Astérisque

NICOLAAS H. KUIPER
WILLIAM III MEEKS

Sur la courbure des surfaces nouées dans R^3

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 215-217
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__215_0>

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.215-217

SUR LA COURBURE DES SURFACES NOUÉES DANS R^3

Nicolaas H.KUIPER , William MEEKS III

Dans cette note, nous annonçons quelques théorèmes relatifs à la courbure totale absolue des surfaces compactes nouées dans l'espace euclidien R^3 (à paraître dans [3]).

Soit $f : M_g \to R^3$ un plongement lisse d'une surface orientée sans bord et de genre g . La somme des nombres de Betti est $\beta = 2+2g$. Pour une fonction C^∞ non dégénérée, le nombre de points critiques d'indice i est noté μ_i , et $\mu = \mu_o + \mu_1 + \mu_2$. On a l'inégalité de Morse :

$$\mu \geq \beta. \tag{1}$$

La *courbure totale absolue* du plongement f est définie comme suit :

$$\tau(f) = \mathcal{E}_z \ \mu(zf) \ . \tag{2}$$

Ceci représente la valeur moyenne ($\mathcal{E}_z$) de $\mu(zf)$ pour les fonctions linéaires normées $z : R^3 \to R$,$\|z\| = 1$, par rapport à la mesure invariante de la 2-sphère standard : $z \in S^2$. On peut négliger l'ensemble de mesure nulle des covecteurs z pour lesquels la fonction zf est dégénérée. En analysant la formule pour une petite portion connexe de surface à courbure de Gauss $K \neq 0$, on voit, après intégration, que

$$\tau(f) = \int_M |K \ d\sigma|/2\pi \ .$$

$d\sigma$ est l'élément d'aire de la surface $f(M) = M$. Ceci relie notre définition à la formule usuelle.

De (1) et (2) on déduit :

$$\infty \geq \max_z \ \mu(zf) \geq \tau(f) \geq \min_z \ \mu(zf) \geq \ \beta \ . \tag{3}$$

On définit une *surface tendue* (=tight) comme une surface pour laquelle $\tau(f) = \beta$. L'*enveloppe convexe* $\mathcal{H}(X)$ d'un ensemble $X \subset R^3$ est l'intersection de tous les ensembles convexes de R^3 qui contiennent X . On notera $\partial\mathcal{H}(X)$ son bord.

Un plongement $f : M \to M \subset R^3$ est *tendu* si et seulement si l'ensemble des points à courbure $K > 0$ coincide avec l'ensemble des points à courbure $K > 0$ du bord de son enveloppe convexe :

$$M_{K>0} = (\partial\mathcal{H}M)_{K>0} \ . \tag{4}$$

Soit M^{int} l'adhérence dans R^3 de la composante bornée de $R^3 \setminus M$, et M^{ext} l'adhérence dans R^3 de l'autre composante, que l'on compactifie en ajoutant un point à l'infini ∞ : $R^3 \cup \infty = S^3$. Pour une surface $M = M_g$, on connait les groupes d'homologie

$$H_1(M^{int}, \mathbb{Z}_2) = H_1(M^{ext}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^g .$$

Supposons que les groupes fondamentaux ont au moins $g + \sigma(M^{int})$ et $g + \sigma(M^{ext})$ générateurs. Si M^{int} a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles g, alors $\sigma(M^{int}) = 0$. On a $\sigma(M^{int}) = \sigma(M^{ext}) = 0$ si et seulement si la surface M est non nouée (Waldhausen [8]). On peut étendre [2] et [9] par le

<u>Théorème</u> 1. <u>Si</u> $f : M \to R^3$ <u>est le plongement d'une surface</u> $M = M_g$, <u>alors</u>

$$\tau(f) \geq \beta + 4k \ , \ k = \sigma(M^{int}) + \sigma(M^{ext}) . \tag{5}$$

<u>Corollaire</u>.[4,5,7] <u>Si</u> f <u>est noué</u>, <u>alors</u> $\tau(f) \geq \beta + 4$.

On dit que f est *tendu en isotopie* (isotopy tight) si $\tau(f)$ réalise le minimum de $\tau(h)$, h parcourant la classe d'isotopie de f.

<u>Théorème</u> 2. <u>Si</u> $\tau(f) = \beta + 4k$ <u>dans</u> (4), <u>donc</u> f <u>en particulier est tendu en isotopie</u>, <u>alors il existe</u> $1 + k$ <u>surfaces convexes</u> ∂B_i, $i = 0,\dots,k$ <u>telles que</u>

$$M_{K>0} = \cup_{i=0}^{k} (\partial B_i)_{K>0} .$$

<u>Théorème</u> 3. <u>Pour tout</u> $g \geq 3$ <u>il existe des plongements</u> $f : M_g \to R^3$ <u>pour lesquels l'égalité</u>

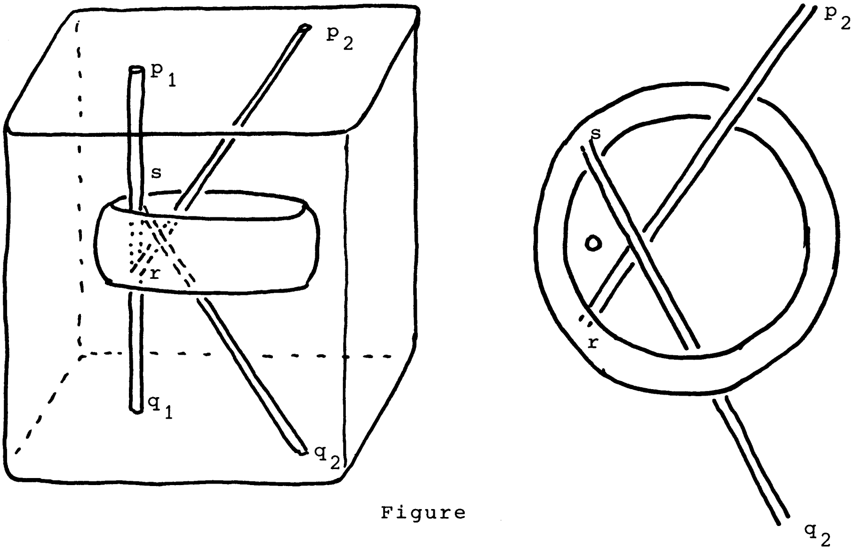
$$\tau(f) = \beta + 4$$

<u>est réalisée</u>, f <u>étant noué</u>.

<u>Par contre, il n'existe jamais de tel plongement pour</u>

$$g = 1 \ \underline{\text{ou}} \ 2 .$$

Dans la figure ci-après, on trouve un exemple pour $g = 3$, $k = 1$, $\tau(f) = \beta + 4 = 12$. C'est le bord d'un cube arrondi dont on retire du centre un tore solide tendu ainsi que trois tubes droits p_1q_1, p_2r et q_2s.



Figure

Rappelons que J. Milnor [6] et I. Fary [1] ont démontré qu'un plongement de S^1 dans R^3 ne peut être "tendu en isotopie" que s'il est non-noué et donc une courbe plane convexe.

Bibliographie :

[1] I. Fary. Bull. Soc. Math. de France LXXVII, (1949), 128-138.

[2] S. Fornari. A bound for total absolute curvature in R^3 .

[3] N.H. Kuiper et W. Meeks. Curvature of knotted surfaces. En préparation.

[4] R. Langevin et H. Rosenberg. Topology 15 (1976), 405-416.

[5] W. Meeks III. Topology 20 (1981), 389-410.

[6] J. Milnor. Ann. of Math n°52 (1950), 248-257.

[7] H. Morton. A criterion for an embedded surface in R^3 to be unknotted.

[8] F. Waldhausen. Topology 7 (1968), 195-203.

[9] P. Wintgen. Totale Absolutkrümmung von Hyperflächen. Beiträge zur Algebra und Geometrie (10), (1980), 87-96.

Abstract. If M_g is a closed knotted surface of genus g in $\mathbb{R}^3$ then the total absolute curvature is at least $4 - \chi(M_g) + 4 = 2g + 6$. This infimum is attained for $g \geq 3$, but never for $g = 1$ or 2 .

adresses : IHES, 35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette (France)
IMPA, Estrada Dona Castorina 110
20060 Rio de Janeiro RJ (Brésil)