Astérisque

JACQUES HARTHONG

La méthode de la phase stationnaire

Astérisque, tome 111 (1984), p. 3-26
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__111__3_0>

INTRODUCTION

La raison d'être de cet article provient d'un travail antérieur [3] où, en étudiant certaines intégrales oscillantes, nous nous étions heurtés à l'insuffisance, dans certaines situations quelque peu singulières, des résultats classiques (tels qu'on peut les trouver chez Van der Corput, Erdélyi, etc.) relatifs à la phase stationnaire. Nous avons été contraints de démontrer quelques lemmes techniques spécialement pour nos besoins (voir [3] chap. IV § 2 et chap. VI § 5). Après un certain temps de maturation, il nous a semblé utile de développer ces lemmes, de les généraliser, et d'en faire une rédaction séparée. La méthode employée a été inspirée par la démonstration ingénieuse, donnée par L. Hörmander, des résultats de Van der Corput. En effet, là où Van der Corput et les autres auteurs classiques emploient des intégrations par parties successives, fort peu maniables, Hörmander a su utiliser élégamment les propriétés de la transformation de Fourier des distributions. Or, en introduisant dans la méthode de Hörmander quelques astuces de calcul supplémentaires, il est possible sans développements inextricables, mais au contraire d'une manière simple, d'étudier avec une précision nouvelle les majorations du reste du développement asymptotique. C'est ce que nous avons commencé dans [3]et que nous poursuivons ici.

Quatre ans plus tard, il nous est apparu que notre méthode permettait aussi de donner une interprétation intuitive et géométrique de la phase stationnaire, qui repose sur l'analyse non-standard. Nous avons alors ajouté le chapitre 3 aux deux premiers qui n'avaient jamais été publiés.

LA METHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE

1. LA PHASE STATIONNAIRE EN UNE SEULE VARIABLE

Nous allons commencer par examiner une intégrale de la forme suivante :

$$I(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta x^2} f(x)dx \quad \text{avec} \quad \beta > 0 .$$

La transformée de Fourier de $e^{i\beta x^2}$, considérée comme une distribution tempérée, est :

$$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i\frac{\xi^2}{4\beta}} .$$

Si nous désignons par $\tilde{f}(\xi)$ la transformée de Fourier inverse de f, nous avons l'identité :

$$I(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\xi^2}{4\beta}} \tilde{f}(\xi)d\xi .$$

Or, la formule de Maclaurin appliquée à l'exponentielle nous donne :

$$e^{-i\frac{\xi^2}{4\beta}} = 1 - i\frac{\xi^2}{4\beta} + \dots + \frac{1}{n!}\left(-i\frac{\xi^2}{4\beta}\right)^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\left(-i\frac{\xi^2}{4\beta}\right)^{n+1} e^{-i\frac{\xi^2}{4\beta}t}\, dt .$$

Par conséquent, si nous posons :

$$\chi_\beta^n(\xi) = \frac{e^{-i\frac{\xi^2}{4\beta}} - 1 + i\frac{\xi^2}{4\beta} \dots - \frac{1}{n!}\left(-i\frac{\xi^2}{4\beta}\right)^n}{\frac{1}{(n+1)!}\left(-i\frac{\xi^2}{4\beta}\right)^{n+1}} = (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^{-i\frac{\xi^2}{4\beta}t}\, dt$$

nous pouvons écrire

$$I(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\Big[f(0) + \frac{i}{4\beta}f''(0) \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{4\beta}\right)^n f^{(2n)}(0) +$$

$$+ \frac{\left(+\frac{i}{4\beta}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_\beta^n(\xi).(-\xi^2)^{n+1}\tilde{f}(\xi)d\xi\Big]$$

puisque $\int_{-\infty}^{+\infty}(-\xi^2)^k\,\tilde{f}(\xi)d\xi = f^{(2k)}(0)$.

On remarquera que, pour tout $n \geq 0$, la fonction $\chi_\beta^n(\xi)$ est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$; en effet, elle est continue au point 0 et décroît en $\xi^{-2(n+1)}$ lorsque $\xi \to \pm\infty$. Sa transformée de Fourier inverse, $\tilde{\chi}_\beta^n(x)$, est donc une fonction continue, nulle à l'infini, et nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\beta^n(\xi).(-\xi^2)^{n+1} \tilde{f}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_\beta^n(x)\, f^{(2n+2)}(x)\, dx .$$

Ainsi, le reste de notre développement asymptotique s'exprime à partir de la dérivée d'ordre $2n+2$ de f et de la fonction $\tilde{\chi}_\beta^n(x)$. En utilisant la formule de la moyenne, nous pouvons le majorer par

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_\beta^n(x) f^{(2n+2)}(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\chi}_\beta^n(x)|dx . \operatorname{Sup}|f^{(2n+2)}| .$$

Il est facile de vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\chi}_\beta^n(x)|dx$ ne dépend pas de β ; en effet, nous avons :

$$\chi_\beta^n(\xi) = \chi_1^n\left(\frac{\xi}{\sqrt{\beta}}\right)$$

d'où

$$\tilde{\chi}_\beta^n(x) = \sqrt{\beta}\, \tilde{\chi}_1^n(x\sqrt{\beta})$$

et donc, par le changement de variable $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{\beta}}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\chi}_\beta^n(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\chi}_1^n(x)|dx .$$

La fonction $\tilde{\chi}_1^n(x)$ est donc la clé de notre problème. Pour en donner une expression utilisable, partons de

$$\chi_1^n(\xi) = (n+1)\int_0^1 (1-t)^n\, e^{-i\frac{\xi^2}{4}t}\, dt .$$

Sa transformée de Fourier inverse est alors

$$\tilde{\chi}_1^n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\, \chi_1^n(\xi)d\xi .$$

Nous voudrions inverser l'ordre d'intégration. Pour cela, considérons la famille de fonctions

$$\Phi_z(\xi) = (n+1)\int_0^1 (1-t)^n\, e^{-zt\xi^2} dt \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z > 0 \text{ .}$$

Ces fonctions sont aussi les densités d'une famille Φ_z de distributions tempérées. Le théorème de Lebesgue montre que, lorsque $z \to \frac{i}{4\beta}$ en gardant sa partie réelle > 0, la distribution Φ_z tend dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers la distribution de densité $\chi_\beta^n(\xi)$. Par la continuité de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'$, nous en déduisons que $\tilde{\Phi}_z$ tend dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers $\tilde{\chi}_\beta^n$. Or, pour tout z tel que $\operatorname{Re} z > 0$, nous pouvons inverser l'ordre d'intégration :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}.(n+1)\int_0^1 (1-t)^n\, e^{-z\xi^2 t}\, dt\, d\xi =$$

$$= (n+1)\int_0^1 (1-t)^n \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\, e^{-z\xi^2 t}\, d\xi\right] dt$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{4\pi z}}\int_0^1 (1-t)^n\, t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{4zt}}\, dt \text{ .}$$

Appliquant à nouveau un théorème de convergence, nous voyons que cette dernière intégrale tend, lorsque z tend vers $\frac{i}{4\beta}$, vers

$$(n+1)\sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\int_0^1 (1-t)^n\, t^{-\frac{1}{2}}\, e^{i\beta\frac{x^2}{t}}\, dt$$

qui est une fonction continue de x. Cette fonction et $\tilde{\chi}_\beta^n$ sont les densités de la même distribution, et par conséquent, puisqu'elles sont continues, elles coïncident. Autrement dit :

$$\tilde{\chi}_\beta^n(x) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}(n+1)\int_0^1 (1-t)^n\, t^{-\frac{1}{2}}\, e^{i\beta\frac{x^2}{t}}\, dt \text{ .}$$

En définitive, nous avons la formule

$$I(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \left[f(0) + \frac{i}{4\beta} f''(0) \ldots + \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{4\beta}\right)^n f^{(2n)}(0) \right]$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{4\beta}\right)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^1 (1-t)^n t^{-\frac{1}{2}} e^{i\beta\frac{x^2}{t}} dt \right] f^{(2n+2)}(x) dx$$

que nous pouvons considérer comme un analogue de la formule de Taylor avec reste intégral.

Le problème est maintenant de majorer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 (1-t)^n t^{-\frac{1}{2}} e^{i\beta\frac{x^2}{t}} dt \right| dx \, .$$

Pour cela, commençons par observer que

$$\left| \int_0^1 (1-t)^n t^{-\frac{1}{2}} e^{i\beta\frac{x^2}{t}} dt \right| \leq \int_0^1 (1-t)^n t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \, .$$

Puis, une intégration par partie nous donne

$$\int_0^1 (1-t)^n t^{-\frac{1}{2}} e^{i\beta\frac{x^2}{t}} dt = \frac{i}{\beta x^2} \int_0^1 (1-t)^n t^{\frac{3}{2}} \left(- \frac{i\beta x^2}{t^2} e^{i\beta\frac{x^2}{t}} \right) dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{i}{\beta x^2} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1} t^{\frac{1}{2}} [(n+\tfrac{3}{2})\, t - \tfrac{3}{2}]\, e^{i\beta\frac{x^2}{t}} dt & \text{si} \quad n \geq 1 \\[2ex] \dfrac{i}{\beta x^2} \left[e^{i\beta x^2} - \displaystyle\int_0^1 \tfrac{3}{2}\, t^{\frac{1}{2}} e^{i\beta\frac{x^2}{t}} dt \right] = \text{si} \quad n = 0 \, . \end{cases}$$

Or nous pouvons écrire l'inégalité

$$\left| (n+\tfrac{3}{2}) t - \tfrac{3}{2} \right| \leq (n - \tfrac{3}{2})\, t + \tfrac{3}{2} \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1$$

donc, si $n \geq 1$:

$$\left| \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^{\frac{1}{2}} [(n+\tfrac{3}{2}) t - \tfrac{3}{2}] e^{i\beta\frac{x^2}{t}} dt \right| \leq n \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^{\frac{3}{2}} dt + \frac{3}{2} \int_0^1 (1-t)^n t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= n \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(n+\frac{5}{2})} + \frac{3}{2} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+\frac{5}{2})} = \frac{2\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(n+\frac{5}{2})}$$

et si $n = 0$

$$\left| e^{i\beta x^2} - \int_0^1 \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} e^{i\beta \frac{x^2}{t}} dt \right| \leq 1 + \int_0^1 \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} dt = 2$$

ce qui montre que

$$\left| \int_0^1 (1-t)^n t^{-\frac{1}{2}} e^{i\beta \frac{x^2}{t}} dt \right| \leq \frac{1}{\beta x^2} \frac{2\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(n+\frac{5}{2})} \qquad \forall\ n \geq 0$$

mais aussi, d'après ce qui précède

$$\leq \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \qquad \forall\ n \geq 0$$

et par conséquent

$$\left| \int_0^1 (1-t)^n\, t^{-\frac{1}{2}} e^{i\beta \frac{x^2}{t}} dt \right| \leq \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left[1 \wedge \frac{3}{2n+3} \cdot \frac{1}{\beta x^2} \right]$$

où $f \wedge g = \min(f,g)$. Il ne reste plus qu'à intégrer cette expression :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 (1-t)^n\, t^{-\frac{1}{2}} e^{i\beta \frac{x^2}{t}} dt \right| dx \leq \frac{2\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{3}{(2n+3)\beta}}} dx + \int_{\sqrt{\frac{3}{(2n+3)\beta}}}^{\infty} \frac{3dx}{(2n+3)\beta x^2} \right]$$

$$= \frac{2\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left[\sqrt{\frac{3}{(2n+3)\beta}} + \sqrt{\frac{3}{(2n+3)\beta}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{4\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \sqrt{\frac{3}{2n+3}}$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\chi}_\beta^n(x)| dx \leq \frac{4\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \sqrt{\frac{3}{2n+3}} \ .$$

On vérifiera sans peine que le membre de droite de cette inégalité a pour limite, lorsque n tend vers l'infini, $4\sqrt{\frac{3}{2}}$; et aussi que la suite

$$\frac{4\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{3}{2n+1}} \qquad \left(\geq \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\chi}_{\beta}^{n-1}(x)|dx\right)$$

est croissante, et donc toujours inférieure à sa limite $4\sqrt{\frac{3}{2}}$. Pour simplifier, notons que $4\sqrt{\frac{3}{2}} < 5$, ce qui nous donne :

$$\forall\ \beta>0 \quad \forall\ n\geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\chi}_{\beta}^{n}(x)|dx \leq 5 .$$

Nous pouvons donc énoncer

THÉORÈME 1. <u>Soit</u> f <u>une fonction qui, considérée comme distribution, appartient à</u> $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, <u>l'espace de Schwartz des distributions tempérées, et supposons que sa dérivée à l'ordre</u> $2n$ <u>(au sens des distributions) est une fonction localement intégrable et bornée. Alors</u>

$$\forall\ \beta>0 \qquad \forall\ n\geq 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta x^2} f(x)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\left[f(0) + \frac{i}{4\beta}f''(0) + \dots + \frac{(\frac{i}{4\beta})^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(2n-2)}(0) + \frac{R_n(\beta,f)}{(4\beta)^n n!}\right]$$

<u>avec</u> $|R_n(\beta,f)| \leq 5\|f^{(2n)}\|_\infty$ <u>(où</u> $\|f^{(2n)}\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(2n)}(x)|$) .

<u>De même, pour</u> $\beta>0$ <u>et</u> $n\geq 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\beta x^2} f(x)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\left[f(0) - \frac{i}{4\beta}\, f''(0) + \dots + \frac{(-\frac{i}{4\beta})^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(2n-2)}(0) + \frac{R_n(\beta,f)}{(4\beta)^n n!}\right]$$

<u>avec également</u> $|R_n(\beta,f)| \leq 5\|f^{(2n)}\|_\infty$.

N.B. Rappelons que, à cause du facteur oscillant $e^{i\beta x^2}$, qui oscille de plus en plus vite lorsque $|x|$ augmente, l'intégrale a un sens, dans les conditions du théorème, même si $f \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, à condition d'être suffisamment dérivable ; la formule donnée par ce théorème permet d'ailleurs, justement, de préciser cette condition.

2. LA PHASE STATIONNAIRE AVEC PLUSIEURS VARIABLES

Ce qui rendait possible le résultat du paragraphe précédent, c'était l'intégrabilité de la fonction $\tilde{\chi}^n$ sur $\mathbb{R}$. On ne peut pas reproduire avec plusieurs variables les mêmes opérations en posant

$$\chi^n_{\beta_1,\dots\beta_k}(\xi_1,\dots,\xi_k) = \frac{e^{-i\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\xi_j^2}{4\beta_j}\right)} - 1 \dots - \frac{1}{(n-1)!}\left[-i\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\xi_j^2}{4\beta_j}\right]^{n-1}}{\frac{1}{n!}\left[-i\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\xi_j^2}{4\beta_j}\right]^n}$$

$$= n\int_0^1 (1-t)^{n-1}\, e^{-i\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\xi_j^2}{4\beta_j}\right)t}\, dt$$

car comme on peut facilement s'en convaincre, la transformée de Fourier $\tilde{\chi}^n$ n'est pas dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^k)$, sauf évidemment quand $k = 1$. D'ailleurs il n'est pas possible d'obtenir une expression intégrale pour $\tilde{\chi}^n(x)$ en inversant l'ordre des deux intégrations comme au chapitre 1 : les conditions du théorème de Fubini ne sont plus réalisées. Il va donc falloir procéder autrement.

Supposons que nous ayons à étudier une intégrale oscillante telle que

$$I(\beta_1,\dots,\beta_k;\lambda) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\lambda\sum\limits_{j=1}^{k}\beta_j x_j^2} f(x)dx$$

où les β_j sont des réels non nuls. Nous voulons en connaître le comportement lorsque $\lambda \to \infty$. Comme au chapitre précédent nous pouvons écrire que

$$I(\beta_1,\dots,\beta_k;\lambda) = \int_{R^k} \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{e^{i\sigma\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\beta_1\cdot\beta_2\cdots\beta_k|}}\, e^{-\frac{i}{4\lambda}\sum_{j=1}^{k}\frac{\xi_j^2}{\beta_j}}\, \widetilde{f}(\xi)d\xi \,.$$

où σ est le nombre des $\beta_j > 0$ diminué du nombre des $\beta_j < 0$.

Pour alléger l'écriture, commençons par poser :

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j^2$$

$$\hat{Q}(\xi) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\xi_j^2}{4\beta_j}$$

$$X_j = -\frac{i}{4\lambda}\frac{\xi_j^2}{\beta_j} \,.$$

Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, écrire

$$e^{-\frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi)} = 1 - \frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi) \dots + \frac{[-\frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi)]^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{[-\frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi)]^{n}}{n!}\, \chi^n(\xi)$$

avec $\chi^n(\xi) = n\int_0^1 (1-t)^{n-1}\, e^{-\frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi)t}\, dt$ nous mènerait dans une impasse. C'est pourquoi nous partirons plutôt de

$$e^{-\frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi)} = \prod_{j=1}^{k} e^{X_j}$$

et pour chaque j nous écrirons :

$$e^{X_j} = 1 + X_j + \dots \frac{X_j^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{X_j^n}{n!}\, \chi^n_{\lambda\beta_j}(\xi_j)$$

où $\chi^n_{\lambda\beta_j}(\xi_j)$ est la même fonction d'une seule variable qu'au chapitre 1 : $\chi^n_{\lambda\beta_j}(\xi_j) = n\int_0^1 (1-t)^{n-1}\, e^{X_j t}\, dt$. Puis, nous effectuerons le produit de ces développements de Taylor :

$$e^{-\frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi)} = \prod_{j=1}^{k}\left[1 + X_j + \dots \frac{X_j^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{X_j^n}{n!}\, \chi^n_{\lambda\beta_j}(\xi_j)\right]$$

$$= 1 - \frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi) \dots + \frac{[-\frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi)]^{n-1}}{(n-1)!} + Z_n(\lambda;\beta_1,\dots\beta_k;\xi)$$

où le reste $Z_n(\lambda;\beta;\xi)$ est une somme de monômes en $X_1,\dots X_k$, $\chi^n_{\lambda\beta_1}(\xi_1),\dots\chi^n_{\lambda\beta_k}(\xi_k)$ dont tous ont un degré total en $(X_1,\dots X_k)$ supérieur ou égal à n. Les coefficients de ces monômes ne dépendent que de n, la dépendance en λ, β, et ξ n'ayant lieu que par l'intermédiaire des X_j et des $\chi^n_{\lambda\beta_j}(\xi_j)$.

Nous aboutissons ainsi à une formule tout à fait analogue à celle, correspondante, du chapitre 1 (c'était la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à l'exponentielle) mais avec un reste beaucoup plus compliqué, pouvant impliquer des puissances de $(X_1,\dots X_k)$ d'ordre bien plus élevé que n : jusqu'à l'ordre kn inclus, pour être précis. Nous pouvons donc, dès maintenant, nous attendre à ce que, dans le développement asymptotique de $I(\beta_1,\dots\beta_k;\lambda)$, la majoration du reste puisse compromettre non plus seulement les dérivées de f d'ordre $2n$, mais des dérivées de tous ordres compris entre $2n$ et $2kn$.

Comme au chapitre 1, nous pouvons développer :

$$I(\beta_1,\dots\beta_k;\lambda) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{e^{i\sigma\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\beta_1\dots\beta_k|}} \int e^{-\frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi)}\tilde{f}(\xi)d\xi =$$

$$= \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{e^{i\sigma\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\beta_1\dots\beta_k|}} \int\left[1 - \frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi)+\dots+\frac{(-\frac{i}{\lambda}\hat{Q}(\xi))^{n-1}}{(n-1)!} + Z_n(\lambda,\beta,\xi)\right]\tilde{f}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{e^{i\sigma\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\beta_1\dots\beta_k|}} \left[f(0) + \frac{i}{\lambda}D_\beta f(0)+\dots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{i}{\lambda}D_\beta\right)^{n-1}f(0) + \int Z_n(\lambda,\beta,\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi\right].$$

Nous avons ainsi écrit le développement asymptotique de $I(\beta,\lambda)$: $D_\beta f = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\beta_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ est bien la transformée de Fourier de $-\hat{Q}.\tilde{f}$ et les $n-1$ premiers termes de ce développement sont bien connus. Tout le problème est maintenant de majorer le reste de ce développement, c'est-à-dire

$$\int Z_n(\lambda,\beta,\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi \ .$$

Sachant que $R_n(\lambda,\beta,\xi)$ est une somme de monômes de la forme

$$C_{n;\alpha_1,\dots,\alpha_k;j_1,\dots,j_r} \cdot X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k} \chi^n_{\lambda\beta_{j_1}}(\xi_{j_1}) \dots \chi^n_{\lambda\beta_{j_r}}(\xi_{j_r})$$

nous avons donc à majorer chacune des intégrales

$$W^{\lambda,\beta_1,\dots,\beta_k}_{n;\alpha_1,\dots,\alpha_k;j_1,\dots,j_r}(f) = \int \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_k^{2\alpha_k} \chi^n_{\lambda\beta_{j_1}}(\xi_{j_1}) \dots \chi^n_{\lambda\beta_{j_r}}(\xi_{j_r})\tilde{f}(\xi)d\xi$$

car nous avons globalement :

$$\int Z_n(\lambda,\beta,\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,a_k)\\ j=(j_1,\dots,j_r)}} C_{n,\alpha,j} \frac{W^{\lambda,\beta}_{n;\alpha;j}(f)}{\beta_1^{\alpha_1} \cdot \beta_2^{\alpha_2} \dots \beta_k^{\alpha_k}} \cdot \left(-\frac{i}{4\lambda}\right)^{|\alpha|} \ .$$

Comme avec une seule variable, nous voyons que l'on peut majorer les $W^{\lambda,\beta}_{n;\alpha,j}(f)$ uniformément en β, de sorte que le reste du développement de $I(\beta,\lambda)$ pourra être majoré par une fonction relativement simple de $\beta_1,\dots,\beta_k$; en effet, d'après une propriété déjà utilisée de la transformation de Fourier :

$$\int_{R^k} \xi^{2\alpha_1} \dots \xi_k^{2\alpha_k} \chi_{\lambda\beta_{j_1}}(\xi_{j_1}) \dots \chi_{\lambda\beta_{j_r}}(\xi_{j_r})\tilde{f}(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{R^r} Df(x)\tilde{\chi}_{\lambda\beta_{j_1}}(x_{j_1}) \dots \tilde{\chi}_{\lambda\beta_{j_r}}(x_{j_r})dx_{j_1} \dots dx_{j_r}$$

où $Df(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{j_1}^2}\right)^{\alpha_{j_1}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{j_2}^2}\right)^{\alpha_{j_2}} \cdots \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{j_r}}\right)^{\alpha_{j_r}} f(\hat{x})$, et $\hat{x}$ désignant l'élément de $\mathbb{R}^k$ dont les composantes d'ordre $j_1, j_2, \ldots, j_r$ sont identiques à celles de x , mais dont les autres composantes sont nulles. Le théorème de la moyenne nous donne alors :

$$|W_{n;\alpha_1,\ldots,\alpha_k;j_1,\ldots,j_r}^{\lambda;\beta_1,\ldots,\beta_k}(f)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^k} |Df(x)| . \int_{\mathbb{R}^r} \left|\tilde{\chi}_{\lambda\beta_{j_1}}(x_{j_1}) \ldots \tilde{\chi}_{\lambda\beta_{j_r}}(x_{j_r})\right| dx_{j_1} \ldots dx_{j_r} .$$

Or, au chapitre 1 nous avions montré que chacune des intégrales $\int \left|\tilde{\chi}_{\lambda\beta_{j_1}}(x_{j_1})\right| dx_{j_1}$ etc. était ≤ 5 ; d'autre part il est immédiat que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^k} |Df(x)| \leq \sup_{2n \leq |\alpha| \leq 2kn} \sup_{x\in\mathbb{R}^k} \left|\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x)\right| = M_n(f) .$$

De sorte que, finalement :

$$\left|W_{n;\alpha_1,\ldots,\alpha_k;j_1,\ldots,j_r}^{\lambda;\beta_1,\ldots,\beta_k}(f)\right| \leq 5^r \, M_n(f) .$$

Mais si on pose

$$\sum_{r=0}^{k} 5^r \sum_{\substack{\{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_k\}\\ \{j_1,\ldots,j_r\}}} C_{n;\alpha_1,\ldots,\alpha_k;j_1,\ldots,j_r} = C_n$$

(la sommation portant sur la totalité des constantes $C_{n;\alpha;j}$) , la constante globale C_n ne dépend plus que de n et on a alors l'inégalité (pour $\lambda \geq 1$) :

$$\left|\int Z_n(\lambda,\beta,\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi\right| \leq \frac{C_n}{(4\lambda)^n} \cdot M_n(f) . \sup_{n \leq |\alpha| \leq kn} \left|\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}\ldots\beta_k^{\alpha_k}}\right| .$$

Il ne reste plus qu'à résumer les résultats obtenus en dégageant bien les hypothèses :

THÉORÈME 2. Soit l'intégrale

$$I(\lambda;\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\lambda \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j^2} f(x)dx$$

où f est une fonction qui, considérée comme distribution, appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ des distributions tempérées. Supposons que ses dérivées (au sens des distributions) d'ordres compris entre $2n$ et $2kn$ sont toutes des fonctions localement intégrables bornées et soit, pour tout entier $n \geq 1$:

$$M_n(f) = \sup_{2n \leq |\alpha| \leq 2kn} \sup_{x\in\mathbb{R}^k} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) \right| .$$

Alors il existe une constante C_n ne dépendant que de n (c'est-à-dire indépendante des β_j, de λ, ainsi que de la fonction f) telle que, dans le développement asymptotique

$$I(\lambda;\beta) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{e^{i\sigma\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\beta_1\beta_2\dots\beta_k|}} \left[f(0) + \frac{i}{\lambda} D_\beta f(0) + \dots + \frac{\left(\frac{i}{\lambda} D_\beta\right)^{n-1} f(0)}{(n-1)!} + R_n(\lambda;\beta)\right]$$

où $D_\beta = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\beta_j}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, on ait pour le reste la majoration :

$$|R_n(\lambda;\beta_1,\dots,\beta_k)| \leq \frac{C_n}{(4\lambda)^n} \cdot M_n(f) \cdot \sup_{n\leq|\alpha|\leq kn} \frac{1}{|\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}\dots\beta_k^{\alpha_k}|}$$

pour tout $\lambda \geq 1$.

L'avantage de la majoration obtenue par cette méthode est de séparer nettement ce qui provient exclusivement de la fonction f (la semi-norme $M_n(f)$) et ce qui provient exclusivement de la phase $(\sup|\beta|^{-\alpha})$. L'utilité pratique de cet avantage se voit dans les applications, comme par exemple celles qui sont à l'origine de la présente étude (voir [3], chap. IV, § 4 et chap. VI, § 5-6).

Nous n'avons fait ici que développer et généraliser les lemmes techniques qui avaient été démontrés dans [3]. En général, l'utilité du théorème 2 (ou du théorème 1 avec une seule variable) se fera sentir dans les cas où les coefficients β_j dépendent d'un paramètre ; il se peut alors que l'on ait besoin de savoir si le reste R_n du développement asymptotique est négligeable "uniformément par rapport au paramètre". Il peut également arriver que l'on souhaite intégrer terme par terme le développement asymptotique par rapport au paramètre ; or, pour que cela soit possible, il faut évidemment que l'intégrale du reste soit négligeable ; notre inégalité montre que, pour qu'il en soit ainsi, il suffit que l'intégrale de la fonction

$$\sup_{n \leq |\alpha| \leq kn} \frac{1}{|\beta_1^{\alpha_1} \ldots \beta_k^{\alpha_k}|}$$

soit finie. On remarquera que cela peut arriver même si, dans le domaine d'intégration, un (ou plusieurs) des β_j peut s'annuler : il suffit qu'il s'annule assez lentement pour que $|\beta_j|^{-\alpha_j}$ soit intégrable. Le théorème 2 nous permet alors d'intégrer terme par terme le développement asymptotique même si celui-ci n'existe pas, ou est inconnu, pour un nombre fini de valeurs du paramètre dans le domaine d'intégration. Autrement dit : même si les points critiques de la phase peuvent dégénérer de la pire façon, pourvu que soit vérifiée la condition d'intégrabilité que la méthode suivie a permis de dégager.

Bien entendu, dans beaucoup de problèmes on rencontrera des intégrales oscillantes avec une phase qui ne sera pas donnée d'emblée sous la forme $\Sigma\, \beta_j x_j^2$, mais qui pourra être une fonction différentiable quelconque (nous envisagerons ce cas au chapitre suivant ; voir aussi les exemples de [3]). Il appartiendra alors au praticien d'effectuer d'abord des changements de variable au voisinage des points critiques de la phase ; si ceux-ci sont non dégénérés (du type de Morse), il pourra se ramener aux cas envisagés par les théorèmes précédents. On remarquera que pour tout problème où l'on n'a pas à s'intéresser en détail au comportement du reste, la méthode que nous proposons ici n'apporte rien de plus que les travaux classiques ([1],[2], et [4]).

3. LA PHASE STATIONNAIRE ET L'ANALYSE NON-STANDARD

Toutes les idées exposées dans ce chapitre peuvent se développer pleinement avec une seule variable, bien qu'elles s'appliquent également avec plusieurs variables. Aussi pouvons-nous nous contenter de les expliquer en dimension 1, où les choses sont beaucoup plus simples et où par conséquent l'essentiel sera mieux dégagé de l'accessoire.

Au chapitre 1 nous nous étions intéressés à une intégrale oscillante de la forme $\int e^{i\beta x^2} f(x)\,dx$ lorsque β tend vers l'infini. En appliquant le théorème 1, avec $n = 1$ pour commencer, on peut dire que

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sqrt{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta x^2} f(x)dx = \sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} f(0)$$

pourvu que f'' soit une fonction localement intégrable bornée. Cela équivaut à dire que pour tout β infiniment grand, on a sous les mêmes hypothèses :

$$\sqrt{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta x^2} f(x)dx \simeq \sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} f(0)$$

ou encore

$$St[\sqrt{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta x^2} f(x)dx] = \sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} f(0) \quad .$$

Mais ces relations ainsi déduites s'appliquent à des fonctions f qui sont standard : nous ne disons évidemment rien de plus qu'avec la notion usuelle de limite. Les choses deviennent intéressantes lorsque f n'est plus une fonction standard ; dans un tel cas, il n'y a plus aucune raison pour que $St[\sqrt{\beta} I(\beta)] = \sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} f(0)$; d'ailleurs $f(0)$ peut être infiniment grand. On peut alors se demander à quelles conditions sur f on aura la relation

$$\sqrt{\beta}\int e^{i\beta x^2} f(x)dx \simeq \sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} f(0)$$

même si $f(0)$ est infiniment grand. Or le théorème 1 permet de répondre à cette question : puisque le reste du développement asymptotique vérifie l'inégalité $|R_1(\beta,f)| \leq 5\|f''\|_\infty$, il suffit d'avoir la condition :

$$\|f''\| \ll \beta \text{ .}$$

En effet, on a alors :

$$\left|\sqrt{\beta}\, I(\beta) - \sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} f(0)\right| \ll \frac{5}{4}\,\frac{\|f''\|_\infty}{\beta} \ll 1 \text{ .}$$

Que signifie cette condition ? Dire que les valeurs de $f''(x)$ sont d'un ordre de grandeur toujours inférieur à celui de β équivaut à dire que la variation de la dérivée première f' sur tout intervalle de longueur finie (non infiniment grande) est infiniment petite à l'échelle de β. Une conséquence en est que, <u>vue à l'échelle de</u> β, la fonction f a pour ombre une fonction affine. Cela est d'ailleurs indépendant de l'ordre de grandeur de β : avec cette nouvelle manière de voir les choses, point n'est besoin de supposer β infiniment grand, il suffit qu'il soit infiniment grand par rapport à $\|f''\|_\infty$. Par exemple, si β est standard, il suffira que $\|f''\|_\infty$ soit infiniment petit.

Plus généralement, supposons que $f(0) = 0$, $f''(0) = 0$, ... $f^{(2n-2)}(0) = 0$, et $f^{(2n)}(0) \neq 0$. Alors nous pouvons dire que, si $\|f^{(2n+2)}\|_\infty \ll \beta$,

$$\beta^{n+\frac{1}{2}}\, I(\beta) \simeq \sqrt{\pi}\, e^{i(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}\, \frac{f^{(2n)}(0)}{4^n\, n!} \text{ .}$$

Voyons maintenant ce qu'on peut dire d'une intégrale oscillante dont la phase est une fonction différentiable standard, dont nous supposerons les points critiques non dégénérés :

$$J(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta\varphi(x)} F(x)dx .$$

Pour simplifier, nous supposerons que φ ne possède qu'un seul point critique, et que c'est 0 . Pour qu'une telle intégrale ait un sens quel que soit le comportement à l'infini de $\varphi(x)$, il faut supposer que F est intégrable, c'est-à-dire appartient à ${}^*\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$; car si par exemple $\varphi(x)$ tend vers une limite à l'infini, on ne pourra plus compter sur les oscillations de plus en plus rapides de $e^{i\beta\varphi(x)}$ pour "moyenniser" la divergence. En fait, pour la suite, il faudra que F ait pour support un compact standard.

Par hypothèse, $\varphi''(0) \neq 0$; donc 0 est pour φ un extremum ; puisqu'un maximum n'est rien d'autre qu'un minimum changé de signe, nous supposerons, pour fixer les idées, que φ a un minimum en 0 ; et enfin, on peut encore supposer sans rien perdre que $\varphi(0) = 0$. Conformément à un usage bien établi, nous allons nous ramener à une intégrale de la forme précédente en faisant le changement de variable défini de la façon suivante : posons $C(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$; d'après la formule de Taylor, $C(x)$ est indéfiniment différentiable au point $x = 0$, et donc sur tout $\mathbb{R}$. En outre $C(0) = \frac{1}{2}\varphi''(0) > 0$, et puisque $\varphi(x)>0$ $\forall\, x\neq 0$, on a aussi $C(x)>0$ $\forall\, x$. On pose alors :

$$u = x\sqrt{C(x)} .$$

Il est évident que $\frac{du}{dx}(0) = \sqrt{C(0)} > 0$; on peut vérifier que $\frac{du}{dx} > 0$ en tout point : en effet d'après nos hypothèses $\varphi'(x)>0$ si $x>0$ et $\varphi'(x)<0$ si $x<0$ donc $\frac{\varphi'(x)}{x} > 0$ $\forall\, x\neq 0$; or $\varphi'(x) = 2xC(x) + x^2C'(x)$, d'où $2C(x) + xC'(x) > 0$ $\forall\, x\neq 0$, et en fait $\forall\, x$ car pour $x = 0$ cela donne $2C(0)>0$ qui est bien vrai. Divisant par $2\sqrt{C(x)}$ qui est aussi >0 $\forall\, x$, on obtient $\sqrt{C(x)} + x\,\frac{C'(x)}{2\sqrt{C(x)}} > 0$, c'est-à-dire $\frac{du}{dx} > 0$. Cela prouve que $x \mapsto u$ est un changement de variable global, dont le jacobien $x'(u)$ est partout >0 . D'où :

$$J(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta u^2} F(x(u))x'(u)\, du .$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas précédent avec $f(u) = F(x(u))x'(u)$ et la fonction $x(u)$ est une fonction différentiable standard ; ses dérivées ont donc, sur le support de F, des bornes standard ; or $f''(u) = F''(x(u)x'(u)^3 + + 3F'(x(u))x'(u)x''(u) + F(x(u)x'''(u)$ et par conséquent, pour que $\|f''\|_\infty \ll \beta$, il suffit que $\|F\|_\infty$, $\|F'\|_\infty$, et $\|F''\|_\infty \ll \beta$. Nous pouvons donc énoncer :

THEOREME 3. Soit une intégrale oscillante

$$J(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta\varphi(x)}\, F(x)\, dx$$

où la phase φ est une fonction différentiable standard sur $\mathbb{R}$, dont le seul point critique est un minimum en 0, tel que $\varphi''(0) > 0$, et où F est une fonction interne, identiquement nulle en dehors d'un intervalle standard, et telle que F, F', F'' soient majorées sur tout ${}^*\mathbb{R}$ par des constantes $\ll \beta$.

Alors :

$$\sqrt{\beta}\, J(\beta) \simeq \sqrt{2\pi}\, e^{i[\frac{\pi}{4} + \beta\varphi(0)]} \cdot \frac{F(0)}{\sqrt{\varphi''(0)}} .$$

En effet, après tout ce que nous avons dit, il ne reste plus qu'à remarquer que $f(0) = F(0)/\sqrt{\frac{1}{2}\varphi''(0)}$. Pour étendre ce théorème au cas où φ possède de plusieurs points critiques (mais tous non dégénérés), on fera comme il est indiqué dans tous les travaux classiques : ces points critiques étant non dégénérés, ils sont isolés, donc en nombre fini (fini standard) dans le support de F, et on pourra les séparer en faisant une partitiion de l'unité. On se ramène ainsi très facilement au théorème 4.

Lorsque la fonction F est plate en 0, le résultat précédent sera modifié comme suit :

THEOREME 3 bis. Avec les mêmes hypothèses que précédemment sur φ, supposons toujours que F est interne, nulle en dehors d'un intervalle standard, mais que $F(0) = 0$, $F'(0) = 0, \ldots$ $F^{(2n-1)}(0) = 0$, et que toutes les dérivées de F jusqu'à l'ordre $2n+2$ inclus sont majorées, uniformément sur ${}^*\mathbb{R}$, par des constantes $\ll \beta$. Alors

$$\beta^{n+\frac{1}{2}} J(\beta) \simeq \sqrt{2\pi}\, e^{i(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} [2\varphi''(0)]^{-n-\frac{1}{2}} \frac{F^{(2n)}(0)}{n!} .$$

Démonstration. Nous avions déjà vu plus haut que si on pose $f(u) = F(x(u))x'(u)$, on doit avoir

$$\beta^{n+\frac{1}{2}} J(\beta) \simeq \sqrt{\pi}\, e^{i(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \frac{f^{(2n)}(0)}{4^n n!}$$

pourvu que $\|f^{(2n)}\|_\infty \ll \beta$. Or, si nous calculons les dérivées successives de $f(u)$ en fonction de celles de F et de x , nous trouvons :

$$f' = F'(x)x'^2 + F(x)x''$$

$$f'' = F''(x)x'^3 + 3F'(x)x'x'' + F(x)x'''$$

$$f''' = F'''(x)x'^4 + 4F''(x)x'^2x'' + \dots$$

$$\dots$$

$$f^{(2n+2)} = F^{(2n+2)}(x)x'^{2n+3} + (2n+3)F^{(2n+1)}(x)x'^{2n+2}x'' + \dots$$

On voit sur ces expressions que, du fait que $F^{(j)}(0) = 0$ si $0 \le j < 2n$, $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(2n-1)}(0) = 0$; en outre, $\sup_x |F^{(j)}(x)| \ll \beta$ et les dérivées de $x(u)$, qui sont standard, sont bornées sur le support de F par des constantes standard, donc toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre $2n$ inclus, en particulier $f^{(2n)}$, sont majorées uniformément sur ${}^*\mathbb{R}$ par des constantes $\ll \beta$. Enfin, on voit aussi sur les expressions ci-dessus que

$$f^{(2n)}(0) = F^{(2n)}(0)x'(0)^{2n+1} = F^{(2n)}(0) \left[\frac{2}{\varphi''(0)}\right]^{n+\frac{1}{2}}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Tous ces résultats doivent être tenus pour de simples exemples de situation possibles ; une gamme infinie de variantes de toutes sortes peut être développée. En voici quelques unes, que nous laissons comme exercices :

1. Supposons que $f(0), \frac{1}{\beta} f''(0), \dots \frac{1}{\beta^n} f^{(2n)}(0)$, prennent toutes des valeurs non infiniment grandes, mais que

$$\sup_x |f^{(2n+2)}(x)|$$

est infiniment petit. Alors :

$$\mathrm{St}[\sqrt{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta x^2} f(x)dx] =$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \mathrm{St}[f(0) + \frac{i}{4\beta} f''(0) \dots + (\frac{i}{4\beta})^n \frac{f^{(2n)}(0)}{n!}] .$$

2. Plus généralement, si la phase φ est comme dans les théorèmes 3 et 3bis, et pour β infiniment grand, on peut montrer que si F est une fonction interne vérifiant :

a) $\beta^{-\frac{j}{2}} F^{(j)}(0)$ n'est infiniment grand pour aucun j compris entre 0 et $2n$.

b) $\beta^{-n} . \sup_x | F^{(2n)}(x)|$ est infiniment petit. Alors on a l'égalité :

$$\mathrm{St}[\sqrt{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta\varphi(x)} F(x)dx] =$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \mathrm{St}\{ \sum_{j=o}^{n} [\frac{2}{\varphi''(0)}]^{j+\frac{1}{2}} . (\frac{i}{4\rho})^j \frac{F^{(2j)}(0)}{j!}\} .$$

La leçon générale que nous pouvons tirer de ces exemples est la suivante : lorsque β est infiniment grand, nous avons une exponentielle rapidement oscillante $e^{i\beta\varphi(x)}$ dont la moyenne sur une distance macroscopique est nulle ; cette exponentielle, dans une intégrale du type $J(\beta) = \int e^{i\beta\varphi(x)} F(x)\, dx$, est un <u>microscope</u> qui traduit les variations fines d'une fonction telle que $F(x)$ en une valeur macroscopique, $\mathrm{St}[\sqrt{\beta} J(\beta)]$, qui les caractérise.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ERDELYI A. — Asymptotic Expansions
(Dover Publications, Inc., New York 1956).

[2] FEDORIUK — The Stationary Phase Method and Pseudo-Differential Operators. Chapitre 2 : The Stationary Phase Method pp 69-83 Russian Math Surveys. 26,1 (1971).

[3] HARTHONG J. — Relations entre le spectre du laplacien et le problème du billard dans un domaine convexe du plan
(Thèse de 3e cycle IRMA, Strasbourg, 1976).

[4] Van der CORPUT, J.G. — Zur Methode der stationären Phase I.
Compositio Mathematica N° 1 (1934) pp 15-38 ;
II Comp. Math. N° 3 (1936) pp 328-372.