

# *Astérisque*

ROBERT LUTZ

## **Structures de contact et systèmes de Pfaff à pivot**

*Astérisque*, tome 107-108 (1983), p. 175-187

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1983\\_\\_107-108\\_\\_175\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__175_0)

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STRUCTURES DE CONTACT ET SYSTÈMES DE PFAFF A PIVOT  
Robert LUTZ

Une structure de contact sur une variété  $M_{2p+1}$  admet des sous-variétés intégrales de dimension au plus  $p$ . Ainsi l'hyperplan associé "pivoté" autour d'une telle sous-variété, en ce sens que localement il traverse toute sous-variété plus grande.

Cette propriété suggère d'étudier les structures de contact sur des variétés fibrées en codimension  $p+1$  par des sous-variétés intégrales. L'exemple classique est celui des fibrés unitaires ou projectifs cotangents munis des structures de contact associées à la forme de Liouville-Cartan ; il s'agit de l'exemple historique de structure de contact, rapidement noyé dans la foule de structures mises en évidence entre temps. Dans le présent travail, il joue un rôle classifiant qui en souligne l'originalité de manière géométrique. L'étude s'étend aisément aux équations et systèmes de Pfaff de classe constante avec des restrictions convenables sur le feuilletage caractéristique ; elle se place dans le cadre  $C^\infty$ .

1. Définitions et exemples

1.1. Définition - Une structure de contact à pivot est un couple constitué d'une structure de contact  $\sigma$  sur une variété  $M_{2p+1}$  et d'une fibration localement triviale  $M_{2p+1} \xrightarrow{q} B_{p+1}$  telle que chaque fibre soit une sous-variété intégrale de  $\sigma$ .

Deux structures de contact à pivot sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme entre les fibrés qui les échange.

1.2. Exemples - (a) La forme  $\omega = x_1 dy_1 + \dots + x_p dy_p + dz$  sur  $R^{2p+1}$  définit une structure de contact à pivot  $q : R^{2p+1} \rightarrow R^{p+1}$  donnée par  $q(x_i, y_i, z) = (y_i, z)$ . Ainsi, grâce au théorème de Darboux (modèle local des structures de contact), on voit que toute structure de contact admet des pivots locaux, en un sens évident. L'organisation de tels pivots locaux en une fibration globale est une forte restriction à la fois sur la variété  $M$  et la structure  $\sigma$ , comme on le verra dans ce travail.

(b) La forme de contact  $\omega = \langle jx, dx \rangle$  sur  $S^3$  (en notation quaternionnienne) admet pour pivot la fibration de Hopf  $q : S^3 \rightarrow S^2$  définie par  $q(x) = \bar{x}ix$ , dont les fibres sont les courbes intégrales du champ de vecteurs  $x + ix$ .

Notons que la structure de contact à pivot déterminée par  $\omega' = \langle xi, dx \rangle$  et  $q' = x\bar{i}x$  est isomorphe à  $(\omega, q)$  par le difféomorphisme de fibré

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 & \xrightarrow{F} & S^3 \\
 q \downarrow & & \downarrow q' \\
 S^2 & \xrightarrow{f} & S^2
 \end{array}
 \quad \text{défini par} \quad
 \begin{array}{l}
 F(x) = -j\bar{x}j \\
 f(b) = -jbj
 \end{array}$$

La forme  $\omega$  et la fibration  $q$  sont invariantes par l'antipodie  $x \mapsto -x$ . Il en résulte une structure de contact à pivot sur l'espace projectif  $P^3$ , définie globalement par une forme de contact, c'est-à-dire transversalement orientable.

(c) Le quotient de  $S^3$  par la relation d'équivalence qui identifie  $x, jx, -x, -jx$  est l'espace lenticulaire  $L(4,1)$  ou "double espace projectif"  $P_2^3$ . Comme  $\omega_{jx} = -\omega_x$  et  $q(jx) = -q(x)$ , on obtient sur  $P_2^3$  une structure de contact à pivot  $P_2^3 \rightarrow S^2$  qui n'est pas transversalement orientable.

On verra pourquoi les fibrations  $L(p,q) \rightarrow S^2$  sur les autres espaces lenticulaires ne sont pas des pivots de structures de contact.

De même la fibration triviale  $S^1 \times S^2 \rightarrow S^2$  est exclue ; la forme de contact induite par  $x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_3 d\theta$  ne convient évidemment pas.

(d) Soit  $n$  un entier relatif non nul ; les formes  $\omega_n = \cos n\theta dx + \sin n\theta dy$  sont de contact sur  $S^1 \times R^2$  et admettent pour pivot la fibration triviale.

Cependant, les structures de contact associées  $\sigma_n$  sont toutes isomorphes à  $\sigma_1$  par les difféomorphismes suivants, qui conservent la fibre  $x = y = 0$  point par point

$$\begin{pmatrix} x \circ F_n \\ y \circ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - n \sin\theta & \cos n\theta \sin n\theta \\ \sin\theta & n \cos\theta - \sin n\theta \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\theta \circ F_n = \theta$$

Ainsi, l'entier  $n$  n'est pas un invariant par les difféomorphismes respectant une fibre ; cependant, les  $F_n$  ne respectent qu'une seule fibre du pivot commun ; comme structures de contact à pivot, les  $\sigma_n$  ne sont pas isomorphes entre elles.

(e) Les formes  $\cos \frac{n}{2} \theta dx + \sin \frac{n}{2} \theta dy$  sur  $R \times R^2$  sont de contact et vérifient  $\omega_{\theta+\pi} = (-1)^n \omega_\theta$ . Elles définissent donc des structures de contact à pivot trivial sur  $P^1 \times R^2$  qui sont transversalement orientables si et seulement si  $n$  est pair, auquel cas leurs images inverses par le revêtement à 2 feuillets de  $P^1 \times R^2$  par  $S^1 \times R^2$  sont les exemples précédents.

(f) Par passage au quotient, on obtient des exemples analogues sur  $S^1 \times T^2$  et  $P^1 \times T^2$  (on distingue a dessein  $S^1$  de  $P^1$ ).

(g) Si  $B_{p+1}$  est une variété parallélisable, la fibration triviale  $B_{p+1} \times S^p \rightarrow B_{p+1}$  est un pivot pour la structure de contact induite par la forme  $\sum_{i=1}^{p+1} x_i \omega_i$  où  $\{\omega_i\}$  est une base de formes sur  $B$ .

Ainsi  $S^3 \times S^2$ ,  $S^7 \times S^6$ ,  $T^{p+1} \times S^p$  admettent des structures à pivot trivial. Par contre, on verra que  $T^p \times T^{p+1}$ ,  $S^{p+1} \times S^p$  ( $p \neq 2,6$ ),  $S^{p+1} \times T^p$  sont exclus. On a également une structure quotient non transversalement orientable sur  $B_{p+1} \times P^p$ .

(h) Si  $\overset{\wedge}{M} \xrightarrow{g} M$  est un revêtement, toute structure de contact à pivot  $M \xrightarrow{q} B$  se relève en une structure de contact à pivot  $M \xrightarrow{q \circ g} B$ .

2. Une interprétation géométrique de la condition de contact

2.1. Une équation de Pfaff  $\sigma$  sur une variété  $M_{2p+1}$  est une section du fibré projectif cotangent  $P^* M \rightarrow M$ ; les points de  $P^*_x M$  sont donc des droites de formes linéaires sur  $T_x(M)$ .

Soit  $q : M_{2p+1} \rightarrow B_{p+1}$  une application de rang constant maximum, telle que, pour tout  $x \in M$ ,  $\sigma_x$  soit orthogonale au noyau de l'application tangente  $q_x^t$ . Au couple  $(\sigma, q)$  est associée l'application  $\phi : M \rightarrow P^* B$  définie de la manière suivante

si  $\mu \in \sigma_x$ ,  $\mu \neq 0$ , il existe une unique forme linéaire non nulle  $\bar{\mu}$  sur  $T_{q(x)}(B)$  telle que  $\bar{\mu} \circ q_x^t = \mu$ , car  $q_x^t$  est surjectif et  $\mu(\text{Ker } q_x^t) = 0$ ; comme  $k\bar{\mu} = \bar{\mu}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , la droite de  $T_{q(x)}^*(B)$  engendrée par  $\bar{\mu}$  ne dépend que de  $x, \sigma, q$ . On la note  $\phi(x)$ , de sorte que  $\pi \circ \phi = q$  si  $\pi : P^* B \rightarrow B$  est la projection canonique.

2.2. La variété  $P^* B$  admet une structure de contact naturelle  $\sigma^0$ , dite de Liouville-Cartan, qui résulte de sa constitution interne: en  $\alpha \in P_{\pi(\alpha)}^*(B)$ ,  $\sigma^0_\alpha$  est la droite des formes linéaires sur  $T_\alpha(P^* B)$  qui sont du type  $v \circ \pi_\alpha^t$ , où  $v$  parcourt la droite  $\alpha$ .

Ce prototype historique des structures de contact admet pour pivot la fibration  $\pi : P^* B \rightarrow B$ , dont la fibre type est l'espace projectif  $P^p$ .

2.3. Lemme - La structure  $\sigma^0$  est liée à la construction 2.1. par la formule  $\sigma^0 = \sigma$ .

En effet, si  $\mu$  engendre la droite  $(\phi^* \sigma^0)_x$ , il existe  $\xi \in \sigma^0_{(x)}$ ,  $\xi \neq 0$ , tel que  $\mu = \xi \circ \phi_x^t$ ; il existe donc  $v \in \phi(x)$ ,  $v \neq 0$ , tel que  $\xi = v \circ \pi_{(x)}^t$ , ou encore  $\mu = v \circ \pi_{(x)}^t \circ \phi_x^t = v \circ q_x^t$ . Il en résulte que  $\mu \in \sigma_x$ , de sorte que  $(\phi^* \sigma^0)_x = \sigma_x$ . On en déduit la

2.4. Proposition - Pour que  $\sigma$  soit de contact, il faut et il suffit que  $\phi$  soit de rang maximum en tout point de M.

En effet,  $\sigma^0$  et  $\sigma$  admettent des relèvements locaux tels que  $\phi^* \omega_0 = \lambda \omega$ ,  $\lambda$  fonction sans zéro. Comme  $\phi^*(\omega_0 \wedge d\omega_0^p) = \lambda^{p+1} \omega \wedge d\omega^p$  et que  $\omega_0 \wedge d\omega_0^p$  est une forme volume,  $\phi$  est de rang  $2p+1$  partout si et seulement si  $\sigma$  est de contact.

2.5. On en déduit de cette discussion la caractérisation locale suivante de la condition de contact

Proposition - Soit  $\sigma$  une équation de Pfaff sur  $R^{2p+1}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i)  $\sigma$  est de contact
- (ii) pour tout pivot local de  $\sigma$ , l'application  $\phi$  correspondante est de rang maximum
- (iii) il existe un pivot local ayant cette propriété.

2.6. Nous savons maintenant qu'une structure de contact à pivot détermine un difféomorphisme local  $\phi : M \rightarrow P^*B$  tel que  $\sigma = \phi^* \sigma^0$  et  $\pi \circ \phi = q$ . En restriction à chaque fibre de  $q : M \rightarrow B$ ,  $\phi$  est également un difféomorphisme local. En voici une conséquence immédiate

Proposition - Si la fibre-type du pivot est compacte et connexe, elle est difféomorphe à  $S^p$  ou  $P^p$ .

En effet la fibre est alors un revêtement de l'espace projectif.

2.7. Soit  $\tau$  une structure de contact sur une variété connexe N. Il existe un atlas  $\{U_i\}$  tel que sur chaque carte,  $\tau$  admette un relèvement en une forme de contact  $\omega_i$ . Sur  $U_i \cap U_j$ , on a  $\omega_i = \lambda_{ij}^j \omega_j$ , où  $\lambda_{ij}^j$  est une fonction sans zéro. Le cocycle

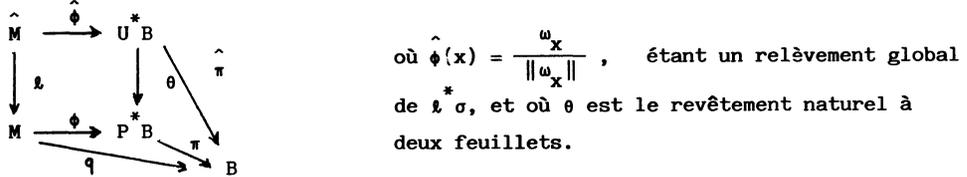
$$g_{ij}^j = \frac{\lambda_{ij}^j}{|\lambda_{ij}^j|} \text{ à valeurs dans le groupe } \{-1, +1\} \text{ définit un revêtement connexe } \xi : \hat{N} \rightarrow N$$

tel que la structure de contact  $\hat{\tau} = \xi^* \tau$  soit transversalement orientable ; la structure  $\tau$  est transversalement orientable ou non selon que  $\xi$  est l'identité ou admet deux feuillets.

Ainsi, la structure de Liouville-Cartan sur  $P^*B$  détermine une structure  $\sigma_B$  sur  $P^*B$ , lequel est isomorphe au fibré unitaire cotangent  $U^*B$  relatif à une quelconque métrique riemannienne sur B. De manière précise,  $\sigma_0$  admet pour relèvement la forme de Liouville-Cartan  $\omega^0$  définie de la manière suivante

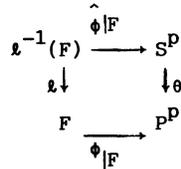
pour tout  $v \in U^*(B)$ ,  $\omega_v^0 = v \circ \hat{\pi}_v^t$  où  $\hat{\pi}: U^*B \rightarrow B$  est la fibration naturelle de fibre-type  $S^p$ .

2.8. Dans le cas d'une structure de contact à pivot de base  $B$ , on obtient le diagramme commutatif suivant



On a  $\theta^* \sigma^0 = \hat{\sigma}^0$ , de sorte que  $\hat{\phi}^* \sigma^0 = \sigma$  implique  $\hat{\phi}^* \hat{\sigma}^0 = \mathfrak{L}^* \sigma$ ; il en résulte que  $\hat{\phi}$  est un difféomorphisme local, comme  $\phi$ .

Si la fibre-type de  $q$  est compacte et connexe, on en déduit un diagramme de revêtements connexes



Si  $\mathfrak{L}$  est l'identité, le nombre de feuilletts de  $\hat{\phi}|_F$  est double de celui de  $\hat{\phi}|_F$ ; si  $\mathfrak{L}$  est à 2 feuilletts,  $\phi|_F$  et  $\hat{\phi}|_F$  ont le même nombre de feuilletts. En particulier pour  $p > 1$ ,  $\hat{\phi}|_F$  est un difféomorphisme; d'où la

Proposition - Si la fibre  $F$  est compacte et connexe, et  $p > 1$ , elle est difféomorphe à  $S^p$  ou à  $P^p$  selon que  $\sigma$  est transversalement orientable ou non.

### 3. Classification des structures de contact à pivot compact et connexe

3.1. Définition - On dira qu'un pivot  $M \xrightarrow{q} B$  est compact et connexe si  $M$  et la fibre-type  $F$  ont ces propriétés.

Les applications  $\phi$  et  $\hat{\phi}$  de 2.8. sont alors des revêtements à  $n$  et  $\hat{n}$  feuilletts. Si  $\sigma$  est transversalement orientable, on a  $n = 2\hat{n}$ ; sinon  $n = \hat{n}$ .

Lemme -  $n$  est égal au nombre de feuilletts de  $\phi/F$ .

En effet, si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  est la contre-image par  $\phi$  d'un point  $y \in P^*B$ , on a  $q(x_i) = \pi(\phi(x_i)) = \pi(y)$ , de sorte que  $x_i \in F_{\pi(y)}$ ; la contre-image de  $y$  par  $\phi|_{F_{\pi(y)}}$  est donc égale à  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

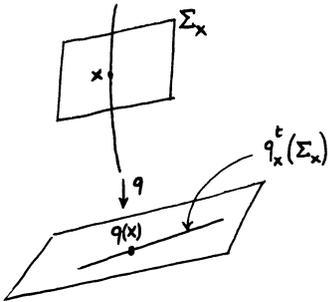
3.2. Théorème - Pour  $p > 1$ , toute structure de contact à pivot compact et connexe de base  $B$  est isomorphe à celle de Liouville-Cartan sur  $U^*B$  si elle est transversalement orientable, sur  $P^*B$  si elle ne l'est pas.

En effet, d'après le lemme  $\hat{n} = 1$  et  $\hat{\phi}$  est un difféomorphisme ; dans le premier cas  $M = \hat{M}$  et  $\hat{\phi}^* \hat{\sigma}_O = \sigma$  ; dans le second,  $n = \hat{n} = 1$  et  $\phi$  est un difféomorphisme tel que  $\phi^* \sigma_O = \sigma$ .

Remarques - 1. La connexité de la fibre  $F$  est essentielle pour que  $\hat{\phi}_F$  soit un difféomorphisme.

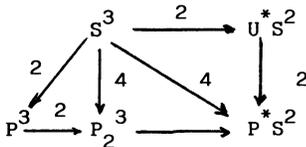
2. Le théorème caractérise les structures de Liouville-Cartan pour  $p > 1$ . Il élimine un grand nombre d'espaces fibrés comme pivots de structures de contact, par exemple les produits  $T^p \times T^{p+1}$ ,  $S^{p+1} \times S^p$  ( $p \neq 2, 6$ ),  $S^{p+1} \times T^p$  etc...

3.3. Dans le cas de la dimension 3, le nombre  $n$  admet l'interprétation géométrique suivante



lorsque  $x$  parcourt une fibre de  $q$ , la projection du plan  $\Sigma_x$  défini par la structure de contact est une droite qui tourne autour de l'origine dans le plan  $T_{q(x)}(B)$ . Le degré  $n$  représente le nombre de tours de cette droite ; dans le cas transversalement orientable, on peut sélectionner une demi-droite dont le nombre de tours est égal à  $\hat{n}$ .

3.4. Dans l'exemple (b) de 1.2. sur  $S^3$ , le degré  $\hat{n}$  est égal à 2. Il en résulte le diagramme de revêtements suivant



On en déduit des difféomorphismes  $U^*S^2 \cong P^3$  et  $P^*S^2 \cong P^3$ .

Ainsi, toute structure de contact à pivot de base  $S^2$  est isomorphe à l'une des trois structures définies en (b) et (c).

En particulier, sur la sphère  $S^3$ , toute structure de contact à pivot de base  $S^2$  est isomorphe à celle de l'exemple (b). Comme toutes les fibrations en cercle de  $S^3$  sont isomorphes à celle de Hopf, on en déduit le

Théorème \* - Il existe une et une seule structure de contact (à difféomorphisme près) sur  $S^3$  admettant un pivot.

Il en résulte que les structures exotiques obtenues dans [L], ou récemment dans [B], ne possèdent pas de pivot. Il serait intéressant de constater directement ce phénomène par un argument géométrique.

3.5. Lorsque B est la tore  $T^2$ , les fibrés cotangents sont des produits, de sorte que dans tous les cas  $M = T^3$ . En utilisant la classification des revêtements compacts de  $T^3$  qui donnent une fibre connexe quand on les compose avec la projection sur  $T^2$ , on obtient le

Théorème - Toute structure de contact à pivot transversalement orientable, compacte connexe, de base T, de degré n, est isomorphe à la structure définie par la forme  $\cos n\theta d\theta_1 + \sin n\theta d\theta_2$  sur  $T^3$ .

Dans le cas non transversalement orientable, on a un énoncé analogue avec les exemples (e) de 1.2., i.e.  $\cos \frac{n}{2} \theta d\theta_1 + \sin \frac{n}{2} \theta d\theta_2$  sur  $P^1 \times T^2$ , n impair.

3.6. Dans cette étude, il était essentiel que l'on ait une projection globale  $q$  de fibres intégrales, afin d'obtenir une application  $\phi$  globale. Cependant, il existe une version faible de la propriété sur le rang de  $\phi$  qui peut donner des renseignements sur une sous-variété intégrale.

En effet, soit  $\sigma$  une structure de contact sur  $M_{2p+1}$  et V une sous-variété intégrale de dimension p. Soit  $q : M \rightarrow B_{p+1}$  une application de rang maximum constante le long de V (i.e.  $q(V) = \{b\}$ ). Notons  $\psi : V \rightarrow P_b^*$  l'application définie par la condition  $\mu \in \psi(x)$  si  $\bar{\mu} \circ q_x^t \in \sigma_x$ .

En général, on ne peut rien dire sur le rang de  $\psi$ , car le lien entre  $\sigma$  et  $q$  est trop faible, en l'absence de contrainte sur les fibres voisines de V.

---

\* Jusque vers 1968, l'exemple (b) était considéré comme la structure de contact "canonique" sur  $S^3$ , pour cause présumée d'unicité. En fait, il existe une infinité de structures deux à deux non isomorphes sur  $S^3$ ; il est amusant que ce volume contienne deux autres articles ([V] et [H.L.]) qui "reconstruisent" l'exemple (b) de manière différente !

Considérons un représentant local  $\omega$  de  $\sigma$  près d'un point  $x$  de  $V$  et des vecteurs  $u_1, \dots, u_p \in T_x(V)$ . Soient  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p$  des champs de vecteurs qui étendent ces vecteurs ; il est facile de voir que la forme  $\omega_x \wedge d(\omega(\tilde{u}_1))_x \wedge \dots \wedge d(\omega(\tilde{u}_p))_x$  ne dépend que des  $u_i$  et que sa nullité est indépendante du représentant choisir pour  $\sigma$ .

On dira que  $q$  et  $\sigma$  ont un contact d'ordre 2 le long de  $V$  si les tenseurs ainsi définies sont nuls en tout point de  $V$ .

Dans ces conditions, on montre aisément que  $\psi$  est de rang maximum.

Ainsi, s'il existe un tel  $q$ , et si  $V$  est compacte connexe, elle est difféomorphe à  $S^p$  ou  $P^p$  selon que  $\sigma$  est transversalement orientable ou non.

En dimension 3, (i.e.  $p = 1$ ), il existe des projections avec contact d'ordre 2 le long de n'importe quelle courbe intégrale, car les structures de contact admettent dans cette dimension pour modèle local au voisinage d'une telle courbe les structures associées à  $\cos \theta \, dx \pm \sin \theta \, dy$  ou  $\cos \frac{\theta}{2} \, dx \pm \sin \frac{\theta}{2} \, dy$  (selon l'orientabilité).

On peut penser que les structures associées aux formes induites par  $\sum x_i \, dy_i$  sur  $S^p \times R^{p+1}$  constituent des modèles pour les structures de contact en dimension  $2p+1$  au voisinage d'une sphère  $S^p$  intégrale.

Note - A la suite du présent exposé, P. DAZORD [D] a appliqué une remarque analogue au cas où le pivot est remplacé par un feuilletage intégral. Dans certains cas il en déduit que des variétés de Legendre compactes sont des sphères.

#### 4. Généralisation aux équations de Pfaff de classe constante

4.1. Soit  $\sigma$  une équation de Pfaff sur une variété  $M_n$  et  $\omega$  un relèvement local de  $\sigma$  au voisinage d'un point  $x$ .

Rappelons que la classe\* de  $\sigma$  en  $x \in M$  est la codimension du sous-espace caractéristique  $C_x(\sigma) = \{u \in T_x(M), \omega_x(u) = 0 \text{ et } (u \lrcorner d\omega_x) \wedge \omega_x = 0\}$  ; c'est un entier impair  $2s+1$ , qui est bien défini car  $(u \lrcorner d(f\omega_x)) \wedge f\omega_x = f^2 (u \lrcorner d\omega_x) \wedge \omega_x - \omega_x(u) f d f \lrcorner \omega_x$  pour toute fonction  $f$  sur  $M$ . En pratique,  $s$  se calcule par les conditions  $\omega_x \wedge d\omega_x^s \neq 0$  et  $\omega_x \wedge d\omega_x^{s+1} = 0$ . Si de plus  $d\omega_x^{s+1} = 0$ , on dit que la forme  $\omega$  est de classe  $2s+1$  en  $x$ , ce qui équivaut à ce que la codimension du sous-espace  $C_x(\omega) = \{u \in T_x(M), \omega_x(u) = 0 \text{ et } u \lrcorner d\omega_x = 0\}$  soit  $2s+1$ .

---

\* Cette notion d'apparence simple a été bien moins développée que d'autres aspects de l'Oeuvre d'Elie CARTAN. Elle garde pour moi le charme du premier mystère auquel George REEB m'a initié, il y a bien des années.

4.2. Lorsque la classe de  $\sigma$  est constante,  $C(\sigma)$  définit un champ de plans complètement intégrable de codimension  $2s+1$  ; il enveloppe le feuilletage caractéristique  $F$  de  $\sigma$ .

La question de l'existence d'une équation de Pfaff de classe constante admettant un feuilletage  $F$  donné a été très peu étudiée pour  $2s+1 < n$ . On obtient un exemple banal en choisissant pour  $F$  une fibration localement triviale

$M_n \xrightarrow{q} N_{2s+1}$  au-dessus d'une variété munie d'une structure de contact ; l'image inverse de celle-ci est de classe  $2s+1$  et de feuilletage  $F$ . Localement, toute équation de Pfaff de classe constante est de ce type (modèle local), mais la situation globale peut être beaucoup plus riche.

4.3. Il existe une famille d'exemple naturels, qui généralise les structures de Liouville-Cartan et laisse une part d'arbitraire dans le choix du feuilletage  $F$ . En effet, soit  $\bar{F}$  un feuilletage de codimension  $s+1$  sur une variété  $B_{n-s}$  et  $T^*(B, \bar{F})$  la sous-variété des  $\alpha \in T^*B$  nulles sur le plan tangent à la feuille de  $\bar{F}$  passant par la projection de  $\alpha$ .

Notons  $P^*(B, \bar{F}) \xrightarrow{\pi} B$  le fibré projectif associé et  $\sigma^{o, \bar{F}}$  l'équation de Pfaff qui associe à  $\alpha \in P^*(B, \bar{F})$  la droite des formes linéaires sur  $T_\alpha(P^*(B, \bar{F}))$  du type  $v \circ \pi_\alpha^t$ , où  $v$  parcourt  $\alpha$ .

Cas particulier - Si  $B = W_{s+1} \times \bar{F}_{n-(2s+1)}$ , on a, pour le feuilletage trivial  $P^*(B, \bar{F}) = P^*W \times \bar{F}$  et  $\sigma$  est l'image inverse de la structure de Liouville-Cartan sur  $P^*W$  ; ainsi  $\sigma$  est de classe  $2s+1$  et son feuilletage caractéristique est la fibration triviale  $P^*W \times \bar{F} \rightarrow P^*W$ . Ici une fibre de  $\pi$  et une feuille sont transverses et le long d'une fibre de  $\pi$ , les feuilles ont la même projection. Les fibres sont des sous-variétés intégrales de  $\sigma$ .

Ce cas particulier décrit la situation locale du cas général, ce qui montre que  $\sigma^{(o, \bar{F})}$  est de classe  $2s+1$  et que son feuilletage  $F$  se projette sur  $\bar{F}$  par  $\pi$ , fibres et feuilles étant transverses. On remarque que toutes les feuilles de  $F$  le long d'une même fibre sont diffeomorphes à la feuille correspondante de  $\bar{F}$ .

Ces exemples suggèrent la définition suivante

4.4. Définition - Une équation de Pfaff à pivot de classe  $2s+1$  est un couple constitué d'une fibration localement triviale  $M_n \xrightarrow{q} B_{n-s}$  et d'une équation de Pfaff  $\sigma$  sur  $M$  de classe  $2s+1$  tels que

- (i) Les fibres de  $q$  sont des sous-variétés intégrales de  $\sigma$ .
- (ii) En chaque  $x \in M$ ,  $\text{Ker } q_x^t \cap C_x(\sigma) = \{0\}$ .
- (iii) Si  $q(x) = q(x')$ , alors  $q_x^t(C_x(\sigma)) = q_{x'}^t(C_{x'}(\sigma))$ .

A une telle structure est associé un champ de plans  $\bar{C}$  sur B de codimension  $s+1$ , tel que  $\bar{C}_{q(x)} = q_x^t(C_x(\sigma))$ . D'après (ii), la projection d'une feuille de F est une sous-variété intégrale de  $\bar{C}$  de même codimension.

Il en résulte que  $\bar{C}$  est complètement intégrable ; le feuilletage  $\bar{F}$  correspondant est tel que le long d'une fibre de q, toutes les feuilles se projettent sur une même feuille de  $\bar{F}$  (et la restriction de q à une feuille est de rang maximum).

Dans certains cas les feuilles de F sont des revêtements de celles de  $\bar{F}$  ; éventuellement elles leur sont difféomorphes.

On définit comme en 1.1. une notion d'isomorphisme, qui implique l'isomorphisme des feuilletages F et  $\bar{F}$ .

Si  $\phi : N_n + M_n$  est de rang n, on obtient une image inverse de l'équation à pivot, qui admet la même base feuilletée  $(B, \bar{F})$ .

Cette procédure permet d'obtenir toutes les équations à pivot, à partir des exemples 4, 3.

4.5. En effet, il existe comme en 2.1. une application naturelle

$$\phi : M + P^*(B, \bar{F}) \text{ telle que } \pi \circ \phi = q \text{ et } \phi^* \sigma^O_{\bar{F}} = \sigma.$$

Explicitement, pour chaque  $x \in M$  et  $\mu \in \sigma_x$ ,  $\mu \neq 0$ , il existe une unique forme linéaire non nulle  $\bar{\mu}$  sur  $T_{q(x)}(B)$  qui annule  $\bar{C}_{q(x)}$  ; la droite engendrée par  $\bar{\mu}$  est donc un élément  $\phi(x)$  de  $P^*_{q(x)}(B, \bar{F})$ . On vérifie aisément que  $\phi^* \sigma^O = \sigma$ , et grâce à la condition (ii), que  $\phi$  est de rang n en tout point.

4.6. Lorsque  $\sigma$  admet un relèvement global  $\omega$  de classe  $2s+1$ , on obtient comme en 2.8. une application  $\hat{\phi} : M + U^*(B, \bar{F})$ , où  $U^*$  est un fibré unitaire associé à  $T^*(B, \bar{F})$  ;  $\hat{\phi}$  est à nouveau de rang maximum.

4.7. Lorsque M et la fibre de q sont compactes et connexes,  $\hat{\phi}$  (resp  $\hat{\phi}$ ) est un revêtement ainsi que sa restriction à une fibre. Il en résulte que les fibres de q sont difféomorphes à  $P^S$  (resp  $S^S$ ) et seul le cas  $s = 1$  permet des structures non isomorphes.

Il reste à étendre cette étude aux systèmes de Pfaff ; on s'inspire de la généralisation naturelle des structures de contact proposée dans [H] et [G.H], qui se trouve ainsi confortée a posteriori par le fait qu'elle s'adapte parfaitement à la notion de pivot.

## 5. Systèmes de Pfaff à pivot de classe constante

5.1. Un système de Pfaff  $\sigma$  de rang r sur une variété  $M_n$  est une section du fibré en grassmanniennes cotangent  $G^{r*} M \xrightarrow{\pi} M$  ; les points  $G^{r*}_x(M)$  sont des r-plans de

formes linéaires sur  $T_x(M)$ . Un relèvement local de  $\sigma$  est une section  $(\omega_1, \dots, \omega_r)$  de la somme de Whitney de  $r$  exemplaires de  $T^*M$ , qui engendrent  $\sigma$  en chaque point. Deux relèvements s'échangent par une fonction  $(a_i^j)$  à valeurs dans  $Gl(r, R)$  par la formule  $\omega'_i = \sum a_i^j \omega_j$ .

Rappelons que la dimension de  $G^{r*}M$  est  $n + r(n-r)$ .

Le sous-espace caractéristique de  $\sigma$  en  $x$  est défini via un relèvement local arbitraire par

$$C_x(\sigma) = \{u \in T_x(M), \omega_i(u) = 0$$

et  $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) \wedge (u \lrcorner d\omega_i)_x = 0 \text{ pour tout } i\}.$

La classe de  $\sigma$  en  $x$  est  $n - \dim C_x(\sigma)$  ; lorsqu'elle est constante,  $C(\sigma)$  est complètement intégrable et enveloppe un feuilletage  $F$  de codimension  $cl(\sigma)$ .

5.2. On se propose d'étudier les systèmes de classe constante qui admettent une fibration intégrale transverse au feuilletage caractéristique, avec des fibres de dimension aussi grande que possible pour que le supplémentaire du plan tangent à la feuille complété de celui de la fibre dans le noyau du système soit contraint de "pivoter".

D'après une remarque de [H], on sait que la dimension maximale des variétés intégrales transverses aux feuilles dans un système de rang  $r$  et classe constante  $c$  est au plus  $\mu(r, c) = \frac{r(c-r)}{r+1}$ .

Exemples a) Sur  $R^n$ , le système représenté par les formes

$$\omega_1 = dx_1 + \sum_{j=1}^s y_i^j dz_j$$

$$\vdots$$

$$\omega_r = dx_r + \sum_{j=1}^s y_r^j dz_j$$

est de rang  $r$  et de classe  $(r+1)s+r$  ; on a ici  $\mu(r, c) = rs$  et effectivement, les champs  $\frac{\partial}{\partial y_i^j}$  engendrent des fibres intégrales de dimension  $rs$  transverses aux feuilles

(engendrées par les composantes qui n'apparaissent pas dans les  $\omega_i$ ).

b) Sur  $R^n$ ,  $n > r+2$ , le système

$$\omega_1 = dx_1 + x_2 dy$$

$$\omega_2 = dx_2 + x_3 dy$$

$$\vdots$$

$$\omega_r = dx_r + x_{r+1} dy$$

est de rang  $r$  et de classe  $r+2$  ; il admet des fibres intégrales engendrées par  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  et on ne peut faire mieux car  $\mu(r, r+2) = \frac{2r}{r+1} < 2$  pour  $r > 1$ .

Remarque - Pour  $r = 1$ , la classe est impaire, de sorte que  $\mu(1, 2s+1) = s$  qui est entier ; en général  $\mu(r, c)$  n'est pas entier, car  $c$  peut prendre n'importe quelle valeur entre  $r$  et  $n$ . Supposons  $\mu(r, c)$  entier ; alors  $r+1$  divise  $c-r$ , ie  $c$  est de la forme  $(r+1)s+r$ . Cependant, il existe des systèmes ayant une classe de ce type et qui ne sont pas isomorphes localement à l'exemple a) ; d'autres invariants, par exemple le rang du système dérivé, restent libres. Voici un exemple, tiré de [H] (ici  $r = 3, s = 1, c = 7$ ).

$$\omega_1 = dx_1 + x_4 dx_5$$

$$\omega_2 = dx_2 + x_6 dx_7$$

$$\omega_3 = dx_3$$

ici le premier système dérivé est de rang 1, alors que dans les systèmes de type a) il est nul.

Un calcul direct montre que cet exemple n'admet pas de variété intégrale de dimension  $rs = 3$ . De [H], on déduit que le système (a) est un modèle local pour les systèmes de classe  $(r+1)s+r$  qui admettent une fibration intégrale locale de dimension  $rs$  transverse au feuilletage caractéristique.

5.3. Supposons pour l'instant, la classe de  $\sigma$  égale à  $n$ , afin d'éviter la complication supplémentaire due au feuilletage caractéristique, et considérons une fibration intégrale  $q : M_n \rightarrow B_{p+r}$ .

Alors en chaque point  $x \in M$  et pour chaque  $\mu \in \sigma_x$  il existe une unique forme linéaire non nulle  $\bar{\mu}$  sur  $T_{q(x)}(B)$  définie comme en 2.1. par  $\bar{\mu} \circ q_x^t = \mu$ , puisque  $q_x^t$  est surjectif et  $\text{Ker } q_x^t$  orthogonal à  $\sigma_x$ .

On note  $\phi(x)$  le  $r$ -plan engendré par  $\bar{\mu}$  lorsque  $\mu$  parcourt  $\sigma_x$ , ce qui donne une application  $\phi : M \rightarrow G^{r*}(B)$  telle que  $\pi \circ \phi = q$ .

Comparons les dimensions ; d'une part  $n$ , d'autre part  $(r+1)p+r$  avec fibres de dimension  $rp$  à l'arrivée.

La dimension  $n-(p+r)$  des fibres de  $q$  est au plus  $\mu(n, r)$ , de sorte que  $\frac{r(n-r)}{r+1} > n - (p+r)$  ou encore  $n < (r+1)p+r$ .

Ainsi, le seul cas où le rang de  $\phi$  soit susceptible d'être maximum est celui où  $n = (r+1)p+r$ , ie celui des  $r$ -structures de contact.

5.4. Revenons au cas général, de la classe constante. D'après la remarque précédente, il convient de s'intéresser aux systèmes de classe  $(r+1)s+r$  avec fibres intégrales de dimension  $rs$  transverses aux feuilles caractéristiques. Plus précisément, la généralisation de 4.4. s'énonce ainsi

Définition - Un système de Pfaff à pivot de classe  $(r+1)s+r$  est un couple constitué d'une fibration localement triviale  $M \xrightarrow{q} B$  et d'un système  $\sigma$  sur  $M$  de classe  $(r+1)s+r$  tels que

- (i) les fibres de  $q$  sont des sous-variétés intégrales de  $\sigma$
- (ii) en chaque  $x \in M$ ,  $\text{Ker } q_x^t \subset C_x(\sigma) = \{0\}$
- (iii) si  $q(x) = q(x')$ , alors  $q_x^t(C_x(\sigma)) = q_{x'}^t(C_{x'}(\sigma))$ .

On obtient à nouveau un feuilletage  $\bar{F}$  sur  $B$ , de codimension  $r+s$ , projection du feuilletage  $F$  de  $\sigma$ .

5.5. On définit maintenant comme en 4.3. un fibré  $G^{r*}(B, \bar{F}) \rightarrow B$  et un système  $\sigma^{O, \bar{F}}$  qui associe à  $\alpha \in G_{\pi(\alpha)}^{r*}(B, \bar{F})$  le  $r$ -plan des formes linéaires sur  $T_{\alpha}(G^{r*}(B, \bar{F}))$  du type  $v \circ \pi_{\alpha}^t$ ,  $v \in \alpha$ .

Les dimensions sont les mêmes que celles de la fibration  $M \xrightarrow{q} B$  et on a un système à pivot de classe  $(r+1)s+r$ .

5.6. A la structure à pivot  $(\sigma, q)$  est maintenant associée comme en 4.5. une application naturelle  $\phi : M \rightarrow G^{r*}(B, \bar{F})$  telle que  $\pi \circ \phi = q$  et  $\phi^* \sigma^O = \sigma$ , et à nouveau  $\phi$  est de rang  $n$  en tout point.

Dans le cas compact connexe, on a un revêtement et la fibre de  $q$  est un revêtement de la grassmannienne correspondante.

5.6. Le système  $\sigma$  est transversalement orientable si comme fibré vectoriel sur  $M$  il est orientable. Cela signifie qu'on peut trouver des représentants locaux qui se déduisent l'un de l'autre par des matrices à déterminant positif. On remplace alors dans les constructions précédentes  $G^r$  par son revêtement à deux feuillets  $G^{r*}$  dont les fibres sont les grassmanniennes orientées  $\frac{so(n)}{so(r) \times so(n-r)}$  à la place de  $\frac{o(n)}{o(r) \times o(n-r)}$ . On obtient des résultats analogues.

- [G.H.] M. GOZE et Y. HARAGUCHI, CRAS Série I 294 p. 95 (1982)
- [H] Y. HARAGUCHI, Thèse Université Mulhouse (1981)
- [D] P. DAZORD, Sur les feuilletages à feuilles sphériques. A paraître CRAS.
- [L] R. LUTZ, Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension 3. Ann. Inst. Fourier XXVII 1977.
- [H.L.] Th. HANGAN et R. LUTZ, Ce volume.
- [V] F. VARELA, Ce volume.
- [B] D. BENNEQUIN, Ce volume.

Université de Haute-Alsace  
 Département de Mathématiques  
 4, rue des Frères Lumière  
 68093 MULHOUSE CEDEX