Astérisque

F. VARELA

Sur l'orientation définie par une forme de Pfaff de classe maximale

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 169-173

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__169_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.169-173

SUR L'ORIENTATION DÉFINIE PAR UNE FORME DE PFAFF DE CLASSE MAXIMALE

F. VARELA

1. - Dans cet exposé, je voudrais faire une remarque sur le comportement par C^o-perturbation, de l'orientation définie par une forme de Pfaff de classe maximale sur R^n.

Cette remarque est inspirée dans le fait suivant : "Pour un difféomorphisme f de R^n, le signe du jacobien de f est C^o-stable".

2. - Soit maintenant ω une forme de Pfaff de classe deux sur R^2, c'est-à-dire :

$$d\omega = f(x,y)\, dx \wedge dy \quad \text{avec} \quad f > 0 \quad \text{partout.}$$

La formule de Stokes montre que si ω' est de classe deux, et C^o-proche à ω alors $d\omega'$ définit la même orientation que celle de $d\omega$.
Par contre, dans R^{2n+1} on a la propriété suivante : $(n > 1)$

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> $\omega = x_1 dx_2 + \ldots + x_{2n-1} d\, x_{2n} + dx_{2n+1}$ <u>la forme de contact de Darboux sur</u> R^{2n+1}. <u>Alors dans tout</u> C^o<u>-voisinage de</u> ω, <u>il existe une forme de Pfaff</u> ω' <u>vérifiant</u> :

$$\omega' \wedge [d\omega']^n = -\lambda^2 \omega \wedge [d\omega]^n \; ; \qquad \lambda \text{ nombre réel donné.}$$

Pour le prouver, il suffit de prendre :

$$\omega' = x_1 d\, x_2 + \ldots\, x_{2n-1} d\, x_{2n} + a_1(x_{2n-3}, x_{2n-2})\, d\, x_{2n-1} + a_2(x_{2n-3}, x_{2n-2}) d\, x_{2n}$$

où a_1 et a_2 sont des fonctions analytiques sur R^{2n+1} vérifiant :

a) $a_1^2 + a_2^2 < \omega$

b) $da_1 \wedge da_2 = \lambda^2 d\, x_{2n-3} \wedge d\, x_{2n-2}$

<u>Remarque 1</u>. Les fonctions a_1 et a_2 sont données par :

$$a_1 = f(x_{2n-3}, x_{2n-2}) \cos \lambda\, g(x_{2n-3}, x_{2n-2})$$

$$a_2 = f(x_{2n-3}, x_{2n-2}) \sin \lambda\, g(x_{2n-3}, x_{2n-2})$$

$$\text{avec}\quad \begin{cases} f = \omega^{\frac{1}{2}}\left(1 + e^{x_{2n-3} + x_{2n-2}}\right)^{-1} \\[2ex] g = \omega^{-1-(x_{2n-3}+x_{2n-2})}\left(1 + e^{x_{2n-3} + x_{2n-2}}\right)^{3}(x_{2n-3}+1) \end{cases} \qquad [1]$$

COROLLAIRE 1. <u>L'ensemble des formes de contact qui définissent la même orientation sur</u> R^{2n+1} <u>n'est pas</u> C°- <u>ouvert pour</u> $n \geq 2$.

<u>Remarque 2</u>. Le même argument montre que la forme :

$$= x_1 d\, x_2 - x_2 d\, x_1 + \dots + x_{2n-1} d\, x_{2n} - x_{2n} d\, x_{2n-1}$$

peut s'approcher C° par ω' telle que :

$$[d\omega]^n = \lambda^2 [d\omega]^n \qquad (n \geq 2)$$

<u>Remarque 3</u>. On considère sur $R^2 \times S^3$ la forme de contact :

$$= \quad x_1 d\, x_2 - x_2 d\, x_1 + \omega_3$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ est une base de 1-formes invariantes sur S^3 . Le champ de Reeb associé, a toutes ses orbites fermées, par conséquent ne peut pas s'exprimer globalement sous la forme de Darboux.
La forme $\omega^1 = x_1 d\, x_2 - x_2 d\, x_1 + \omega_3 + a_1(x_1, x_2)\,\omega_1 + a_2\,(x_1, x_2)\,\omega_2$ (pour a_1 et a_2 , voir remarque 1) est aussi de contact et d'orientation opposée à celle de ω .

3) En dimension trois, on a la

PROPOSITION 2. <u>On considère sur</u> R^3 <u>la forme de contact</u> $\omega = xdy + dz$. <u>Alors si</u> ω' <u>est aussi de contact et suffisamment</u> C°-<u>voisine de</u> ω , <u>on a :</u>

$$\omega' \wedge d\omega' = f dx \wedge dy \wedge dz$$

<u>avec</u> $f > 0$.

<u>Remarque 4</u>. On peut supposer $\omega' = a_1 dx + (x + a_2)\, dy + dz$ où a_1 et a_2 sont "petits" .

<u>Remarque 5</u>. Soit ω une forme de Pfaff, et soient X, Y, Z des champs de vecteurs globaux et indépendants tels que $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, $\omega(Z) = 1$. Alors on a :

$$\omega \wedge d\omega(X,Y,Z) = -\omega([X,Y]) .$$

Si on applique cette remarque à la forme ω' , et aux champs de vecteurs

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - a_1 \frac{\partial}{\partial z} \; ; \; Y = \frac{\partial}{\partial y} - (x + a_2) \frac{\partial}{\partial z} \; ; \; Z = \frac{\partial}{\partial z}$$

on obtient :

$$\omega' \wedge \omega'(X,Y,Z) = - f \frac{\partial}{\partial z}$$

où f est donnée par :

$$[X,Y] = f \frac{\partial}{\partial z}$$

<u>Remarque 6.</u> Soient φ_t et ψ_t les groupes à un paramètre engendrés respectivement par $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{y} - x\frac{\partial}{\partial z}$. On a alors pour $t = 1$:

$$\psi_{-1} \circ \varphi_{-1} \circ \psi_{+1} \circ \varphi_{+1}(0,0,0) = (0,0,-1) \; .$$

La proposition 2 résulte maintenant du :

LEMME. <u>Soient</u> $X = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial z}$ <u>et</u> $Y = \frac{\partial}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial z}$ <u>des champs de vecteurs complets dans l'espace</u> R <u>et soient</u> φ_t <u>et</u> ψ_t <u>les groupes à un paramètre engendrés par</u> X <u>et</u> Y <u>respectivement. Alors la condition</u> : $[X,Y] = f \frac{\partial}{\partial z}$ <u>avec</u> $f > 0$ <u>implique, que pour tout</u> $t > 0$

$$\sigma_t(0) = \psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t \, (0,0,0) = \lambda \, e_3 \quad \text{avec} \quad \lambda > 0$$

<u>Remarque 7.</u> Soit $H = \{\varphi_{-t_5} \circ \psi_{-t_4} \circ \varphi_{-t_3} \circ \psi_{t_2} \circ \varphi_{t_1} (0,0,0) \; : \; t_i [0,1]\}$. De l'hypothèse $[X,Y] = f \frac{\partial}{\partial z}$ avec $f > 0$, on déduit qu'il existe un nombre rationnel h suffisamment petit, tel que pour tout point $P \in H$ on ait :

$$\sigma_h(P) - P = \psi_{-h} \circ \varphi_{-h} \circ \psi_h \circ \varphi_n \, (a_1, a_2, a_3) = \lambda' \, e_3 \quad \text{avec} \quad \lambda' > 0 \; .$$

<u>Démonstration du lemme</u> : Il suffit de le montrer pour $t = 1$.
Soit K un entier tel que $Kh = 1$ et considérons le point $\sigma_1(0)$. Nous procédons par induction sur K. Pour $K = 1$, le résultat est trivial. Pour $K = 2$ la proposition signifiée $\sigma_{2h}(0) - (0) = \lambda \, e_3$ avec $\lambda > 0$. Pour le montrer, nous effectuons la construction suivante :

Soit $P_1 = \psi_h \circ \varphi_h \, (0)$; d'après le choix de h, le point

$$P_2 = \varphi_{-h} \circ \psi_h \circ \varphi_h \circ \psi_{-h}(P_1) \quad \text{est tel que} \quad P_2 - P_1 = \lambda_1 \, e_3 \quad \text{avec} \quad \lambda_1 > 0 \; ;$$

comme les courbes intégrales du champ X qui passent par P_1 et P_2 sont dans un même plan vertical, le point

$$P_3 = \psi_{-h} \circ \varphi_{-h}(P_2) \quad \text{vérifie} \quad P_3 - \sigma_h(0) = \lambda_2 e_3 \quad \text{avec} \quad \lambda_2 > 0 \; .$$

Ainsi, on a :

$$P_3 - (0) = (P_3 - \sigma_h(0)) + (\sigma_h(0) - (0)) = (\lambda + \lambda_2)\, e_3$$

Le même raisonnement permet de voir que le point :

$$P_4 = \psi_{-h} \circ \psi_{-h} \circ \varphi_{-h} \circ \varphi_{-h} \circ \psi_h \circ \varphi_h \circ \varphi_h \circ \psi_h(P_3) \quad \text{vérifie :}$$

$$P_4 - P_3 = \lambda_4 e_3 \quad \text{avec} \quad \lambda_4 > 0$$

d'où $P_4 - (0) = (P_4 - P_3) + (P_3 - (0)) = (\lambda + \lambda_2 + \lambda_4)\, e_3$. Les relations antérieures montrent que $P_4 = \sigma_{2h}(0)$.

On obtient le lemme en appliquant la construction antérieure au point $\sigma_{(k-1)h}(0)$.

COROLLAIRE 2. L'ensemble des formes de contact qui définissent la même orientation sur une variété de dimension trois est C^o-ouvert.

Remarque 8. Soit $\omega = x^2 dy + dz$ sur R^3 . La proposition 2 montre qu'une telle forme ne peut pas s'approcher au sens C^o par une forme de contact, c'est-à-dire la surface $x = 0$ est "rigide" .

Par contre, en dimension cinq, dans toute C^o-voisinage de la forme :

$$\omega = x_1^2\, dx_2 + x_3 dx_4 + dx_5$$

il existe une forme de contact. Il suffit de prendre :

$$\omega' = x_1^2\, dx_2 + x_3 dx_4 + dx_5 + a_1 dx_3 + a_2 dx_4$$

(pour a_1 et a_2 , voir remarque 1) . Ainsi l'hyperplane $x_1 = 0$ n'est pas rigide.

RÉFÉRENCES

(1) C. CORONA et F. VARELA : Sur les C°-perturbations de la forme de contact canonique de la sphère S^{2p+1}. C.R. Acad. Paris . t - 281 - 1980 .

(2) C. GODBILLON : Géométrie différentielle et mécanique analytique. Hermann Paris - 1969 .

(3) F. VARELA : Sur une propriété de C°-stabilité des formes de contact en dimension 3. C.R. Acad. Sc. Paris . t - 280 - 1975 .

Universidad de Murcia
Facultad de Ciencias
Seccion de Matematicas
MURCIA , Espagne