J. L. VERDIER

Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 332-364
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__332_0>

SPÉCIALISATION
DE FAISCEAUX ET MONODROMIE MODÉRÉE

Par J.L VERDIER

0. INTRODUCTION

Soient X un espace analytique et Y un sous-espace analytique défini par une équation $f = o$. On sait alors définir des faisceaux de cycles évanescents $R^i\Psi_f$ sur Y [4] . Une question naturelle est de déterminer si les $R^i\Psi_f$ munis de leur monodromie, dépendent de l'équation définissant Y et s'il ne serait pas possible de définir des cycles évanescents le long d'un diviseur Y non nécessairement principal. On constate qu'il n'en n'est rien mais qu'il est possible de construire de manière intrinsèque sur le fibré normal N_Y de Y dans X , des faisceaux constructibles $Sp^i_{Y\backslash X}$ qui seront localement constants sur les génératrices épointées de N_Y et qui possèdent la propriété suivante : une équation locale de Y , fournit une section de N_Y et les restrictions des $Sp^i_{Y\backslash X}$ à l'image de cette section sont les cycles évanescents $R^i\Psi_f$. De plus la monodromie des $Sp^i_{Y\backslash X}$ sur les génératrices de N_Y redonne au signe près, la monodromie canonique des $R^i\Psi_f$.

Ces faisceaux $Sp^i_{Y\backslash X}$ sont appelés les *faisceaux spécialisés* du faisceau constant. Ils sont les faisceaux de cohomologie d'un complexe $Sp_{Y\backslash X}$. Ce complexe peut être défini plus généralement lorsque Y est un sous-espace fermé quelconque de X . C'est alors un complexe de faisceaux constructible sur le cône normal de Y dans X dont la cohomologie est localement constante sur les génératrices épointées de ce cône. Un tel complexe est dit *mònodromique*. En caractéristique p, on peut faire des constructions analogues et définir des faisceaux spécialisés. Mais on ne récupère pas les cycles évanescents ordinaires lorsque Y est défini par une équation mais seulement les *cycles évanescents modérés*.

Dans cet exposé nous nous limitons à l'exposé des définitions et des premières propriétés du foncteur de spécialisation. Les démonstrations ne sont qu'esquissées. Les numéros 1 à 8 sont consacrés à l'étude de la spécialisation en caractéristique p et ses relations avec les cycles proches modérés (Ψ^P) et les cycles événescents modérés (Φ^P). Les numéros 9,10,11 sont consacrés au cas analytique complexe. Nous n'étudions pas ici le passage de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{F}$ et nous renvoyons pour cela à l'article de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber dans les notes de ce colloque [10].

Les applications de la spécialisation à l'étude de la transformation de Fourier géométrique introduite par Malgrange [9] seront étudiées dans une publication ultérieure. De même la correspondance de Riemann Hilbert entre les complexes monodromiques pervers sur les fibrés vectoriels et les modules holonomes réguliers sur une algèbre d'opérateurs différentiels tordue, introduite par Beilinson et Bernstein, [10] et le fait que le foncteur de spécialisation préserve certains invariants numériques introduits par Dubson et Kashiwara [2], seront étudiés ultérieurement.

En caractéristique p le rédacteur se pose quelques questions sur les foncteurs de spécialisation dont il ne sait résoudre pour le moment aucune.

On peut espérer que les faisceaux spécialisés fourniront des invariants numériques intervenant dans une formule de Riemann-Roch pour les faisceaux étales. Mais il faudrait modifier la construction pour pouvoir attraper les cycles évanescents sauvages.

SOMMAIRE

1. LE GROUPE DE TATE

Soient k un corps algébriquement clos, p son exposant caractéristique. Notons $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif et pour tout n, $e_n : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$ l'élévation à la puissance n. Posons $\mu_n = \ker e_n$ et

$$\underset{\sim}{T} = \varprojlim_n \mu_n(k) \quad .$$

Notons $\pi_1(\mathbb{G}_m,1)$ le groupe fondamental étale de $\mathbb{G}_m$. Les isogénies e_n, définissent un homomorphisme continu surjectif de groupes profinis

$$\pi_1(\mathbb{G}_m,1) \longrightarrow \underset{\sim}{T} \quad .$$

Le noyau de cet homomorphisme est un groupe pro-fini, non trivial si la caractéristique de k est non nulle, appelé sous-groupe sauvage (*). Un faisceau (étale) localement constant sur G_m sera dit *modéré* si l'action canonique de $\pi_1(\mathbb{G}_m,1)$ se factorise par $\underset{\sim}{T}$, sinon il sera qualifié de sauvage.

Soient $\mathbb{A}$ la droite affine sur k et K le corps des fonctions rationnelles sur $\mathbb{A}$. Notons K_o le corps des fractions de l'hensélisé de $\mathbb{A}$ en 0 et K_s la clôture séparable de K. On a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_s/K_o) \longrightarrow \underset{\sim}{T} \longrightarrow 1$$

et P est un pro-p-groupe. Soit $\lambda \in k^\times = k - \{o\}$. Notons θ_λ le k-automorphisme de K induit par la multiplication par λ sur $\mathbb{A}$ et $\bar{\theta}_\lambda$ une extension de θ_λ à K_s préservant K_o. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_s/K_o)$, $\bar{\theta}_\lambda \circ \sigma \circ \bar{\theta}_\lambda^{-1}$ est un élément de $\mathrm{Gal}(K_s/K_o)$.

On a donc défini ainsi un automorphisme noté

$$\tau_\lambda : \mathrm{Gal}(K_s/K_o) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_s/K_o)$$

Le changement de l'extension $\bar{\theta}_\lambda$ modifie τ_λ par un automorphisme intérieur. Les automorphismes τ_λ préservent la suite exacte ci-dessus et induisent l'identité sur $\underset{\sim}{T}$.

(*) Lorsque $p \neq 1$, ce n'est pas p-groupe.

PROPOSITION 1.1 - *Soient* $(\lambda_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{G}_m(k)$ *engendrant un sous-groupe Zariski dense de* $\mathbb{G}_m$ *et* $P'\subset P$ *un sous-groupe ouvert de* P *. Le sous-groupe fermé de* P *engendré par les* $g^{-1}\tau_{\lambda_i}(g)$, $g\in P'$, $i\in I$, *est égal à* P (*) .

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 1.2.- *Sous les hypothèses de la proposition, soit* Γ *un sous-groupe fini de* $H(P,\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z})$ *, on a :*

$$0 = \bigcap_i (\mathrm{Id}-\tau_{\lambda_i})^{-1}(\Gamma)$$

On a $H^1(P,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \varinjlim H^1(G',\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ où G' parcourt les sous-groupes ouverts d'indice fini de $G = \mathrm{Gal}(K_s/K_o)$ contenant P . Comme τ_λ agit trivialement sur G/P , il stabilise tous les sous-groupes G' de G contenant P . Comme les G'/P sont des pro-groupes premiers à p , on a $H^1(G',\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H^o(G'/P,H^1(P,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$ et par suite les homomorphismes canoniques $H^1(G',\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(P,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sont injectifs. Il suffit donc de montrer que pour ces sous-groupes $G'\subset G$ assez petit on a $\bigcap_i(\mathrm{Id}-\tau_{\lambda_i})^{-1}(\Gamma) = 0$. Soit donc G' un sous-groupe ouvert de G d'indice n premier à p . Notons $\hat{K}_o$ le complété de K en 0 et $\hat{K}_s$ sa clôture séparable. On a $\mathrm{Gal}(K_s,K_o) = G = \mathrm{Gal}(\hat{K}_s/\hat{K}_o)$. On a $K = k(X)$, $\hat{K}_o = k((X))$. Le sous-groupe G' de G correspond à l'extension $F = k((X^{1/n}))$ de $\hat{K}_o$ et l'automorphisme $\bar{\theta}_\lambda$ se prolonge en l'unique k-automorphisme continu de F tel que $\bar{\theta}_\lambda(X^{1/n}) = \lambda^{1/n}X^{1/n}$ où $\lambda^{1/n}$ est une racine n-ième convenable de λ . La théorie d'Artin-Schreier fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[r, "\wp"] \arrow[d, "\mathrm{Id}-\theta_{\bar{\lambda}_i}"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}-\theta_{\bar{\lambda}_i}"'] & H^1(G',\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}-\tau_{\bar{\lambda}_i}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[r, "\wp"] & F \arrow[r] & H^1(G',\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Posons $T = X^{1/n}$ et soit $S = \bigoplus_{j<0,(j,p)=1} kT^j$.

On a $S\subset F = k((T))$ et $F = \mathrm{Im}\,\wp \oplus S$; d'où un isomorphisme $S \xrightarrow{\sim} H^1(G',\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

(*) Je tiens à remercier O. Gabber pour cette version renforcée d'un de mes énoncés antérieurs.

et pour tout i , $Id-\tau_{\lambda_i}$ préserve les facteurs directs $k\,T^j$. Pour tout j , $Id-\tau_{\lambda_i}/kT^j$ est la multiplication par $1-(\lambda_i^{1/n})^j$.
Soit $a \in H^1(G',\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})$ tel que pour tout i , $(Id-\tau_{\lambda_i})a \in \Gamma$. Pour tout $j<0$, $(j,p)=1$, notons a_j, Γ_j les projections de a et Γ sur le facteur $k\,T^j$. Si $a_j \neq 0$, il résulte de l'hypothèse de densité qu'il existe un i tel que $(1-\lambda_i)^{j/n} a_j \notin \Gamma_j$. On a donc $a=0$, d'où le lemme.

Démontrons maintenant la proposition 1.1. Soit H le sous-groupe fermé de P engendré par les $g^{-1}\tau_{\lambda_i}(g)$, $g \in P'$, $i \in I$ et $\alpha : P \longrightarrow \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ un homomorphisme continu tel que $\alpha(H) = 0$.
Posons $\Gamma = \ker(H'(P,\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}) \longrightarrow H'(P',\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}))$. C'est un sous-groupe fini car P' est ouvert dans P et on a $(Id-\tau_{\lambda_i})(\alpha) \in \Gamma$ pour tout i . On a donc $\alpha = 0$. On en déduit que $H[P,P] = P$ et comme P est pro-nilpotent on a $H=P$.

2. CÔNE

Soit Y un k-schéma de type fini ; un cône C de sommet Y est le spectre d'une O_Y-algèbre quasi-cohérente graduée $\mathcal{A}$ de type fini engendrée par ses éléments de degré 1 et telle que $A^0 = \mathcal{O}_Y$. Soit C un cône de sommet Y . On a donc une projection $p : C \longrightarrow Y$ et un plongement $i : Y \longrightarrow C$ sur un sous-schéma fermé de C appelé *lieu des sommets* et identifié à Y . On a par ailleurs une opération de $\mathbb{G}_m$ sur C provenant de la graduation $\mathcal{A}$. Le lieu des sommets est le schéma des points fixes de cette opération. Lorsqu'on fait agir trivialement $\mathbb{G}_m$ sur Y , les morphismes i et p commutent aux opérations de $\mathbb{G}_m$
Soient $\widetilde{C}$ le schéma obtenu par éclatement de Y dans C , $\pi : \widetilde{C} \longrightarrow C$ le morphisme canonique, $\widetilde{Y} \hookrightarrow \widetilde{C}$ l'image inverse de Y . Le schéma $\widetilde{Y}$ s'identifie à $\mathrm{Proj}\,\mathcal{A}$, lieu des points à l'infini de C . On constate que $\widetilde{C}$ est l'espace total du fibré vectoriel $\mathcal{O}(-1)$ de rang 1 sur $\widetilde{Y}$ et que si on note $\widetilde{p} : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{Y}$ et $\widetilde{i} : \widetilde{Y} \longrightarrow \widetilde{C}$ les projections et plongement canoniques, on a des diagrammes commutatifs $\pi_{\widetilde{Y}} \circ \widetilde{p} = p \circ \pi$ et $\pi \circ \widetilde{i} = i \circ \pi_{\widetilde{Y}}$. De plus π commute aux opérations canoniques de $\mathbb{G}_m$ sur C et $\widetilde{C}$ respectivement. Comme π identifie $\widetilde{C} - \widetilde{Y}$ à

$C-Y$, il en résulte que $C-Y$ est un espace principal sous $\mathbb{G}_m$ de base $\check{Y}$. Notons $\theta : \mathbb{G}_m \times C \longrightarrow C$ l'opération de $\mathbb{G}_m$ sur C et pour tout $x \in C(k)$, $W_x : \mathbb{G}_m \longrightarrow C$, le morphisme $\lambda \longmapsto \theta(\lambda,x)$. Lorsque $x \in C-Y$, W_x est un isomorphisme sur une partie localement fermée de C qu'on appelle la génératrice de C passant par x . Lorsque $x \in Y$, W_x est constant de valeur x . Soit $\lambda \in \mathbb{G}_m(k)$, on pose $\theta_\lambda(x) = \theta(\lambda,x)$, $x \in C$. On obtient ainsi un automorphisme $\theta_\lambda : C \longrightarrow C$.

3. FAISCEAU MONODROMIQUE

Soit A un anneau de coefficients. Nous supposerons que A est un anneau fini dans lequel p est inversible, ou bien que A est une algèbre finie sur $\mathbb{Z}_\ell$ ℓ nombre premier, $(\ell,p) = 1$. Soit Y un schéma de type fini sur k et C un cône de sommet Y .

Définition 3.1 .- *Un faisceau étale constructible de* A-modules M *sur* C *est dit monodromique si pour tout* $x \in C$, $W_x^* M$ *est un faisceau localement constant modéré.*

Soient M un faisceau constructible de A-modules sur C , $\lambda \in k^\times$, et $u : M \longrightarrow \theta_\lambda^* M$ un isomorphisme. Pour tout $x \in C$, on a donc un isomorphisme

$$u_x = W_x^* u : W_x^* M \longrightarrow \theta_\lambda^* W_x^* M$$

Soient K le corps des fonctions rationnelles sur $\mathbb{G}_m$, K_s une clôture séparable, $\eta = \operatorname{spec} K_s$, M_s la tige de $W_x^* M$ en η . Soit $\bar{\theta}_\lambda$ un automorphisme de K_s prolongeant θ_λ . La tige de $\theta_\lambda^* W_x^* M$ en η s'identifie à $\bar{\theta}_\lambda^* M_s$ et ce module galoisien n'est autre que le module M_s muni de l'opération $(g,m) \longmapsto \tau_\lambda(g)m$.

PROPOSITION 3.2 - *Soit* M *un faisceau étale constructible de* A-*modules sur* C . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $\lambda \in k^\times$, $\theta_\lambda^* M$ *est isomorphe à* M ;

(ii) *Il existe une famille* $(\lambda_i)_{i \in I}$, $\lambda_i \in k^\times$, *qui engendre un sous-groupe*

Zariski dense de $\mathbb{G}_m$ *et telle que* $\theta_{\lambda_i}^* M$ *soit isomorphe à* M *pour tout* $i \in I$.

iii) M *est monodromique.*

Il est clair que i) $\Longrightarrow$ ii). Montrons que ii) $\Longrightarrow$ iii) .

Soit $x \in C(k)$. Il est clair que si ii) est satisfait, $W_x^* M$ est localement constant sur $\mathbb{G}_m$. Notons $i : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ l'immersion ouverte canonique, 0 et $\infty \in \mathbb{P}^1$ les points fermés complémentaires, K_o , K_∞ les corps des fractions des anneaux locaux hensélisés $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^1,o}$, $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^1,\infty}$. Le faisceau $W_x^* M$ fournit par image inverse des modules galoisiens M_o et M_∞ sur $\mathrm{Gal}(K_o) = G_o = G$ et $\mathrm{Gal}(K_\infty) = G_\infty$ respectivement. Notons P le p-sous-groupe de Sylow de G (groupe de ramification sauvage). L'automorphisme θ_λ induit des automorphismes de (G,P) notés τ_λ obtenus en prolongeant l'automorphisme θ_λ de K en un automorphisme convenable $\bar{\theta}_\lambda$ d'une clôture algébrique de K_o .

Supposons tout d'abord que A soit fini. Par hypothèse on a pour tout $i \in I$, un automorphisme $u_i : M_o \longrightarrow M_o$ tel que pour tout $g \in G$ on ait

$$\theta_{\lambda_i}(g) \circ u_i = u_i \circ g \ .$$

Soit G' le sous-groupe ouvert de G agissant trivialement sur M_o . On a alors, pour tout $i \in I$, $\theta_{\lambda_i}(G') \subset G'$. Par suite, en posant $P' = P \cap G'$, on a $\theta_{\lambda_i}(P') \subset P'$ pour tout i . Donc P' contient le sous-groupe fermé engendré par les $p^{-1}.\theta_{\lambda_i}(p)$, $p \in P'$, et par suite $P' = P$ d'après la proposition 1.1. Donc on a $P \subset G'$ et M_o est un module galoisien modéré. On démontre de même que M_∞ est un module galoisien modéré.

Il existe d'après ce qui précède un entier n premier à p tel que $(e_n^* W_x^* M)_o$ et $(e_n^* W_x^* M)_\infty$ soient des modules galoisiens triviaux. Si n est un tel entier, $i_* e_n^* W_x^* M$ est un faisceau localement constant sur $\mathbb{P}^1$, donc constant, car $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe. Donc $e_n^* W_x^* M$ est constant, d'où la conclusion iii) dans ce cas. Dans le cas où A est fini sur $\mathbb{Z}_\ell$, il résulte de ce qui précède que pour tout n , $W_x^* M \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ est un $\underset{\sim}{T}$-module, d'où la conclusion par passage à la limite.

Démontrons iii)$\Longrightarrow$i). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\theta(n) : \mathbb{C}_m \times C \longrightarrow C$, le morphisme $\theta o(e_n \times Id_C)$. Supposons d'abord que A soit fini. D'après iii) et la constructibilité de M , il existe un entier $n > 0$ tel que $\theta(n)^* M$ soit constant sur les fibres de $pr_2 : \mathbb{C}_m \times C \longrightarrow C$. Soit $\lambda \in k^x$. Choisissons un $\lambda^{1/n} \in k^x$ tel que $(\lambda^{1/n})^n = \lambda$. Soient s_1, $s_{\lambda^{1/n}}$: $C \longrightarrow \mathbb{C}_m \times C$ les sections $x \longmapsto (1,x)$ et $x \longmapsto (\lambda^{1/n},x)$ respectivement. Comme $\theta(n)^* M$ est constant sur les fibres connexes de $pr_2 : \mathbb{C}_m \times C \longrightarrow C$, on a un isomorphisme canonique $\iota_{\lambda^{1/n}} : s_1^* \theta(n)^* M \xleftarrow{\sim} s^*_{\lambda^{1/n}} \theta(n)^* M$, i.e un isomorphisme canonique $\iota_{\lambda^{1/n}} : M \xleftarrow{\sim} \theta^*_\lambda M$. Lorsque $A = \mathbb{Z}_\ell$, on peut choisir $\bar\lambda$: un système compatible de $\lambda^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, noté $\bar\lambda$, d'où un système projectif d'isomorphismes $\iota_{\bar\lambda}(q) : \theta^*_\lambda M \otimes_A \mathbb{Z}/\ell^q\mathbb{Z} \longrightarrow M \otimes_A \mathbb{Z}/\ell^q\mathbb{Z}$ c'est à dire un isomorphisme spécial $\iota_{\bar\lambda} : \theta^*_\lambda M \longrightarrow M$, d'où la proposition .

Remarque 3.3 : soit $x \in Y$, lieu des sommets de C . Les isomorphismes $\iota_{\bar\lambda} : \theta^*_\lambda M \longrightarrow M$ construit ci-dessus induisent sur les tiges un isomorphisme $\iota_{\bar\lambda,x} : M_x = (\theta^*_\lambda M)_x \longrightarrow M_x$ qui n'est autre que l'identité.

4. MONODROMIE

Pour tout $\lambda \in k^x$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $R_n(\lambda) = \{a \in k^x \mid a^n = \lambda\}$ et $R(\lambda) = \varprojlim_n R_n(\lambda)$. On a $R(1) = \hat{\mathbb{Z}}$. On a des accouplements continus $R(\lambda) \times R(\lambda') \xrightarrow{\beta} R(\lambda\lambda')$ et en particulier :

$$\hat{\mathbb{Z}} \times R(\lambda) \longrightarrow R(\lambda)$$

qui fait de $R(\lambda)$ un espace principal homogène sous $\hat{\mathbb{Z}}$.

Soit M un faisceau monodromique sur un cône C . Pour tout $\lambda \in R(\lambda)$ on a construit dans la démonstration de la prop. 3.2 un isomorphisme

$$\iota_{\bar\lambda} : \theta^*_\lambda M \longrightarrow M$$

On vérifie qu'on a pour $\bar\lambda \in R(\lambda)$, $\bar\lambda' \in R(\lambda')$

(4.1) $\quad \theta^*_\lambda(\iota_{\bar\lambda'}) \circ \iota_{\bar\lambda} = \iota_{\beta(\bar\lambda',\bar\lambda)}$

et en particulier pour $s, t \in \underset{\sim}{T}$, on a

(4.2) $\iota_s \circ \iota_t = \iota_{st}$

On a donc défini en particulier une opération de $\underset{\sim}{T}$ sur M dont on vérifie qu'elle est continue. Cette opération est appelée *la représentation de monodromie canonique du groupe* $\underset{\sim}{T}$, sur M.

Lorsque x est un sommet de C, la monodromie canonique de M_x est triviale.

Soient M' un faisceau monodromique et $u : M \to M'$ un morphisme de faisceaux. Alors u commute à la monodromie canonique.

On peut interpréter la relation (4.1) de la manière suivante : soient $\tilde{\mathbb{G}}_m$ le pro-objet $((\mathbb{G}_m)_n, e_s : (\mathbb{G}_m)_{ns} \to (\mathbb{G}_m)_n)$ et $\tilde{e} : \tilde{\mathbb{G}}_m \to \mathbb{G}_m$ le morphisme canonique. Le pro-groupe $\tilde{\mathbb{G}}_m$ opère sur C via $\tilde{e}$. Soit M un faisceau monodromique. Le pro-groupe $\tilde{\mathbb{G}}_m$ opère sur le couple (M,C) en un sens qu'on pourrait préciser. Nous nous bornerons à indiquer comment le groupe des points $\tilde{\mathbb{G}}_m(k) = \varprojlim_{e_s} G_m(k)$ opère sur (M,C). Notons encore $\tilde{e} : \tilde{\mathbb{G}}_m(k) \longrightarrow \mathbb{G}_m(k) = k^{\times}$ l'homomorphisme canonique. Pour tout $\lambda \in k^{\times}$, on a $\tilde{e}^{-1}(\lambda) = R(\lambda)$ et la multiplication dans $\tilde{\mathbb{G}}_m(k)$ est donnée par les accouplements $\beta : R(\lambda) \times R(\lambda') \longrightarrow R(\lambda\lambda')$. Le groupe $\tilde{\mathbb{G}}_m(k)$ opère sur C via $\tilde{e}$. Il résulte de (4.1) que tout faisceau monodromique est muni d'une opération de $\tilde{\mathbb{G}}_m(k)$ appelée *opération de monodromie canonique* de $\tilde{\mathbb{G}}_m(k)$ sur (M,C) et on constate que tout morphisme de faisceaux monodromiques commute à cette opération. Le sous-groupe $\underset{\sim}{T} \subset \tilde{\mathbb{G}}_m(k)$ opère trivialement sur C et agit donc tige par tige sur les faisceaux monodromiques. Cette opération n'est autre que l'opération de monodromie canonique de $\underset{\sim}{T}$.

5. COMPLEXES MONODROMIQUES

Soit C un cône. Nous noterons $\mathrm{Mon}(C,A)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des faisceaux étales de A-modules, formée par les complexes bornés tels que les faisceaux de cohomologie soient monodromiques.

La catégorie $\mathrm{Mon}(C,A)$ est appelée la *catégorie monodromique* et les objets de $\mathrm{Mon}(C,A)$ sont appelés les *complexes monodromiques*.

Supposons maintenant que A soit *fini* et soit $M^{\cdot}$ un complexe monodromique. Par constructibilité, on voit immédiatement qu'il existe un entier n_o tel que pour tout n multiple de n_o, le complexe $\theta(n)^* M^{\cdot}$, complexe de faisceaux sur $\mathbb{G}_m \times C$, ait tous ses faisceaux de cohomologie *constants* sur les fibres de $pr_2 : \mathbb{G}_m \times C \longrightarrow C$.

PROPOSITION 5.1 : *Pour* n *assez grand (multiplicativement), il existe un morphisme :* $\iota(n) : \theta(n)^* M^{\cdot} \longrightarrow pr_2^* M^{\cdot}$
tel que $\iota(n)/\{1\} \times C$ *soit l'identité.* ***Ce*** *morphisme est un isomorphisme. Il est essentiellement unique :* si n_1, n_2 *sont deux entiers, si*

$$\iota_1(n_1) : \theta(n_1)^* M^{\cdot} \longrightarrow pr_2^* M^{\cdot}$$

$$\iota_2(n_2) : \theta(n_2)^* M^{\cdot} \longrightarrow pr_2^* M^{\cdot}$$

sont de tels isomorphismes, il existe un entier n_3 *multiple de* n_1 *et de* n_2 *tel que* $(e_{n_3/n_1} \times Id_C)^* \circ \iota_1(n_1) = (e_{n_3/n_2} \times Id_C)^* \circ \iota_2(n_2)$.

Soient $N^{\cdot}$ *un complexe monodromique et* $u : M^{\cdot} \longrightarrow N^{\cdot}$ *un morphisme. Pour* n *assez grand, il existe deux isomorphismes tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \theta(n)^* M^{\cdot} \arrow[r, "\iota_1(n)", "\sim"'] \arrow[d, "\theta(n)^* u"'] & pr_2^* M^{\cdot} \arrow[d, "pr_2^* u"] \\ \theta(n)^* N^{\cdot} \arrow[r, "\iota_2(n)", "\sim"'] & pr_2^* N^{\cdot} \end{tikzcd}$$

et tels que $\iota_1(n)/\{1\} \times C$ et $\iota_2(n)/\{1\} \times C$ *soient l'identité.*

Soient $F^{\cdot}$ et $G^{\cdot}$ deux complexes de faisceaux constructibles sur C. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $(e_n \times Id)^* pr_2^* = pr_2^*$ et par suite le foncteur image inverse par $e_n \times Id$ induit des endomorphismes

$$\rho_n : \mathrm{RHom}(pr_2^* F^{\cdot}, pr_2^* G^{\cdot}) \longrightarrow \mathrm{RHom}(pr_2^* F^{\cdot}, pr_2^* G^{\cdot})$$

On a $\rho_{mn} = \rho_m \circ \rho_n$. De plus les diagrammes

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & RHom(F^\cdot,G^\cdot) \arrow[dl, "pr_2^*"'] \arrow[dr, "pr_2^*"] & \\ RHom(pr_2^*F^\cdot,pr_2^*F^\cdot) \arrow[rr, "\rho_n"] & & RHom(pr_2^*F^\cdot,pr_2^*G^\cdot) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

<u>Lemme 5.2</u>.- *Le morphisme* pr_2^* *induit un isomorphisme du Ind-objet constant* $RHom(F^\cdot,G^\cdot)$ *sur le Ind-objet* $(RHom(pr_2^* F^\cdot,pr_2^*G^\cdot),\rho_n)$.

Pour démontrer le lemme, on remarque que le morphisme canonique

$$RHom(F^\cdot,G^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(\mathbb{G}_m,A) \longrightarrow RHom(pr_2^* F^\cdot,pr_2^*G^\cdot)$$

est un isomorphisme (on utilise la lissité de $\mathbb{G}_m$ pour voir que $RHom(pr_2^* F^\cdot,pr_2^*G^\cdot) = R\Gamma(\mathbb{G}_m \times C\ ,\ pr_2^*RHom(F^\cdot,G^\cdot))$ puis on utilise le théorème de Künneth pour la cohomologie à supports quelconques des faisceaux constructibles [5]) et que $\rho_n = Id \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \rho_n(A)$ où $\rho_n(A) : R\Gamma(\mathbb{G}_m,A) \longrightarrow R\Gamma(\mathbb{G}_m,A)$ est le morphisme induit par e_n^* . Il reste à montrer que $(R\Gamma(\mathbb{G}_m,A),\rho_n(A))$ est un Ind-objet isomorphe au Ind-objet constant de valeur A , ce qui résulte du fait que A est fini et que e_n^* induit sur $H^0(G_m,A) = A$ l'identité et sur $H^1(\mathbb{G}_m,A) = A(-1)$ la multiplication par n lorsque n est premier à p .

Démontrons maintenant la proposition 5.1. Nous nous bornerons à des indications. Montrons d'abord par récurrence sur l'amplitude de $M^\cdot$ que $\theta(n)^*M^\cdot$ est de la forme $pr_2^* H^\cdot$ pour n assez grand. Lorsque $M^\cdot$ ne possède qu'un seul objet de cohomologie, c'est facile. Dans le cas général, on a un triangle distingué

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M^\cdot \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ P^\cdot \arrow[rr, "u"] & & N^\cdot \end{tikzcd}$$

où les amplitudes de $P^\cdot$ et $N^\cdot$ sont strictement plus petites que celles de $M^\cdot$. Par hypothèse de récurrence, pour n assez grand $\theta(n)^*P^\cdot$ et $\theta(n)^*N^\cdot$ sont de la forme $pr_2^*F^\cdot$ et $pr_2^*G^\cdot$, quitte à augmenter n , on peut supposer, d'après le lemme 5.2, que $\theta(n)^*u$ est de la forme pr_2^*v et par suite $\theta(n)^*M^\cdot$ est bien isomorphe à un $pr_2^*H^\cdot$. Pour identifier $H^\cdot$ on peut se restreindre à $\{1\} \times C$ et on obtient la première assertion de 5.1. Les autres assertions se déduisent facilement de 5.2.

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{o\}$, notons $\tilde{e}_{1/n} : \tilde{\mathbb{G}}_m(k) \longrightarrow \mathbb{G}_m(k)$ l'homomorphisme canonique. On a $\tilde{e} = e_n \circ \tilde{e}_{1/n}$. Soit $M^\cdot$ un complexe de faisceaux monodromiques de A-module où A est *fini*, $n \in \mathbb{N} - \{o\}$, et $\iota(n) : \theta(n)^* M^\cdot \longrightarrow pr_2^* M^\cdot$ un isomorphisme tel que $\iota(n)/\{1\} \times C$ soit l'identité.
Pour $\bar{\lambda} \in \tilde{\mathbb{G}}_m(k)$ posons alors

$$\iota_{\bar{\lambda}} = \iota(n) / \{\tilde{e}_{1/n}(\bar{\lambda})\} \times C .$$

On obtient ainsi un isomorphisme

$$\iota_{\bar{\lambda}} : \theta^*_{\tilde{e}(\bar{\lambda})} M^\cdot \longrightarrow M^\cdot$$

Il résulte de 5.1 que l'isomorphisme $\iota_{\bar{\lambda}}$ ne dépend pas du choix de n et de $\iota(n)$ et qu'on a défini ainsi une opération de $\tilde{\mathbb{G}}_m(k)$ sur $(M^\cdot, C)$ appelée *opération canonique de monodromie*. Tout morphisme entre complexes monodromiques commute à cette opération et en particulier l'opération de monodromie induit sur les faisceaux de cohomologie, l'opération canonique de monodromie (c.f n°4).

Dans le cas $A = \mathbb{Z}_\ell$, on définit de même, par passage à la limite sur les $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, l'opération canonique de monodromie sur les complexes monodromiques. En particulier on a donc défini dans le cas général une opération du groupe de Tate sur les complexes monodromiques en restreignant à $\underset{\sim}{T} \subset \tilde{\mathbb{G}}_m(k)$ l'opération canonique de monodromie. Si σ est un générateur topologique de $\underset{\sim}{T}$, cette opération est définie par un isomorphisme noté

$$(5.3) \qquad \sigma_{M^\cdot} : M^\cdot \longrightarrow M^\cdot$$

appelé parfois transformation canonique de monodromie.

Une autre opération importante, en théorie de transformation de Fourier par exemple[9], est la suivante : il existe un et un seul $\tau \in \tilde{\mathbb{G}}_m(k)$ tel que $\tau^2 = \sigma$. On a donc un isomorphisme

$$(5.4) \qquad \sigma_{M^\cdot}^{1/2} = \iota_\tau : \theta^*_{-1} M^\cdot \longrightarrow M^\cdot$$

et on a :

$$(5.5) \qquad \sigma_{M^\cdot}^{1/2} \circ \theta^*_{-1} \sigma_{M^\cdot}^{1/2} = \sigma_{M^\cdot}.$$

La plupart des complexes monodromiques qu'on rencontre ont une monodromie canonique *quasi-unipotente* c'est à dire qu'il existe deux entiers $p,q \in \mathbb{N}$ tels que

$$(\sigma_{M^{\bullet}}^{p} - \mathrm{Id})^{q} = 0$$

Si un complexe monodromique possède cette propriété, alors la cohomologie (ordinaire) de ce complexe la possède aussi, ainsi que la cohomologie pervers (pour la perversité autoduale par exemple). Il est facile de montrer que la réciproque est vraie : si la monodromie canonique de la cohomologie pervers (ou ordinaire) [10] d'un complexe monodromique est quasi-unipotente, alors la monodromie canonique du complexe est quasi-unipotente.

6. ÉVANESCENCE

Soit C un cône de sommet Y. Un complexe monodromique de A-modules $M^{\bullet}$ sur C est dit *évanescent* si $M^{\bullet}/Y = o$. Un complexe monodromique est évanescent si et seulement si sa cohomologie l'est.

Un complexe monodromique $M^{\bullet}$ est dit *relativement constant* (sur Y) s'il existe un complexe constructible $N^{\bullet}$ sur Y et un isomorphisme de complexes monodromiques $p^{*}N^{\bullet} \xrightarrow{\sim} M^{\bullet}$. On peut montrer qu'un complexe monodromique est relativement constant si et seulement si sa cohomologie l'est.

Lemme 6.1.- *Soit* $M^{\bullet}$ *un complexe monodromique évanescent. Alors* $Rp_{*}M^{\bullet} = o$.

Nous nous bornerons à donner des indications sur la démonstration.
On peut supposer A fini, et supposer de plus que C est un fibré vectoriel de rang 1 sur Y et, en localisant sur Y, supposer que $C = Y \times \mathbb{A}$.
On peut aussi se réduire au cas où $M^{\bullet}$ est un faisceau monodromique évanescent et par constructivité on se ramène au cas suivant : il existe un ouvert U de Y et un faisceau monodromique N localement constant sur $U \times \mathbb{G}_m$ tel que $M = i_! N$ où $i : U \times \mathbb{A} \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}$ est l'injection canonique.
On se ramène alors aussitôt au cas où M est localement constant sur $Y \times \mathbb{G}_m$.
Il existe alors un revêtement ramifié le long de Y, de degré $n : \mathbb{A} \times Y \xrightarrow{e_n} \mathbb{A} \times Y$ tel que $e_n^{*}M$ soit constant sur $Y \times \mathbb{G}_m$. On peut alors résoudre M par des faisceaux du type $e_{n*}N$ où N est constant sur

$Y \times \mathbb{C}_m$ et on se ramène ainsi à démontrer le lemme lorsque M est constant sur $Y \times \mathbb{C}_m$. Dans ce cas la vérification est immédiate et utilise le théorème de changement base par les morphismes lisses.

<u>PROPOSITION 6.2</u>.- a) *Soit* $M^{\cdot}$ *un complexe monodromique. Il existe un triangle distingué dans* $\mathrm{Mon}(C,A)$,

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ev}(M^{\cdot}) \arrow[dl, "v"'] & \\ \mathrm{RC}(M^{\cdot}) \arrow[rr, "u"'] & & M^{\cdot} \arrow[ul, "q"'] \end{tikzcd}$$

fonctoriel en $M^{\cdot}$ *tel que* $\mathrm{RC}(M^{\cdot})$ *et* $\mathrm{Ev}(M^{\cdot})$ *soit relativement constant et évanescent respectivement, que* u *soit universel pour les morphismes des complexes relativement constants dans* $M^{\cdot}$ *et que* q *soit universel pour les morphismes de* $M^{\cdot}$ *dans les complexes évanescents.*

b) *Le morphisme* $u_Y : \mathrm{RC}(M^{\cdot})_Y \longrightarrow M^{\cdot}_Y$ *est un isomorphisme et* $\mathrm{RC}(M^{\cdot})$ *est isomorphe à* $p^{*}M^{\cdot}_Y$.

c) *Soit* $\sigma \in \mathfrak{I}$. *Il existe un morphisme fonctoriel en* $M^{\cdot}$

$$\mathrm{var}(\sigma) : \mathrm{Ev}(M^{\cdot}) \longrightarrow M^{\cdot}$$

tel que $1 + \mathrm{var}(\sigma) \circ q$ *et* $1 + q \circ \mathrm{var}(\sigma)$ *soit la transformation de monodromie de* $M^{\cdot}$ *et* $\mathrm{Ev}(M^{\cdot})$ *respectivement, induite par* σ . *On a :*

$$\mathrm{var}(\sigma\tau) = \mathrm{var}(\sigma) + \mathrm{var}(\tau) + \mathrm{var}(\sigma) \circ \mathrm{var}(\tau) \quad .$$

Nous nous bornerons à donner des indications. Nous supposerons A fini, le cas général s'en déduit par passage à la limite. Pour tout complexe monodromique $M^{\cdot}$, notons $M^{\cdot x}$ le complexe obtenu en restreignant $M^{\cdot}$ à $C-Y$ et en le prolongeant par zéro. On a un triangle distingué

$$\begin{tikzcd} & M^{\cdot}_Y \arrow[dl] & \\ M^{\cdot x} \arrow[rr] & & M^{\cdot} \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad .$$

D'après le lemme 6.1, on a donc un isomorphisme $Rp_{*}M^{\cdot} \xrightarrow{\sim} M^{\cdot}_Y$, d'où un isomorphisme $p^{*}Rp_{*}M^{\cdot} \xrightarrow{\sim} p^{*}M^{\cdot}_Y$. En composant avec le morphisme canonique $p^{*}Rp_{*}M^{\cdot} \xrightarrow{\sim} M^{\cdot}$, on obtient un morphisme $u : p^{*}M^{\cdot}_Y \longrightarrow M^{\cdot}$ tel que u_Y soit l'identité. Il s'ensuit qu'en construisant un triangle distingué :

$$\begin{tikzcd} & Ev(M^{\cdot}) \arrow[dl, "v"'] & \\ p^{*}M^{\cdot}_{Y} \arrow[rr, "u"'] & & M^{\cdot} \arrow[ul, "q"'] \end{tikzcd}$$

Le troisième sommet est évanescent. La fonctorialité de u est évidente. Pour celle de q on remarque que pour tout complèxe monodromique évanescent $N^{\cdot}$, on a $\mathrm{Ext}^{i}(p^{*}M^{\cdot}_{Y},N^{\cdot}) = 0$ pour tout i (lemme 6.1) et par suite $\mathrm{Hom}(Ev(M^{\cdot}),N^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(M^{\cdot},N^{\cdot})$. Donc q possède la propriété universelle annoncée. Pour construire un v fonctoriel et les morphismes $\mathrm{var}(\sigma)$ on peut procéder comme dans [3] .

Un complexe monodromique $M^{\cdot}$ est dit *coévanescent* si $\underset{\sim\sim}{R\Gamma}_{Y}(M^{\cdot}) = 0$. Il revient au même de dire que M est de la forme $Rj_{*}(M^{\cdot}/C-Y)$ où $j : C-Y \longrightarrow C$ est l'inclusion canonique. Le dual d'un complexe monodromique évanescent (resp. coévanescent, resp. à supports dans Y) est coévanescent (resp. évanescent, resp. à supports dans Y). On notera que la dualité transforme les complexes relativement constants sur Y en complexes du même type, lorsque C est un fibré vectoriel. Le rédacteur ne connaît pas d'autres exemples où cela se produit.

7. LEMME DE COMPARAISON

Soient X un k-schéma de type fini et $f : X \longrightarrow \mathbb{A}$ une fonction régulière sur X . Posons $Y = f^{-1}(0)$ et notons $f^{x} : X \times \mathbb{G}_{m} \longrightarrow \mathbb{A}$ le morphisme $(x,\lambda) \longmapsto \lambda f(x)$. On a $(f^{x})^{-1}(0) = Y \times \mathbb{G}_{m}$. Soit F un complexe constructible de faisceaux de A-modules sur X . Posons $F^{x} = pr_{1}^{*}F$ où $pr_{1} : X \times \mathbb{G}_{m} \longrightarrow X$ est la projection.

Soit K le corps des fonctions rationnelles sur $\mathbb{A}$, K_{o} le corps des fractions de l'hensélisé de $\mathbb{A}$ en 0 et K_{s} une clôture séparable de K_{o} . Le point spec K est le point générique de $\mathbb{A}$; le point η_{o} = spec K_{o} (resp. η_{s} = spec K_{s}) est le point générique (resp. point générique géométrique) de l'hensélisé $(\widetilde{\mathbb{A},0})$ de $\mathbb{A}$ en 0 .

On pose $G = \mathrm{Gal}(K_s/K_o)$. On a une suite exacte canonique

$$1 \longrightarrow P \longrightarrow G \longrightarrow \underset{\sim}{T} \longrightarrow 1$$

Pour les notions de faisceaux de cycles évanescents, de foncteurs Ψ, Φ , nous utiliserons les définitions et résultats de [3] . Nous noterons Ψ le foncteur des cycles évanescents pour $f : X \longrightarrow \mathbb{A}$ en 0 .

Nous considérerons que c'est un foncteur de la catégorie $D_{const}(X,A)$ des complexes constructibles de faisceaux de A-modules sur X dans la catégorie $D_{const}(Y,A,G)$ des complexes de faisceaux de $A[G]$-modules, qui sont constructibles comme complexes de faisceaux de A-modules [5] .

Nous noterons de même $\Psi^x : D_{const}(X \times \mathbb{C}_m , A) \longrightarrow D_{const}(Y \times \mathbb{C}_m , A,G)$ le foncteur analogue pour $f^x : X \times \mathbb{C}_m \longrightarrow \mathbb{A}$. Un complexe de faisceaux sur $Y \times \mathbb{C}_m$ peut être considéré comme un complexe sur $Y \times \mathbb{A}$ en le prolongeant par 0 sur $Y \times \{0\}$. En considérant $Y \times \mathbb{A}$ comme un cône de sommet Y , on peut donc parler de complexes monodromiques sur $Y \times \mathbb{C}_m$.
Si $L^\cdot$ est un objet de $D_{const}(Y \times \mathbb{C}_m, A,G)$, on note $[L^\cdot]$ l'objet de $D_{const}(Y \times \mathbb{C}_m,A)$ obtenu en oubliant l'action de G . On notera que G opère sur $[L^\cdot]$.

PROPOSITION 7.1 .- a) *le complexe* $[\Psi^x(F^x)]$ *est monodromique. Le sous-groupe* P *de* G *opère trivialement sur* $[\Psi^x(F^x)]$ *. L'opération de* $\underset{\sim}{T}$ *sur* $[\Psi^x(F^x)]$ *qu'on en déduit est l'opposée de l'opération canonique de monodromie*.*
b) *Soit* $i_1 : X \longrightarrow X \times \mathbb{C}_m$ *le morphisme* $x \longmapsto (x,1)$ *et notons encore* $i_1 : Y \longrightarrow Y \times \mathbb{C}_m$ *le morphisme induit sur* Y *. Le morphisme canonique*

$$i_1^* \Psi^x(F^x) \longrightarrow \Psi(F)$$

induit un isomorphisme

$$i_1^* \Psi^x(F^x) \xrightarrow{\sim} \Psi(F)^P \quad .$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}_m(k)$ et considérons le diagramme commutatif

* Deux opérations ρ_1 et ρ_2 d'un groupe commutatif Γ sur un même objet sont dites opposées si pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\rho_1(\gamma) = \rho_2(\gamma)^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
Y \times \mathbb{C}_m \arrow[r, "(Id,\lambda)"] \arrow[d] & Y \times \mathbb{C}_m \arrow[d] \\
X \times \mathbb{C}_m \arrow[r, "(Id,\lambda)"] \arrow[d, "f^x"'] \arrow[dr, "\lambda f^x"] & X \times \mathbb{C}_m \arrow[d, "f^x"] \\
\mathbb{A} \arrow[r, "\lambda"] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$

Soit $\bar{\lambda} : \eta_s \to \eta_s$ un prolongement de λ .

Notons $\Psi^x(F)^{\bar{\lambda}}$ le $A[G]$ complexe déduit de $\Psi^x(F)$ par l'automorphisme $\tau_\lambda : G \to G$ (c.f n°1) . Le choix de $\bar{\lambda}$ fournit un isomorphisme canonique de complexes de $A[G]$-modules

$$\Psi^x(F^x)^{\bar{\lambda}} = \Psi_{f^x,\,\eta_s}(F^x)^{\bar{\lambda}} \xrightarrow{\sim} \Psi_{\lambda f^x,\eta_s}(F^x)$$

qui nous permet d'identifier $\Psi_{\lambda f^x,\eta_s}(F^x)$ à $\Psi^x(F^x)^{\bar{\lambda}}$.

(On met en indice de Ψ le morphisme et le point géométrique auxquels il se rapporte).

Comme $(Id,\lambda)^* F^x = F^x$, on a un isomorphisme canonique déduit de : $f^x o(Id,\lambda) = \lambda f^x$:

$$\iota_\lambda : \theta_\lambda^* \Psi^x(F^x) \longrightarrow \Psi^x(F^x)^{\bar{\lambda}} .$$

D'après (3.2) il en résulte que $[\Psi^x(F^x)]$ est *monodromique*. De plus aux points génériques géométriques ξ des génératrices de $Y \times G_m$, ι_λ identifie le $A[G]$-complexe $\Psi^x(F^x)_{\bar{\xi}}$ à $\Psi(F^x)^{\bar{\lambda}}_{\bar{\xi}}$. Donc pour tout $g \in G$, $g^{-1}\tau_\lambda(g)$ opère trivialement sur $\Psi^x(F^x)$ et par suite P opère trivialement sur $[\Psi^x(F^x)]$ d'après (1.1). Donc l'opération de G sur $[\Psi^x(F^x)]$ se factorise par $\underset{\sim}{T}$.

Il en résulte que l'homomorphisme canonique

$$\Psi^x(F^x)^P \longrightarrow \Psi^x(F^x)$$

est un isomorphisme où on dénote par $L^\cdot \mapsto L^{\cdot P}$ le foncteur (dérivé) du foncteur "point fixe sous P " . En d'autres termes le complexe de faisceaux de cycles évanescents $\Psi^x(F^x)$ est canoniquement isomorphe au complexe de faisceaux de *cycles évanescents modérés* [3] . Il en résulte aussitôt que le morphisme naturel $i_1^* \Psi^x(F^x) \longrightarrow \Psi(F)$ se factorise canoniquement par un morphisme :

$$i_1^* \Psi^x(F^x) \longrightarrow \Psi(F)^P$$

dont il s'agit de montrer que c'est un isomorphisme. Pour cela on peut se limiter au cas où A est fini ; le cas général s'en déduisant par passage à la limite. Dans ce cas on peut utiliser la description suivante des cycles évanescents modérés : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n,p) = 1$ notons $e_n : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{A}$ le morphisme $\lambda \longmapsto \lambda^n$. Posons $Z_n = (X \times \mathbb{G}_m) \times_{\mathbb{A}} \mathbb{G}_m$, $Z'_n = X \times \mathbb{G}_m$ de sorte qu'on a un diagramme commutatif et cartésien :

$$(7.2) \qquad \begin{tikzcd}
X \arrow[d, "i_1"'] & Z'_n \arrow[l, "g_n"'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\square"] \\
X \times \mathbb{G}_m \arrow[d, "f^x"'] & Z_n \arrow[l, "h_n"'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\square"] \\
\mathbb{A} & \mathbb{G}_m \arrow[l, "e_n"']
\end{tikzcd}$$

On a alors

$$\Psi^x(F^x)^P \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{n,(n,p)=1} (Rh_{n*} h_n^* F^x / Y \times \mathbb{G}_m)$$

$$\Psi(F)^P \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{n,(n,p)=1} (Rg_{n*} g_n^* F / Y)$$

où les systèmes inductifs des seconds membres sont indexés par les entiers ordonnés multiplicativement, et sont essentiellement constants.

Pour voir que le morphisme canonique $i_1^* \Psi^x(F^x)^P \longrightarrow \Psi(F)^P$ est un isomorphisme il suffit donc de montrer que pour tout n, le morphisme canonique de changement de base

$$i_1^* Rh_{n*} h_n^* F^x \longrightarrow Rg_{n*} g_n^* F$$

est un isomorphisme.

Remarquons d'abord que l'ensemble des points de Z_n est $\{(x,\lambda,\mu) \mid x \in X \; ; \; \lambda,\mu \in \mathbb{G}_m \; ; \; \mu^n = \lambda f(x)\}$ (on prend les points à valeurs dans n'importe quoi). Par suite Z_n s'identifie à $(X-Y) \times \mathbb{G}_m$, l'application

$h_n : (X-Y) \times \mathbb{G}_m \longrightarrow X \times \mathbb{G}_m$ étant décrite par

$$h_n(x,\mu) = (x, \frac{\mu^n}{f(x)})$$

Le carré cartésien du haut de (7.2) se décompose donc en deux carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
X & & Z'_n \times \{1\} \arrow[ll, "g_n"'] \arrow[d] \\
X \times \mathbb{G}_m \arrow[from=u, "i_1"'] & \boxed{} & Z'_n \times \mathbb{G}_m \arrow[ll, "g'_n = g_n \times \mathrm{Id}\mathbb{G}_m"'] \arrow[d, "\alpha"] \\
X \times \mathbb{G}_m \arrow[from=u, "\mathrm{Id}_X \times e_n"'] & \boxed{} & (X-Y) \times \mathbb{G}_m \arrow[ll, "h_n"']
\end{tikzcd}$$

où α peut se décrire comme suit : les points de Z'_n sont les $(x,\mu) \in (X-Y) \times \mathbb{G}_m$ tels que $\mu^n = f(x)$, et on a $\alpha(x,\mu,\lambda) = (x,\lambda u)$.

Comme $\mathrm{Id}_X \times e_n$ est étale on a

$$(\mathrm{Id}_X \times e_n)^* Rh_{n*} h_n^* F^x \xrightarrow{\sim} Rg'_{n*} \alpha^* h_n^* F^x$$

Comme $\alpha^* h_n^* = g'^*_n (\mathrm{Id}_X \times e_n)^*$ et comme $(\mathrm{Id}_X \times e_n)^* F^x = F^x$, on obtient un isomorphisme

$$(\mathrm{Id}_X \times e_n)^* Rh_n{*} h_n^* F^x \xrightarrow{\sim} Rg'_{n*} g'_{n*} F^x$$

et il reste à montrer que $i_1{}^* Rg'_n{*} g'^*_n F^x$ est isomorphe à $Rg_* g^* F$ ce qui résulte du théorème de changement de base par les morphismes lisses appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \times \mathbb{G}_m \arrow[d, "pr_1"'] & Z'_n \times \mathbb{G}_m \arrow[l, "g'_n"'] \arrow[d, "pr_1"] \\
X & Z'_n \arrow[l, "g_n"']
\end{tikzcd}$$

En utilisant les mêmes diagrammes on peut montrer que l'opération de $\underset{\sim}{T}$ sur $\left[\psi^x(F^x)\right]$ est l'opposée de l'opération canonique de monodromie. Nous en laissons les détails au lecteur.

8. SPÉCIALISATION DE FAISCEAUX

Soient X un k-schéma de type fini et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé. Nous renvoyons à [8] pour une description détaillée de la déformation canonique de X au cône normal de Y dans X. Il s'agit d'un schéma $\tilde{X}$, plat sur $\mathbb{A}$, tel que, au-dessus de $\mathbb{A} - \{o\}$ on ait $\tilde{X} | \mathbb{A} - \{o\} \simeq X \times (\mathbb{A} - \{o\})$ et que la fibre $\tilde{X}_o$ au-dessus de $0 \in \mathbb{A}$ soit le cône normal $C_{Y\setminus X}$ de Y dans X. On a donc un diagramme commutatif à carrés cartésiens.

(8.1)
$$\begin{tikzcd} C_{Y\setminus X} = \tilde{X}_o \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] & X \times (\mathbb{A} - \{o\}) \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{A} & \mathbb{A} - \{o\} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$
.

Soit A un anneau de coefficients comme dans le n°3. Pour tout complexe constructible $F^{\cdot}$ de faisceaux étales de A-modules sur X, on pose :

$$Sp_{Y\setminus X}(F^{\cdot}) = [\Psi_{\pi}(i_! \, pr_1^* \, F^{\cdot})]$$

où [ ] désigne l'oubli de l'opération du groupe de Galois (c.f n°7).

On obtient ainsi un foncteur exact :

(8.2) $$Sp_{Y\setminus X} \; : \; D_{const}(X,A) \longrightarrow D_{const}(C_{Y\setminus X}, A)$$

qu'on appelle *foncteur de spécialisation*.

Ce foncteur possède les 7 propriétés suivantes :

(SP0) *(localisation)* la formation de $Sp_{Y\setminus X}$ est locale sur X pour la topologie étale.

(SP1) *(monodromie)* Pour tout $F^{\cdot}$, $Sp_{Y\setminus X}(F^{\cdot})$ est un *complexe monodromique* de sorte que $Sp_{Y\setminus X}$ peut être considéré comme un foncteur de $D_{const}(X,A)$ dans $Mon(C_{Y\setminus X},A)$.

(SP2) *(Image directe propre)* Soient

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

un carré cartésien où f est *propre* et $C(f) : C_{Y'\backslash X'} \longrightarrow C_{Y\backslash X}$ le morphisme déduit de f. Alors $C(f)$ est propre et pour tout complexe constructible $F^{\cdot}$ l'homomorphisme naturel

(8.3) $\quad Sp_{Y\backslash X}(Rf_{*}\, F^{\cdot}) \longrightarrow RC(f)_{*}\, (Sp_{Y'\backslash X'}(F^{\cdot})$

est un *isomorphisme*.

(SP3) *(Changement de base lisse)* Soient

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

un carré cartésien où f est *lisse* et $C(f) : C_{Y'\backslash X'} \longrightarrow C_{Y\backslash X}$ le morphisme déduit de f. Alors $C(f)$ est lisse et pour tout complexe constructible $F^{\cdot}$ sur X, le morphisme naturel

(8.4) $\quad C(f)^{*} Sp_{Y\backslash X}(F^{\cdot}) \longrightarrow Sp_{Y'\backslash X'}(f^{*}F^{\cdot})$

est un *isomorphisme*.

(SP4) *(Dualité)*. Pour tout $F^{\cdot} \in D_{Const}(X,A)$, le morphisme naturel

(8.5) $\quad Sp_{Y\backslash X}(D\, F^{\cdot}) \longrightarrow D\, Sp_{Y\backslash X}(F^{\cdot})$

est un *isomorphisme*.

(SP5) *(Restrictions aux sommets)* Pour tout $F^{\cdot} \in D_{const}(X,A)$, le morphisme naturel

(8.6) $\quad Sp_{Y\backslash X}(F^{\cdot})|_{Y} \longrightarrow F^{\cdot}_{Y}$

est un *isomorphisme*.

(SP6) *(Normalisation)* Supposons que Y soit un diviseur principal d'équation $f = 0$. Le morphisme $\pi \times C(f) : C_{Y\backslash X} \longrightarrow Y \times \mathbb{A}$ est alors un isomorphisme. Notons $U(f)$ la section

$y \longmapsto (\pi \times C(f))^{-1}\ (y,1)$.

Le morphisme naturel

$U(f)^*(Sp_{X\backslash Y}(F^\cdot)) \longrightarrow [\Psi_f(F)^\cdot]$

induit un isomorphisme

(8.7) $U(f)^*(Sp_{Y\backslash X}(F^\cdot)) \longrightarrow [\Psi_f(F^\cdot)]^P$

Cet isomorphisme transforme l'opération canonique de monodromie du groupe de Tate sur $Sp_{Y\backslash X}(F^\cdot)$ en l'opposée de l'opération de monodromie du groupe de Tate sur $[\Psi_f(F^\cdot)]^P$.

Nous nous bornerons à donner des indications sur les démonstrations. Les propriétés (SP0), (SP2), (SP3), (SP4) résultent immédiatement des propriétés correspondantes pour le foncteur Ψ . Nous renvoyons à [3] pour SP0-2-3 . Nous n'avons pas de référence pour la commutation de Ψ et D que nous utilisons ici sans en donner la démonstration (facile) qui sortirait du cadre de cet exposé. Pour (SP1), on sait déjà que $Sp_{Y\backslash X}(F^\cdot)$ est constructible et il suffit donc d'étudier $Sp_{Y\backslash X}(F^\cdot)/C_{Y\backslash X} - Y$. On remarque que cette restriction ne dépend que de $F^\cdot/X-Y$ en utilisant (SP2) .

Soient $\tilde{X}$ le schéma obtenu en éclatant $\tilde{Y}$ dans X , $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ le morphisme canonique, et $\tilde{Y} = f^{-1}(Y)$.

Le morphisme $C(f) : C_{\tilde{Y}} \longrightarrow C_{Y\backslash X}$ induit un isomorphisme $C_{Y\backslash X} - \tilde{Y} \longrightarrow C_{Y\backslash X} - Y$ et, d'après (SP2) , on a un isomorphisme

$$Sp_{Y\backslash X}(F^\cdot)\Big|_{C_{Y\backslash X} - Y} \xrightarrow{\sim} Sp_{Y\backslash X}(f^*F^\cdot)\Big|_{C_{Y\backslash X} - \tilde{Y}}$$

On peut donc, pour démontrer (SP1), se ramener au cas où Y est un diviseur de X et, (par SP0), au cas où Y est défini par une équation $f = 0$.

De même on voit par (SP2) que (SP5) est vrai lorsque $F^\cdot/X-Y = 0$.

Par dévissage on est amené à montrer que $Sp_{Y\backslash X}(F^\cdot)_Y = 0$ lorsque $F^\cdot_Y = 0$. Par (SP2) cette dernière propriété se voit après éclatement de Y , et comme cette propriété est locale on se ramène à démontrer (SP5) lorsque Y est défini par une équation $f = 0$.

Il reste donc à démontrer :

PROPOSITION 8.8.- *Supposons que* Y *soit défini par l'équation* $f=0$ *et soit* $F^{\cdot} \in D_{const}(X,A)$ *un complexe tel que* $F^{\cdot}/Y = 0$. *Alors les propriétés* (SP1) , (SP5) *et* (SP6) *sont satisfaites.*

Démontrons (SP5). On peut supposer A fini. Nous ferons la démonstration par récurrence sur la dimension d des supports des $H^i(F^{\cdot})$. Lorsque $d=o$, (SP5) est vraie. Supposons (SP5) démontrée lorsque $d<n$, $n\neq o$. Montrons tout d'abord que $Sp_{Y\backslash X}(F^{\cdot})\big|_Y = o$ génériquement sur Y. Par un dévissage standard, utilisant l'hypothèse de récurrence et (SP2) pour les morphismes finis on se ramène au cas où X est normal, de dimension n et $F^{\cdot}$ un faisceau constant sur $X-Y$. Puisqu'il s'agit de montrer la nullité générique, on peut supposer de plus X et Y lisses. L'assertion résulte alors dans ce cas, du fait que les faisceaux de cycles évanescents $R^i\Phi_f(A)$ sont nuls lorsque f est lisse. Montrons maintenant que $Sp_{Y\backslash X}(F^{\cdot})\big|_Y = o$ lorsque $d=n$. Utilisant (SP2) pour les morphismes finis, on se ramène au cas où $X = \mathbb{A}^n$ et $Y = \mathbb{A}^{n-1} \times \{o\}$. On peut trouver une projection linéaire $p : X \longrightarrow X' = \mathbb{A}^{n-1}$ induisant une projection $q : Y \longrightarrow Y' = \mathbb{A}^{n-2}$ qui soit finie sur le support de $Sp_{Y\backslash X}(F^{\cdot})\big|_Y$. On peut alors compléter projectivement p en $\bar{p} : \bar{X} \longrightarrow X'$ induisant $\bar{q} : \bar{Y} \longrightarrow Y'$, et étendre par zéro $F^{\cdot}$ en $\bar{F}^{\cdot}$. On a $Sp_{\bar{Y}\backslash\bar{X}}(\bar{F}^{\cdot})\big|_Y = Sp_{Y\backslash X}(F^{\cdot})\big|_Y$ et le morphisme $\bar{q}$ est fini sur le support de $Sp_{\bar{Y}\backslash\bar{X}}(\bar{F}^{\cdot})$. Appliquant (SP2) et l'hypothèse de récurrence, on obtient $R\bar{q}_* Sp_{\bar{Y}\backslash\bar{X}}(\bar{F}^{\cdot})\big|_Y = o$ et par suite $Sp_{\bar{Y}\backslash\bar{X}}(\bar{F}^{\cdot})\big|_Y = o$ d'où $Sp_{Y\backslash X}(F^{\cdot})\big|_Y = o$ ce qui achève la démonstration de (SP5).

Démontrons maintenant (SP1) et (SP6). Le morphisme $\tilde{\Gamma}_f : X \longrightarrow \tilde{X}$ qui à x associe $(x,f(x),1)$ envoie Y sur $Y \times \{o\} \times \{1\}$. Donc sa restriction à Y est $\mathcal{U}(f)$. Le morphisme $\tilde{\Gamma}_f$ se factorise en

$$X \overset{i_1}{\hookrightarrow} X \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{\alpha} \tilde{X}$$

où i_1 est le plongement fermé $x \longmapsto (x,1)$ et où $\alpha(x,\nu) = (x,\nu f(x),\nu)$.

Le morphisme α est un isomorphisme de $X \times \mathbb{G}_m$ sur l'ouvert $\tilde{X} - Y \times \mathbb{A}$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbb{G}_m \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f^x"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{A} & \end{tikzcd}$$

c.f n°7 pour la notation f^x) est commutatif. Les propriétés (SP1) et (SP6) résultent donc de la prop. 7.1.

9. COMPLEXE MONODROMIQUE DANS LE CAS ANALYTIQUE COMPLEXE

Nous nous bornerons le plus souvent à énoncer les résultats; les démonstrations sont faciles et peuvent se calquer sur le cas algébrique. Soit Y un espace analytique, un cône de sommet Y est le spectre analytique d'une $\mathcal{O}_Y$-algèbre graduée $\mathcal{A}$, cohérente en tous ses degrés, engendrée par ses éléments de degré 1 et telle que $\mathcal{A}^o = \mathcal{O}_Y$. Un cône C est donc muni d'une action $\theta : \mathbb{C}^\times \times C \longrightarrow C$ de $\mathbb{C}^\times$, qui laisse fixe le lieu des sommets et qui opère librement sur le complémentaire. L'espace Y s'identifie au lieu des sommets et $C-Y$ est un espace principal sous $\mathbb{C}^\times$ de base $\tilde{Y}$, l'éclaté de Y dans C. Une génératrice de C est une orbite de $\mathbb{C}^\times$ dans $C-Y$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ on note $\theta_\lambda : C \longrightarrow C$ l'opération de λ sur C.

Soit A un anneau de coefficients, égal à $\mathbb{Z}$ ou à un corps de caractéristique 0 (le plus souvent $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit C un cône de sommet Y. Un complexe de faisceaux de A-modules, $F^\bullet$ analytiquement constructible sur C est dit *monodromique* si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^i(F^\bullet)$ est un faisceau localement constant sur chaque génératrice de C. Nous noterons $\mathrm{Mon}(C,A)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des complexes de faisceaux constructibles. Notons $\tilde{\theta} : \mathbb{C} \times C \longrightarrow C$, l'opération $(\lambda,x) \longmapsto \theta(\exp\lambda, x)$.

PROPOSITION 9.1.- 1) *Pour tout complexe monodromique* $F^\bullet$ *sur* C *il existe un unique morphisme*

$$\iota : \tilde{\theta}^* F^\cdot \longrightarrow pr_2^* F^\cdot$$

qui induit l'identité sur $\{0\} \times C$ *. Le morphisme* ι *est un isomorphisme.*

2) Pour tout morphisme $u : F^\cdot \to G^\cdot$ *de complexes monodromiques le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \tilde{\theta}^* F^\cdot \arrow[r, "\iota_{F^\cdot}"] \arrow[d, "\tilde{\theta}^* u"'] & pr_2^* F^\cdot \arrow[d, "pr_2^* u"] \\ \tilde{\theta}^* G^\cdot \arrow[r, "\iota_{G^\cdot}"] & pr_2^* G^\cdot \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Pour voir l'existence de ι , on remarque que le morphisme canonique $\tilde{\theta}^\cdot F^\cdot \to pr_2^! R pr_{2!} \theta^*$ est un isomorphisme, ce qui se vérifie fibre par fibre. Comme $pr_2^! = pr_2^* [+2]$, on en déduit que $\tilde{\theta}^* F^\cdot$ est de la forme $pr_2^* G^\cdot$ et pour déterminer le $G^\cdot$ on se restreint à $\{0\} \times C$. Les autres assertions se démontrent facilement en remplaçant pr_2^* par $pr_2^! [-2]$ et en utilisant la dualité.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la restriction de ι à $\{\lambda\} \times C$ est un isomorphisme

$$\iota_\lambda : \theta^*_{\exp\lambda} F^\cdot \longrightarrow F^\cdot$$

et il résulte de 9.1 qu'on a défini ainsi une opération de $\mathbb{C}$ sur $(F^\cdot, C)$ appelé *opération canonique de monodromie*. Tout morphisme entre complexes monodromiques commute à l'opération canonique de monodromie. En particulier $\iota_{2i\pi} = \sigma_{F^\cdot}$ est un automorphisme de $F^\cdot$ appelé transformation canonique de monodromie. Un automorphisme important en théorie de Fourier [9] est l'automorphisme $\iota_{i\pi}$ noté

$$\sigma_{F^\cdot}^{1/2} \quad : \quad \theta_{-1}^* F^\cdot \longrightarrow F^\cdot$$

on a

$$\sigma_{F^\cdot}^{1/2} \circ \theta_{-1}^* \sigma_{F^\cdot}^{1/2} = \sigma_{F^\cdot}.$$

Pour les notions de complexes *évanescents* et *coévanescents* nous renvoyons au n°6. Enfin un complexe monodromique $F^\cdot$ est dit de type *quasi-unipotent* s'il est quasi-unipotent et si la transformation canonique de monodromie est quasi-unipotente i.e s'il existe deux entiers p et q tels que $(\sigma_{F^\cdot}^{p}-1)^{q}=0$. Il faut et il suffit pour cela que la transformation canonique de monodromie de chaque faisceau de cohomologie (pervers ou ordinaire) soit quasi-unipotente.

Soient X un espace analytique et Y un sous-espace fermé. Considérons la déformation canonique de X au cône normal $C_{Y\backslash X}$ [8] .C'est un espace $\tilde{X}$ muni d'un morphisme plat $\pi : \tilde{X} \longrightarrow \mathbf{C}$ et d'isomorphismes $\pi^{-1}(\mathbf{C}-\{o\}) = X \times (\mathbf{C}-\{o\})$, $\pi^{-1}(o) \simeq C_{Y\backslash X}$. Pour tout complexe de faisceaux constructible sur X , le complexe $\overline{pr_1^* F}$ obtenu en prolongeant par zéro l'image inverse de $F^\cdot$ par $pr_1 : X \times (\mathbf{C}-\{o\}) \longrightarrow X$ est constructible. Posons alors :

$$Sp_{Y\backslash X}(F^\cdot) = \left[\Psi_{\pi}(\overline{pr_1^* F^\cdot})\right],$$

où $[\ ]$ désigne l'oubli de la monodromie.
On obtient ainsi un foncteur exact

$$Sp_{Y\backslash X} : D_{const}(X,A) \longrightarrow D_{const}(C_{Y\backslash X}, A)$$

appelé *foncteur de spécialisation*. Ce foncteur possède les propriétés (SPi), $o \leqq i \leqq 6$, du n°8, convenablement transposées à ce contexte. Les démonstrations sont faciles et peuvent se calquer sur celles du cas algébrique. On commence par démontrer un lemme de normalisation (c.f 7.1).

Il existe une description du type "cohomologie de la fibre de Milnor" du foncteur de spécialisation. Soient X un espace analytique, $f : X \longrightarrow \mathbf{C}^n$ une famille de n fonctions analytiques, $Y = f^{-1}(o)$ le sous-espace qu'elles définissent, $C_f : C_{Y\backslash X} \longrightarrow \mathbf{C}^n$ le morphisme défini par f . Soient $y \in Y$ et $\xi \in C_{Y\backslash X}$ un point au-dessus de Y . Soit $F^\cdot$ un faisceau constructible sur X . Pour $\varepsilon > o$ suffisamment petit et $o < \rho << \varepsilon$ très petit devant ε , posons

$$U_{\varepsilon,\rho} = \{x \in X \mid \rho\|y-x\| + \|\rho\, C_f(\xi) - f(x)\| < \varepsilon\rho\}$$

On obtient ainsi un ouvert de X . Comme $F^\cdot$ est constructible, on a alors

$$Sp_{Y\backslash X}(F^\cdot)_{\xi} = R\,\Gamma(U_{\varepsilon,\rho}, F^\cdot) .$$

Cela résulte de la description usuelle du foncteur Ψ [4] .

10. PURETÉ ET PERVERSION

On sait que le foncteur des cycles évanescents transforme les faisceaux pervers (pour la perversité autoduale) en faisceaux pervers à un décalage près. Cela est dû à Goresky-MacPherson dans le cas analytique complexe [6] et à O. Gabber dans le cas de caractéristique p [1]. On obtient donc

(SP7) (*Perversion*) Le foncteur de spécialisation transforme faisceaux pervers en faisceaux pervers.

Pour la notion de faisceau quasi-unipotent dans le cas analytique complexe nous renvoyons à [7] . Un complexe constructible est dit quasi-unipotent si sa cohomologie l'est. En utilisant la résolution des singularités et [7] on obtient

(SP8) (*quasi-unipotence*) Soit $F^{\bullet}$ un complexe analytiquement constructible et quasi-unipotent. Alors la spécialisation de $F^{\bullet}$ est un complexe monodromique quasi-unipotent où la monodromie canonique agit de manière quasi-unipotente.

Dans le cas algébrique on obtient la quasi-unipotence de la monodromie canonique sur le complexe spécialisé lorsque le corps k est la clôture algébrique d'un corps de type fini k_o et que la situation est définie sur k_o [3].

Soient $F^{\bullet}$ un faisceau pervers et supposons que la monodromie canonique de $\Psi_{Y\backslash X}(F^{\bullet})$ soit quasi-unipotente. Comme $\Psi_{Y\backslash X}(F^{\bullet})$ est un objet de la catégorie abélienne des faisceaux pervers, il possède une filtration canonique associée au logarithme de la monodromie (on suppose que A est un corps). Supposons maintenant que k soit la clôture algébrique d'un corps fini k_o et que $F^{\bullet}$ soit un faisceau algébriquement constructible provenant d'un faisceau $F_o^{\bullet}$ pur, défini sur k_o . Il résulte des théorèmes de Gabber [1] :

(SP9) (*Pureté*) La filtration par la monodromie de $SP_{Y\backslash X}(F^{\bullet})$ coïncide avec la filtration par le poids (à un décalage près).

On en déduit lorsque X et Y sont *algébriques complexes* et lorsque $F^\cdot = IC(X)$ est le complexe d'intersection :

(SP10) (*Complexe d'intersection*) Le gradué associé à $Sp_{Y\backslash X}(IC(X))$ pour la filtration de monodromie est somme directe de complexes d'intersection monodromiques à coefficients locaux quasi-unipotents.

11. SPÉCIALISATION ET ÉCLATEMENT RÉEL

Soient X un espace analytique complexe réduit, $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique complexe, $Y = f^{-1}(o)$. Posons

11.1 $$\tilde{X}_{\mathbb{R}} = \left\{(\alpha,x)\in S^1 \times X \;\middle|\; \alpha f(x) \in \mathbb{R}_+\right\} .$$

C'est un espace semi-analytique réel appelé l'éclaté réel de X le long de Y . Lorsque $X = \mathbb{C}$ et $f = Id_{\mathbb{C}}$, les coordonnées polaires réalisent un isomorphisme de $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$ sur $S^1 \times \mathbb{R}_+$.

La deuxième projection $\tilde{X}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi} X$ induit un isomorphisme d'espaces analytiques réels entre $\tilde{X}_{\mathbb{R}} - \pi^{-1}(Y)$ et $X - Y$. L'espace $\tilde{Y}_{\mathbb{R}} = \pi^{-1}(Y)$ est canoniquement isomorphe à $Y \times S^1$. Lorsque X et Y sont lisses, $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$ est une variété à bord de bord $\tilde{Y}_{\mathbb{R}}$.

Soient X un espace analytique complexe réduit et $Y \subset X$ un diviseur. Posons $L = O_X(Y)$ et soit $\sigma : X \longrightarrow L$ la section canonique dont le lieu des zéros est Y . Notons $\Sigma(L)$ l'espace analytique réel des demi-droites réelles de L . Pour tout $x \in X-Y$, posons $s(x) = \mathbb{R}_+ \sigma(x)$. On obtient ainsi une section $s : X - Y \longrightarrow \Sigma(L)$. On note $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$ l'adhérence de $s(X-Y)$ dans $\Sigma(L)$. C'est un espace semi-analytique réel appelé l'éclaté réel de X le long de Y . Lorsque Y est défini par une équation $f = o$, l'espace obtenu est décrit par les équations (11.1).

Soient X un espace analytique complexe réduit et Y un sous-espace fermé. Dans l'éclaté complexe $\tilde{X}$ de X le long de Y , l'image inverse $\tilde{Y}$ de Y est un diviseur. On note $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$ l'éclaté réel de $\tilde{X}$ le long de $\tilde{Y}$ et on l'appelle *l'éclaté réel de* X *le long de* Y .

Soient $C_{Y\backslash X}$ le cône normal de Y dans X et $\Sigma C_{Y\backslash X}$ l'espace analytique réel des demi-génératrices réelles de $C_{Y\backslash X}$. On a un diagramme commutatif

11.2
$$\begin{tikzcd} & C_{Y\backslash X} - Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr] & \\ \Sigma C_{Y\backslash X} \arrow[rr, "\gamma"] & & \mathbb{P}C_{Y\backslash X} \end{tikzcd}$$

où p est l'application qui à $\xi \in C_{Y\backslash X} - Y$ associe la demi-génératrice engendrée. L'application p est une fibration principale de groupe $\mathbb{R}_+^*$ et γ est une fibration principale de groupe S^1. L'espace complexe $\mathbb{P}C_{Y\backslash X}$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse $\tilde{Y}$ de Y dans $\tilde{X}$ et l'espace analytique réel $\Sigma C_{Y\backslash X}$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse $\tilde{Y}_{\mathbb{R}}$ de Y dans $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$. Le morphisme canonique $\pi_{\mathbb{R}} : \tilde{X}_{\mathbb{R}} \longrightarrow X$ induit un isomorphisme de $\tilde{X}_{\mathbb{R}} - \tilde{Y}_{\mathbb{R}}$ sur $X - Y$ et on a donc un diagramme commutatif

11.3
$$\begin{tikzcd} C_{Y\backslash X} - Y \arrow[r, "p"] & \tilde{Y}_{\mathbb{R}} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{R}}"'] & \tilde{X}_{\mathbb{R}} \arrow[d, "\pi_{\mathbb{R}}"] & X - Y \arrow[l, hook', "i"'] \\ & Y \arrow[r, hook] & X & \end{tikzcd}$$

où i est un plongement ouvert, j un plongement fermé, p une fibration principale de groupe $\mathbb{R}_+^*$.

<u>PROPOSITION 11.4</u>.- *Soit* F *un complexe de faisceaux de* A*-modules sur* X, *analytiquement constructible. On a un isomorphisme canonique.*

11.5
$$Sp_{Y\backslash X}(F) \,\Big|\, C_{Y\backslash X} - Y \xrightarrow{\sim} p^* j^* Ri_* i^* \pi_{\mathbb{R}}^* F \ .$$

Soit
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \\ \mathbb{A} & \end{tikzcd}$$

la déformation canonique au cône normal de Y dans X [8]. Le transformé strict de $\mathbb{A} \times Y$ dans Z est isomorphe à $\mathbb{A} \times Y$ et est encore noté $\mathbb{A} \times Y$.

On a donc un diagramme
$$\begin{tikzcd} Z - \mathbb{A} \times Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "d"'] & X \\ \mathbb{A} & \end{tikzcd}$$

et la fibre $d^{-1}(0)$ est $C_{Y\backslash X} - Y$. Notons $\mathbb{A}_+ \subset \mathbb{A}$ l'ensemble des points réels positifs et posons $W_+ = d^{-1}(\mathbb{A}_+)$. On a donc un diagramme commutatif

11.6
$$\begin{tikzcd}
 & & W_+ - (C_{Y\backslash X} - Y) \arrow[dl, hook', "\eta"'] & \\
C_{Y\backslash X} - Y \arrow[r, hook, "\beta"'] & W_+ \arrow[dr, hook, "\alpha"] \arrow[rrd, "q_+"] \arrow[dd, "d_+"'] & & \\
 & & Z - \mathbb{A} \times Y \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "d"] & X \\
 & \mathbb{A}_+ \arrow[r, hook] & \mathbb{A} &
\end{tikzcd}$$

On a par définition

$$Sp_{Y\backslash X}(F)/C_{Y\backslash X} - Y = \Psi_d(q^*F)$$

et comme q^*F est *analytiquement constructible*, on sait que le morphisme canonique

11.7 $Sp_{Y\backslash X}(F)/C_{Y\backslash X} - Y \longrightarrow \beta^* R\eta_* \eta^* \alpha^* q^* F$ est un *isomorphisme.*

Lemme 11.8.- 1) *Il existe un unique relèvement continu de* q_+ *en*

$$q'_+ : W_+ \longrightarrow \tilde{X}_{\mathbb{R}} \quad .$$

2) *Le morphisme* q'_+ *est un morphisme analytique réel lisse de fibres isomorphes à* $\mathbb{R}$.

3) *Le morphisme* q'_+ *induit la projection canonique*

$$q'^{-1}_+(\tilde{Y}_{\mathbb{R}}) = C_{Y\backslash X} - Y \longrightarrow \tilde{Y}_{\mathbb{R}} \quad .$$

Donnons des indications sur la démonstration du lemme 11.8. Comme le morphisme $q : Z - \mathbb{A} \times Y \longrightarrow X$ se factorise par $\tilde{X}$, on se ramène à démontrer le lemme lorsque Y est un diviseur. Les assertions étant de nature locale sur X on peut supposer que Y est défini par une équation $f = o$. On sait alors que $Z - \mathbb{A} \times Y$ est isomorphe à $\mathbb{G}_m \times X$, que d n'est autre que l'application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda f(x)$ et que q est la deuxième projection. La vérification du lemme est alors immédiate.

L'isomorphisme annoncé dans la prop. 11.4 est alors obtenu en composant l'isomorphisme 11.7 avec l'isomorphisme de changement de base par le morphisme q'_+ .

La proposition 11.4 permet en fait de construire le faisceau spécialisé sur $C_{Y\backslash X}$. On sait qu'on a avec les notations du numéro 6

11.9 $$RC(Sp_{Y\backslash X}(F))\,/\,C_{Y\backslash X} - Y = p^* \pi_{\mathbb{R}}^* F/Y \quad .$$

Pour déterminer $Sp_{Y\backslash X}(F)$, il suffit donc d'après 6.2 de décrire le morphisme canonique

11.10 $$RC(Sp_{Y\backslash X}(F))\,/\,C_{Y\backslash X} - Y \longrightarrow Sp_{Y\backslash X}(F)\,/\,C_{Y\backslash X} - Y \quad ,$$

qui n'est autre que le morphisme $p^* j^*(v)$ où

$$v : \pi_{\mathbb{R}}^* F \longrightarrow Ri_* i^* \pi_{\mathbb{R}}^* F$$

est le morphisme canonique d'adjonction.

Dans le n°9 nous avons défini le faisceau spécialisé $Sp_{Y\backslash X}(F)$ lorsque F est *constructible*. Par les méthodes du n°9 (déformation au cône normal [8] et faisceau Ψ [3 et 4]) on pourrait définir un faisceau $\widetilde{Sp}_{Y\backslash X}(F)$ sans hypothèse de finitude sur F . Mais alors la prop. 11.4 n'est plus valable en général ainsi qu'on le voit immédiatement en prenant pour F le faisceau des fonctions holomorphes, $X = \mathbb{C}$, $Y = \{o\}$.

Il résulte d'autres considérations que nous ne développerons pas ici (Microlocalisation, Transformation de Fourier) que dans le cas général, au moins quand F est un faisceau analytique cohérent ou un $\mathcal{D}$-module cohérent, $\widetilde{Sp}_{Y\backslash X}(F)$ ne possède pas les propriétés qu'on souhaite et que la définition utile du faisceau spécialisé soit celle donnée par le deuxième membre de 11.5, c'est à dire celle construite avec les éclatements réels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.L BRYLINSKI - *Cohomologie d'intersection et faisceaux pervers*, Séminaire Bourbaki n°585 (fév. 82).

[2] J.L BRYLINSKI - A.S DUBSON - M. KASHIWARA - *Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale*, CRAS, t. 293 (nov. 81).

[3] P. DELIGNE - SGA 7 II, exp.XIII - Lectures Notes n°340, Springer-Verlag.

[4] P. DELIGNE - SGA 7 II, exp. XIV - Lectures Notes n°340, Springer Verlag.

[5] P. DELIGNE - SGA 4 1/2, (Th. Finitude) - lectures Notes n°569, Springer Verlag.

[6] M. GORESKY et R. MACPHERSON - Dans ce recueil d'exposés.

[7] LÊ DŨNG TRÁNG - *Faisceaux constructibles quasi-unipotents*, Séminaire Bourbaki n° 581 (nov. 81).

[8] J.L VERDIER - *Séminaire de géométrie analytique*, exp. IX - Astérisque 36-37.

[9] J.L BRYLINSKI - B. MALGRANGE - J.L VERDIER - Note au CRAS à paraître.

[10] A.A. BEILINSON - J.N BERNSTEIN - P. DELIGNE - O. GABBER - Dans ce recueil d'exposés.

J.L.VERDIER
Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques
45 rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05