avec $u(p) = \Phi(p) F^{-1} T(\frac{p}{\hbar})$ et

$$\begin{aligned} \chi \omega(p) &= (\frac{2\pi}{\hbar})^{\frac{n}{2}} F^{-1} \chi \omega(\frac{p}{\hbar}) = (\frac{2\pi}{\hbar})^{\frac{n}{2}} F^{-1} \chi * F^{-1} \omega(\frac{p}{\hbar}) = (\frac{2\pi}{\hbar})^{\frac{n}{2}} \int F^{-1} \chi(Q) F^{-1} \omega(\frac{p}{\hbar} - Q) dQ = \\ &= \int F^{-1} \chi(Q) \hat{\omega}(p - \hbar Q) dQ = \frac{1}{\|u\|} \int F^{-1} \chi(Q) \Phi(p - \hbar Q) F^{-1} T(\frac{p}{\hbar} - Q) dQ, \end{aligned}$$

de sorte que, finalement :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{1}{\|u\|^2} \iint F^{-1} \chi(Q) F^{-1} T(\frac{p}{\hbar} - Q) F^{-1} T(\frac{p}{\hbar}) \overline{\Phi(p - \hbar Q)} \overline{\Phi(p)} \psi(p) dQ dp \right]$$

Nous allons prouver que cette égalité reste vraie si sous le signe d'intégration on remplace le terme $\Phi(p - \hbar Q)$ par $\Phi(p)$:

LEMME 5 : Soient T une distribution sur \mathbb{R}^n , à support compact, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine, et Φ, χ, ψ , des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{R}^n , à supports compacts. Supposons que Φ ne s'annule pas dans Ω et que le support de ψ soit contenu dans Ω ; alors, si ω est la fonction d'onde définie à partir de T et Φ par la proposition 7, la

mesure spectrale de ω est donnée par :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{1}{\|u\|^2} \int F^{-1} \chi T \left(\frac{p}{h} \right) F^{-1} T \left(\frac{p}{h} \right) |\bar{\Phi}(p)|^2 \psi(p) dp \right]$$

Cette formule nous permettra donc de calculer μ sur $\mathbb{R}^n \times \Omega$.

Pourquoi se contenter de $\mathbb{R}^n \times \Omega$ au lieu de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$? Tout simplement parce que cela ne servirait à rien de connaître μ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tout entier, alors qu'il n'est pas facile de démontrer une formule valable partout sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; la construction de ω n'étant pas univoque, nous nous intéressons seulement aux propriétés spectrales qui ne dépendent pas du choix de $\bar{\Phi}$; ainsi nous verrons que le spectre de ω ne dépend, lui, que de T .

Démonstration : Nous devons majorer la différence

$$\frac{1}{\|u\|^2} \iint F^{-1} \chi(Q) F^{-1} T \left(\frac{p}{h} - Q \right) F^{-1} T \left(\frac{p}{h} \right) [\bar{\Phi}(p - hQ) - \bar{\Phi}(p)] \bar{\Phi}(p) \psi(p) dp dQ$$

par un nombre infiniment petit. Pour cela, écrivons cette différence sous la forme équivalente que voici :

$$\int_{|Q| \leq A} F^{-1} \chi(Q) \left[\frac{1}{\|u\|^2} \int F^{-1} T \left(\frac{p}{h} - Q \right) F^{-1} T \left(\frac{p}{h} \right) \frac{\bar{\Phi}(p - hQ) - \bar{\Phi}(p)}{\bar{\Phi}(p - hQ)} \bar{\Phi}(p - hQ) \bar{\Phi}(p) \psi(p) dp \right] dQ$$

$$+ \int_{|Q| > A} F^{-1} \chi(Q) \left[\frac{1}{\|u\|^2} \int F^{-1} T \left(\frac{p}{h} - Q \right) F^{-1} T \left(\frac{p}{h} \right) [\bar{\Phi}(p - hQ) - \bar{\Phi}(p)] \bar{\Phi}(p) \psi(p) dp \right] dQ$$

où A est une constante à bien choisir. Dans le premier terme, le facteur $\frac{\bar{\Phi}(p - hQ) - \bar{\Phi}(p)}{\bar{\Phi}(p - hQ)} \psi(p)$ est bien défini pour tout $p \in \mathbb{R}^n$, pourvu que hA soit infiniment petit, car le support de ψ étant contenu dans Ω , $|\bar{\Phi}(p - hQ)|$ reste minoré, sur le support de ψ , par une constante α standard et > 0 . En outre, la formule des accroissements finis nous permet d'écrire :

$$|\bar{\Phi}(p - hQ) - \bar{\Phi}(p)| \leq h|Q| \text{Sup} |\text{grad } \bar{\Phi}|$$

et puisque $\bar{\Phi}$ est une fonction standard, $C = \text{Sup} |\text{grad } \bar{\Phi}|$ est une constante standard ; nous pouvons donc majorer l'expression entre crochets dans le premier terme ci-dessus par

$$\frac{\pi A}{\|u\|^2} \int |F^{-1}T(\frac{P}{\pi} - Q) F^{-1}T(\frac{P}{\pi}) \bar{\Phi}(p - \pi Q) \bar{\Phi}(p)| dp \cdot \frac{C}{\alpha} \text{Sup} |\psi|$$

Nous pouvons encore majorer ceci en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\int |F^{-1}T(\frac{P}{\pi} - Q) \bar{\Phi}(p - \pi Q)| \cdot |F^{-1}T(\frac{P}{\pi}) \bar{\Phi}(p)| dp \leq \|u\|^2$$

ce qui montre que le premier terme est majoré par

$$\pi \frac{AC}{\alpha} \text{Sup} |\psi| \int |F^{-1}\chi(Q)| dQ$$

ce qui est infiniment petit puisque $F^{-1}\chi$ est une fonction standard à décroissance rapide donc intégrable sur \mathbb{R}^n .

Pour ce qui est du second terme, nous pouvons aussi déduire de l'inégalité de Schwarz que, si $\bar{\Phi}(p) = 0$ pour $|p| \geq R$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\|u\|^2} \int_{|p| \leq R} F^{-1}T(\frac{P}{\pi} - Q) F^{-1}T(\frac{P}{\pi}) [\bar{\Phi}(p - \pi Q) - \bar{\Phi}(p)] \overline{\bar{\Phi}(p)} \psi(p) dp \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\|u\|} \left(\int_{|p| \leq R} |F^{-1}T(\frac{P}{\pi} - Q)|^2 dp \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \text{Sup} |\bar{\Phi}| \cdot \text{Sup} |\psi| \end{aligned}$$

Or $F^{-1}T$ est la transformée de Fourier d'une distribution, donc à croissance polynômiale, ce qui nous permet d'écrire

$$|F^{-1}T(\frac{P}{\pi} - Q)|^2 \leq C_1 [1 + (|\frac{P}{\pi}| + |Q|)^{2N}]$$

avec des constantes standard C_1 et N . Si nous intégrons cela sur la boule de rayon standard R qui contient le support de $\bar{\Phi}$, nous obtenons avec une autre constante standard C_2 :

$$\left(\int_{|p| \leq R} |F^{-1}T(\frac{P}{\pi} - Q)|^2 dp \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_2}{\pi^N} (1 + |Q|^N)$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|Q| > A} F^{-1}\chi(Q) \left[\frac{1}{\|u\|^2} \int F^{-1}T(\frac{P}{\pi} - Q) F^{-1}T(\frac{P}{\pi}) [\bar{\Phi}(p - \pi Q) - \bar{\Phi}(p)] \overline{\bar{\Phi}(p)} \psi(p) dp \right] dQ \right| \\ & \leq 2 \text{sup} |\bar{\Phi}| \cdot \text{Sup} |\psi| \cdot \frac{C_2}{\pi^N \|u\|} \cdot \int_{|Q| > A} |F^{-1}\chi(Q)| (1 + |Q|^N) dQ \end{aligned}$$

Or, puisque $F^{-1}\chi(Q)$ est à décroissance rapide, cette dernière intégrale est infiniment petite devant toutes les puissances de $\frac{1}{A}$; si donc nous choisissons $A = \hbar^{-\frac{1}{2}}$, elle sera plus petite que toutes les puissances de \hbar , d'où le résultat.

C

Nous pouvons maintenant résumer la situation : au paragraphe A, nous avons vu qu'on pouvait associer à toute distribution T à support compact une famille de fonctions d'onde (indexée par les fonctions ϕ) ayant toutes la propriété que, multipliées par une constante finie ou infiniment grande, mais jamais infiniment petite, elles donnent des représentants de la distribution T , c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui sont infiniment voisins de T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Et au paragraphe B, nous avons donné une formule permettant de calculer les mesures spectrales de ces fonctions d'onde sur des ouverts Ω arbitrairement grands (lemme 5). Avec cette préparation, nous disposons de tous les moyens techniques pour comparer le front d'onde d'une distribution (introduit par Hörmander ; voir [10]) au spectre dynamique des fonctions d'onde qui lui sont associées par notre proposition 7. Ce paragraphe sera consacré à la démonstration du résultat suivant :

THÉORÈME 14. Soient T une distribution sur \mathbb{R}^n à support compact ; ϕ une fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}^n , à support compact, et ne s'annulant pas sur un ouvert Ω contenant l'origine ; ω la fonction d'onde qui leur est associée selon la proposition 7. Alors, sur $\mathbb{R}^n \times \Omega$, le spectre dynamique de ω est contenu dans le front d'onde de T .

Avant de démontrer ce théorème, rappelons la définition du front d'onde d'une distribution selon Hörmander : pour une distribution T sur \mathbb{R}^n , c'est le complémentaire du plus grand ouvert Ω de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ pour lequel, quels que soient les compacts H et K de \mathbb{R}^n tels que $H \times K \subset \Omega$,

et quelle que soit la fonction χ , indéfiniment dérivable et à support contenu dans H , la fonction

$$\lambda \mapsto F \cdot \chi T(\lambda \xi)$$

tend vers 0 plus vite que toutes les puissances de $\frac{1}{\lambda}$ lorsque λ tend vers l'infini, et cela uniformément en ξ sur K ([10], page 121, proposition 2.5.5.). Autrement dit, pour tout N entier, il existe une constante $C_{N,K}$ (qui ne dépend que de K et non de ξ) telle que :

$$|F \cdot \chi T(\lambda \xi)| \leq C_{N,K} (1 + \lambda)^{-N}$$

pour tout $\xi \in K$. Cette définition montre que le front d'onde est **conique**, c'est à dire constitué de demi-droites issues de l'origine dans le second espace $\mathbb{R}^n - \{0\}$; en effet la décroissance rapide à l'infini se conserve si on multiplie ξ par une constante non nulle.

Si nous adoptions cette définition à la lettre, le théorème énoncé ci-dessus serait faux; aussi, dans son énoncé, le front d'onde sera-t-il la réunion de l'ensemble précédent et de $\text{Supp } T \times \{0\}$. En effet, pour une raison évidente, la définition de Hörmander exclut $\{0\}$ du second espace \mathbb{R}^n ; or, la définition du spectre dynamique ne l'exclut pas. Notre théorème sera alors vrai seulement avec cette modification, purement conventionnelle, de la notion de front d'onde. Ainsi, pour Hörmander, le front d'onde d'une fonction indéfiniment dérivable est vide; pour nous, il se réduit à $\text{Supp } T \times \{0\}$.

Démonstration du théorème : Pour prouver que $\text{Sp}(w) \subset \text{WF}(T)$ ($\text{WF}(T)$ est la notation de Hörmander pour désigner le front d'onde de T), nous allons montrer que $\bigcup \text{WF}(T) \subset \bigcup \text{Sp}(w)$. Il suffit pour cela, d'après une propriété bien connue des ouverts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, de montrer que pour tous compacts H, K de \mathbb{R}^n tels que $H \times K \subset \bigcup \text{WF}(T)$, $H \times K$ est aussi inclus dans $\bigcup \text{Sp}(w)$. La convention que nous avons choisie d'inclure $\text{Supp } T \times \{0\}$ dans le front d'onde se traduit alors simplement par le fait que l'ensemble compact K dans \mathbb{R}^n ne contient pas l'origine. Soient donc H une partie compacte de

LA PROPAGATION DES ONDES

\mathbb{R}^n et K une partie compacte de $\mathbb{R}^n - \{0\}$, telles que $H \times K \subset \text{WF}(T)$;
d'après la définition de Hörmander, pour toute fonction χ indéfiniment différentiable, dont le support est contenu dans H , nous avons les inégalités

$$|F \cdot \chi T(\lambda p)| \leq C_{N,K} (1 + \lambda)^{-N} \quad \forall p \in K$$

pour tous λ standard > 0 (avec évidemment $C_{N,K}$ standard) ; par transfert, cela donne :

$$|F \cdot \chi^* T(\lambda p)| \leq C_{N,K} (1 + \lambda)^{-N} \quad \forall p \in {}^*K$$

avec $C_{N,K}$ standard pour N standard, pour tous λ (standard ou non) > 0 ; donc en particulier pour $\lambda = \frac{1}{h}$:

$$|F \cdot \chi T(\frac{p}{h})| \leq C_{N,K} (1 + \frac{1}{h})^{-N} \quad \forall p \in {}^*K$$

D'autre part, T est une distribution à support compact, donc sa transformée de Fourier standard est une fonction à croissance lente : il existe un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que

$$|F \cdot T(p)| \leq C(1 + |p|)^{N_0} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$$

ou, sous une forme équivalente :

$$|FT(\lambda p)| \leq C_K (1 + \lambda)^{N_0} \quad \forall \lambda > 0$$

uniformément sur tout compact K de \mathbb{R}^n ; donc en particulier pour $\lambda = \frac{1}{h}$:

$$|FT(\frac{p}{h})| \leq C_K (1 + \frac{1}{h})^{N_0}$$

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme 5 : prenons χ telle que son support soit contenu dans H , et ψ telle que son support soit contenu dans $K \cap \Omega$; alors

$$\langle \mu_w, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{1}{\|u\|^2} \int F^{-1} \cdot \chi T(\frac{p}{h}) F^{-1} T(\frac{p}{h}) |\Phi(p)|^2 |\Psi(p)|^2 dp \right]$$

et par conséquent, d'après les inégalités qui précèdent :

$$|\langle \mu_w, \chi \otimes \psi \rangle| \leq \text{St} \left[\frac{C_{N,K} \cdot C_K \cdot \text{Sup} |\Phi|^2 \Psi}{\|u\|^2} (1 + \frac{1}{h})^{N_0 - N} \text{vol}(K) \right]$$

Les constantes $C_{N,K}$, C_K , $\text{Sup}|\Phi|^2\psi$, $\text{vol}(K)$, sont toutes standard ; en outre, d'après ce que nous avons vu au paragraphe A, il existe encore une constante standard B telle que $\|u\|^2 \geq B \mathfrak{n}^n$, donc en définitive, nous avons pour chaque $N \in \mathbb{N}$ l'inégalité :

$$|\langle \mu_\omega, \chi \otimes \psi \rangle| \leq \frac{C_{N,K} C_K \text{Sup}(|\Phi|^2|\psi|) \text{vol}(K)}{B} \text{St}[\mathfrak{n}^{N-N_0-n}] ;$$

il suffit donc de choisir $N > N_0 + n$ pour en déduire que $\langle \mu_\omega, \chi \otimes \psi \rangle = 0$.

Notons bien que le théorème ainsi démontré ne parle que de ce qui se passe sur $\mathbb{R}^n \times \Omega$. Mais dans ce domaine, le spectre dynamique de ω est indépendant du choix de Φ : en effet, si Φ' est une autre fonction telle que Φ (donc ne s'annulant pas sur Ω) et si pour toute fonction-test ψ nous posons $\psi' = \sqrt{\frac{|\Phi|}{|\Phi'|}} \psi$, le lemme 5 nous fait voir immédiatement que :

$$\langle \mu_\omega, \chi \otimes \psi \rangle = \langle \mu_{\omega'}, \chi \otimes \psi' \rangle$$

où ω' est la fonction d'onde associée à T et Φ' ; puisque dans Ω ψ et ψ' s'annulent aux mêmes endroits, on en déduit que les mesures μ_ω et $\mu_{\omega'}$ ont, dans Ω , le même support. Le même raisonnement montre aussi que, si Φ est non nulle dans Ω et Φ' non nulle dans un ouvert Ω' plus grand que Ω , la restriction à $\mathbb{R}^n \times \Omega$ du spectre de ω' (qui, lui est connu sur $\mathbb{R}^n \times \Omega'$) est identique à celui de ω . Grâce à cette propriété de faisceau, il est naturel de poser :

Définition : Nous appellerons spectre dynamique d'une distribution T sur \mathbb{R}^n , à support compact, l'unique ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dont la restriction à tout ouvert de la forme $\mathbb{R}^n \times \Omega$, Ω ouvert borné de \mathbb{R}^n , est identique au spectre dynamique d'une fonction d'onde ω associée à T selon la proposition 7, Φ ne s'annulant pas sur Ω .

Autrement dit : on atteint ce que nous appelons le spectre dynamique de T en prenant des fonctions Φ dont le support est de plus en plus grand.

Avec cette définition, le théorème 14 peut s'énoncer sous la forme plus élégante que voici :

Théorème 14a : Le spectre dynamique d'une distribution à support compact est toujours contenu dans son front d'onde.

D

Nous disposons ainsi d'une relation très générale entre le spectre dynamique et le front d'onde. Toutefois, ce dernier théorème n'est guère explicite quant à la différence entre les deux ensembles. C'est pour mettre ces différences bien en évidence que nous avons choisi de consacrer le prochain chapitre à l'étude d'une série d'exemples. Il y a pourtant une différence d'ordre général que l'on peut d'ores et déjà soupçonner : si le front d'onde apparaît là où la distribution n'est pas de la classe C^∞ , le spectre dynamique apparaît là où elle n'est pas de la classe L^2 . Et en effet :

Proposition 8 : Si T est la distribution définie par une fonction a de carré intégrable et à support compact, alors la mesure spectrale des fonctions d'onde associées est indépendante du choix de Φ , et est donnée par

$$\mu(x, p) = \frac{|a(x)|^2}{\|a\|^2} \delta(p)$$

et le spectre dynamique est égal à $\text{Supp}(a) \times \{0\}$.

Démonstration : pour calculer la mesure spectrale, la clef est toujours le lemme 5 qui, moyennant le changement de variable $p = \mathfrak{H}P$, nous donne :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{\int F^{-1} \chi_T(P) \overline{F^{-1} T(P)} |\Phi(\mathfrak{H}P)|^2 \psi(\mathfrak{H}P) dP}{\int |F^{-1} T(P) \Phi(\mathfrak{H}P)|^2 dP} \right]$$

Or $\int |F^{-1} T(P) \Phi(\mathfrak{H}P)|^2 dP \approx |\Phi(0)|^2 \int |F^{-1} T(P)|^2 dP$ puisque $F^{-1} T$ est de carré intégrable (Plancherel) et que nous pouvons écrire, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|P| \leq A} |\hat{\Phi}(\hbar P)|^2 - |\hat{\Phi}(0)|^2 \right| \int_{|P| \leq A} |F^{-1}T(P)|^2 dP \leq \int_{|P| \leq A} |F^{-1}T(P)|^2 dP \cdot \text{Sup}_{|P| \leq A} \left| |\hat{\Phi}(\hbar P)|^2 - |\hat{\Phi}(0)|^2 \right| + \\ & + \int_{|P| \geq A} |F^{-1}T(P)|^2 dP \cdot 2 \text{Sup}_{|P| \geq A} |\hat{\Phi}|^2 \end{aligned}$$

de telle sorte que, si nous choisissons A tel que $1 \ll A \ll \frac{1}{\hbar}$, les deux termes du second membre sont infiniment petits.

De la même façon, puisque $F^{-1}\chi_T$ est de carré intégrable (c'est la transformée de Fourier de χ_a , et χ est bornée), nous avons :

$$\int F^{-1}\chi_T(P) \overline{F^{-1}T(P)} |\hat{\Phi}(\hbar P)|^2 \psi(\hbar P) dP \approx |\hat{\Phi}(0)|^2 \psi(0) \int F^{-1}\chi_T(P) \overline{F^{-1}T(P)} dP$$

En outre, d'après la formule de Plancherel :

$$\int |F^{-1}T(P)|^2 dP = (2\pi)^{-n} \int |a(x)|^2 dx$$

et

$$\int F^{-1}\chi_T(P) \overline{F^{-1}T(P)} dP = (2\pi)^{-n} \int \chi(x) |a(x)|^2 dx$$

d'où :

$$\langle \chi, \chi \otimes \psi \rangle = \frac{\int \chi(x) |a(x)|^2 dx \psi(0)}{\int |a(x)|^2 dx}$$

qui est bien le résultat cherché.

VIII.- EXEMPLES DE DISTRIBUTIONS ET LEURS SPECTRES

Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude d'une série d'exemples ; pour chacun, nous calculerons le spectre dynamique et le front d'onde. Chaque comparaison fera apparaître une particularité du spectre dynamique.

A

1er exemple : T est une fonction indéfiniment dérivable, à support compact, notée $a(x)$. Elle est de carré intégrable, donc, d'après la proposition 8, son spectre dynamique est $\text{Supp } a \times \{0\}$. Avec les conventions faites en VII, C, son front d'onde est aussi $\text{Supp } a \times \{0\}$. Dans ce cas, le

spectre dynamique et le front d'onde sont identiques.

2e exemple : T est une fonction avec saut : soit a indéfiniment dérivable, à support compact, sur \mathbb{R} , et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} a(x) \varphi(x) dx \quad (\text{au voisinage de } 0, T \text{ se comporte comme la fonction de Heaviside}).$$

T est encore de carré intégrable, donc son spectre dynamique est $\text{Sp}(T) = \text{Supp } a \cap [0, \infty[\times \{0\} = \text{Supp } T \times \{0\}$. Par contre le front d'onde est égal à $\text{WF}(T) = (\text{Supp } T \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. La différence entre les deux ensembles provient, dans ce cas, uniquement du fait que le front d'onde est défini par rapport à la classe C^{∞} . Si on le définissait, comme le font certains auteurs, par rapport à la classe L^2 , cette différence-là disparaîtrait.

3e exemple : T est la distribution de Dirac $\delta(x)$. Dans ce cas, nous savons que le front d'onde est $\{0\} \times \mathbb{R}^n$. Pour une fonction Φ nous avons $u(p) = F^{-1}T(\frac{p}{h})\Phi(p) = (2\pi)^{-n} \Phi(p)$, d'où $\|u\| = (2\pi)^{-n} \|\Phi\|$; d'après le lemme 5, et compte-tenu de ce que $\chi^T = \chi(0)\delta$:

$$\langle \mu_{\omega}, \chi \otimes \psi \rangle = \chi(0) \frac{\int |\Phi(p)|^2 \psi(p) dp}{\int |\Phi(p)|^2 dp}$$

ou encore :

$$\mu_{\omega}(x, p) = \delta(x) \frac{|\Phi(p)|^2}{\|\Phi\|^2}$$

Dans ce cas, μ_{ω} dépend du choix de Φ . Quant au spectre dynamique de δ , conformément à notre définition de VII, C, il est égal à $\{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Nous avons à nouveau, comme au 1er exemple, identité entre le spectre dynamique et le front d'onde.

Nous pouvons faire la même chose pour les dérivées de δ ; soit Q un polynôme de n variables, et posons $T = Q(\frac{\partial}{\partial x})\delta$; alors $F^{-1}T(p) = (2\pi)^{-n} Q(-iP)$, donc $u(p) = (2\pi)^{-n} Q(-\frac{i}{h}p) \Phi(p)$ et $\|u\|^2 = (2\pi)^{-2n} \int |Q(-\frac{i}{h}p)|^2 |\Phi(p)|^2 dp = (2\pi)^{-2n} \|Q(-\frac{i}{h}p) \cdot \Phi\|^2$, et en appliquant encore le lemme 5 :

$$\langle \mu_{\omega}, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{(2\pi)^{2n}}{\|Q(-\frac{i}{h}p)\Phi\|^2} \int F^{-1} \chi^T(\frac{p}{h}) \overline{F^{-1}T(\frac{p}{h})} |\Phi(p)|^2 \psi(p) dp \right]$$

et nous pouvons exprimer $F^{-1}\chi_T(\frac{p}{\hbar})$ en utilisant la formule de Leibniz-Hörmander (voir [22], page 51) : pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle \chi Q(\frac{\partial}{\partial x})\delta, \varphi \rangle &= \langle Q(\frac{\partial}{\partial x})\delta, \chi\varphi \rangle = \\ &= [Q(-\frac{\partial}{\partial x})\chi\varphi](0) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (i \frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} \chi(0) D^{\alpha}Q(-\frac{\partial}{\partial x}) \varphi(0) \end{aligned}$$

où $D^{\alpha}Q$ est la dérivée d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et où, comme il est de convention courante, $(i \frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} = (i \frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} (i \frac{\partial}{\partial x_2})^{\alpha_2} \dots (i \frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$, et $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$; il vient alors

$$F^{-1}\chi_T(\frac{p}{\hbar}) = (2\pi)^{-n} \sum_{\alpha} (i \frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} \chi(0) \cdot \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha}Q(-\frac{i}{\hbar}p)$$

et par conséquent :

$$\langle \mu_{\omega}, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (i \frac{\partial}{\partial x})^{\alpha} \chi(0) \int D^{\alpha}Q(-\frac{i}{\hbar}p) Q(-\frac{i}{\hbar}p) |\Phi(p)|^2 \psi(p) dp}{\|Q(-\frac{i}{\hbar}p)\Phi\|^2} \right]$$

Mais dans cette dernière expression, il est facile de voir que parmi les termes de la somme \sum_{α} , seul est non-négligeable celui qui correspond à $\alpha = 0$, puisque les dérivées $D^{\alpha}Q$ ont un degré inférieur à celui de Q (pour $\alpha \neq 0$) ; ce qui donne l'expression plus simple :

$$\langle \mu_{\omega}, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{\chi(0) \int |Q(-\frac{i}{\hbar}p)|^2 |\Phi(p)|^2 \psi(p) dp}{\|Q(-\frac{i}{\hbar}p)\Phi\|^2} \right]$$

Mais là encore, seuls les monômes du degré le plus élevé de Q sont à prendre en compte, c'est-à-dire un polynôme homogène Q_0 :

$$\langle \mu_{\omega}, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\chi(0) \frac{\int |Q_0(-ip)|^2 |\Phi(p)|^2 \psi(p) dp}{\|Q_0(-ip)\Phi\|^2} \right]$$

(on a pu éliminer \hbar grâce à l'homogénéité de Q_0). Ainsi :

$$\mu_{\omega}(x, p) = \delta(x) \frac{|Q_0(-ip)\Phi(p)|^2}{\|Q_0(-ip)\Phi\|^2}$$

On en déduit le spectre dynamique : c'est $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, car Q_0 étant un polynôme

ne peut être nul sur un ensemble d'intérieur non vide, de sorte que $Q_0(-ip)\Phi(p)$ et $\Phi(p)$ ont même support. Le front d'onde de $Q(\frac{\partial}{\partial x})\delta$ étant aussi $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, nous pouvons encore constater la coïncidence des deux ensembles.

B

Dans ce paragraphe, nous allons étudier un quatrième exemple, intermédiaire entre le second et le troisième : il s'agit de la distribution définie par :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \frac{a(x)}{\sqrt{x}} \varphi(x) dx$$

où a est comme toujours une fonction indéfiniment dérivable à support compact qui ne sert qu'à régulariser la situation. Ce qui nous intéresse est évidemment la singularité en 0 , qui est du type $\frac{1}{\sqrt{x}}$; donc nous supposons que $a(0) = 1$ ou même, pour simplifier, que $a(x)$ est identiquement égal à 1 dans tout un voisinage de 0 .

Nous partirons du fait connu suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iPx}}{\sqrt{x}} dx = \begin{cases} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{P}} & \text{si } P > 0 \\ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{-P}} & \text{si } P < 0 \end{cases}$$

En intégrant par parties on obtient en outre (pour $P \neq 0$) :

$$\int_0^{\infty} \frac{1-a(x)}{\sqrt{x}} e^{-iPx} dx = -\frac{1}{iP} \int_0^{\infty} \left[\frac{a'(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1-a(x)}{2x^{3/2}} \right] e^{-iPx} dx$$

Or, puisque $a'(x)$ et $1-a(x)$ sont identiquement nulles dans un voisinage de 0 , et que $a'(x)$ est nulle en dehors d'un compact, la fonction entre crochets est dans $\mathcal{L}^1(]0, \infty[)$, d'où on déduit qu'il existe une constante standard C_0 telle que :

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{1-a(x)}{\sqrt{x}} e^{-iPx} dx \right| \leq \frac{C_0}{|P|} ;$$

autrement dit :

$$\left| F^{-1} T(P) - \frac{e^{i\sigma(P)\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi|P|}} \right| \leq \frac{C_0}{2\pi|P|}$$

où $\sigma(P)$ est le signe de P .

Evaluons maintenant $\frac{\|u\|^2}{\hbar} = \int_{-\infty}^{+\infty} |F^{-1}T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP$. Soit A une constante telle que $1 \ll A \ll \frac{1}{\hbar}$, et décomposons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^{-1}T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP = \int_{|P| \leq A} |F^{-1}T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP + \int_{|P| > A} |F^{-1}T(P)|^2 |\Phi(P)|^2 dP$$

Puisque $A \ll \frac{1}{\hbar}$, il est clair que

$$\int_{|P| \leq A} |F^{-1}T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP \approx |\Phi(0)|^2 \int_{|P| \leq A} |F^{-1}T(P)|^2 dP$$

et puisque $A \gg 1$ mais $T \notin \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, cette dernière expression a une valeur infiniment grande (rappelons que $\Phi(0) \neq 0$).

D'autre part :

$$\int_{|P| > A} |F^{-1}T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP \approx \int_{|P| > \hbar A} \frac{|\Phi(P)|^2}{4\pi^2|P|} dP$$

En effet, nous avons vu que

$$\left| F^{-1}T(P) - \frac{e^{i\sigma(P)\frac{\pi}{4}}}{2\pi\sqrt{|P|}} \right| \leq \frac{C_0}{2\pi|P|}$$

d'où on déduit que pour $|P| \geq 1$:

$$\left| |F^{-1}T(P)|^2 - \frac{1}{4\pi^2 P^2} \right| \leq |F^{-1}T(P) - \frac{e^{i\sigma(P)\frac{\pi}{4}}}{2\pi\sqrt{|P|}}| \left(|F^{-1}T(P)| + \frac{1}{2\pi\sqrt{|P|}} \right) \leq \frac{C_1}{|P|^{3/2}}$$

Il suffit de prendre $C_1 = \frac{1}{4\pi^2} C_0(C_0 + 2)$. Cette inégalité nous permet alors d'écrire :

$$\left| \int_{|P| > A} |F^{-1}T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP - \int_{|P| > A} \frac{|\Phi(\hbar P)|^2}{4\pi^2|P|} dP \right| \leq C_1 \text{Sup}_{|P| > A} |\Phi|^2 \int_{|P| > A} \frac{dP}{|P|^{3/2}} = \frac{4C_1 \text{Sup}_{|P| > A} |\Phi|^2}{\sqrt{A}}$$

En définitive, il apparaît que pour $1 \ll A \ll \frac{1}{h}$:

$$\frac{\|u\|^2}{h} \approx |\Phi(0)|^2 \int_{|P| \leq A} |F^{-1}T(P)|^2 dP + \int_{|P| > hA} \frac{|\Phi(P)|^2}{4\pi^2 |P|} dP$$

Pour avoir la mesure spectrale, il nous faut également calculer, pour

$\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}\chi T(P) \overline{F^{-1}T(P)} |\Phi(hP)|^2 \psi(hP) dP$$

Cette fois, en plus de $F^{-1}T(P)$, il nous faut majorer $F^{-1}\chi T(P)$. Mais cela se fait de la même façon :

$$\int_0^{\infty} \frac{\chi(0) - \chi(x)a(x)}{\sqrt{x}} e^{-iPx} dx = -\frac{1}{iP} \int_0^{\infty} \left[\frac{(\chi a)'(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\chi(0) - \chi(x)a(x)}{2x^{3/2}} \right] e^{-iPx} dx$$

Comme plus haut, la fonction entre crochets est dans \mathbb{L}^1 : en effet, $\frac{(\chi a)'(x)}{\sqrt{x}}$ est localement intégrable en 0, ainsi que $\frac{\chi(0) - \chi(x)a(x)}{2x^{3/2}}$ puisque $\chi(x)a(x)$ est dérivable et que $\chi(0)a(0) = \chi(0)$; à l'infini, $(\chi a)'$ est identiquement nulle. Il existe donc encore une constante standard C_3 (qui dépend de χ) telle que :

$$\left| F^{-1}\chi T(P) - \frac{\chi(0) e^{i\sigma(P)\frac{\pi}{4}}}{2\pi \sqrt{|P|}} \right| \leq \frac{C_3}{|P|}$$

En reprenant la même constante A que plus haut, nous aurons pour les mêmes raisons :

$$\int_{|P| \leq A} F^{-1}\chi T(P) \overline{F^{-1}T(P)} |\Phi(hP)|^2 \psi(hP) dP \approx |\Phi(0)|^2 \psi(0) \int_{|P| \leq A} F^{-1}\chi T(P) \overline{F^{-1}T(P)} dP$$

(mais il n'y a ici aucune raison que chacun des deux membres de cette quasi-égalité soit infiniment grand : ils peuvent être nuls), ainsi que :

$$\int_{|P| > hA} F^{-1}\chi T(P) \overline{F^{-1}T(P)} |\Phi(hP)|^2 \psi(hP) dP \approx \chi(0) \int_{|P| > hA} \frac{|\Phi(P)|^2 \psi(P)}{4\pi^2 |P|} dP$$

D'après ce qui précède et le lemme 5, la mesure spectrale est donc donnée par :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{\int_{|P| \leq A} |\Phi(0)|^2 \psi(0) \int F^{-1} \chi T(P) \overline{F^{-1} T(P)} dP + \chi(0) \int_{|P| > A\hbar} \frac{|\Phi(P)|^2 \psi(P)}{4\pi^2 |P|} dp}{\int_{|P| \leq A} |F^{-1} T(P)|^2 dP + \int_{|P| > A\hbar} \frac{|\Phi(P)|^2}{4\pi^2 |P|} dp} \right]$$

(Les quantités infiniment petites négligées au numérateur et au dénominateur ne changent pas la partie standard, puisque le dénominateur est infiniment grand).
Notons bien que d'après notre calcul, cette expression ne saurait dépendre du choix de A , pourvu que $1 \ll A \ll \frac{1}{\hbar}$. Il est facile de voir que

$$\int_{|P| \leq A} |F^{-1} T(P)|^2 dP \sim \text{Log } A$$

$$\int_{|P| > \hbar A} \frac{|\Phi(P)|^2}{|P|} dp \sim \text{Log } \frac{1}{\hbar A}$$

Par conséquent nous pouvons choisir A tel que $\text{Log } \frac{1}{\hbar A} \gg \text{Log } A$, ce qui va simplifier sensiblement notre expression : il suffit de prendre par exemple $A = \left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\text{Log } \frac{1}{\hbar}}}}$; ainsi $\text{Log } A = \frac{\text{Log } \frac{1}{\hbar}}{\sqrt{\text{Log } \frac{1}{\hbar}}} = \sqrt{\text{Log } \frac{1}{\hbar}} \gg 1$ donc $A \gg 1$ et $A \ll \frac{1}{\hbar}$,

mais aussi $\text{Log } \frac{1}{\hbar A} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\text{Log } \frac{1}{\hbar}}}\right) \text{Log } \frac{1}{\hbar} \sim \text{Log } \frac{1}{\hbar} \gg \sqrt{\text{Log } \frac{1}{\hbar}} = \text{Log } A$.

Dans la formule qui donne $\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle$, nous pouvons ainsi négliger au dénominateur le terme $\int_{|P| \leq A} |F^{-1} T(P)|^2 dP |\Phi(0)|^2$, mais également au numérateur le terme $\int_{|P| \leq A} F^{-1} \chi T(P) \overline{F^{-1} T(P)} dP |\Phi(0)|^2 \psi(0)$, qui est également au plus de l'ordre de $\text{Log } A$. Donc :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\chi(0) \frac{\int_{|P| > \hbar A} \frac{|\Phi(P)|^2 \psi(P)}{|P|} dp}{\int_{|P| > \hbar A} \frac{|\Phi(P)|^2}{|P|} dp} \right]$$

LA PROPAGATION DES ONDES

On peut simplifier davantage : pour tout $\epsilon \approx 0$, mais $\gg \hbar A$,

$$\int_{\epsilon \geq |p| > \hbar A} \frac{|\Phi(p)|^2}{|p|} dp \approx 2 |\Phi(0)|^2 \text{Log} \frac{\epsilon}{\hbar A}$$

tandis que

$$\int_{|p| > \epsilon} \frac{|\Phi(p)|^2}{|p|} dp \leq 2 \text{Sup} |\Phi|^2 \text{Log} \frac{\alpha}{\epsilon}$$

où α est un nombre standard tel que $\text{Supp } \Phi \subset [-\alpha, +\alpha]$; on peut donc négliger la seconde intégrale devant la première si par exemple $\epsilon = (\hbar A) \sqrt{\text{Log} \frac{1}{\hbar A}}$.

De même :

$$\int_{\epsilon \geq |p| > \hbar A} \frac{|\Phi(p)|^2 |\Psi(p)|}{|p|} dp \approx 2 |\Phi(0)|^2 |\Psi(0)| \text{Log} \frac{\epsilon}{\hbar A}$$

tandis que

$$\int_{|p| > \epsilon} \frac{|\Phi(p)|^2 |\Psi(p)|}{|p|} dp \leq 2 \text{Sup} |\Phi|^2 |\Psi| \text{Log} \frac{\alpha}{\epsilon} \ll \text{Log} \frac{\epsilon}{\hbar A}$$

ce qui nous donne finalement :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \chi(0) \psi(0)$$

c'est à dire :

$$\mu(x, p) = \delta(x) \delta(p)$$

et le spectre est ici réduit à $\{0\} \times \{0\}$. Le front d'onde de T est facile à déterminer : les calculs faits plus haut nous ont montré que si $\chi(0) \neq 0$, $F^{-1} \chi T(P)$ est équivalent, quand $P \rightarrow \pm \infty$, à $\chi(0) \frac{e^{\pm i \pi/4}}{2\pi \sqrt{|P|}}$, et puisque $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est indéfiniment dérivable en dehors de $x=0$, cela signifie que $\text{WF}(T) = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\text{Supp } \chi \times \{0\})$. Ainsi nous pouvons constater que, si nous avons toujours l'inclusion $\text{Sp}(T) \subset \text{WF}(T)$ prévue par le théorème 14a, $\text{Sp}(T)$ est cette fois beaucoup plus petit que $\text{WF}(T)$. La situation ne ressemble ni à l'exemple 2, ni à l'exemple 3.

C

Avant de passer à d'autres exemples, nous allons prouver un résultat que le paragraphe précédent pouvait laisser pressentir : de même que le front d'onde d'une distribution T (privé de $\text{Supp } T \times \{0\}$) ne dépend que de la classe d'équivalence de T modulo C^∞ , le spectre associé ne dépend que de la classe de T modulo \mathbb{L}^2 :

PROPOSITION 9 : Soient S et T deux distributions à supports compacts, telles que $S - T$ soit une fonction de carré intégrable. Pour toute fonction Φ standard, indéfiniment dérivable, à support compact, telle que $\Phi(0) \neq 0$, soient ω_S la fonction d'onde associée à S par la proposition 7, et ω_T pour T . Alors, si $S \notin \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, les mesures spectrales de ω_S et ω_T coïncident sur tout ouvert Ω où Φ ne s'annule pas.

Démonstration : Posons $f = S - T$, $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui signifie que pour toute $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle S, \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx$$

$$\text{et} \quad \int |f(x)|^2 dx < \infty$$

Selon une habitude maintenant bien ancrée, calculons $\int |F^{-1}S(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP$.

Nous avons $S = T + f$, donc $F^{-1}S = F^{-1}T + F^{-1}f$, et par conséquent

$$|F^{-1}S|^2 = |F^{-1}T|^2 + 2 \text{Re} (F^{-1}T \cdot \overline{F^{-1}f}) + |F^{-1}f|^2 ; \text{ ainsi :}$$

$$\begin{aligned} \int |F^{-1}S(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP &= \int |F^{-1}T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP + 2 \text{Re} \int F^{-1}T(P) \overline{F^{-1}f(P)} |\Phi(\hbar P)|^2 dP + \\ &+ \int |F^{-1}f(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP \end{aligned}$$

Le second terme peut être majoré par l'inégalité de Schwarz :

$$\left| \int F^{-1}T(P) \overline{F^{-1}f(P)} |\Phi(\hbar P)|^2 dP \right| \leq \left[\int |F^{-1}T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int |F^{-1}f(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP \right]^{\frac{1}{2}}$$

Puisque par hypothèse $T \notin \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, le premier terme est infiniment grand ; le second est donc de l'ordre de la racine carrée du premier, donc négligeable devant

lui, et le troisième est fini. De la même façon, évaluons

$$\int F^{-1} \chi_S(P) \overline{F^{-1} S(P)} |\Phi(\hbar P)|^2 \Psi(\hbar P) dP ; \text{ c'est égal à :}$$

$$\int F^{-1} \chi_T(P) \overline{F^{-1} T(P)} |\Phi(\hbar P)|^2 \Psi(\hbar P) dP + \int F^{-1} \chi_T(P) \overline{F^{-1} f(P)} |\Phi(\hbar P)|^2 \Psi(\hbar P) dP +$$

$$+ \int F^{-1} \chi_f(P) \overline{F^{-1} T(P)} |\Phi(\hbar P)|^2 \Psi(\hbar P) dP + \int F^{-1} \chi_f(P) \overline{F^{-1} f(P)} |\Phi(\hbar P)|^2 \Psi(\hbar P) dP ;$$

de ces quatre expressions, seule la première a des chances d'être du même ordre de grandeur que $\int |F^{-1} T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP$; les autres sont négligeables (pour majorer $\int |F^{-1} \chi_T(P)|^2 dP$ on remarquera que $F^{-1} \chi_T = F^{-1} \chi * F^{-1} T$, et puisque χ est indéfiniment dérivable à support compact, $F^{-1} \chi$ est à décroissance rapide, donc dans \mathbb{L}^1 ; alors on peut écrire l'inégalité bien connue

$$\|F^{-1} \chi * F^{-1} T\|_2 \leq \|F^{-1} \chi\|_1 \cdot \|F^{-1} T\|_2 .$$

En négligeant tous les termes dont nous venons de vérifier qu'ils sont effectivement négligeables, nous obtenons :

$$\langle \mu_{\omega_S}, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{\int F^{-1} \chi_T(P) \overline{F^{-1} T(P)} |\Phi(\hbar P)|^2 \Psi(\hbar P) dP}{\int |F^{-1} T(P) \Phi(\hbar P)|^2 dP} \right]$$

mais cela n'est autre que $\langle \mu_{\omega_T}, \chi \otimes \psi \rangle$, et la proposition est ainsi démontrée.

Notons bien que si S et T sont elles-mêmes dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, le résultat devient grossièrement faux (contre-exemple : $S \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n), T = 0$). Dans ce cas, les termes qui étaient négligeables dans notre démonstration ne le sont évidemment plus.

On pourrait tirer de la démonstration ci-dessus une conclusion plus générale : puisque l'ordre de grandeur de $\int |F^{-1} T(P)|^2 |\Phi(\hbar P)|^2 dP$ ne dépend que de l'ordre de la singularité d'ordre le plus élevé de T , on voit que dans $\int F^{-1} \chi_T(P) \overline{F^{-1} T(P)} |\Phi(\hbar P)|^2 \Psi(\hbar P) dP$, sont négligeables toutes les singularités d'ordre moins élevé ; on peut donc voir d'emblée que la mesure spectrale associée à $\delta + \delta'$ par exemple, est égale à la mesure spectrale associée à δ' . Les spectres de distributions imaginés par Hörmander ou Sato (y compris leurs variantes modulo \mathbb{L}^2 ou modulo les espaces de Sobolev, plus proches pourtant des idées que

nous développons ici) n'ont pas cette propriété : toutes les singularités y interviennent indépendamment de leur ordre.

D

Nous terminerons notre série d'exemples par une distribution aux propriétés remarquables, quoique méconnue : en 1930, Van der Waerden [23] construisit un exemple de fonction continue, mais dérivable en aucun point, qui est sensiblement plus simple que le célèbre exemple de Weierstrass ; cette fonction est construite comme ceci : soit $u(x)$ la fonction périodique de période 1, égale à $|x|$ dans $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$. Puis posons $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} u(2^n x)$ (1). Il est clair, puisque la série est majorée uniformément en x par la série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$, que $U(x)$ est continue. Nous renvoyons à [23] pour la preuve qu'elle n'est dérivable en aucun point. Mais puisque $U(x)$ est continue, elle définit une distribution :

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \langle U, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \varphi(x) dx$, et par conséquent possède une dérivée au sens des distributions : $\langle W, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \varphi'(x) dx$; c'est cette dérivée W que nous allons étudier ici.

Pour avoir une distribution à support compact, posons comme toujours $T = aW$, où a est une fonction standard indéfiniment dérivable et à support compact. Mais avant de calculer la mesure spectrale associée à T , il nous faut établir quelques propriétés de W . Désignons par W_N la distribution $\langle W_N, \varphi \rangle = \langle W, \varphi_N \rangle$, où $\varphi_N(x) = 2^{-N} \varphi(2^N x)$ (en notation fonctionnelle $W_N(x) = W(2^N x)$), pour N standard. La construction de W montre que $W - W_N$ est tout simplement la somme finie $\sum_{n=0}^N u'(2^n x)$, définie partout sauf sur $2^{-N} \mathbb{Z}$, et qui est localement de carré intégrable. Donc si nous posons $T_N = a W_N$, a

(1) La fonction construite dans [23] est $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} u(10^n x)$, mais notre variante en base 2 rend évidemment les mêmes services, avec un peu plus de commodité.

étant la même fonction que ci-dessus, $T - T_N \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. D'après la proposition 9, Φ étant donnée, T et T_N ont même mesure spectrale ; et d'après le lemme 5, celle-ci est donnée dans Ω par :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \text{St} \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F^{-1} \chi T_N \left(\frac{p}{N} \right) \overline{F^{-1} T_N \left(\frac{p}{N} \right)} |\Phi(p)|^2 \psi(p) dp}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F^{-1} T_N \left(\frac{p}{N} \right)|^2 \Phi(p)^2 dp} \right]$$

Mais cette formule étant vraie pour tout entier standard N , reste vraie encore pour un certain N infiniment grand, d'après le lemme de Robinson. Pour calculer, il nous faut encore connaître la transformée de Fourier $F^{-1} W_N$, qui nous donnera $F^{-1} T_N = F^{-1} a * F^{-1} W_N$. La distribution W étant périodique, sa transformée de Fourier est de la forme $F^{-1} W(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n \delta(p - 2\pi n)$, où les C_n sont les coefficients de Fourier de W : $C_n = \langle W(x), e^{-2i\pi n x} \rangle$ et par conséquent $F^{-1} W_N(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n \delta(p - 2^N \cdot 2\pi n)$ et $F^{-1} T_N(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n F^{-1} a(p - 2^N \cdot 2\pi n)$.

Il est facile de calculer les C_k . Puisque W est la dérivée de U , $C_k = 2i\pi k \int_0^1 U(x) e^{-2i\pi k x} dx$. Or, les coefficients de Fourier de la fonction $u(x)$ sont :

$$d_0 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad d_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair } \neq 0 \\ -\frac{1}{\pi^2 k^2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Autrement dit :

$$u(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi(2k+1)x}}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

La série de Fourier de chacune des fonctions $2^{-l} u(2^l x)$ s'en déduit :

$$2^{-l} u(2^l x) = 2^{-l} \cdot \frac{1}{4} - 2^{-l} \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi(2k+1)2^l x}}{(2k+1)^2}$$

Or, tout nombre entier $\neq 0$ s'écrit d'une manière unique comme produit d'une puissance de 2 et d'un impair : $n = 2^l(2k+1)$; si n est lui-même impair, $l=0$ et $n=2k+1$; si n est lui-même une puissance de 2, $k=0$. Donc :

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi(2k+1)2^\ell x}}{2^\ell(2k+1)^2} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi nx}}{2^\ell(2k+1)^2}
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à constater la valeur des coefficients de Fourier de $U(x)$, et à en déduire, en multipliant par $2i\pi n$, ceux de W :

$$C_0 = 0 ; \quad C_n = \frac{2}{i\pi} \cdot \frac{1}{2k+1}$$

Il apparaît ainsi que $C_n = \frac{2}{i\pi}$ si n est une puissance de 2, et $C_n = \frac{2}{i\pi n}$ si n est impair ; les C_n sont donc bornés.

Afin de calculer la mesure spectrale, évaluons d'abord :

$$\int |F^{-1} T_N \left(\frac{p}{h} \right) \Phi(p)|^2 dp = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_m \overline{C_n} \int F^{-1} a \left(\frac{p}{h} - 2^N \cdot 2\pi m \right) F^{-1} a \left(\frac{p}{h} - 2^N \cdot 2\pi n \right) |\Phi(p)|^2 dp ;$$

nous allons voir que dans cette série double, les termes non diagonaux sont négligeables ; en effet, décomposons l'intégrale de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 &\int F^{-1} a \left(\frac{p}{h} - 2^N \cdot 2\pi m \right) \overline{F^{-1} a \left(\frac{p}{h} - 2^N \cdot 2\pi n \right)} |\Phi(p)|^2 dp = \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-2^N \pi h}^{+2^N \pi h} F^{-1} a \left(\frac{q}{h} + 2^{N+1} \pi [j-m] \right) \overline{F^{-1} a \left(\frac{q}{h} + 2^{N+1} \pi [j-n] \right)} |\Phi(q+h 2^{N+1} \pi j)|^2 dq \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-2^N \pi}^{+2^N \pi} F^{-1} a(Q + 2^{N+1} \pi [j-m]) \overline{F^{-1} a(Q + 2^{N+1} \pi [j-n])} |\Phi(hQ + h 2^{N+1} \pi j)|^2 dQ
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{-2^N \pi}^{+2^N \pi} F^{-1} a(Q + 2^{N+1} \pi [j-m]) \overline{F^{-1} a(Q + 2^{N+1} \pi [j-n])} |\Phi(hQ + h 2^{N+1} \pi j)|^2 dQ \right| \leq \\
 &\leq \sup_{|Q| \leq 2^N \pi} |\Phi(hQ + h 2^{N+1} \pi j)|^2 \left[\int_{-2^N \pi}^{+2^N \pi} |F^{-1} a(Q + 2^{N+1} \pi [j-m])|^2 dQ \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-2^N \pi}^{+2^N \pi} |F^{-1} a(Q + 2^{N+1} \pi [j-n])|^2 dQ \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Rappelons que N est infiniment grand, et que nous pouvons le supposer tel que $2^N \ll \frac{1}{h}$; $F^{-1} a$ est une fonction à décroissance rapide, ce qui fait que pour

$$|j| \geq 1 : \int_{-2^N \pi}^{+2^N \pi} |F^{-1} a(Q+2^{N+1} \pi j)|^2 dQ \Bigg|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{B_\alpha}{[2^N (|j| - \frac{1}{2})]^\alpha}$$

pour tout entier standard α , B_α étant une constante standard. Par contre,

pour $j = 0$:

$$\int_{-2^N \pi}^{+2^N \pi} |F^{-1} a(Q)|^2 dQ \approx \int_{-\infty}^{+\infty} |F^{-1} a(Q)|^2 dQ = \|F^{-1} a\|^2 = (2\pi)^{-n} \|a\|^2$$

Cela montre que si nous écrivons

$$\int |F^{-1} T_N(\frac{p}{h}) \Phi(p)|^2 dp = \sum_{j, m, n \in \mathbb{Z}} |C_m \overline{C_n}| \int_{-2^N \pi}^{+2^N \pi} F^{-1} a(Q+2^{N+1} \pi [j-m]) \overline{F^{-1} a(Q+2^{N+1} \pi [j-n])} |\Phi(hQ+h2^{N+1} \pi j)|^2 dQ$$

les termes du second membre pour lesquels $j=m=n$ sont du même ordre que

$|C_j|^{2n}$, tandis que la somme de tous les autres, pour lesquels $j \neq m$ ou $j \neq n$

est infiniment petite devant les précédents ($\ll 2^{-N\alpha/n}$, $\forall \alpha$ standard) ; par

conséquent nous pouvons conclure que

$$\int |F^{-1} T_N(\frac{p}{h}) \Phi(p)|^2 dp \approx h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |C_j|^2 \int_{-2^N \pi}^{+2^N \pi} |F^{-1} a(Q)|^2 |\Phi(hQ+h2^{N+1} \pi j)|^2 dQ$$

(rappelons le sens du signe \approx : $A \approx B$ si $B = A(1 + \epsilon)$ avec $|\epsilon| \ll 1$)

En outre, puisque nous avons supposé que $2^N \ll \frac{1}{h}$, il est clair que pour

$|Q| \leq 2^N \pi$, $\Phi(hQ+h2^{N+1} \pi j) \approx \Phi(h2^{N+1} \pi j)$, et puisque $F^{-1} a$ est de carré intégrable,

et les $|C_n|^2$ bornées, nous pouvons encore écrire

$$\int |F^{-1} T_N(\frac{p}{h}) \Phi(p)|^2 dp \approx h (2\pi)^{-n} \|a\|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |C_j|^2 |\Phi(h2^{N+1} \pi j)|^2$$

Pour évaluer $\int F^{-1} \chi T_N(\frac{p}{h}) \overline{F^{-1} T_N(\frac{p}{h})} |\Phi(p)|^2 \psi(p) dp$, nous pouvons suivre exactement la même voie, et nous voyons ainsi que c'est équivalent (\approx) à

$$h (2\pi)^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) |a(x)|^2 dx \sum_{j \in \mathbb{Z}} |C_j|^2 |\Phi(h2^{N+1} \pi j)|^2 \psi(h2^{N+1} \pi j).$$

Autrement dit, la mesure spectrale est donnée par :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \frac{1}{\|a\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) |a(x)|^2 dx \operatorname{St} \left[\frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |C_j|^2 |\Phi(\epsilon j)|^2 \psi(\epsilon j)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |C_j|^2 |\Phi(\epsilon j)|^2} \right]$$

où $\epsilon = \pi 2^{N+1}$ est un certain infiniment petit, $\gg \pi$.

Le facteur $\frac{1}{\|a\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) |a(x)|^2 dx$ nous est déjà familier : nous l'avons rencontré au paragraphe A (exemples 1 et 2). Par contre, le facteur entre crochet garde son mystère ; pour le lever, nous allons constater que dans la série des $|C_j|^2$, les premiers (ceux dont l'indice j est fini) sont prédominants devant les autres (dont l'indice est infiniment grand) ; en effet, $|C_j|^2$ peut prendre des valeurs non infiniment petites pour des j arbitrairement grands, mais celles-ci sont de plus en plus rares lorsque j augmente, de sorte que les expressions $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |C_j|^2 |\Phi(\epsilon j)|^2 \psi(\epsilon j)$ et $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |C_j|^2 |\Phi(\epsilon j)|^2$ seront finalement déterminées par les valeurs de Φ et ψ en 0. Voyons cela de façon précise. On peut décomposer ces sommes comme ceci :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |C_j|^2 |\Phi(\epsilon j)|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{-2^{\ell-1} < j \leq 2^{\ell-1}} |C_{2^{\ell m+j}}|^2 |\Phi(\epsilon [2^{\ell m+j}])|^2 \right]$$

et majorer les termes correspondant à $m \neq 0$, puis minorer celui correspondant à $m = 0$. En effet, soit $m \neq 0$. Dans l'intervalle $]2^{\ell m} - 2^{\ell-1}, 2^{\ell m} + 2^{\ell-1}]$, le seul entier ayant une chance d'être une puissance de 2 est $2^{\ell m}$ (c'est le cas si et seulement si m est lui-même une puissance de 2) ; il est immédiat que $\frac{\pi}{2} |C_{2^{\ell m+j}}|$ est égal à $\frac{1}{|2m+1|}$ pour $j = 2^{\ell-1}$, à $\frac{1}{|4m+1|}$ si $j = 2^{\ell-2}$ et à $\frac{1}{|4m-1|}$ si $j = -2^{\ell-2}$, donc $\leq \frac{1}{|4m-1|}$ dans ces deux derniers cas ; de même, on peut voir que c'est $\leq \frac{1}{|8m-4|}$ pour $j = -3 \cdot 2^{\ell-3}, -2^{\ell-3}, +2^{\ell-3}$, et $+3 \cdot 2^{\ell-3}$; plus généralement, c'est $\leq \frac{1}{|2^{k \cdot m} - 2^{k-1}|}$ pour exactement 2^{k-1} valeurs de j dans l'intervalle $] -2^{\ell-1}, +2^{\ell-1}]$, tant que $k \leq \ell$, ce qui épuise toutes les 2^{ℓ} valeurs possibles de j . Nous pouvons donc en déduire les inégalités :

$$\sum_{-2^{\ell-1} < j \leq 2^{\ell-1}} |C_{2^{\ell}m+j}|^2 |\Phi(\epsilon[2^{\ell}m+j])|^2 \leq \text{Sup} |\Phi|^2 \left[|C_{2^{\ell}m}| + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{2^{k-1}}{|2^k m - 2^{k-1}|^2} \right]$$

$$\leq \text{Sup} |\Phi|^2 \cdot \frac{4}{\pi^2} \left[1 + \frac{2}{(2m-1)^2} \right]$$

Pour $m=0$, c'est $\sum_{-2^{\ell-1} < j \leq 2^{\ell-1}} |C_j|^2 |\Phi(\epsilon j)|^2$ que nous devons minorer ; il est

clair que dans l'intervalle de sommation, $|C_j|^2$ prend exactement $2^{\ell-1}$ fois la valeur maxima $\frac{4}{\pi^2}$. Si nous choisissons ℓ tel que $2^{\ell}\epsilon$ soit infiniment petit, $|\Phi(\epsilon j)|^2$ reste toujours infiniment voisin de $|\Phi(0)|^2$, donc toujours $\geq |\Phi(0)|^2 - \eta$ (pour tout η standard, >0). De sorte que :

$$\sum_{-2^{\ell-1} < j \leq 2^{\ell-1}} |C_j|^2 |\Phi(\epsilon j)|^2 \geq (2^{\ell-1}) \cdot \frac{4}{\pi^2} [|\Phi(0)|^2 - \eta]$$

Soit R standard tel que le support de Φ soit contenu dans $[-R, +R]$; d'après ce qui précède :

$$\sum_{m \neq 0} \sum_{-2^{\ell-1} < j \leq 2^{\ell-1}} |C_{2^{\ell}m+j}|^2 |\Phi(\epsilon[2^{\ell}m+j])|^2 \leq \text{Sup} |\Phi|^2 \cdot \frac{4}{\pi^2} \sum_{m \neq 0} \left[1 + \frac{2}{(2m-1)^2} \right]$$

Or, la sommation en m ne porte que sur les m tels que $\Phi(\epsilon[2^{\ell}m+j])$ soit non nul, donc tels que $|m| \leq \frac{R}{2^{\ell}\epsilon}$, de sorte que le second membre de l'inégalité ci-dessus se majore par

$$\text{Sup} |\Phi|^2 \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \left[\frac{2R}{2^{\ell}\epsilon} + \frac{\pi^2}{2} \right]$$

(compte tenu de ce que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{2}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{2}$). Il apparaît ainsi que

$$\sum_{|j| \leq 2^{\ell-1}} |C_j|^2 |\Phi(\epsilon j)|^2 \gg \sum_{|j| > 2^{\ell-1}} |C_j|^2 |\Phi(\epsilon j)|^2$$

pourvu que l'on ait :

$$2^{\ell} \ll \frac{1}{\epsilon} \ll \ell \cdot 2^{\ell}$$

Or ℓ peut être choisi, puisque les raisonnements précédents exigeaient seulement que $2^{\ell} \ll \frac{1}{\epsilon}$; il suffit donc de prendre ℓ tel que $2^{\ell} \sqrt{\ell} \sim \frac{1}{\epsilon}$. En outre, on voit facilement que

$$\sum_{|j| \leq 2^{\ell-1}} |c_j|^2 |\hat{\Phi}(\epsilon j)|^2 \approx |\hat{\Phi}(0)|^2 \sum_{|j| \leq 2^{\ell-1}} |c_j|^2$$

Tout cela amène finalement à ceci :

$$\frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j|^2 |\hat{\Phi}(\epsilon j)|^2 \psi(\epsilon j)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j|^2 |\hat{\Phi}(\epsilon j)|^2} \approx \frac{(\sum_{|j| \leq 2^{\ell-1}} |c_j|^2) |\hat{\Phi}(0)|^2 \psi(0)}{(\sum_{|j| \leq 2^{\ell-1}} |c_j|^2) |\hat{\Phi}(0)|^2} = \psi(0)$$

d'où la mesure spectrale :

$$\langle \mu, \chi \otimes \psi \rangle = \frac{1}{\|a\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) |a(x)|^2 dx \cdot \psi(0)$$

et le spectre :

$$\text{Sp}(T) = \text{Supp}(a) \times \{0\}$$

qui sont identiques à ceux d'une simple fonction de carré intégrable, alors que la distribution $T = aW$ n'est même pas une mesure (c'est une distribution d'ordre 1). Le front d'onde de T est $\text{Supp}(a) \times \mathbb{R}$, qui est à nouveau très différent du spectre dynamique. L'exemple de la distribution W montre avec encore plus de profondeur que les autres, tout ce qui sépare les deux notions, pourtant apparentées, de front d'onde et de spectre dynamique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. ARNOL'D Méthodes mathématiques de la mécanique classique (Editions Mir, Moscou, 1976)
- [2] David BOHM Quantum Theory (Prentice-Hall, Inc. New-York, 1951).
- [3] L. de BROGLIE La réinterprétation de la mécanique ondulatoire tome 1 Principes généraux (Gautier-Villars, Paris, 1971).
- [4] P.A.M. DIRAC Les principes de la mécanique quantique (traduit de l'anglais) (Presses universitaires de France, Paris, 1931).
- [5] J.J. DUISTERMAAT Fourier Integral Operators (Courant Institute, Lecture Notes, New-York 1972).
- [6] J. HADAMARD Le problème de Cauchy et les Equations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques (traduction française Hermann, Paris, 1932).
- [7] J. HADAMARD Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique (Hermann, Paris, 1903).
- [8] J. HARTHONG Le passage de la mécanique classique à la mécanique ondulatoire dans ce volume.
- [9] J. HARTHONG Etude macrocausale de la diffusion Séminaire d'analyse harmonique, Univ. de Tunis, 1978). Dans ce volume.
- [10] L. HÖRMANDER, J.J. DUISTERMAAT Fourier Integral Operators I et II Acta Mathematica 127 (1971) pp 79-269).
- [11] L.D. LANDAU, E.M. LIFCHITZ Théorie du champ (Ed. Mir, Moscou, 1966).
- [12] L.D. LANDAU, E.M. LIFCHITZ Mécanique quantique, théorie non relativiste (1966).

- [13] J. LERAY Analyse Lagrangienne (R.C.P. 25, I.R.M.A., Strasbourg, 1978).
- [14] J. LERAY Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles (une adaptation du traité de V.P. Maslov) (Convegno internazionale : metodi valutativa nella fisica matematica, accad. naz. dei Lincei. Rome, 1972).
- [15] V.P. MASLOV Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques (traduit du russe : DUNOD, Paris, 1972).
- [16] A. MESSIAH Mécanique quantique tomes 1 et 2 (DUNOD, Paris, 1969).
- [17] A. ROBINSON Non-Standard Analysis (North Holland, Amsterdam, 1974).
- [18] J.M. BONY Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976/77, Exposé n°3
- [19] J. BROS, D. IAGOLNITZER Annales Institut Henri Poincaré 18 (1973) p. 147
- [20] D. IAGOLNITZER The S-matrix (North Holland, 1978)
- [21] L. SCHWARTZ Théorie des distributions (Nlle édition, Hermann, Paris, 1966)
- [22] K. YOSHIDA Functional Analysis (Springer-Verlag, Berlin, 1968)
- [23] Van der WAERDEN Ein Einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion Math. Zeitschrift, vol. 32 (1930) pp 474-475.

J.HARTHONG

24 rue de l'Université
67000 Strasbourg