Astérisque

J. Gonzalo
F. Varela

Modèles globaux des variétés de contact

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 163-168
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__163_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.163- 168

MODÈLES GLOBAUX DES VARIÉTÉS DE CONTACT

J. GONZALO et F. VARELA

Dans cet exposé, nous allons faire une remarque sur le comportement global de certaines formes de contact sur une variété (*) compacte.

Cette remarque rappelle un théorème de Reeb, lequel montre qu'une variété compacte sur laquelle on a une fonction différentiable n'admettant que deux points critiques, est une sphère.
Par la suite, nous allons mettre en évidence plusieurs exemples de variétés compactes qui sont déterminées par l'existence sur elles de certains éléments de degré un de l'algèbre des formes extérieures, c'est-à-dire des formes de Pfaff vérifiant la condition d'être de contact d'un certain type.
On suppose que la dimension est égale à trois, bien que des résultats analogues soient aussi vrais en dimension plus grande.

Une forme de Pfaff ω sur une variété compacte, orientable de dimension trois est dite de contact si $\omega \wedge d\,\omega$ est sans zéros sur M_3.
D'après le théorème de Darboux ω peut s'exprimer localement sous la forme :

$$\omega = xdy + dz \,.$$

On s'intéresse ici à une expression globale de ω du type :

$$\omega = \Sigma\, h_i(f_i dg_i - g_i df_i)$$

où le nombre de paires (f_i, g_i) est en général plus grand que la dimension de la variété. Dans ce contexte, on montre la

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> ω <u>une forme de Pfaff sur une variété compacte</u> C^∞ (<u>resp</u>. C^ω). <u>Alors</u> ω <u>peut s'exprimer globalement sous la forme</u> :

$$\omega = \Sigma\, h_i(f_i dg_i - g_i df_i) \qquad (1)$$

<u>où</u> h_i, f_i <u>et</u> g_i <u>sont des fonctions différentiables globales</u> C^∞ (<u>resp</u>. C^ω)

(*) On supposera toujours M variété Hausdorff .

Remarque 1. D'après la proposition (1) on peut imaginer les formes de contact distribuées en couches, selon le nombre de termes $f_i dg_i - g_i df_i$ dont elles ont besoin pour s'exprimer globalement.

Le théorème de stabilité de Gray prouve en particulier que chaque couche est C^1- stable.

Par contre, on peut construire des exemples qui montrent que ces couches ne sont pas stables par homotopie.

Exemples :

1) On considère sur S^3 la forme de contacte induite par :
$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_3 dx_4 - x_4 dx_3$

2) On considère sur $S^2 \times S^1$ la forme de contact induite par :
$y_1 \, d_\theta + y_2 dy_3 - y_3 dy_2$

3) On considère sur T^3 la forme de contact : $\cos \theta_1 \, d\theta_2 + \sin \theta_1 d\theta_3$

Remarque 2.

1) s'exprime globalement sous la forme : $f_1 df_2 - f_2 df_1 + f_3 df_4 - f_4 df_3$

2) s'exprime globalement sous la forme : $f_1(f_2 df_3 - f_3 df_2) + f_4 df_5 - f_5 df_4$

3) s'exprime globalement sous la forme : $f_1(f_2 df_3 - f_3 df_2) + f_4(f_5 df_6 - f_6 df_5)$

PROPOSITION 2. Soit M_3 une variété compacte, connexe de dimension trois, avec une forme de contact, qui s'exprime globalement sous la forme :

$$\omega = f_o(f_1 df_2 - f_2 df_1) + f_3 df_4 - f_4 df_3$$

où les f_i sont des fonctions différentiables globales sur M^3. Alors :

a) $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ partout $\Rightarrow$ M_3 est difféomorphe à $S^2 \times S^1$.

b) $\left.\begin{matrix} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{matrix}\right\} \neq \emptyset \Rightarrow$ cet ensemble est un cercle et M_3 est difféomorphe à S^3.

Remarque 3. Une forme de contact ne peut pas s'exprimer globalement sous la forme :

$$\omega = f_1(f_2 df_3 - f_3 df_2) .$$

Ainsi, les formes de contact de la proposition 2 sont les plus simples qu'on peut avoir sur une variété compacte M_3.

Remarque 4. La condition de contact d'une telle forme s'exprime :

$$\omega \wedge d\omega = (f_1 df_2 - f_2 df_1) \wedge (2f_o df_3 \wedge df_4 - df_1 \wedge (f_3 df_4 - f_4 df_3)) +$$

$$2f_o \, df_1 \wedge df_2 \wedge (f_3 df_4 - f_4 df_3) \neq 0$$

Ainsi, l'ensemble $\left.\begin{matrix} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ est un nombre fini de cercles.

Démonstration de la proposition 2. (partie b)

Soit $Q = \{P \in M_3 | f_o(P) \neq 0\}$; d'après la remarque 3 $Q \neq \emptyset$; la fonction

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{|f_o|(f_1^2 + f_2^2) + f_3^2 + f_4^2}}$$

est différentiable en Q et continue sur M_3. Donc, la forme $\rho^2\omega$ est différentiable et de contact sur Q, d'ailleurs elle peut s'écrire sous la forme :

$$\rho^2\omega = (\text{signe } f_o)\,(h_1 dh_2 - h_2 dh_1) + h_3 dh_4 - h_4 dh_3 \qquad (2)$$

avec $g_1 = \sqrt{|f_o|}\, f_1$; $g_2 = \sqrt{|f_o|}\, f_2$; $h_1 = \rho g_1$; $h_2 = \rho g_2$; $h_3 = \rho f_3$; $h_4 = \rho f_4$

où g_i et h_i sont des fonctions différentiables sur Q et continues sur M_3, vérifiant : $\sum_{i=1}^{4} h_i^2 = 1$.

La démonstration de la partie (b) repose maintenant sur les lemmes suivants :

LEMME 1. Soit $h : M_3 \to S^3$ l'application $P \to (h_1(P), h_2(P), h_3(P), h_4(P))$. Alors h est un difféomorphisme local sur Q.

Preuve : C'est une conséquence de (2) et du fait que $x_1dx_2 - x_2dx_1 + x_3dx_4 - x_4dx_3$ induit sur S^3 une forme de contact.

Remarque 5. On considère $S^3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 = B \cup S$ où B est le tore plein $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ et

$$S = \{P \in S^3 |\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

Soit C une composante connexe de l'ensemble ouvert :

$$H = \{P \in M_3 | f_o \ \text{ et } \ f_1^2 + f_2^2 \neq 0\} \ ;$$

ainsi, h est un difféomorphisme local de C sur B.

LEMME 2. Si P_n est une suite dans C , telle que $h(P_n)$ converge vers un point Q dans B , alors P_n converge vers un point $P \in C$ et $h(P) = Q$.

Preuve : c'est une conséquence de la continuité des fonctions h_i et g_i , et du fait que M_3 est compacte et C une composante connexe.

COROLLAIRE 1. $h : C \to B$ est un revètement à un nombre fini de feuillets.

Soit N une composante connexe de l'ensemble $\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases}$. D'après la remarque 4. , N est un cercle et il existe une composante connexe C de H telle que $C \cup N$, est un ensemble ouvert.

LEMME 3. $h : N \to S$ est un revètement à un nombre fini de feuilles.

Cela résulte du fait que $N \subset Q$ et h/Q est un difféomorphisme local. Du fait que dans tout voisinage d'un point P de S , il existe un générateur du $\pi_1(B)$, résulte le :

THEOREME 1. $h : C \to B$ est un difféomorphisme.

COROLLAIRE 2. $h : N \to S$ est un difféomorphisme.

La proposition 2, résulte maintenant du théorème 1., et du corollaire 2.

Démonstration de la proposition 2 (partie a)).: On peut supposer $f_1^2 + f_2^2 = 1$; la forme de contact $\frac{1}{\rho}\omega$ avec :

$$\rho = \frac{f_3^2 + f_4^2 + \sqrt{(f_3^2 + f_4^2) + f_0^2}}{2}$$

s'exprime globalement sous la forme :

$$h_0(f_1 df_2 - f_2 df_1) + (h_3 dh_4 - h_4 dh_3)$$

où

$$h_0 = \frac{f_0}{\rho} \; ; \; h_3 = \frac{f_3}{\sqrt{\rho}} \; ; \; h_4 = \frac{f_4}{\sqrt{\rho}} \; ; \; \text{et} \; h_0^2 + h_3^2 + h_4^2 = 1 \; ;$$

où h_i sont cette fois-ci des fonctions différentiables gdobales sur M_3 . La partie (a) de la proposition 2. , résulte du :

LEMME 4. L'application $h : M_3 \to S^1 \times S^2$ donnée par :

$$h(P) = (f_1(P), f_2(P), h_0(P), h_3(P), h_4(P))$$

est un revètement à un nombre fini de feuilletsde $S^1 \times S^2$. Ainsi M_3 étant compacte et connexe, M_3 est difféomorphe à $S^1 \times S^2$.

PROPOSITION 3. Soit M_3 une variété compacte, connexe, de dimension trois, avec une forme de conatct qui s'exprime globalement sous la forme :

$$\omega = f_1(f_2 df_3 - f_3 df_2) + f_4(f_5 df_6 - f_6 df_5)$$

où les f_i sont des fonctions différentiables globales sur M_3 . Alors

a) $f_2^2 + f_3^2 \neq 0$ partout et $\left.\begin{matrix} f_5 = 0 \\ f_6 = 0 \end{matrix}\right\} \neq \emptyset \Rightarrow M_3$ est difféomorphe à $S^1 \times S^2$.

b) $f_2^2 + f_3^2 \neq 0$ partout et $f_5^2 + f_6^2 \neq 0$ partout $\Rightarrow M_3$ est difféomorphe à T^3 .

c) $\left.\begin{matrix} f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{matrix}\right\} \neq \emptyset$ et $\left.\begin{matrix} f_5 = 0 \\ f_6 = 0 \end{matrix}\right\} \neq \emptyset \Rightarrow M_3$ est difféomorphe à S^3 .

<u>Idée de la démonstration</u> : Soit ω_0 la forme de Pfaff sur R^6 donnée par :

$$\omega_0 = x_1(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + x_4(x_5 dx_6 - x_6 dx_5)$$

elle vérifie $\omega_0 \wedge (d\omega_0)^2 = 0$ .Soit H l'ouvert de R^6 ou $\omega_0 \wedge d\omega_0 \neq 0$; l'équation de Pfaff $\omega_0 = 0$ a sur H classe (s) constante égale à trois et son système caractéristique admet une base globale formée par les trois champs de vecteurs indépendants sur H :

$$X_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$X_2 = x_5 \frac{\partial}{\partial x_5} + x_6 \frac{\partial}{\partial x_6} - 2x_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$X_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \quad .$$

Soit F le feuilletage défini par X_1, X_2, X_3 sur H .

LEMME 4. <u>On considère l'application</u> $\varphi : M_3 \to R^6$ <u>donnée par</u> $x_i = f_i$ $(i = 1,\dots,6)$. <u>Alors</u> $\varphi^*(\omega_0)$ <u>est de contact si et seulement si</u> :

a) $\varphi(M_3) \subset H$

b) φ est transverse à F .

<u>Remarque 6</u> : La variété quotient $\overline{M}_3$ n'est pas Hausdorff. Soit $\pi : H \to \overline{M}_3$ la projection naturelle, d'après le Lemme 4 , l'application $\pi \circ \varphi : M_3 \to \overline{M}_3$ est un difféomorphisme local.

LEMME 5. <u>L'application</u> $\pi \circ \varphi$ <u>n'est pas surjective et son image est difféomorphe</u> T^3 à S^3 <u>ou</u> $S^2 \times S^1$.

<u>Remarque 7</u> : La condition de contact implique que les ensembles $\left\{\begin{matrix} f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{matrix}\right.$ et $\left\{\begin{matrix} f_5 = 0 \\ f_6 = 0 \end{matrix}\right.$ sont réunion d'un nombre fini de cercles et que les ensembles $f_1 = 0$ et $f_4 = 0$ sont réunion d'un nombre fini de tores.

Dans la démonstration du Lemme 5 , on constate que le nombre de cercles est toujours égal à deux (pour le cas de S^3 et $S^2 \times S^1$) , alors que le nombre de tores peut être quelconque.

Un exemple d'une telle situation est la suivante : soit sur S^3 la forme de contact :

$$\omega_n = \cos[\frac{\pi}{4} + n\pi(x_3^2 + x_4^2)]\ (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) + \sin[\frac{\pi}{4} + n\pi(x_3^2 + x_4^2)](x_3 dx_4 - x_4 dx_3)$$

Remarque 8 : Les courbes intégrales de la forme $\omega_n = 0$ $(n \neq 0)$ placées sur le tore $\cos[\frac{\pi}{4} + n\pi(x_3^2 + x_4^2)] = 0$ sont des cercles. D'après [1] les formes ω_n déterminent des structures de contact non isomorphes à la forme de contact canonique canonique sur S^3.

Remarque 9 : Cette structure de contact exotique est d'après la proposition 2., la plus simple qu'on peut avoir sur S^3.

RÉFÉRENCES

[1] D. BENNEQUIN : Entrelacements et équations de Pfaff. A paraître.

[2] C. GODBILLON : Géométrie différentielle et mécanique analytique. Herrmann Paris 1967.

[3] R. LUTZ : Structures de contact sur les fibres principales en cercles de dimension trois. Annales Inst. Fourier, fasc. 3, 1977.

Universidad de Murcia
Facultad de Ciencias
Seccion de Matematicas
MURCIA , Espagne