

# *Astérisque*

MICHEL GOZE

## **Étude locale des courbes algébriques planes**

*Astérisque*, tome 109-110 (1983), p. 245-259

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1983\\_\\_109-110\\_\\_245\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__109-110__245_0)

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE LOCALE DES COURBES ALGÈBRIQUES PLANES

Michel GOZE

L'objet de cet article est d'illustrer les affirmations suivantes

- a) à chaque point limité de  $\mathbb{C}^2$  est associée une suite standard de transformations quadratiques ;
- b) lorsque le point est situé sur une courbe algébrique standard, la suite détermine la branche passant par ce point avec sa multiplicité.

Il en résulte une procédure qui met en évidence toutes les branches de la courbe centrées en un point singulier.

Il est clair que l'on peut utiliser la même technique dans le cas des courbes algébriques réelles, et aussi celui des courbes analytiques.

Elle admet une extension naturelle en dimension quelconque, faisant intervenir une suite de transformations birationnelles de degré égal à la dimension, qui se décomposent chacune en transformations quadratiques mais de manière non naturelle.

Faut-il préciser, mais le lecteur l'aura sans doute deviné, que cette étude se place dans le cadre de l'A.N.S. (précisément sous la forme axiomatique I.S.T.).

I. Décomposition d'un point limité de  $\mathbb{C}^2$

I.1. Théorème

Soit M un point limité (\*) de  $\mathbb{C}^2$ , d'ombre  $M_0$ . Alors si  $M \neq M_0$ , il existe deux vecteurs standard  $V_1$  et  $V_2$  linéairement indépendants et des nombres complexes  $\epsilon_1 \sim 0$  et  $\epsilon_2 \sim 0$  tels que

$$M = M_0 + \epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 V_2$$

les objets dépendent fonctionnellement de M.

Plus précisément, si l'on a deux décompositions de M

$$M = M_0 + \epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 V_2 = M_0 + \epsilon'_1 V'_1 + \epsilon'_1 \epsilon'_2 V'_2$$

alors,

$$\begin{cases} \epsilon'_1 = a_1 \epsilon_1 + b_1 \epsilon_1 \epsilon_2 & \text{avec } a_1, b_1, a_2 \text{ standard} \\ \epsilon'_1 \epsilon'_2 = a_2 \epsilon_1 \epsilon_2 & \text{et } a_1 \cdot a_2 \neq 0 \end{cases}$$

---

(\*) limité signifie qu'aucune composante de M n'est infiniment grande.

et 
$$\begin{cases} v_1 = a_1 v'_1 \\ v_2 = a_2 v'_2 + b_1 v'_1 \end{cases}$$

Démonstration

Par hypothèse  $M - M_0 = (\eta_1, \eta_2)$  avec  $\eta_1 \sim \eta_2 \sim 0$ . Soit  $\epsilon_1$  le plus grand des deux nombres  $\eta_1, \eta_2$  en module (si  $|\eta_1| = |\eta_2|$  on peut choisir  $\epsilon_1 = \eta_1$  pour avoir une description fonctionnelle) ; alors  $\frac{1}{\epsilon_1} (M - M_0)$  a une ombre  $v_1 \neq 0$  dont l'une des composantes est 1 et  $\frac{1}{\epsilon_1} (M - M_0) - v_1$  est de la forme  $\epsilon_2 v_2$  où  $v_2$  a une composante nulle là où  $v_1$  a une composante égale à 1.

D'où  $M = M_0 + \epsilon_1 v_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 v_2$ .

I.2. Si on itère la procédure pour le point  $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbb{C}^2$  on obtient au bout d'un nombre standard d'opérations

$$M = M_0 + P_1(\epsilon, \epsilon') v_1 + P_2(\epsilon, \epsilon') v_2$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes standard et  $\epsilon \sim \epsilon' \sim 0$ .

I.3. Transformations quadratiques associées au point M

Soit  $M = (\eta_1, \eta_2) + M_0 = M_0 + \epsilon_1 v_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 v_2$  un point limité de  $\mathbb{C}^2$ . Nous pouvons distinguer plusieurs cas dans la transformation

$$(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (\epsilon_1, \epsilon_2).$$

I.3.1. Supposons  $\eta_2 \neq 0$  et  $\eta_1 / \eta_2 \sim 0$ . Alors

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \epsilon_1 \\ \eta_1 &= \epsilon_1 \epsilon_2 \end{aligned} \quad , \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

de sorte que  $(\eta_1, \eta_2)$  est l'image de  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  par la transformation

$$L_1(X, Y) = (XY, X) .$$

I.3.2. Supposons  $\eta_1 \neq 0$  et  $\frac{\eta_2}{\eta_1} \sim 0$  et non nul. La transformation

$$L_2(X, Y) = (X, XY)$$

vérifie  $L_2(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\eta_1, \eta_2)$ .

I.3.3. Supposons  $\eta_1 \neq 0$  et  $\frac{\eta_2}{\eta_1} \sim a$  standard non nul (et  $\frac{\eta_2}{\eta_1} \neq a$ ).

La transformation  $L_{3,a}(X, Y) = (X, X(a+Y))$  vérifie

$$L_{3,a}(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\eta_1, \eta_2) .$$

I.3.4. Si l'une des égalités  $\eta_2 = a\eta_1$ ,  $\eta_1 = a\eta_2$ ,  $a$  standard est satisfaite le point  $M$  admet une décomposition  $([ \mathbf{a} ])$

$$M = M_0 + \epsilon_1 V_1$$

et est situé sur la droite standard passant par  $M_0$  et de vecteur directeur  $V_1$ . (i.e. la droite  $MM_0$  est standard).

Remarque - Chacune des transformations  $L_1, L_2, L_3$  est birationnelle (ici quadratique). Si le point  $M$  est fixé, il lui correspond une seule de ces transformations (appelée transformation associée à  $M$ ).

Notons que les transformations  $L_1$  et  $L_2$  correspondent à des éclatements, la transformation  $L_{3,a}$  est la composée d'une translation et d'un éclatement.

#### I.4. Suite de transformations associées à $M$

A chaque point limité  $M$  d'ombre  $M_0$  est associée de manière fonctionnelle une suite standard  $L^i$  (via le théorème de construction point par point d'applications standard) de transformations du type  $L_1, L_2, L_3$  telles que pour chaque  $n$  standard

$$M = L^1 \circ L^2 \circ \dots \circ L^n(\epsilon, \epsilon') \text{ avec } \epsilon, \epsilon' \sim 0.$$

Notons que s'il existe un entier  $n$  standard tel que

$$M = L^1 \circ L^2 \circ \dots \circ L^{n-1}(\epsilon, \epsilon')$$

avec  $\epsilon/\epsilon'$  ou  $\epsilon'/\epsilon$  standard, le point  $M$  est situé sur la courbe standard d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + P_1(t) \\ y(t) = y_0 + P_2(t) \end{cases}$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes standard et réciproquement.

## II. Transformations d'une courbe algébrique associées à un point de cette courbe

II.1. Soit  $f(X,Y)$  un polynôme standard, nul en  $(0,0)$  et soit  $M \sim (0,0)$  un point situé sur la courbe  $(C)$  d'équation  $f(X,Y) = 0$ . Soit  $(L^i)$  la suite de transformations quadratiques associée à  $M$ . On se propose d'étudier les polynômes standard  $f_n$  (i.e. les courbes d'équations  $f_n(X,Y) = 0$ ) pour des valeurs standard de  $n$ , où  $f_n$  est défini par

$$f_n = f \circ L^1 \circ \dots \circ L^n$$

La courbe  $(C_n)$  est birationnellement isomorphe à la courbe  $(C)$ .

II.2. Soit  $M = (\eta_1, \eta_2) \sim (0,0)$  un point de (C) et  $M = \epsilon_1 V_1 + \epsilon_2 V_2$  une décomposition de M. Si  $\epsilon_2 = 0$ , nous avons vu que (C) ou du moins la composante de (C) contenant M est une droite. Sinon

$$(\eta_1, \eta_2) = L^1(\epsilon_1, \epsilon_2)$$

Proposition - Le vecteur  $V_1$  est un vecteur tangent du cône des tangentes en  $(0,0)$  à la courbe (C).

En effet l'ombre de la droite OM est la droite passant par 0 et de vecteur directeur  $V_1$ . Or par définition une tangente du cône des tangentes en 0 à la courbe (C) est limite dans  $P_2(\mathbb{C})$  d'une sous-suite convergente d'une suite  $(OM_n)$  où  $(M_n)$  est une suite de point de (C) convergent vers 0. Le principe de construction montre qu'une telle tangente peut être obtenue comme ombre d'une droite OM où  $M \sim (0,0)$  et  $M \in (C)$ .

II.3. Cas où l'origine est un point régulier

Si l'origine est un point régulier, le vecteur  $V_1$  est le vecteur tangent en  $(0,0)$  à la courbe (C). Soit  $f_1(X,Y)$  le polynôme standard défini par

$$f_1(X,Y) = f \circ L^1(X,Y).$$

Si  $M = (\eta_1, \eta_2)$  et  $L^1(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\eta_1, \eta_2)$  alors,

$$f_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = f(\eta_1, \eta_2) = 0.$$

Soit  $f = h_n + h_{n-1} + \dots + h_1$  la décomposition de f en composantes homogènes. Comme (C) est régulière à l'origine, le polynôme homogène  $h_1$  de degré 1 est non identiquement nul. Les coordonnées  $(\alpha_1, \alpha_2)$  du vecteur  $V_1$  vérifie  $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ , i.e.  $h_1(X,Y) = \alpha_2 X - \alpha_1 Y$ . D'où si  $M = \epsilon_1 V_1 + \epsilon_2 V_2$ ,  $h_1 \circ L^1(\epsilon_1, \epsilon_2) = \Delta \epsilon_1 \epsilon_2$  où  $\Delta = \det(V_1, V_2) \neq 0$  et  $h_i \circ L^1(\epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_1^i (\bar{h}_i(\epsilon_2))$  où  $\bar{h}_i$  est un polynôme standard de degré i. Ainsi

$$f_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_1^n \bar{h}_n(\epsilon_2) + \dots + \epsilon_1^2 \bar{h}_2(\epsilon_2) + \epsilon_1 \bar{h}_1(\epsilon_2) \text{ avec } \bar{h}_1(0) \neq 0.$$

soit  $f_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_1 [\bar{f}_1(\epsilon_1, \epsilon_2)]$  avec

$$\bar{f}_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_1^{n-1} \bar{h}_n(\epsilon_2) + \dots + \bar{h}_1(\epsilon_2).$$

Il s'en suit que le polynôme  $f_1$  s'écrit

$$f_1(X,Y) = X \bar{f}_1(X,Y) \text{ avec } \bar{f}_1 \text{ régulier en } (0,0).$$

Soit  $(C_1)$  la courbe d'équation  $\bar{f}_1(X,Y) = 0$ ; alors  $(C_1)$  est birationnellement isomorphe à (C) et est régulier en l'origine.

Plus généralement, le polynôme  $f_n(X,Y) = f \circ L^n \circ \dots \circ L^1(X,Y)$  s'écrit

$$f_n(X,Y) = X^n \bar{f}_n(X,Y).$$

Supposons que la courbe  $(C_n)$  d'équation  $\bar{f}_n(X,Y) = 0$  soit régulière à l'origine, un calcul analogue au précédent montre que le polynôme  $f_{n+1}(X) = f \circ L^{n+1} \circ \dots \circ L^1(X,Y)$  s'écrit  $f_{n+1}(X) = X \cdot \bar{f}_{n+1}(X,Y)$ , et la courbe  $(C_{n+1})$  d'équation  $\bar{f}_{n+1}(X,Y) = 0$  est birationnellement isomorphe à la courbe  $(C)$ , et est régulière à l'origine. D'où

Proposition - Soit  $M \sim (0,0)$  un point d'une courbe algébrique  $(C)$  d'équation  $f(X,Y) = 0$  régulière en l'origine. Soit  $(L^i)$  la suite de transformations quadratiques associées à  $M$ . Alors, ou bien  $M$  est situé sur une branche de  $(C)$  d'équation paramétrique  $(x(t) = P_1(t), y(t) = P_2(t))$  où  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes standard, ou bien chacune des courbes  $(C_n)$  birationnellement isomorphes à  $(C)$  d'équation  $\bar{f}_n(X,Y) = 0$  où  $f_n(X,Y) = f \circ L^n \circ \dots \circ L^1(X,Y) = X \bar{f}_n(X,Y)$  est régulière en l'origine.

Remarque - Supposons que la suite  $(L^i)$  ne soit pas finie. Alors

$(\epsilon_1, \epsilon_2) = L^n \circ \dots \circ L^2(\epsilon_1, \epsilon_2^{(n)})$  est de la forme

$$\epsilon_2 = P_n(\epsilon_1) [a_n + \epsilon_2^{(n)}] \text{ où } a_n \text{ est standard et } \epsilon_2^{(n)} \sim 0.$$

i.e. 
$$\epsilon_2 = \sum_1^n a_n \epsilon_1^n + \epsilon_1^n \epsilon_2^{(n)}.$$

Cette procédure nous fournit une série standard  $\sum a_n X^n$  qui vérifie formellement  $\bar{f}_1(X, \sum a_n X^n) = 0$ .

De plus pour tout  $n$  standard  $\epsilon_2 \sim \sum_1^n a_n \epsilon_1^n$ . La convergence de cette série se montre de manière ordinaire. Elle n'est rien d'autre que la série de Puiseux relative à une équation régulière.

### III. Cas où l'origine est un point singulier

III.1. Définissons pour un polynôme standard  $P(X,Y)$  nul sur  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  les nombres

$O_1(P)$  = nombre de racines infiniment petites de  $P(X, \epsilon_2)$

$O_2(P)$  = nombre de racines infiniment petites de  $P(\epsilon_1, Y)$ .

Si  ${}^o(P(X, \epsilon_2)) \neq 0$ , (resp  ${}^o(P(\epsilon_1, Y)) \neq 0$ ), alors  $O_1(P)$  (resp  $O_2(P)$ ) correspond à l'ordre du polynôme  $Q(X) = {}^oP(X, \epsilon_2)$  (resp  $Q(Y) = {}^o(P(\epsilon_1, Y))$ ).

Nous allons étudier l'évolution des ordres des polynômes qui se déduisent des  $f_i$  par extraction des facteurs non nuls au point  $M$ .

Soit  $f = h_n + h_{n-1} + \dots + h_j$  la décomposition en composante homogène de  $f$ . Par hypothèse  $d^o h_j = j > 1$ .

Notons  $(L^n)$  la suite des transformations associées à  $M$ . Nous supposons que cette suite n'est pas finie (sinon  $(C)$  est birationnellement isomorphe à une droite du plan (I.4)).

Soit  $M = \epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 V_2$  une décomposition de  $M$  et  $L^1$  définie par  
 $(\eta_1, \eta_2) = L^n(\epsilon_1, \epsilon_2)$ . Alors

$$\begin{aligned} f_1(\epsilon_1, \epsilon_2) &= f \circ L^1(\epsilon_1, \epsilon_2) = h_n \circ L^1(\epsilon_1, \epsilon_2) + \dots + h_j \circ L^1(\epsilon_1, \epsilon_2) \\ &= \epsilon_1^n h_n^1(\epsilon_2) + \dots + \epsilon_1^j h_j^1(\epsilon_2) \end{aligned}$$

où  $h_k^1(\epsilon_2) = \epsilon_1^{-k} h_k(V_1 + \epsilon_2 V_2)$ .

Le polynôme  $h_k^1(Y)$  est standard et de degré  $k$ .

Comme  $V_1$  est un vecteur tangent du cône des tangentes en  $0$  à  $(C)$ ,  
 $h_j^1(0) = 0$ . D'où

$$\begin{aligned} f_1(X, Y) &= X^j \bar{f}_1(X, Y) \text{ avec} \\ \bar{f}_1(X, Y) &= X^{n-j} h_n^1(Y) + \dots + X h_{j+1}^1(Y) + h_j^1(Y). \end{aligned}$$

On se propose de comparer, suivant la nature de la transformation  $L^1$  les ordres  $O_1(\bar{f}_1)$ ,  $O_2(\bar{f}_1)$  avec  $O_1(f)$  et  $O_2(f)$ .

Lemme (L<sub>1</sub>) - Si  $L^1$  est du type  $L_1$ , alors

- i)  $O_1(\bar{f}_1) = O_2(f) - j$
- ii)  $O_2(\bar{f}_1) \leq O_1(f)$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $h_j(X, Y) = X^j$ .

Lemme (L<sub>2</sub>) - Si  $L^1$  est du type  $L_2$ , alors

- i)  $O_1(\bar{f}_1) = O_1(f) - j$
- ii)  $O_2(\bar{f}_1) \leq O_2(f)$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $h_j(X, Y) = Y^j$

Lemme (L<sub>3</sub>) - Si  $L^1$  est du type  $L_3$ , alors

- $O_2(\bar{f}_1) \leq O_2(f)$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $h_j(X, Y) = (Y - aX)^j$ .

Démonstration - voir § III.6.

### III.2. Conséquences

Notons  $O(P) = \min(O_1(P), O_2(P))$ . Si  $O(P) = 1$  la courbe d'équation  $P(X, Y) = 0$  est régulière en l'origine. Si  $O(P) > 1$ , les lemmes ci-dessus montrent qu'en général  $O(\bar{f}_1) < O(f)$ . Les seuls cas où ceci n'a pas lieu sont

- cas 1)  $L^1$  du type  $L_1$ ,  $j = O(f)$ ,  $O_2(f) \geq 2j$ ,  $h_j(X, Y) = X^j$
- cas 2)  $L^1$  du type  $L_2$ ,  $j = O(f)$ ,  $O_1(f) \geq 2j$ ,  $h_j(X, Y) = Y^j$
- cas 3)  $L^1$  du type  $L_3$ ,  $j = O(f)$ ,  $O_1(\bar{f}_1) > j$ ,  $h_j(X, Y) = (Y - aX)^j$ .

Dans chacun de ces cas nous avons  $O(\bar{f}_1) = O(f) = j$ . Plus précisément

- cas 1)  $O_2(\bar{f}_1) = j \leq O_1(\bar{f}_1)$

cas 2)  $O_2(\bar{f}_1) = j \leq O_1(\bar{f}_1)$

cas 3)  $O_2(\bar{f}_1) = j \leq O_1(\bar{f}_1)$

III.3. Cas où  $O(\bar{f}_n) > 1$  pour tout n

Dans le paragraphe précédent nous avons mis en évidence 3 cas dans lesquels  $O(\bar{f}_1) = O(f)$ .

Si  $\bar{f}_n$  désigne le polynôme défini par  $f_n = f \circ L^n \circ \dots \circ L^1$  après simplification du facteur non nul ( $f_n = X^k \bar{f}_n$ ), supposons que  $O(\bar{f}_n) = O(f)$  pour tout n (standard),  $n > k$ . Nous allons supposer, pour simplifier les notations que  $f_n = f$ . Alors les cas 1), 2), 3) montrent que la transformation  $L^2$  est du type  $L_2$  ou  $L_3$ . Comme  $O(\bar{f}_2) = O(f) = j$ , on a

1°) si  $L^2$  est du type  $L_2$

i)  $O_2(\bar{f}_1) = j < O_1(\bar{f}_1)$

ii)  $O_1(\bar{f}_2) = O_1(\bar{f}_1) - j$

iii)  $O_2(\bar{f}_2) = O_2(\bar{f}_1) = j$  et  $\bar{h}_j^1(X,Y) = Y^j$

2°) si  $L^2$  est du type  $L_3$

i)  $O_2(\bar{f}_1) = O_1(\bar{f}_1) = j$

ii)  $O_2(\bar{f}_2) = O_2(\bar{f}_1) = j$  et  $\bar{h}_j^1(X,Y) = (Y - a_1 X)^j$

iii)  $O_1(\bar{f}_2) \geq j$

où  $\bar{h}_j^1(X,Y)$  est la composante homogène de degré j du polynôme  $\bar{f}_1$ .

Notons que dans le cas 1°) ii),  $O_1(\bar{f}_2) = O_1(\bar{f}_1) - j \geq j$ , sinon  $O_1(\bar{f}_2) < j = O(f)$  contraire à l'hypothèse.

Donc si  $O(\bar{f}_n) = O(f)$ , les transformations  $L^i$ ,  $2 \leq i \leq n$  sont du type  $L_2$  ou  $L_3$  et il existe un entier standard  $n_0$  tel que  $L^i$  soit du type  $L_3$ .

Proposition - Si  $O(\bar{f}_n) = O(f)$  pour tout n standard alors il existe  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2 \sim 0$  tels que  $(\eta_1 = \epsilon_1$  et  $\eta_2 = \sum_{i=1}^n a_i \epsilon_1^i + \epsilon_1^n \epsilon_2)$  ou  $(\eta_1 = \epsilon_1 (\sum_{i=1}^{n-1} a_i \epsilon_1^i + \epsilon_1^{n-1} \epsilon_2), \eta_2 = \epsilon_1)$ .

En effet ceci résulte du fait que  $f_n = f \circ L^n \circ \dots \circ L^1$  avec  $L^i$  du type  $L_2$  ou  $L_3$  pour tout  $i, i \geq 2$ .

III.4. Conclusion

La discussion précédente peut se résumer en le théorème suivant.

Soit (C) une courbe algébrique d'équation  $f(X,Y) = 0$  passant par l'origine et  $M = (\eta_1, \eta_2) \sim (0,0)$  un point de (C). Soit  $(L^n)$  la suite de transformation associée à M. Supposons que  $(L^n)$  ne soit pas finie et notons  $(C_n)$  la courbe birationnelle-



ment isomorphe à (C) d'équation  $\bar{f}_n(X, Y) = 0$ , où  $\bar{f}_n$  est défini par  $f_n = X^{k_n} \bar{f}_n(X, Y)$  avec  $f_n = f \circ L^n \circ \dots \circ L^1$ . Posons  $j = 0(f)$ .

Théorème - Il existe un entier standard  $n_0$  tel que ou bien

- 1)  $0(\bar{f}_{n_0}) = 1$  , ou bien
- 2)  $0(\bar{f}_n) = 0(\bar{f}_{n_0}) \leq j$  pour tout  $n \geq n_0$ .

Si  $(\eta_1, \eta_2) = L^{n_0+1} \circ \dots \circ L^1(\epsilon_1, \epsilon_2)$  alors  $\epsilon_2 = \sum_{i>1} a_i \epsilon_1^i$ , la série standard  $\sum a_i X^i$  étant convergente.

III.5. Paramétrage (ou branche) associé à M

D'après le théorème ci-dessus, les coordonnées du point M s'écrivent  $(\eta_1, \eta_2) = L^{n_0+1} \circ \dots \circ L^1(\epsilon_1, \epsilon_2)$  avec  $\epsilon_2 = \sum a_i \epsilon_1^i$ , c'est-à-dire

$$\eta_1 = P_1(\epsilon_1, \epsilon_2)$$

$$\eta_2 = P_2(\epsilon_1, \epsilon_2) \text{ avec } \epsilon_2 = \sum a_i \epsilon_1^i$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes standard définis à partir des transformations associées à M.

Il s'en suit, par permanence, un paramétrage de la courbe. (la permanence "autorise" le remplacement de  $\epsilon_1$  par un paramètre complexe  $t$  !).

Ainsi tout point M infiniment proche de l'origine détermine, par ses transformations associées, un paramétrage de la courbe. Un tel paramétrage détermine par définition une branche de (C). Dans le cas des hypothèses du théorème III.3.2° nous dirons que la branche (associée à M) est d'ordre  $j_0 = 0(\bar{f}_{n_0})$ .

Conséquence - Si M parcourt  $h(0) \cap (C)$ , où  $h(0)$  est le halo de l'origine, nous décrivons de façon systématique (et algorithmique car seules les trois transformations sont possibles pour une courbe  $\bar{f}_n$  donnée) toutes les branches de la courbe (C). La multiplicité de ces branches est donnée par la procédure aboutissant au théorème III.3.

III.6. Démonstration des lemmes  $L_1, L_2$  et  $L_3$

III.6.1. Démonstration de  $L_1$

Par hypothèse  $M = (\eta_1, \eta_2) = (\epsilon_1 \epsilon_2, \epsilon_1)$  et  $V_1 = (0, 1)$ .

Soit  $f = h_n + h_{n-1} + \dots + h_j$  avec  $h_p$  homogène de degré p.

On a  $f(\eta_1, \eta_2) = f(\epsilon_1 \epsilon_2, \epsilon_1) = h_n(\epsilon_1 \epsilon_2, \epsilon_1) + \dots + h_j(\epsilon_1 \epsilon_2, \epsilon_1) = 0$ .

Comme  $h_p$  est homogène,  $h_p(\epsilon_1 \epsilon_2, \epsilon_1) = \epsilon_1^p h_p^1(\epsilon_2)$  avec  $d^0 h_p^1 = p$ .

Si  $\bar{f}_1 = X^{-j}f \circ L_1$ , on a

$$\bar{f}_1(X,Y) = X^{n-j}h_n^1(Y) + \dots + Xh_{j+1}^1(Y) + h_j^1(Y).$$

Par définition  $O_1(f) = \inf \{k, h_{j+k}(X,0) \neq 0\}$

$$O_2(f) = \inf \{k, h_{j+k}(0,Y) \neq 0\}.$$

Comme  $h_j(0,1) = 0$ ,  $O_2(f) > j$ .

Or  $O_1(\bar{f}_1) = -j + \min \{k / h_{j+k}^1(0) \neq 0\} = -j + O_2(f)$

et  $O_2(\bar{f}_1) = \text{ordre du polynôme } h_j^1 < j < O_1(\bar{f}_1)$ .

Si  $O_2(\bar{f}_1) = j$ , alors  $h_j^1(Y) = Y^j$ , d'où  $h_j(X,Y) = X^j$ .

d'où le lemme.

### III.6.2. Démonstration des lemmes $L_2$ et $L_3$

Notons que la transformation  $L_2$  correspond à une transformation du type  $L_{3,a}$  avec  $a = 0$ . Ainsi dans cette démonstration nous considérerons les transformations  $L(X,Y) = (X, X(a+Y))$  avec  $a$  nul ou pas.

On a  $M = (\eta_1, \eta_2) = (\epsilon_1, \epsilon_1(a+\epsilon_2))$  et  $V_1 = (1, a)$ .

En reprenant les notations de III.5.1. nous obtenons de même

$$\bar{f}_1(X,Y) = X^{n-j}h_n^1(Y) + \dots + Xh_{j+1}^1(Y) + h_j^1(Y)$$

Comme  $h_j(1,a) = 0$ ,  $O_1(f) > j$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $a \neq 0$ . Alors

$$O_1(\bar{f}_1) = \inf \{k / h_{j+k}^1(0) \neq 0\} - j$$

et  $O_2(\bar{f}_1) = \text{ordre de } h_j^1(Y) < j < O_2(f)$ .

Si  $O_2(\bar{f}_1) = j$  alors  $h_j^1(Y) = Y^j$ , i.e.  $h_j(X,Y) = (Y-aX)^j$  et

$$O_2(f) = O_1(f) = j \text{ si } a \neq 0$$

$$\text{ou } O_2(f) = j \text{ si } a = 0.$$

Déterminons enfin  $O_1(\bar{f}_1)$  dans le cas où  $a = 0$ .

$$O_1(\bar{f}_1) = \inf \{k / h_{j+k}^1(0) \neq 0\} - j.$$

Or si  $a = 0$ ,  $h_{k+k}^1(0) \neq 0 \leftrightarrow h_{j+k}(X,0) \neq 0$ , d'où

$$O_1(\bar{f}_1) = O_1(f) - j.$$

Notons que si  $a \neq 0$ , cette équivalence est fausse.

En effet si l'on a par exemple  $O_1(f) = O_2(f) = j$ , alors

$$h_j(X,0) \neq 0 \text{ et } h_j^1(0) = 0.$$

Dans ce cas  $O_1(\bar{f}_1) = \inf \{k, k > 1 / h_{j+k}(X,a) \neq 0\}$  car  $h_j(X,a) = 0$ .

D'où les lemmes.

IV. Transformations associées à M et désingularisation

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que pour un point  $M \sim (0,0)$  donné, les transformations associées à M permettaient de trouver le paramétrage de la branche passant par M. Deux cas se distinguent

Cas 1  $\exists^{st} n_0$  tel que  $0(\bar{h}_{n_0}) = 1$ .

Cas 2  $\exists^{st} n_0$  tel que  $\forall n, n > n_0 \quad 0(\bar{f}_n) = 0(\bar{f}_{n_0})$ .

Dans le cas 1, la courbe  $(C_{n_0})$  d'équation  $\bar{f}_{n_0}(X,Y) = 0$  est régulière à l'origine ; il en est de même de toutes les courbes (§ II)  $(C_n)$  d'équation  $\bar{f}_n(X,Y) = 0$  pour tout  $n \geq n_0$ . Nous avons dans ce cas désingularisé la courbe (C) et la courbe  $(C_{n_0})$  correspondant au plus petit entier (standard)  $n_0$   $t_q(C_{n_0})$  soit régulière le nom de désingularisée "minimale".

Dans le cas 2, aucune des courbes  $(C_n)$  n'est désingularisée. Ceci n'empêchant nullement de trouver le paramétrage. Or d'après la discussion des paragraphes III.2. et III.3., il s'en suit que le paramétrage de la courbe  $(C_{n_0})$  est tel que l'origine se comporte comme un point régulier. Comme le vecteur tangent est d'ordre  $j = 0(f_{n_0})$ , la courbe  $(C_{n_0})$  "passe j fois" par l'origine, i.e. son équation est de la forme  $0 = \bar{f}_{n_0}(X,Y) = (g(X,Y))^j$ , où  $g(X,Y) = 0$  détermine une courbe (de même paramétrage que  $C_{n_0}$ ) régulière en l'origine. Ainsi le polynôme  $f(X,Y)$  est non réduit. La courbe  $(\bar{C})$  d'équation  $g(X,Y) = 0$  est dans ce cas la désingularisée de (C).

V. Exemples

V.1. Les coniques

Soit (C) une conique dans le plan complexe  $\mathbb{C}^2$  définie par l'équation  $f(X,Y) = 0$ , où  $f(X,Y)$  est un polynôme à coefficients complexes de degré 2. Soit  $M_0$  un point standard de (C), la conique étant supposée standard, i.e. f est standard. Par un changement convenable des axes de coordonnées, on peut supposer  $M_0 = (0,0)$  et

$$f(X,Y) = a_0 X^2 + a_1 Y^2 + a_2 XY + a_3 X$$

Soit M une perturbation de  $M_0$  et  $M = \epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 V_2$  une décomposition de M. Posons

$$V_1 = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ et } V_2 = (\beta_1, \beta_2).$$

Si M est située sur la conique, on obtient l'équation

$$a_0 (\epsilon_1 \alpha_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \beta_1)^2 + a_1 (\epsilon_1 \alpha_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \beta_2)^2 + a_2 (\epsilon_1 \alpha_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \beta_1) (\epsilon_1 \alpha_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \beta_2) + a_3 (\epsilon_1 \alpha_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \beta_1) = 0$$

Soit, en développant

$$\epsilon_1^2 [(a_0 \alpha_1^2 + a_1 \alpha_2^2 + a_2 \alpha_1 \alpha_2) + \epsilon_2 (2a_0 \alpha_1 \beta_1 + 2a_1 \alpha_2 \beta_2 + a_2 \alpha_1 \beta_2 + a_2 \alpha_2 \beta_1) + \epsilon_2^2 (a_0 \beta_1^2 + a_1 \beta_2^2 + a_2 \beta_1 \beta_2)] \\ + \epsilon_1 (a_3 \alpha_1 + \epsilon_2 a_3 \beta_1) = 0$$

Après division par  $\epsilon_1$  et par passage à l'ombre on obtient

$$a_3 \alpha_1 = 0$$

Supposons  $a_3 \neq 0$ , on a alors  $\alpha_1 = 0$  et le vecteur  $V_1$  peut être choisi égal à  $(0,1)$ . On peut ainsi prendre comme vecteur  $V_2$  le vecteur  $(1,0)$  car sa seule vertu est d'être linéairement indépendant de  $V_1$ .

L'équation  $f(M) = 0$  se réduit donc à

$$\epsilon_1 (a_1 + \epsilon_2 a_2 + \epsilon_2^2 a_0) + \epsilon_2 a_3 = 0 \quad (1)$$

Cette équation représente la conique dans le repère "mobile"  $(V_1, \epsilon_1 V_2)$ . Ainsi, la courbe  $(C_1)$  d'équation  $\bar{f}_1(X, Y) = X(a_1 + a_2 Y + a_3 Y^2) + a_3 Y = 0$  est la transformée de  $(C)$  par l'isomorphisme birationnel

$$L^1(X, Y) = (XY, X).$$

Si  $a_1 = 0$ , alors d'après (1)  $\epsilon_2 = 0$  (sinon  $f$  est identiquement nulle). Le point  $M$  est donc une perturbation de longueur 1 ; la droite  $M_0 M$  est une tangente en  $M_0$  à  $(C)$  entièrement contenue dans  $(C)$  ; la conique est par conséquent dégénérée.

Supposons  $a_1 \neq 0$ . De l'équation (1) on déduit  $\epsilon_1 = -a_3 \epsilon_2 / (a_1 + a_2 \epsilon_2 + a_0 \epsilon_2^2)$ .

Les coordonnées du point  $M$  sont donc

$$X = -a_3 \epsilon_2^2 / (a_1 + a_2 \epsilon_2 + a_0 \epsilon_2^2) \\ Y = -a_3 \epsilon_2 / (a_1 + a_2 \epsilon_2 + a_0 \epsilon_2^2).$$

Via le principe de permanence on en déduit le paramétrage suivant de la conique  $(C)$

$$X = -a_3 t^2 / (a_1 + a_2 t + a_0 t^2) \\ Y = -a_3 t / (a_1 + a_2 t + a_0 t^2)$$

ce qui montre que toute conique est rationnelle (admet un paramétrage rationnel).

Remarque - Nous avons supposé que le coefficient  $a_3$  était non nul. Dans le cas contraire, l'équation de  $(C)$  se réduit à

$$f(X, Y) = a_0 X^2 + a_1 Y^2 + a_2 XY = 0.$$

Un tel polynôme n'est pas irréductible ; la conique est dans ce cas réunion de deux droites.

V.2. Les cubiques

1° Exemple - le cusp  $X^3 - Y^2 = 0$

L'origine est un point singulier (il n'y a pas de terme de degré 1).

Soit M une perturbation de l'origine ; considérons une décomposition

$$M = \epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 V_2 \text{ avec } V_1 = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ et } V_2 = (\beta_1, \beta_2).$$

Le point M est sur la courbe si et seulement si

$$\epsilon_1^2 (\alpha_2 + \epsilon_2 \beta_2)^2 - \epsilon_1^3 (\alpha_1 + \epsilon_2 \beta_1)^3 = 0$$

ce qui donne

$$\alpha_2^2 = 0$$

$$2\epsilon_2 \alpha_2 \beta_2 + \epsilon_2^2 \beta_2^2 = \epsilon_1 (\alpha_1 + \epsilon_2 \beta_1)^3.$$

Ainsi le vecteur  $V_1 = (1, 0)$  est vecteur directeur de la tangente (double) de la courbe à l'origine.

Si on choisit pour  $V_2$  le vecteur  $(0, 1)$ , l'équation ci-dessus se réduit à

$$\epsilon_2^2 = \epsilon_1.$$

Le point M admet donc pour coordonnées  $\eta_1 = \epsilon_2^2$ ,  $\eta_2 = \epsilon_2^3$ .

Par permanence, on déduit que  $x(t) = t^2$ ,  $y(t) = t^3$  est un paramétrage de la courbe.

Le comportement local de (C) autour de l'origine est déterminé par ce paramétrage.

La courbe tourne 2 fois sur le cercle  $|X| = |\epsilon_2|$  et 3 fois sur le cercle  $|Y| = |\epsilon_2|$ .

Considérons la courbe  $(C_1)$  d'équation  $\tilde{f}_1(X, Y) = X - Y^2 = 0$ . Le calcul précédent montre que le halo de l'origine est représentatif du halo de la singularité du cusp. Elle se déduit de l'équation  $X^3 - Y^2 = 0$  par la transformation

$$L^1(X, Y) = (X, XY).$$

Nous avons par cette transformation (quadratique) désingularisé le cusp, la parabole  $Y^2 = X$  est donc l'équation de la surface de Riemann associée à  $X^3 - Y^2 = 0$  qui est homéomorphe à une sphère dans le projectif  $P^2(\mathbb{C})$ .

2° Exemple -  $X^3 - Y^2 - X = 0$

Contrairement à l'exemple précédent, cette cubique ne comporte aucun point singulier.

Le point à l'infini est aussi régulier ; ceci se voit, soit par une transformation qui le ramène par exemple en l'origine des coordonnées, soit en se plaçant dans le plan projectif par homogénéisation de l'équation.

Nous allons donc étudier le comportement d'une perturbation d'un point quelconque de la courbe. Comme tous les points se ressemblent, autant se placer à l'origine des coordonnées qui n'est nullement privilégiée, alors que dans le cas du cusp c'était l'unique point singulier.

Soit  $M = \epsilon_1 V_1 + \epsilon_2 V_2$  une perturbation de l'origine. On a donc

$$\epsilon_1^3 (\alpha_1 + \epsilon_2 \beta_1)^3 - \epsilon_1^2 (\alpha_2 + \epsilon_2 \beta_2)^2 - \epsilon_1 (\alpha_1 + \epsilon_2 \beta_1) = 0$$

Par passage à l'ombre, on trouve  $\alpha_1 = 0$ .

Le vecteur  $V_1$ , tangent en 0 à la courbe, peut donc être choisi égal à (0,1).

Prenons  $V_2 = (1,0)$ .

L'équation ci-dessus se réduit alors à

$$\epsilon_1^2 \epsilon_2^3 - \epsilon_1 - \epsilon_2 = 0.$$

Ceci montre que  $\epsilon_1$  ne saurait s'exprimer rationnellement en fonction de  $\epsilon_2$ . Par contre une telle équation polynomiale en  $\epsilon_1$ , à coefficients dépendant de  $\epsilon_2$  admet une unique solution infiniment petite, l'ombre d'un tel polynôme se réduisant à  $X = 0$ . Une telle solution est développable en série entière en  $\epsilon_2$ . En effet posons

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 (-1 + \epsilon_1').$$

On obtient  $\epsilon_2^5 (-1 + \epsilon_1')^2 - \epsilon_2 \epsilon_1' = 0$ , soit  $\epsilon_2^4 (-1 + \epsilon_1')^2 = 0$ .

Posons  $\epsilon_1' = \epsilon_2^4 (-1 + \epsilon_1'')$ . On obtient  $\epsilon_1'' = \epsilon_2^4 (-2 + \epsilon_1''')$  d'où  $\epsilon_1 = -\epsilon_2 - \epsilon_2^5 - 2\epsilon_2^9 + \epsilon_2^9 \epsilon_2'''$ .

La série s'obtient par itération. On trouve  $\epsilon_1 = \epsilon_2 (\sum a_n \epsilon_2^{4n})$ . Une telle série est convergente. Par permanence on a le paramétrage suivant

$$X = -t^2 - t^6 - 2t^{10} + \dots$$

$$Y = -t - t^5 - 2t^9 + \dots$$

Un tel paramétrage n'est évidemment pas unique ; en changeant de représentant de la décomposition associée à  $M$ , on trouve un autre paramétrage (qui est équivalent).

Notons que l'on peut également paramétrer la courbe en développant  $\epsilon_2$  en fonction de  $\epsilon_1$ . On trouve dans ce cas le développement de Puiseux.

$$X = -s^2 + s^6 - 3s^{10} + \dots$$

$$Y = s.$$

### 3° Etude générale des cubiques

Soit (C) une cubique dont l'équation, après changement de repère s'écrit

$$f(X,Y) = a_0 X^3 + a_1 Y^3 + a_2 X^2 Y + a_3 X Y^2 + a_4 X^2 + a_5 Y^2 + a_6 X Y + a_7 X = 0.$$

Soit  $M$  une perturbation de l'origine et  $\epsilon_1 V_1 + \epsilon_2 V_2$  une décomposition. Si

$V_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$  et  $V_2 = (\beta_1, \beta_2)$ , l'équation  $f(M) = 0$  donne, par passage à l'ombre,

$$a_7 \alpha_1 = 0.$$

Supposons dans un premier temps  $a_7 \neq 0$  (l'origine est un point régulier). On a alors  $\alpha_1 = 0$ , d'où  $V_1 = (0,1)$  et  $V_2 = (1,0)$ . Soit  $\bar{f}_1(X,Y) = Xf \circ L^1(X,Y)$  avec  $L^1(X,Y) = (XY,X)$  ; on a

$$\bar{f}_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_1^2(a_0 \epsilon_2^3 + a_2 \epsilon_2^2 + a_3 \epsilon_2 + a_1) + \epsilon_1(a_4 \epsilon_2^2 + a_6 \epsilon_2 + a_5) + a_7 \epsilon_2 = 0. \quad (1)$$

La suite de transformation associée à  $M = (\eta_1, \eta_2)$  permet d'écrire

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \epsilon_2 (\sum r_i \epsilon_2^i) \\ \eta_2 &= \sum r_i \epsilon_2^i \end{aligned}$$

ce qui donne par permanence un paramétrage de la cubique.

Proposition - Tout point régulier d'une cubique est le centre d'un paramétrage.

Jusqu'à présent nous avons supposé que l'origine était un point régulier ( $a_7 \neq 0$ ). Considérons maintenant le cas contraire ;  $a_7 = 0$ , l'origine est donc point double.

Proposition - Si l'origine est un point singulier, alors  $\epsilon_1$  s'écrit rationnellement en fonction de  $\epsilon_2$ .

Démonstration - Si  $a_7 = 0$ , l'équation (1) s'écrit

$$\bar{f}_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_1^2(a_0 \epsilon_2^3 + a_2 \epsilon_2^2 + a_3 \epsilon_2 + a_1) + \epsilon_1(a_4 \epsilon_2^2 + a_6 \epsilon_2 + a_5) = 0$$

d'où  $a_5 = 0$  et  $\epsilon_1 = - (a_6 \epsilon_2 + a_4 \epsilon_2^2) / (a_1 + a_3 \epsilon_2 + a_2 \epsilon_2^2 + a_0 \epsilon_2^3)$ .

Corollaire - Si la cubique possède un point singulier, elle est rationnelle.

Ceci est une conséquence du principe de permanence. Notons que si l'origine est un point singulier de la cubique, il ne saurait y avoir d'autres points singuliers. En effet la transformation (quadratique)  $L^1$  entre la cubique et la courbe  $(C_1)$  d'équation

$$X(a_0 Y^3 + a_2 Y^2 + a_3 Y + a_1) + (a_4 Y^2 + a_6 Y) = 0$$

ne perturbe pas la régularité des points du plan fini ; or  $(C_1)$  ne possède qu'une singularité à l'infini, qui est "l'image" de la singularité en 0 de  $(C)$ .

Proposition - Si une cubique admet un paramétrage rationnel, elle est singulière.

Démonstration - Si la cubique est rationnelle, il existe un point  $M_0$  de  $(C)$  tel que pour toute décomposition  $M_0 + \epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 V_2$  d'une perturbation  $M$  de  $M_0$  située sur  $(C)$ ,  $\epsilon_1$  s'exprime rationnellement en fonction de  $\epsilon_2$  (\*). Supposons  $M_0 = (0,0)$  ; alors la proposition est une conséquence du lemme suivant.

Lemme - Si l'origine est un point régulier, et si  $\epsilon_1$  s'écrit rationnellement en fonction de  $\epsilon_2$ , alors  $\epsilon_1 = a \epsilon_2 / (b + c \epsilon_2 + d \epsilon_2^2)$ .

(\*) . car  $M$  est sur une cubique (paramétrage par des polynômes de  $d < 3$  dans le projectif

Si l'on a positionné les axes de manière à rendre la tangente en 0 horizontale, l'équation  $\bar{f}_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0$  se réduit à

$$(2) \quad \epsilon_1^2(P_3(\epsilon_2)) + \epsilon_1(P_2(\epsilon_2)) + P_1(\epsilon_2) = 0 \text{ avec } P_i \text{ polynôme standard de d}^{\circ}\text{i.}$$

Les coordonnées de M étant

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \epsilon_1 \epsilon_2 \\ \eta_2 &= \epsilon_1 \end{aligned}$$

la cubique (C) a pour équation

$$Y(bY^2 + cXY + d) - aXY^2 = 0 ;$$

elle n'est pas irréductible.

Démonstration du lemme

Supposons  $\epsilon_1 = h(\epsilon_2) / g(\epsilon_2)$  avec h et g polynôme standard de degré respectif p et r. En remplaçant  $\epsilon_1$  par cette fraction rationnelle dans (2), et en étudiant les termes de plus haut degré en  $\epsilon_2$ , on trouve  $r = p+1$ . De plus

$$h^2(\epsilon_2) \cdot P_3(\epsilon_2) + h(\epsilon_2) \cdot g(\epsilon_2) \cdot P_2(\epsilon_2) + g^2(\epsilon_2) \cdot P_1(\epsilon_2) = 0$$

Ceci montre que toute racine non nulle de  $h(X) = 0$  est aussi racine de  $g(X) = 0$ . Comme la fraction est irréductible,  $h(\epsilon_2) = \epsilon_2^p$ .

Si  $p > 1$ , alors le terme constant de  $g(X)$  est nul (passage à l'ombre après division par  $\epsilon_2$ ) et la fraction n'est pas irréductible, d'où  $p = 1$ , ce qui démontre le lemme.

Conclusion - Il existe deux classes de cubiques modulo les transformations associées à une décomposition d'une perturbation

- 1) les cubiques rationnelles (ayant un point double)
- 2) les cubiques régulières.

REFERENCES

- [1] ABHYANKAR S.S., American Math. Monthly 83 (6) 1976.
- [2] CHENCINER A., Courbes algébriques planes, Publication Paris VII, N°4.
- [3] GOZE M., Etude locale de la variété des lois d'algèbre de Lie, Publication Mulhouse, N°8, 1982.
- [4] LUTZ R., GOZE M., Non Standard Analysis. A Pratical Guide with applications. L.N. N°881, Springer 1981.

Université de Haute Alsace  
Département de Mathématique  
4, rue des Frères Lumière  
68093 MULHOUSE CEDEX