GILBERT HECTOR

Architecture des feuilletages de classe C^2

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 243-258

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__243_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.243-258

ARCHITECTURE DES FEUILLETAGES DE CLASSE C^2

Gilbert HECTOR

Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte M. On définit une suite croissante $\{M_p\}_{p\in N}$ de sous-ensembles fermés saturés par :

i) M_o est la réunion des ensembles minimaux de $\mathcal{F}$;

ii) M_{p-1} étant défini pour $p \geqslant 1$, l'ensemble $M_p - M_{p-1}$ sera la réunion des ensembles minimaux (non nécessairement compacts) du feuilletage induit par $\mathcal{F}$ dans $M-M_p$. Les feuilles contenues dans $M_p - M_{p-1}$ seront dites de <u>niveau</u> p. En classe C^2, on a alors les deux propriétés remarquables suivantes :

a) si $M-M_{p-1} \neq \emptyset$ alors $M_p - M_{p-1} \neq \emptyset$;

b) l'ensemble saturé $\bigcup_{p\in N} M_p$ est dense dans M.

Cette répartition des feuilles par niveaux définit <u>l'architecture</u> du feuilletage. On va voir qu'elle est reliée à la fois au type topologique des feuilles et à leur type de quasi-isométrie.

De façon précise, toutes les métriques riemanniennes sur M étant équivalentes, une feuille L de $(M,\mathcal{F})$ est munie canoniquement d'une métrique riemannienne définie à quasi-isométrie près. La <u>croissance</u> de la feuille L est un invariant de ce type de quasi-isométrie.

Le but de l'exposé sera alors de décrire la corrélation qu'il y a pour une feuille L d'un feuilletage de classe C^2 entre :

i) l'espace des <u>bouts</u> de L (i.e. le type topologique de L),

ii) la <u>croissance</u> de L (i.e. son type de quasi-isométrie),

iii) le <u>niveau</u> de L (qui décrit l'immersion $j : L \to M$).

Dans cet exposé, nous nous proposons de donner une vue d'ensemble sur une théorie qui regroupe des résultats d'auteurs divers (Cantwell - Conlon, Dippolito, Duminy, Hector, Nishimori, etc..), échelonnés sur une dizaine d'années. Le travail n'est ni exhaustif, ni original et vise plus à décrire qu'à démontrer. Il se compose de trois parties : la structure par niveaux est décrite au §.1, le rapport entre niveau, croissance et bouts est étudié au §.2. Dans §.3, on donne un aperçu (très partiel) sur les techniques utilisées.

1) ARCHITECTURE GLOBALE.

Les premiers résultats sur l'architecture globale des feuilletages de codimension 1, de classe C^2, se trouvent dans [He 1] et [He 3]. Une étude analogue (mais conduisant à des résultats notablement différents) a été faite de façon indépendante par P.R. Dippolito en classe C^0 (voir [Di]). Dans la présentation ci-dessous, on fait jouer un rôle essentiel à la notion de "minimal local".

Pour simplifier, nous nous restreindrons aux feuilletages transversalement orientés ; toute feuille aura donc un côté droit et un côté gauche. En outre, sauf au début du paragraphe 1.1, les feuilletages considérés seront supposés de classe au moins C^2, et les variétés seront compactes.

1.1.- Minimaux - Minimaux locaux.

Soit donc $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur une variété M. Nous commençons par quelques rappels.

1.1.1.- Type des feuilles.

i) les feuilles de $\mathcal{F}$ se répartissent en trois types :

(1) feuilles propres i.e. ouvertes dans leur adhérence ;

(2) feuilles (localement) denses,

(3) feuilles exceptionnelles i.e. ni propres, ni localement denses.

Par exemple une feuille fermée dans M est propre. Une feuille L de $\mathcal{F}$ est totalement propre si son adhérence $\bar{L}$ dans M est une réunion de feuilles propres.

ii) Une feuille $L \in \mathcal{F}$ est propre si et seulement si pour toute transversale fermée θ à $\mathcal{F}$, l'intersection $\theta \cap L$ est un ensemble de points isolés. Si $\theta \cap L$ est un ensemble de points isolés à droite (resp. à gauche) on dira que L est semi-propre à droite (resp. à gauche). Parmi les feuilles exceptionnelles il en est qui sont semi-propres, d'autres non.

iii) Une feuille L est exceptionnelle si et seulement si pour toute transversale fermée θ, l'intersection $\theta \cap \bar{L}$ est un ensemble de Cantor.

On rencontre des exemples de tous ces types de feuilles parmi les feuilletages de T^2 ou S^3.

1.1.2.- Minimaux de $(M,\mathcal{F})$.

i) On appelle minimal de $(M,\mathcal{F})$ tout ensemble minimal (pour l'ordre) de la famille des fermés saturés de $(M,\mathcal{F})$, ordonnée par inclusion. Un tel ensemble est bien sûr connexe.

ii) on vérifie aisément qu'un fermé saturé M de (M,F) est minimal si et seulement si on a $M = \bar{L}$ pour toute feuille L contenue dans M. Une telle feuille est alors également qualifiée de minimale.

iii) Toutes les feuilles d'un minimal sont de même type, d'où une répartition des minimaux en trois types :

(1) une feuille fermée.

(2) la variété M (si toute feuille de F est partout dense), Dans ce cas on dira que F est minimal.

(3) un minimal exceptionnel, réunion de feuilles exceptionnelles.

On notera qu'un minimal exceptionnel contient au moins deux feuilles semi-propres exceptionnelles.

iv) On peut construire des exemples de minimaux des trois types à l'aide de champs de vecteurs de classe C^1 sur le tore T^2 (voir en particulier [De]). Le premier exemple de minimal exceptionnel (compact) de classe C^∞ est dû à R. Sacksteder (voir [Sa 1]).

(v) le théorème de Sacksteder (voir [Sa 2]) dit que tout minimal exceptionnel compact d'un feuilletage de classe C^2 contient une feuille à holonomie linéaire non triviale.

1.1.3.- Le centre de (M,F)

i) On note respectivement $C(F)$, $E(F)$ et $Z(F)$ la réunion des feuilles fermées, des minimaux exceptionnels et de tous les ensembles minimaux de (M,F). On a bien sûr $Z(F) = C(F) \cup E(F)$. C'est le centre de F.

ii) On montre que $C(F)$ est fermé (voir par exemple [Ha]) et que $E(F)$ est une réunion finie. Bref, $C(F)$, $E(F)$ et $Z(F)$ sont des fermés saturés de (M,F).

iii) Si M est compacte, l'ensemble des fermés saturés de (M,F) est inductif et donc par application du lemme de Zorn on obtient $Z(F) \neq \emptyset$.
Par contre, on construit dans [He 3] des feuilletages (de classe C^∞) de $\mathbb{R}^3$ sans aucun minimal.

1.1.4.- Minimaux locaux.

i) Soient U un ouvert saturé de (M,F) et F_U le feuilletage induit par F dans U. Un minimal de F_U sera appelé un minimal local de F.

ii) Par exemple dans le feuilletage classique R de Reeb sur S^3, toute feuille planaire est fermée dans le complémentaire de la feuille torique. C'est donc un minimal local de R. Des minimaux locaux des deux autres types peuvent s'obtenir en

faisant un tourbillonnement de Reeb le long d'une transversale fermée qui coupe un minimal.
iii) On notera que même si M est compacte, mais $\mathcal{F}$ seulement de classe C^o il pourra arriver que $Z(\mathcal{F}_U)$ soit vide pour certains ouverts saturés de $(M,\mathcal{F})$.

Pour palier à l'inconvénient signalé en 1.1.4. iii), on se restreint aux feuilletages de classe C^2. En effet on démontre le résultat suivant :

1.1.5. Théorème : Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^2 sur une variété compacte M. Pour tout ouvert saturé U on a :

i) $Z(\mathcal{F}_U) \neq \emptyset$. De plus $C(\mathcal{F}_U)$ est fermé dans U et $E(\mathcal{F}_U)$ est une réunion finie. Bref, $Z(\mathcal{F}_U)$ est fermé dans U.

ii) tout minimal exceptionnel de $\mathcal{F}_U$ contient une feuille à holonomie linéaire non triviale.

L'affirmation ii) est une généralisation, en fait immédiate, du théorème de Sacksteder (voir [He1]). Le point i) découle d'une description fine de l'holonomie d'une feuille semi-propre (voir §.3).

1.2.- Feuilletages de classe C^2 : niveaux, hauteur.

On supposera désormais que M est compacte et que $\mathcal{F}$ est de classe C^2.

1.2.1.- La suite centrale de $(M,\mathcal{F})$ - On appellera suite centrale de $(M,\mathcal{F})$ la suite croissante $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ de fermés saturés définie par :

i) $M_o = Z(\mathcal{F})$,
ii) $M_p - M_{p-1} = Z(\mathcal{F}_{U_p})$ où $U_p = M - M_{p-1}$ pour $p \geq 1$.

On étend aux "ensembles feuilletés" la notion d'ensemble minimal. Alors, par une démonstration analogue à celle de 1.1.5, on obtient :

1.2.2.- Proposition.

i) $M_\omega = \overline{\bigcup_{p\in\mathbb{N}} M_p}$ est égal à M ;

ii) Toute feuille L de $M - (\bigcup_p M_p)$ est minimale dans $M - (\bigcup_p M_p)$
En particulier toute feuille de $M-(\bigcup_p M_p)$ est localement dense ou exceptionnelle (mais pas semi-propre).

Cette proposition permet de poser les définitions et de démontrer les résultats suivants :

1.2.3.- Niveaux des feuilles-hauteur du feuilletage.

i) Considérons la famille ordonnée :

$$Z(F) = M_o \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots \subset M_\omega = M.$$

Une feuille $L \in F$ est de niveau α et on écrira $\alpha = \mathrm{niv}(L)$ si :

$$L \subset M_\alpha \text{ mais } L \not\subset M_\beta \text{ pour } \beta < \alpha.$$

Plus simplement une feuille de niveau ω sera encore dite de niveau infini.

ii) On définit la hauteur de F par :

$$\mathrm{ht}(F) = \sup_{L \in F} \mathrm{niv}(L).$$

Alors $\mathrm{ht}(F)$ est soit finie, soit égale à ω.

iii) Une feuille totalement propre est de niveau fini.

Les feuilletages que l'on rencontre habituellement sont bien sûr de hauteur finie. Dans [He 3], on a construit divers exemples de feuilletages de hauteur infinie. Il faut noter encore qu'en classe C^o on peut construire des feuilletages de hauteur égale à n'importe quel ordinal dénombrable.

1.2.4.- Théorème de structure (voir [He 1]). Soit F un feuilletage de classe C^2 sur une variété compacte M et T un feuilletage transverse à F.

Il existe $p \in \mathbb{N}$ et pour toute composante connexe V de $M-M_p$, il existe $L \in F$ et une application différentiable

$$\psi : L \times I \to M$$

qui vérifie les conditions suivantes :

i) ψ est un difféomorphisme de $L \times \,]0,1[$ sur V ;

ii) $\psi^* T$ est le feuilletage vertical de $L \times I$ et $\psi^* F$ est tangent au bord de $L \times I$.

Ce théorème signifie que quitte à négliger les feuilles de niveau $\leqslant p$, le feuilletage F se décrit à l'aide de groupes de difféomorphismes de $[0,1]$.

En particulier, on a :

1.2.5.- Corollaire. Tout feuilletage transversalement analytique est de hauteur finie.

Nous terminons cette première partie par une série de problèmes ouverts ; leur solution permettrait une description complète des feuilletages de classe C^2, du point de vue des niveaux.

1.2.6. Problèmes : Soit $(M,\mathcal{F})$ de classe C^2 avec M compacte.
i) soit $\mathcal{M}$ un minimal exceptionnel de $(M,\mathcal{F})$. Est-il vrai que $M-\mathcal{M}$ a un nombre fini de composantes connexes ? (Ce n'est pas vrai pour un feuilletage de classe C^o ni probablement pour un feuilletage de classe C^1).
ii) Existe-t-il un feuilletage $\mathcal{F}$ de classe C^2 dont toutes les feuilles soient exceptionnelles ? (il existe en classe C^o voir [He 3]).
iii) Considérons $\mathcal{F}o\ell^2(M)$ l'espace des feuilletages de classes C^2 sur M. (supposé non vide). Montrer que pour une topologie convenable, l'ensemble des feuilletages de hauteur finie est dense.

2) ARCHITECTURE LOCALE : CROISSANCE ET BOUTS.

Dans cette deuxième partie, nous décrivons la corrélation qu'il y a, pour une feuille L de $(M,\mathcal{F})$, entre son niveau, son type de croissance et la profondeur de son espace de bouts. Ici encore nous supposerons que M est compacte et que $\mathcal{F}$ est de classe C^2.

2.1.- Croissance des feuilles d'un feuilletage.

2.1.1.- Croissance des fonctions.
i) Soient f et g deux éléments l'ensemble de $C(\mathbb{R}^+)$ des applications croissantes de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même. On dit que f est dominée par g s'il existe des réels positifs α,β,x_o tels que :

$$f(x) \leqslant \alpha\, g(\beta x) \quad \text{pour} \quad x \geqslant x_o.$$

Si ρ est la relation d'équivalence associée à ce préordre, l'ensemble quotient $C(\mathbb{R}^+)/\rho$ est muni naturellement d'une relation d'ordre (partiel) $\leqslant$. La classe d'équivalence de f notée croiss(f) s'appelle le type de croissance de f.

ii) Ce type de croissance f est dit

(1) polynomial de degré n [resp. exactement polynomial de degré n] s'il existe un polynôme p de degré n tel que :

$$\text{croiss}(f) \leqslant \text{croiss}(p) \qquad [\text{resp. } \text{croiss}(f) = \text{croiss}(p)].$$

(2) exponentiel si :

$$\text{croiss}(f) \geqslant \text{croiss}(\exp).$$

On montre par exemple que deux polynômes ont le même type de coirssance si et seulement si ils ont le même degré.

2.1.2. Type de quasi-isométrie - Croissance des feuilles.

i) Deux métriques riemanniennes g_1 et g_2 sur une variété N sont équivalentes s'il existe $k > 0$ tel que pour les normes correspondantes, on a :

$$\frac{1}{k}\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq k\|v\|_2 \qquad \text{pour tout } v \in T_*(N).$$

La classe d'équivalence de g_1 définit le type de quasi-isométrie de la variété riemannienne (N,g_1). Par exemple, toutes les métriques sur une variété compacte sont équivalentes.

ii) Soit alors (N,g) une variété riemannienne. Si $B(x_o,r)$ est la boule de centre $x_o \in N$ et rayon r (relativement à g), on montre que le type de croissance de la fonction

$$\gamma_{(g,x_o)} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ r \to \mathrm{vol}\, B(x_o,r) \end{array}$$

ne dépend pas de x_o mais seulement du type de quasi-isométrie de g. On l'appelle le type de croissance de (N,g).

iii) En particulier, soit L une feuille d'un feuilletage $(M,\mathcal{F})$. Si M est compacte toutes les métriques sur M sont équivalentes et donc il en est de même pour les métriques induites sur L. Le type de croissance correspondant est noté croiss(L) ; c'est le type de croissance de L (considérée comme feuille de $\mathcal{F}$). Par exemple, les feuilles planaires du feuilletage de Reeb ont une croissance linéaire (i.e. exactement polynomiale de degré 1).

Les résultats ayant trait à la croissance sont dûs à des auteurs divers. Nous les énonçons dans un ordre qui ne correspond pas nécessairement à l'ordre de démonstration :

2.1.3.- Résultats de croissance - Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^2 sur une variété compacte M.

i) Pour toute feuille L de $\mathcal{F}$ on a :

$$\mathrm{croiss}(L) \leq \mathrm{croiss}(\exp).$$

ii) Toute feuille d'un minimal (local) exceptionnel est à croissance exponentielle. (se déduit d'un résultat de Plante (voir [P]) et de 1.1.5 ii)).

iii) Une feuille totalement propre est à croissance exactement polynomiale de degré n si elle est de niveau n. (cf. [C.C 3])

iv) Une feuille semi-propre est à croissance polynomiale si et seulement si elle est totalement propre ; si elle n'est pas totalement propre, elle est à croissance exponentielle.

(v) Soit L_1 une feuille de niveau fini. Si $L_1 \subset \bar{L}_2$ on a $\mathrm{croiss}(L_1) \leq \mathrm{croiss}(L_2)$. En particulier toute feuille de niveau infini est à croissance non polynomiale.

2.1.4.- Exemples. Dans [He 4], on décrit un feuilletage $(M,\mathcal{F})$ de classe C^∞ ayant :

(1) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une feuille à croissance exactement polynomiale de degré n.

(2) des feuilles à croissance exponentielle ;

(3) une famille non-dénombrable de feuilles ayant un type de croissance non-exponentiel et non-polynomial deux à deux distincts.

En procédant de façon analogue, on peut construire des familles de feuilletages ayant des feuilles localement denses de niveau fini qui sont à croissance non-exponentielle et non polynomiale comme en (3) ci-dessus.

2.1.5. Problèmes

i) Est-il vrai que toute feuille à croissance polynomiale est en fait à croissance exactement polynomiale ? [C'est vrai pour les feuilles à croissance au plus linéaire].

ii) Plus généralement, caractériser les types de quasi-isométrie sur une variété L qui peuvent être obtenus à l'aide d'un feuilletage de classe C^2 sur une variété compacte admettant L comme feuille.

2.2.- Bouts d'une variété.

i) Soit L une variété. Une suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-variétés fermées connexes de L définit un bout de L si on a :

(1) $E_{n+1} \subset E_n$ pour tout n et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$;

(2) ∂E_n est compact.

Deux suites $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{E'_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ définissent le même bout ε si pour tout n il existe p tel que

$$E_n \supset E'_p \ .$$

Dans cette situation, on écrit $\varepsilon = (E_n) = (E'_p)$. L'ensemble $Bt(L)$ des bouts de L est vide si et seulement si L est compacte.

ii) Si $\varepsilon = (E_n)$ est un bout de L, la suite $\{Bt(E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ définit un système fondamental de voisinages de ε. Muni de la topologie correspondante $Bt(L)$ devient un espace compact totalement discontinu qui s'identifie à un sous-espace fermé de l'ensemble de Cantor. A son tour $\tilde{L} = L \amalg Bt(L)$ est muni d'une topologie d'espace compact compatible avec les topologies de L et $Bt(L)$. On dira que $\tilde{L}$ est la <u>compactification de L par les bouts</u>.

iii) Par exemple, $\mathbb{R}^n$ a un ou deux bouts suivants que $n > 1$ ou $n = 1$. Soient N une variété compacte et $K \subset N$ une partie compacte totalement discontinue. Alors pour $L = N-K$, on a :

$$Bt(L) = K \quad \text{et} \quad \tilde{L} = N.$$

Il ne faudrait toutefois pas croire que le compactifié par les bouts d'une variété soit toujours une variété ; ce n'est pas le cas par exemple pour une surface de genre infini.

2.2.2.- <u>La filtration centrale de $Bt(L)$</u> - <u>Profondeur de $Bt(L)$</u>.

i) On définit la <u>filtration centrale</u> $\{Bt^{(\alpha)}(L)\}$ de $Bt(L)$ par :

$$(1) \quad Bt^{(o)}(L) = Bt(L)$$

$$(2) \quad Bt^{(\alpha)}(L) = \begin{cases} - \bigcap_{\beta<\alpha} Bt^{(\beta)}(L) \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite ;} \\ - \text{ l'ensemble dérivé de } Bt^{(\alpha-1)}(L) \text{ si non .} \end{cases}$$

ii) Il existe un ordinal transfini π tel que

$$(*) \qquad Bt^{(\pi+1)}(L) = Bt^{(\pi)}(L).$$

Le plus petit π vérifiant la propriété (*) est appelé <u>profondeur</u> de $Bt(L)$ et l'ensemble $Bt^{(\pi)}(L)$ s'appelle le <u>stabilisé</u> de $Bt(L)$. Par exemple, $Bt(L)$ est de profondeur 0 [resp. 1] si c'est un ensemble de Cantor [resp. un ensemble fini]. Pour tout ordinal dénombrable π il existe une surface L telle que $Bt(L)$ soit de profondeur π.

Nous appliquons maintenant les concepts précédents aux feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété compacte M, pour lesquelles on généralise les notions bien connues d'ensembles α-limite et ω-limite des champs de vecteurs.

2.2.3.- Ensemble-limite d'un bout.

i) Soient L une feuille de $(M,\mathcal{F})$ et $\varepsilon = (E_n)$ un bout de L. On montre que si $\bar{E}_n$ est l'adhérence de E_n dans M, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{E}_n$ est un fermé saturé connexe non vide de $(M,\mathcal{F})$. On l'appelle l'ensemble-limite de L suivant le bout ε. On le note ε-$\lim(L)$.

ii) Si $\mathcal{F}$ est de classe C^2, on montre qu'il existe une feuille F telle que :

$$\varepsilon\text{-}\lim(L) = \bar{F}.$$

iii) De (ii) on tire l'idée de niveau d'un bout ε par $\mathrm{niv}(\varepsilon) = \mathrm{niv}(F)$. A partir de cette idée on introduit toute une typologie des bouts (que nous ne développerons pas ici). On remarquera simplement que $\mathrm{niv}(\varepsilon) = \mathrm{niv}(L)$ si et seulement si ε-$\lim(L) = \bar{L}$. En général, on aura donc :

$$\mathrm{niv}(\varepsilon) < \mathrm{niv}(L).$$

iv) Dans l'exemple de [He 4], si on désigne par L_n la feuille de niveau fini n, alors il existe un bout ε de L_n tel que :

$$\varepsilon\text{-}\lim(L_n) = \overline{L_{n-1}}$$

On verra au §.2.3 que si $\mathcal{F}$ est sans holonomie à feuilles denses, alors, pour toute $L \in \mathcal{F}$ et tout $\varepsilon \in \mathrm{Bt}(L)$, on a :

$$\varepsilon\text{-}\lim(L) = M.$$

Le premier résultat dans la liste ci-dessous est extrêmement important et typique de la classe C^2 ; il est dû à G. Duminy.

2.2.4.- Résultats sur les bouts en classe C^2.

i) Soit L une feuille semi-propre exceptionnelle telle que $\bar{L}$ est un minimal de $(M,\mathcal{F})$. Alors $\mathrm{Bt}(L)$ est un ensemble de Cantor.

ii) Pour toute feuille semi-propre exceptionnelle L, la profondeur π de $\mathrm{Bt}(L)$ est finie et le stabilisé $\mathrm{Bt}^{(\pi)}(L)$ est un ensemble de Cantor. En particulier, $\mathrm{Bt}(L)$ n'est pas dénombrable et π est égal à $\mathrm{niv}(L)$.

Remarquons que pour les feuilles totalement propres il y a donc égalité entre le niveau, la profondeur des bouts et le degré de croissance (voir aussi [CC 3]).

Enfin remarquons que, à l'aide des mêmes techniques, on montre qu'un groupe de difféomorphismes analytiques de S^1 qui laisse un Cantor invariant a un Cantor de bouts. Les théorèmes de Stallings (cf. [St]) permettent alors de décrire la structure algébrique de tels groupes.

Signalons pour finir deux problèmes ouverts :

2.2.5.- Problèmes.

i) Pour une feuille de niveau infini, y a-t-il corrélation entre son type de croissance et l'espace de ses bouts ?

ii) Essayer de montrer par ce type de méthodes qu'il existe une surface non-compacte qui ne peut être feuille d'aucun feuilletage de classe C^2 sur une quelconque variété compacte M.

2.3.- Les feuilletages minimaux de classe C^2.

Rappelons qu'un feuilletage $(M,\mathcal{F})$ est minimal si toutes ses feuilles sont partout denses. On a donc

$$\mathrm{niv}(L) = 0 \quad \text{pour toute feuille} \quad L \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \mathrm{ht}(\mathcal{F}) = 0.$$

Nous distinguons deux cas :

2.3.1.- Feuilletages minimaux définis par une forme fermée. Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage sur une variété compacte défini par une forme fermée ω.

i) Il existe un flot transverse qui échange les feuilles. Il s'ensuit qu'elles sont toutes difféomorphes à une même variété L et ont même type de quasi-isométrie.

ii) La classe de cohomologie de ω définit un homomorphisme :

$$I_\omega : \pi_1(M) \to \mathbb{R}.$$

l'image de I_ω est un sous-groupe de type fini de $\mathbb{R}$ donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{im}\, I_\omega \cong \mathbb{Z}^r$. On appelle r le rang de ω. La minimalité de $\mathcal{F}$ implique que l'on a $r \geq 2$.

iii) Le théorème bien connu de Tischler permet alors d'approcher ω par une forme fermée Ω telle que :

(1) Ω définit une fibration $p : M \to S^1$,

(2) il existe un revêtement galoisien

$$q : L \to F$$

dont le groupe des automorphismes est isomorphe à $\mathbb{Z}^{r-1}$ [où F désigne la fibre (compacte) de p].

iv) De la situation de revêtement ci-dessus on déduit alors par des arguments classiques que :

(1) croiss(L) est exactement polynomiale de degré (r-1),

(2) L a un ou deux bouts suivants que $r > 2$ ou $r = 2$.

Par exemple, en dimension 3, ceci permet de caractériser les surfaces L qui peuvent être feuilles d'un feuilletage minimal défini par une forme fermée (voir [CC 2]).

2.3.2.- Cas général. Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage minimal de classe C^2 sur une variété compacte.

i) si $\mathcal{F}$ est sans holonomie, il est topologiquement conjugué à un feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ défini par une forme fermée ω. La conjugaison est un difféomorphisme et une quasi-isométrie en restriction à chaque feuille. Les résultats de 2.3.1. s'étendent donc sans difficulté.

ii) Si $\mathcal{F}$ est à holonomie non triviale, on montre comme en 2.1.3. ii) que toute feuille est à croissance exponentielle. Par contre les feuilles ne sont plus homéomorphes entre elles et il n'y a aucun résultat connu quant à leurs espaces de bouts.

3) APERÇU TECHNIQUE : HOLONOMIE DES FEUILLES SEMI-PROPRES.

Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage de classe C^2 sur une variété compacte M. On choisit un feuilletage transverse $\mathcal{T}$ et on construit un pseudo-groupe d'holonomie globale $\mathcal{P}$ de $\mathcal{F}$ défini sur l'axe Q d'un recouvrement bidistingué $\mathcal{U}$ (Q est la réunion d'un nombre fini de $\mathcal{T}$-plaques, une pour chaque ouvert appartenant à $\mathcal{U}$) (voir [H.H]). Pour toute feuille $L \in \mathcal{F}$ et tout $x_o \in Q \cap L$, le pseudo-groupe d'isotropie $\mathcal{P}_{x_o}$ de $\mathcal{P}$ au point x_o est le pseudo-groupe d'holonomie de L en x_o. Le groupe des germes en x_o des éléments de $\mathcal{P}_{x_o}$ est le groupe d'holonomie de L au sens usuel.

La description de l'architecture de $\mathcal{F}$ repose alors sur l'étude des pseudo-groupes d'holonomie des feuilles de $\mathcal{F}$. Parmi celles-ci, les plus importantes sont les feuilles semi-propres pour lesquelles on a le résultat fondamental suivant :

3.1.- Lemme : Soient L une feuille semi-propre et $x_o \in L \cap Q$. Il existe un voisinage compact V de x_o dans Q et une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui engendre $\mathcal{P}$ tels que

i) Pour tout n, g_n est défini sur V,

ii) la suite $\{g'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tend uniformément vers 1 sur V.

3.2.- Remarques et Notations.

i) Pour $u \in V$ on note $P_{x_o}(u)$ l'orbite de u par l'action de P_{x_o} sur V. Une telle orbite est un point fixe si on a $P_{x_o}(u)=\{u\}$. Elle est cyclique s'il existe $g \in P_{x_o}$ tel que $P_{x_o}(u) = \{g^n(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$. La relation d'équivalence sur V dont les classes sont des orbites de P_{x_o} est ouverte.

ii) Pour simplifier, identifions V à $[-1,+1]$ avec $x_o = 0$. Par restriction de P_{x_o} à $[0,1]$ (resp. $[-1,0]$) on obtient le pseudo-groupe d'holonomie $P^+_{x_o}$ (resp. $P^-_{x_o}$) de L à droite (resp. à gauche). Par passage aux germes il définit le groupe d'holonomie à droite (resp. à gauche) de L. On a bien sûr :

$$P_{x_o}(u) = \begin{cases} P^+_{x_o}(u) & \text{pour } u \in [0,1] \\ \\ P^-_{x_o}(u) & \text{pour } u \in [-1,0]. \end{cases}$$

Les notions de minimal, minimal local etc.. introduites au paragraphe 1.2 pour les feuilletages valent en fait pour les relations d'équivalence ouvertes en général.

3.3.- Minimaux d'holonomie. Soit alors ρ^+ la relation d'équivalence sur $[0,1]$ associée à l'action de $P^+_{x_o}$.

i) On déduit de 3.1. que ρ^+ possède un minimal (local) dans $]0,1]$. On dira que c'est un minimal d'holonomie (à droite).

ii) Un minimal d'holonomie est de l'un des quatre types suivants :

(1) un point fixe ou (1 bis) une trajectoire cyclique ;

(2) l'ensemble $]0,1]$;

(3) un minimal exceptionnel.

iii) Utilisant fortement le fait que $P^+_{x_o}$ est de classe C^2, on montre (voir [He 2]) que par restriction de $P^+_{x_o}$ à un intervalle $[0,\eta]$ convenable le cas (3) ci-dessus se ramène à (1 bis). On obtient alors une des trois situations suivantes :

(1) il existe une suite décroissante $\{x_p\}$ de points fixes qui converge vers 0.

(1 bis) il existe une orbite cyclique s'accumulant sur 0 ; celle-ci permet de construire un morphisme de pseudo-groupes :

$$P_{x_o} \to \{g^n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{(cf. 3.2. i))}$$

qui par passage aux germes définit un homomorphisme de groupes :

$$H_L : \quad \pi_1(L,x_o) \to \mathbb{Z} .$$

Considéré comme une classe de cohomologie sur L, on obtient par 3.1. ii) que $H_L \in H^1_C(L,\mathbb{Z})$ est à support compact.

(2) toutes les orbites $P^+_{x_o}(u)$ pour $u \in]0,\eta]$ sont denses dans $]0,\eta]$.

iv) On a bien sûr une situation analogue avec l'holonomie à gauche. On notera toutefois que si par exemple L est semi-propre à droite mais exceptionnelle, alors tout minimal d'holonomie à gauche est soit un point fixe, soit une orbite cyclique.

L'importance des considérations précédentes apparaît dans la construction géométrique suivante :

3.4.- Interprétation géométrique – Soit (ψ_t) un flot transverse à F.

i) Pour toute feuille L de F, l'application

$$\begin{aligned} \phi : L \times \mathbb{R} &\to M \\ (x,t) &\to \psi_t(x) \end{aligned}$$

est transverse à F et le feuilletage ϕ^*F sur $L\times\mathbb{R}$ transverse aux verticales est un déploiement de F au voisinage de L au sens de [H.H.].

ii) La variété L (identifiée à $L\times\{0\}$) est une feuille de ϕ^*F qui a un groupe et pseudo-groupe d'holonomie isomorphes à ceux de L considérée comme feuille de F. Il est alors clair, que P_{x_o} caractérise ϕ^*F au voisinage de L (cf. [Ha]).

iii) En particulier, si L est semi-propre dans F, on déduit de 3.3. iii) que pour le feuilletage induit par ϕ^*F dans $L\times[0,+\infty[$ on a l'une des trois situations suivantes :

(1) quitte à faire un changement de paramétrisation dans la direction verticale, il existe une suite décroissante $\{t_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ de limite 0 telle que :

$$L \times \{t_p\} \text{ est une feuille de } \phi^*F.$$

(1 bis) il existe une feuille $F \in \phi^*F$ et une sous-variété fermée F_o de F à bord compact, telle que la projection verticale :

$$q : F_o \to L$$

est un "semi-revêtement cyclique" de "semi-groupe d'automorphismes" $\mathbb{N}$. (le prototype d'une telle situation est donné par la restriction à $\mathbb{R}^+$ de l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to S^1$).

(2) toutes les feuilles voisines de $L\times\{0\}$ sont localement denses.

iv) On a bien sûr une situation analogue dans $L\times]-\infty,0]$ avec la restriction que l'on ne peut avoir la situation (2) du côté où L est exceptionnelle (comme feuille de $\mathcal{F}$).

3.5.- Utilisation.

i) En généralisant à la situation de semi-revêtement des arguments qui sont bien connus dans le cas des revêtements , on montre que :

(1) les fonctions croissance γ_L et γ_{F_o} de L et F_o introduits ci-dessus sont liées par une relation du type :

$$\gamma_{F_o}(r) = r.\gamma_L(r) \qquad \text{avec} \quad r \in \mathbb{R}^+.$$

(2) pour les profondeurs π_L et π_{F_o} de $Bt(L)$ et $Bt(F_o)$ on a :

$$\pi_{F_o} = \pi_L + 1.$$

ii) Les résultats d'architecture locale portant sur les feuilles de niveau fini sont alors obtenus par l'étude du comportement de ϕ quand on le restreint à F_o.

RÉFÉRENCES

[C.C 1] J. CANTWELL and L. CONLON. Growth of leaves. Comm. Math. Helv. 50 (1975), 93-111.

[C.C 2] J. CANTWELL and L. CONLON. Leaf prescriptions for closed 3-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 236 (1978), 239-261.

[C.C 3] J. CANWELL and L. CONLON. Poincaré-Bendixson theory for leaves of codimension one. Trans. Amer. Math. Soc., 265 (1981), 181-209.

[De] A. DENJOY. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. J. Math. Pures Appl., 11 (1932), 333-375.

[Di] P.R. DIPPOLITO. Codimension one foliations of closed manifolds. Ann. of Maths, 107 (1978), 403-453.

[Du] G. DUMINY. à paraître.

[Ha] A. HAEFLIGER. Variétés feuilletées. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 16 (1962), 367-397.

[He.1] G. HECTOR. Sur un théroème de structure des feuilletages de codimension un. Thèse, Strasbourg, 1972.

[He.2] G. HECTOR. Classification cohomologique des germes de feuilletages. Publ. Internes, Lille, 1975.

[He.3] G. HECTOR. Quelques exemples de feuilletages - Espèces rares. Ann. Inst. Fourier, 26, 1 (1976), 239-264.

[He.4] G. HECTOR. Leaves whose growth is neither exponential nor polynomial. Topology, 16 (1977), 451-459.

[HH] G. HECTOR and U. HIRSCH. Introduction to the Geometry of foliations part A. Vieweg, Wiesbaden, 1981.

[P] J. PLANTE. Foliations with measure preserving holonomy. Ann. of. Maths, 102 (1975), 327-361.

[Sa.1] R. SACKSTEDER. On the existence of exceptional leaves in foliations of codimension one. Ann. Inst. Fourier, 14, 2 (1964), 221-226.

[Sa.2] R. SACKSTEDER. Foliations and pseudo-groups. Amer. J. of Math., 87 (1965), 79-102.

[St] J. STALLINGS. Group theory and 3-manifolds. Yale mathematical monographs n°4.

G. HECTOR
U.E.R. de MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE I
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX
FRANCE

ÉRA au CNRS : 07590