Astérisque

FRÉDÉRIC PHAM

Structures de Hodge mixtes associées à un germe de fonction à point critique isolé

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 268-285

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__268_0>

STRUCTURES DE HODGE MIXTES ASSOCIÉES À UN GERME DE FONCTION À POINT CRITIQUE ISOLÉ *

FRÉDÉRIC PHAM

Dans des articles récents [18] [19] [20] , A. Varchenko a montré comment définir sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'un germe de fonction à point critique isolé une filtration dite " filtration de Hodge asymptotique " qui munit cette cohomologie d'une structure de Hodge mixte (avec la filtration par le poids de la monodromie). Cette définition se distingue des travaux précédents de J. Steenbrink [16] en ce qu'elle ne fait pas intervenir explicitement une compactification de la fibration de Milnor : la filtration de Hodge y est définie directement à partir de la connexion de Gauss-Manin locale, et donne des renseignements très précis sur les " indicateurs de singularité " de f considérée comme fonction de phase d'intégrales du type " méthode du col " .

Les travaux que je me propose d'exposer appartiennent au sillage (mouvementé!) de ceux de Varchenko. Dans [13] , J. Scherk et J. Steenbrink ont proposé une variante de la construction de Varchenko, intéressante dans la mesure où leur filtration de Hodge est censée coïncider avec celle de Steenbrink - alors que celle de Varchenko ne coïncide avec celle de Steenbrink qu'après passage au gradué associé à la filtration par le poids.

Il y avait malheureusement des fautes dans la démonstration, et j'ai prétendu, dans mon exposé oral de Luminy, corriger ces fautes au prix d'une légère modification de la définition de Scherk et Steenbrink, faisant intervenir le point de vue microlocal sur Gauss-Manin. Après avoir terminé la rédaction de mon exposé, j'ai reçu un article de Morihiko Saito [10] , qui fait ce travail beaucoup mieux que moi, puisque son texte met en evidence - et corrige - une autre faute qui subsistait dans ma version.

Ce qui suit est donc un exposé remanié en conformité avec la version de

---

* Exposé au Colloque d'Analyse et Topologie sur les espaces singuliers à Marseille Luminy, Juillet 1981

M. Saito, que je remercie pour la correspondance détaillée qu'il m'a adressée à ce sujet (je recommande d'ailleurs au lecteur son additif [11] , qui explique de façon très claire et avec de nombreux exemples la nécessité de l'ultime modification à la définition de Scherk et Steenbrink, à savoir le passage à un revêtement ramifié rendant la monodromie unipotente).

Je remercie également B. Malgrange et A. Varchenko, qui à peu près en même temps que M. Saito ont attiré mon attention sur l'inexactitude de la Proposition 3.3. dans ma version précédente. Enfin, je remercie J. Scherk et J. Steenbrink pour les nombreuses discussions que nous avons eues ensemble à Arcata et pour la correspondance qui a suivi : je voudrais signaler notamment l'article de J. Scherk [12] qui montre sur un exemple que la filtration de Varchenko ne coïncide pas avec la leur (cet exemple reste pertinent même après modification de leur définition).

0 . NOTATIONS

$f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ désigne un germe de fonction à point critique isolé. Ayant choisi dans l'espace source une boule B_ε de rayon assez petit puis dans l'espace but un disque T de rayon assez petit, on a la situation qu'a étudiée en détail Milnor :

$$\begin{array}{ccccccc} X_o & \subset & X = f^{-1}(T) \cap B_\varepsilon & \supset & X' & = & X - X_o \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & f' \quad \underline{\text{(fibration de Milnor)}} \\ 0 & \in & T & \supset & T' & = & T - \{0\} \end{array} .$$

1 . RAPPELS SUR LES LIMITES DE STRUCTURES DE HODGE

1.1. Le cas projectif :

Soit $g : Y \longrightarrow T$ un morphisme projectif d'une variété analytique complexe Y dans le disque unité $T = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$, de rang 1 au-dessus du disque épointé $T' = T - \{0\}$. Pour tout $t \in T'$, la cohomologie $H^n(Y_t, \mathbb{C})$ de la variété projective lisse $Y_t = g^{-1}(t)$ est munie d'une structure de Hodge de poids n . Notons $\underline{H}$ le système local sur T' dont les fibres sont les $\underline{H}_t = H^n(Y_t, \mathbb{C})$, munies du transport parallèle que définit la " connexion de Gauss-Manin " . Pour comparer les structures de Hodge des différences fibres $\underline{H}_t$, relevons $\underline{H}$ dans le revêtement universel $\widetilde{T}' \longrightarrow T'$ du disque épointé ; nous obtenons ainsi un faisceau constant $\underline{H}_{\widetilde{T}'}$, et nous pouvons parler de " la " fibre H de ce faisceau ; pour tout $t \in \widetilde{T}'$, l'isomorphisme $H = \underline{H}_t$ munit H d'une structure de Hodge pure qui dépend de $t \in \widetilde{T}'$; notons $F_t H$ la filtration de Hodge correspondante.

Dans cette situation, les théorèmes généraux de Schmid [14] (cf. aussi Griffiths - Schmid [6]) sur les " variations de structures de Hodge " assurent l'existence dans l'espace vectoriel H d'une " filtration de Hodge limite " , $F_\infty H$, définie ainsi :
quand t fait un tour autour de l'origine, la filtration F_t est changée en $M^{-1} F_t$, où M désigne l'automorphisme de monodromie de H ; décomposons M en sa partie semi-simple et sa partie unipotente : $M = M_S . M_U$, où $M_U = e^{-2\pi i N}$ (N nilpotent) ; on " tue " la partie unipotente de la monodromie en remplaçant F_t par $t^{-N} F_t = e^{-N \log t} F_t$: un tour autour de l'origine change alors $t^{-N} F_t$ en $M_S^{-1}(t^{-N} F_t)$, de sorte que $t^{-N} F_t$ sera invariant par ℓ tours autour de l'origine pour un certain ℓ (d'après le " théorème de monodromie " selon lequel M est " quasi-unipotente " , c.a.d. que les valeurs propres de M_S sont des racines de l'unité) ; en conclusion, $t^{-N} F_t$ est une famille de filtrations de H paramétrée par un revêtement fini du disque épointé ; d'après Schmid cette famille de filtrations admet une limite

$$\boxed{F_\infty H = \lim_{t \to 0} t^{-N} F_t H}$$

Il faut noter que cette " filtration de Hodge limite " n'a aucune raison de définir une structure de Hodge pure, car l'automorphisme t^{-N} ne commute pas à la conjugaison complexe dans H . Néanmoins, on montre qu'elle induit une structure de Hodge pure sur chacun des termes du gradué $Gr^W H$, où W désigne la filtration de H " par le poids de la monodromie ", caractérisée par les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(W^k H) \subset W^{k-2} H \ ; \\ N^k \text{ induit un isomorphisme entre } Gr^W_{n+k} H \text{ et } Gr^W_{n-k} H \ . \end{array} \right.$$

En résumé, le couple de filtrations (W, F_∞) définit sur H une " structure de Hodge mixte " .

Notons une propriété importante de la filtration de Hodge limite F_∞ : F_∞ est invariante par la partie semi-simple de la monodromie

1.2. Le cas local

La construction 1.1 ne s'applique plus au système local $\underline{H}$ défini par la cohomologie de la fibre de Milnor d'un germe de fonction f à point critique isolé, car il n'y a pas dans ce cas de structure de Hodge sur la cohomologie de la fibre générique X_t (avec les notations du § 0) . Néanmoins Steenbrink a montré dans [16] que l'on peut encore dans ce cas définir canoniquement une filtration de Hodge " limite " (de quoi ?) sur l'espace H des sections horizontales multiformes de $\underline{H}$. Cette filtration, que nous noterons F_{St} , peut être construite par le procédé suivant : comme le germe de fonction f est à point critique isolé, on peut supposer (après un changement de coordonnées locales) que c'est un germe de polynôme de degré d aussi grand qu'on veut, ayant l'origine comme seul point critique et " en position générale à l'infini " (c.a.d. que sa partie homogène de degré d définit une hypersurafce projective réduite et lisse); soit alors Y l'adhérence dans $Z = \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \times T$ du graphe de f ; soit $\pi : Z \longrightarrow T$ la seconde projection, et $g = \pi | Y$; on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

où $g : Y \longrightarrow T$ vérifie les hypothèses 1.1 ; notons ${}^gH$ l'espace vectoriel des sections horizontales multiformes de la cohomologie des fibres de g (la notation H , utilisée en 1.1 , est maintenant réservée au cas local) ; on a un isomorphisme de restriction de la cohomologie, $\rho : {}^gH \longrightarrow H$, dont on peut montrer qu'il est surjectif si le degré d du polynôme f a été choisi assez grand ; la filtration de Hodge " de Steenbrink " $F_{St}\, H$ est alors caractérisée par la propriété d'être l'image par ρ de la filtration de Hodge limite $F_\infty\, {}^gH$ définie en 1.1 .

Compte tenu du fait que le noyau de ρ n'est autre que l'espace des classes de cohomologie invariantes par la monodromie, on obtient ainsi sur H une structure de Hodge mixte (W, F_{St}) telle que ρ soit un morphisme de structures de Hodge mixtes : il suffit pour cela de définir la filtration W de H par le " poids de la monodromie " comme en 1.1 , sauf dans le sous-espace propre correspondant à valeur propre 1 de M_s , dans lequel le poids devra être décalé de 1 .

2 . DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS ORDINAIRES A SINGULARITÉS RÉGULIÈRES

Par " système différentiel ordinaire " nous entendons un système différentiel holonome sur un ouvert T de $\mathbb{C}$, c.a.d. un $\mathcal{D}_T$-Module à gauche $\underline{\underline{E}}$ (où $\mathcal{D}_T$ désigne le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients analytiques sur T), cohérent, et dont tous les éléments sont de torsion sur $\mathcal{D}_T$ (cette dernière condition traduit " l'holonomie " dans le cas d'une seule variable). Cette notion de système différentiel ordinaire est un peu plus générale que celle de la théorie classique, dans la mesure où on permet à $\underline{\underline{E}}$ d'avoir de la torsion sur $\mathcal{O}_T$.

Un " réseau " de $\underline{\underline{E}}$ est un sous - $\mathcal{O}_T$ - Module cohérent $\underline{\underline{R}}$ tel que $\mathcal{D}_T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{E}}$. On supposera que T est un disque de centre 0 , et que 0 est le seul point singulier de $\underline{\underline{E}}$: autrement dit, la restriction de $\underline{\underline{E}}$ à $T' = T - \{0\}$ est localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_{T'}$. On supposera de plus que 0 est un " point singulier régulier " de $\underline{\underline{E}}$, c.à.d. que $\underline{\underline{E}}$ contient un réseau $\underline{\underline{R}}$ stable par $t\partial_t$.

2.0. Exemples :

i) Systèmes où la multiplication par t est inversible (" connexions méromorphes ") .

Le prototype en est le système

$$\underline{\underline{E}}^{\alpha,m} = \mathcal{D}_T / \mathcal{D}_T(t\partial_t - \alpha)^m , \quad \alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{N} .$$

La théorie classique de Fuchs nous apprend que tout $\underline{\underline{E}}$ à singularité régulière où la multiplication par t est inversible est isomorphe à une somme directe finie de tels $\underline{\underline{E}}^{\alpha,m}$ (où la condition $\alpha \notin \mathbb{N}$ garantit l'inversibilité de t).

ii) Systèmes où l'opérateur ∂_t est inversible

Tout tel système, à singularité régulière, est isomorphe à une somme directe finie de systèmes $\underline{\underline{E}}^{\alpha,m}$ comme ci-dessus mais où la condition $\alpha \notin \mathbb{N}$ est remplacée par la condition $\alpha \neq -1, -2, \ldots,$ qui garantit l'inversibilité de ∂_t (cf. [8] n° 11.8.2) .

2.1. Remarque sur le cas général :

Tout germe de $\mathcal{D}$-Module holonome à une variable $\underline{\underline{E}}$, à singularité régulière, est transformé en un système de type 2.0 i) par le foncteur de " localisation " $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}] \underset{\mathbb{C}\{t\}}{\otimes}$, et en un germe de système de type 2.0 ii) par le foncteur de " microlocalisation " $\mathcal{E} \underset{\mathcal{D}}{\otimes}$. De plus, un élément de $\underline{\underline{E}}$ est entièrement déterminé par la donnée des images " locale " et " microlocale " . [La classification explicite de ces systèmes est maintenant bien comprise : brouillons de Kashiwara, cours de Boutet de Monvel à l'E.N.S., lettres de Malgrange...].

2.2. Développement asymptotique local

Soit $\underline{H}$ un système local sur T' , et soit H l'espace vectoriel de ses sections globales multiformes. Il est bien connu (cf. Deligne [4]) que

$\mathcal{O}_{T'} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \underline{H}$ se prolonge de façon canonique sur T en un système différentiel $\underline{\underline{H}}$ de type 2.0 i) , dont les sections sur un voisinage T de l'origine peuvent être définies comme l'ensemble des sections globales (uniformes) de $\mathcal{O}_{T'} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \underline{H}$ à croissance modérée à l'origine. Autrement dit, un germe à l'origine de section de $\underline{\underline{H}}$ sera n'importe quel élément de Nils $\underset{\mathbb{C}}{\otimes}$ H invariant par la monodromie, où Nils désigne l'ensemble des germes à l'origine de fonctions de classe de Nilson (sections multiformes de $\mathcal{O}_{T'}$, de type de détermination fini , à croissance modérée à l'origine).

Conclusion : Tout germe à l'origine de section de $\underline{\underline{H}}$ est caractérisé par son " développement asymptotique local "

(*) $$u = \sum_{\alpha} \sum_{k} t^{\alpha} \frac{(\mathrm{Log}\ t)^k}{k!} A^u_{\alpha,k} \quad , \quad A^u_{\alpha,k} \ , \ A^u_{\alpha,k} \in H \quad ,$$

où la somme sur k porte sur un nombre fini d'entiers naturels, tandis que les α sont tels que les $e^{-2\pi i\alpha}$ soient des valeurs propres de la monodromie de H ; de plus les α sont bornés inférieurement une fois u fixé, ou quand u parcourt un réseau donné.

Si l'on pose $N = -\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}\ M_u$, où M_u désigne la partie unipotente de la monodromie de H , on a la formule

$$A^u_{\alpha,k} = N^k A^u_{\alpha,o}$$

qui permet d'écrire (*) sous la forme plus compacte suivante :

(*)' $$u = \sum_{\alpha} t^{\alpha}\, t^{N} A^u_{\alpha,o} \qquad (\text{où } t^N = \exp(N\ \mathrm{Log}\ t))$$

(comparer à Varchenko, [17] § 4) .

2.3. Développement asymptotique microlocal

Pour un germe de système $\underline{\underline{E}}$ à singularité régulière quelconque, le développement asymptotique local d'un élément u (c.a.d. le développement 2.2(*) de son image dans le système localisé) ne détermine u qu'à un élément à support l'origine près. Pour achever de déterminer u il suffit de se donner, en plus du développement asymptotique local, le " développement asymptotique microlocal " que l'on peut définir ainsi : de même que le " localisé " est entièrement décrit par le système local sur T' des solutions analytiques (dont $\underline{H}$, dans les notations 2.2 , est le sytème local dual), le " microlocalisé " est entièrement décrit par l'espace vectoriel des solutions microfonctions (de classe de Nilsson), avec action de la monodromie ; les " microfonctions de classe de Nilsson " sont par définitions les éléments $[\varphi]$ de l'espace quotient $\mathcal{C}_{\text{Nils}} = \text{Nils}/\mathcal{O}_{T,0}$, où Nils est l'espace des germes à l'origine de fonctions φ de classe de Nilsson (fonctions anlytiques multiformes de type de détermination fini, à croissance modérée) ; la monodromie agit sur Nils, de façon triviale sur $\mathcal{O}_{T,0}$, donc passe au quotient dans $\mathcal{C}_{\text{Nils}}$. Remarquons que dans Nils la multiplication par t est inversible, alors que dans $\mathcal{C}_{\text{Nils}}$ c'est la dérivation ∂_t qui est inversible (par exemple si $\delta = \left[-\frac{1}{2\pi i t}\right]$ désigne la " microfonction de Dirac " , $\partial_t^{-1}\delta = \left[-\frac{1}{2\pi i}\,\text{Log}\,t\right]$ est la " microfonction de Heaviside " .

En notant E^{mic} l'espace vectoriel dual de l'espace des solutions microfonctions, on a le résultat suivant (analogue microlocal de 2.2) : le microlocalisé du système étudié s'identifie à l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}_{\text{Nils}} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E^{\text{mic}}$ invariants par la monodromie.

Conclusion : L'image microlocale d'un élément quelconque u est caractérisée par son " développement asymptotique microlocal "

$$(*) \qquad u^{\text{mic}} = \sum_{\beta} \delta^{(\beta\mathbf{1}-N)}\, c^{u}_{\beta,o} \ , \quad c^{u}_{\beta,o} \in E^{\text{mic}} \ ,$$

où N est déduit de la monodromie de E^{mic} comme en 2.2 ; $\delta^{(\beta\mathbf{1}-N)}$ est la " microfonction à valeurs dans $\text{Aut}\,E^{\text{mic}}$ " définie par

$$\delta^{(\Lambda)} = \begin{cases} \left[\dfrac{\Gamma(\Lambda+1)}{2\pi i}\,(-t)^{-\Lambda-1}\right] & \text{si} \quad \beta \neq -1, -2, \dots \\[2ex] \left[\dfrac{-1}{2\pi i(-\beta-1)!}\,t^{-\Lambda-1}\,\text{Log}\,t\right] & \text{si} \quad \beta \in \{-1, -2, \dots\} , \end{cases}$$

formule qui définit $\delta^{(\Lambda)}$, la " dérivée Λ-ième de la fonction de Dirac " , pour tout Λ de la forme $\Lambda = \beta\mathbf{1} - N$, avec N nilpotent ; les β ont la propriété que les $e^{2\pi i\beta}$ sont des valeurs propres de la monodromie de E^{mic} , et ils sont bornés supérieurement une fois u fixé, ou quand u parcourt un réseau donné.

2.4. Réseau canonique

Pour tout germe de système différentiel ordinaire $\underline{\underline{E}}$ à singularité régulière, nous appellerons réseau canonique de $\underline{\underline{E}}$ l'ensemble des éléments $u \in \underline{\underline{E}}$

dont le développement asymptotique local 2.2 (*) et microlocal 2.3 (*) n'est formé que de fonctions et microfonctions <u>intégrables à l'origine</u> (en appelant [micro] fonctions " intégrables à l'origine " les [classes de] fonctions dont la croissance dans tout secteur angulaire est strictement moins rapide que $\frac{1}{|t|}$) ; cela revient à dire que seuls des α tels que $\operatorname{Re}\alpha > -1$, et des β tels que $\beta < 0$, figurent dans les développements 2.2 (*) , 2.3 (*) .

Le réseau canonique ainsi défini a la vertu d'être un $\mathcal{O}_T$ - module <u>libre</u>, et de s'envoyer <u>injectivement</u> dans le <u>localisé</u> de $\underline{\underline{E}}$.

<u>Remarque</u> : <u>Sous l'hypothèse</u> 2.0 i) [resp. 2.0 ii)] , on peut se permettre de ne faire intervenir <u>que le développement asymptotique local</u> [resp. <u>microlocal</u>] dans la définition du réseau canonique ; en effet, ce développement asymptotique détermine alors l'autre par l'application $U \otimes \widetilde{V}^T$ [resp. $V \otimes \widetilde{U}^T$] ainsi définies :

$$\mathrm{Nils} \otimes H \underset{V \otimes \widetilde{U}^T}{\overset{U \otimes \widetilde{V}^T}{\rightleftarrows}} C_{\mathrm{Nils}} \otimes E^{mic} \qquad ;$$

les flèches $\mathrm{Nils} \underset{V}{\overset{U}{\rightleftarrows}} C_{\mathrm{Nils}}$ sont définies par $U(\varphi) = [\varphi]$, $V([\varphi]) = M\varphi - \varphi$ où M désigne la monodromie ; on en déduit de façon évidente des flèches $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ entre les espaces de solutions dans Nils et dans C_{Nils} , d'où les $\widetilde{U}^T$ et $\widetilde{V}^T$ se déduisent par transposition.

2.5. <u>Lecture dans le réseau canonique de la filtration de Hodge limite</u>.

Considérons une variation de structure de Hodge du type évoqué en 1.1 , mais à monodromie <u>unipotente</u> (un revêtement ramifié permet de se ramener du cas quasi-unipotent au cas unipotent). Alors, d'après 2.2 (*)' , toute section u du réseau canonique $\underline{\underline{S}}$ de $\underline{\underline{H}}$ s'écrit sur T'

$$u(t) = t^N A^u(t) \quad , \quad t \in T' \ ,$$

où $A^u \in \mathcal{O}(T) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} H$ est une fonction holomorphe sur T à valeurs dans l'espace vectoriel H . Pour tout $t \in T'$ on a donc les équivalences suivantes :

$$u(t) \in F^p \underline{H}_t \Leftrightarrow t^N A^u(t) \in F^p \underline{H}_t \Leftrightarrow A^u(t) \in t^{-N} F^p_t \quad .$$

Il en résulte que la limite F^p_∞ , dont l'existence nous est garantie par le théorème de Schmid, s'identifie au sous-espace vectoriel de H engendré par les $A^u(0)$ tels que $\forall\, t \in T'$, $u(t) \in F^p \underline{H}_t$; de plus, l'ensemble de ces u définit un sous - $\mathcal{O}_T$ - Module libre de $\underline{\underline{S}}$, que nous noterons $F^p \underline{\underline{S}}$, <u>et l'on a l'isomorphisme canonique</u>

$$F^p \underline{\underline{S}}_o / t\, \underline{\underline{S}}_o \cap F^p \underline{\underline{S}}_o \xrightarrow{\sim} F_\infty$$
$$\text{classe de } u \longmapsto A^u(0) \quad .$$

Si la variation de structure de Hodge avait été à monodromie quasiunipotente mais <u>non unipotente</u>, on aurait pu aussi définir une filtration $F^p \underline{\underline{S}}_o$ de façon analogue à ce qui précède, <u>mais l'isomorphisme final n'aurait plus été vrai</u> (M. <u>Saito</u> [11]) : dans un tel cas, il est donc fondamental de se ramener au cas unipotent par un revêtement ramifié du disque T .

3 . <u>FILTRATIONS DE HODGE DE LA CONNEXION DE GAUSS-MANIN LOCALE.</u>

Avec les notations du § 0, et la définition 1.2 de la " filtration par le poids " W , nous allons décrire deux façons de munir la cohomologie des fibres de f' d'une " <u>filtration de Hodge limite</u> " qui, avec la filtration W , définiront une structure de Hodge mixte.

3.1. <u>Filtration de Hodge asymptotique, d'après Varchenko</u>

La cohomologie des fibres de f' , munie de la connexion de Gauss-Manin, définit sur T' un système local $\underline{H}$ d'espaces vectoriels de dimension $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_o, x_1, \ldots, x_n\} / (\partial_{x_o} f, \ldots, \partial_{x_n} f)$, qui d'après 2.1 s'étend de façon unique sur T en une " <u>connexion méromorphe</u> " $\underline{\underline{H}}$ également appelée " <u>connexion de Gauss-Manin</u> de f .

On sait (cf. [2]) que $\underline{\underline{H}}$ est à singularité régulière, et il en résulte que toute section $u \in \underline{\underline{H}}(T)$ admet un " développement asymptotique " du type 2.2 dont on sait de plus que tous les exposants α sont rationnels (" quasi-unipotence " de la monodromie). Le plus petit de ces exposants (pour u donné) sera noté $\alpha(u)$.

Dans $\underline{\underline{H}}$ est défini un <u>réseau</u> que nous noterons $\underline{\underline{G}}^{(o)}$ (il est noté G dans <u>Malgrange</u> [7] , et H'' dans <u>Brieskorn</u> [2]) ; ce réseau, qui est libre de rang μ sur $\mathcal{O}_T$ (<u>Sébastiani</u> [15]) , est caractérisé par la propriété suivante :

$\underline{\underline{G}}^{(o)}(T)$ est l'ensemble des sections u de $\underline{\underline{H}}$ dont la restriction à T' peut s'écrire $u(t) = \mathrm{Res}_{X_t} \dfrac{\omega}{t-f}$, où ω est un germe de forme différentielle holomorphe de degré n+1 . On sait de plus, d'après <u>Malgrange</u> [7] , que $\alpha(u) > -1$ pour tout $u \in \underline{\underline{G}}^{(o)}$; autrement dit $\underline{\underline{G}}^{(o)}$ est inclus dans le " <u>réseau canonique</u> " $\underline{\underline{S}}$ de $\underline{\underline{H}}$ (cf. n° 2.4.) .

DÉFINITION (A. Varchenko) : Soit H l'espace vectoriel des sections multiformes du système local $\underline{H}$. On appelle " filtration de Hodge asymptotique " la filtration décroissante F_a de H définie par : $F_a^p(H)$ est le sous-espace vectoriel de H engendré par les $A^u_{\alpha(u),o}$ tels que $u \in \underline{\underline{G}}^{(o)}$, $\alpha(u) \leq n-p$.

THÉORÈME (Varchenko, [19] et [20]) :
La filtration asymptotique F_a et la filtration de Steenbrink F_{St} (cf. 1.2) induisent la même filtration de $Gr^W H$, le gradué associé à la filtration par le poids :

$$\boxed{F_a\, Gr^W H = F_{St}\, Gr^W H}$$

Corollaire. Le couple de filtrations (W, F_a) définit sur H une structure de Hodge mixte.

3.2. Description directe de la filtration de Hodge de Steenbrink.

Avertissement : la définition énoncée ci-dessous, avatar final de la définition de Scherk et Steenbrink, peut paraître compliquée. Le lecteur lui préfèrera sans doute la traduction explicite très simple donnée au § 3.3 .

Au lieu de considérer $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{G}}^{(o)}$ comme des réseaux de la connexion de Gauss-Manin $\underline{\underline{H}}$, nous allons les considérer comme des réseaux de ce que j'appelle dans [8] § 15 le système de Gauss-Manin $\underline{\underline{G}}$, qui se trouve être un système différentiel de type 2.0 ii), dont $\underline{\underline{H}}$ se déduit par localisation (inversement, la fibre de $\underline{\underline{G}}$ à l'origine se déduit de $\underline{\underline{H}}$ par microlocalisation). Sur $\underline{\underline{G}}$ nous définissons la filtration $F\underline{\underline{G}}$ suivante (triviale en dehors de l'origine) :

$$F^p\,\underline{\underline{G}} = \partial_t^{n-p}\,\underline{\underline{G}}^{(o)} \quad (\subset \underline{\underline{G}}) .$$

Cette filtration induit sur $\underline{\underline{S}}_o$ une filtration

(**) $$F^p\,\underline{\underline{S}}_o = F^p\,\underline{\underline{G}} \cap \underline{\underline{S}}_o .$$

Notons que la formule $F^p\,\underline{\underline{S}}_o = \partial_t^{n-p}\,G^o \cap S_o$ n'a pas le même selon qu'on la lit dans $\underline{\underline{G}}$ (comme ici) ou dans $\underline{\underline{H}}$ (comme dans la première version de [13]) ! Dans $\underline{\underline{G}}$, où l'opérateur ∂_t est inversible, la formule peut encore s'écrire

(**)' $$F^p\,\underline{\underline{S}}_o = \{ v \in \underline{\underline{S}}_o \mid \partial_t^{-(n-p)}\, v \in \underline{\underline{G}}^{(o)} \} .$$

Pour déduire de là la filtration F_{St} de Steenbrink, une seconde modification de l'idée originale de [13] est encore nécessaire (M. Saito [10]) : il faut remplacer $\underline{\underline{H}}$ par son image réciproque $\hat{\underline{\underline{H}}}$ par un revêtement $\lambda : \hat{T} \longrightarrow T$, $\hat{t} \longmapsto t^{\ell} = \hat{t}$, de degré ℓ assez grand pour rendre la monodromie unipotente (la monodromie de $\hat{\underline{\underline{H}}}$ est alors $e^{2\pi i \hat{N}}$, où $\hat{N} = \ell N$). Soit $\hat{\underline{\underline{S}}}$ le réseau canonique de $\hat{\underline{\underline{H}}}$. Un élément général de $\hat{\underline{\underline{S}}}$ s'écrit $u = \hat{t}^{\hat{N}} A^u(\hat{t})$, où $A^u \in \mathcal{O}(\hat{T}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} H$, et la correspondance $u \longmapsto A^u(0)$ définit un isomorphisme entre $\hat{\underline{\underline{S}}}_o / t\, \hat{\underline{\underline{S}}}_o$ et H. La construction d'une filtration de H se ramène ainsi à la construction d'une filtration de $\hat{\underline{\underline{S}}}_o / t\, \hat{\underline{\underline{S}}}_o$, que l'on définit comme image de la filtration suivante de $\hat{\underline{\underline{S}}}_o$:

$$F^p\, \hat{\underline{\underline{S}}}_o = \lambda^*(F^p\, \underline{\underline{S}}_o) \cap \hat{\underline{\underline{S}}}_o ,$$

où $\lambda^*(F^p\, \underline{\underline{S}}_o) = \mathcal{O}_{\hat{T}} \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} F^p\, \underline{\underline{S}}_o$.

<u>THÉORÈME</u> . La filtration F de $H \simeq \hat{\underline{\underline{S}}}_o / t\, \hat{\underline{\underline{S}}}_o$ ainsi définie coïncide avec la filtration F_{St} de Steenbrink.

La démonstration de ce théorème sera esquissée au § 4 .

3.3. <u>Comparaison directe des filtrations</u> F_a <u>du</u> n° 3.1 <u>et</u> F <u>du</u> n° 3.2.

<u>PROPOSITION</u> $\boxed{F_a\, Gr^W H = F\, Gr^W H}$

Il s'agit ici de vérifier cette proposition <u>directement à partir des définitions 3.1 et 3.2</u> , sans s'appuyer sur les théorèmes énoncés ci-dessus.

Soit $v = \sum_{\alpha > -1} t^{\alpha}\, t^N A^v_{\alpha,o}$ un élément de $\underline{\underline{S}}_o$ tel que $\partial_t^{-(n-p)} v$ soit dans $\underline{\underline{G}}^{(o)}$ (cf. 3.2 (**)') . Son image réciproque par λ s'écrit

$$\lambda^*(v) = \sum_{\alpha > -1} \hat{t}^{\ell\alpha}\, \hat{t}^{\ell N} A^v_{\alpha,o} \text{ , où les } \ell\alpha \text{ sont entiers.}$$

On peut toujours supposer $\alpha(v) \leq 0$ (sinon $\lambda^*(v) \in \hat{t}\, \hat{\underline{\underline{S}}}_o$) , de sorte que $\mathbb{C}\{\hat{t}\}\lambda^*(v)$ contient l'élément

$$\hat{t}^{-\ell\alpha(v)}\, \lambda^*(v) \equiv \hat{t}^{\ell N} A^v_{\alpha(v),o} \mod. \hat{t}\, \hat{\underline{\underline{S}}}_o .$$

<u>Conclusion</u> : $F^p H$ <u>est engendré par les</u> $A^v_{\alpha(v),o}$ <u>tels que</u>

$$\partial_t^{-(n-p)} v \in \underline{\underline{G}}^{(o)} \quad , \quad -1 < \alpha(v) \leq 0 \quad .$$

D'autre part, en posant $u = \partial_t^{-(n-p)} v$, on a :

$$u = \sum_\alpha L_\alpha^{-1} \, t^{\alpha+n-p} \, t^N A^v_{\alpha,o} \quad , \text{ où } \quad L_\alpha = \left[(\alpha+1)\mathbb{1} + N\right] \ \ldots \ \left[(\alpha+n-p)\mathbb{1} + N\right]$$

de sorte que $\alpha(u) = \alpha(v) + n-p$ ($\Rightarrow$ $n-p-1 < \alpha(u) \leq n-p$) et

$$A^u_{\alpha(u),o} = L^{-1}_{\alpha(v)} \, A^v_{\alpha(v),o} \quad .$$

La proposition 3.3 s'en déduit immédiatement, compte tenu du fait que N induit l'endomorphisme nul de $Gr^W H$, de sorte que l'automorphisme $L^{-1}_{\alpha(v)}$ induit sur $Gr^W H$ un multiple de l'identité.

<u>Remarque</u> . La proposition ci-dessus est vraie pour n'importe quel couple formé par une connexion méromorphe $\underline{\underline{H}}$ à singularité régulière (à monodromie quasiunipotente) et un réseau $\underline{\underline{G}}^{(o)}$ inclus dans le " réseau canonique " . Si l'on se place dans ce cadre " abstrait " où l'on oublie la géométrie sous-jacente à Gauss-Manin, il est très facile de fabriquer des exemples où les deux filtrations $F_a H$ et $F H$ sont différentes. Il est un peu moins facile de fabriquer des exemples " géométriques " (où $(\underline{\underline{H}} , \underline{\underline{G}}^{(o)})$ est la connexion de Gauss-Manin avec son réseau " naturel "). Un tel exemple vient d'être trouvé par Scherk [12] .

4 . <u>ESQUISSE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2.</u>

Reprenons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

construit en 1.2.

Le système de Gauss-Manin $\underline{\underline{G}}^g = \int_g \mathcal{O}_Y$ de $g : Y \longrightarrow T$ peut être défini par la formule $\underline{\underline{G}}^g = \underline{\underline{R}}^n \pi_* \, DR^\bullet_\pi \, \mathcal{B}_{[Y]Z}$, où $\mathcal{B}_{[Y]Z}$ désigne le $\mathcal{D}_Z$-Module des " couches multiples " portées par l'hypersurface Y : $\mathcal{B}_{[Y]Z} = \mathcal{O}_Z(\text{div } Y)/\mathcal{O}_Z$ (on a noté $\mathcal{O}_Z(\text{div } Y)$ le faisceau des fonctions méromorphes à lieu polaire porté par Y) $DR^\bullet_\pi \, \mathcal{B}_{[Y]Z}$ désigne le complexe de De Rham relatif de ce $\mathcal{D}_Z$-Module :
$DR^\bullet_\pi \, \mathcal{B}_{[Y]Z} = (\Omega^\bullet_\pi \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{B}_{[Y]Z}, d)$ avec d donné en coordonnées locales par

$$d(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + \sum_i (dz_i \wedge \omega) \otimes \partial_{z_i} m \quad .$$

$DR^{\bullet}_{\pi}\mathcal{B}_{[Y]Z}$ est un complexe de $\pi^{-1}(\mathcal{D}_T)$-Modules. Pour en calculer le $\underline{\underline{R}}^n\pi_*$, on pourra utiliser une résolution de Čech de ce complexe par un recouvrement de Stein, puisque chaque terme du complexe est acyclique pour le foncteur section sur les ouverts de Stein (étant limite inductive de $\mathcal{O}_Z$-Modules cohérents).

L'intersection de ce recouvrement avec l'ouvert de Stein X définit un recouvrement de Stein de X , ce qui permet (par restriction des sections) de définir un homomorphisme de $\mathcal{D}_T$-Modules :

$$\rho : \underline{\underline{G}}^g \longrightarrow \underline{\underline{G}} \quad , \quad \text{où} \quad \underline{\underline{G}} = \int_f \mathcal{O}_X = \underline{\underline{R}}^n\ \pi_*\ DR^{\bullet}_{\pi}\mathcal{B}_{[f]X \times T} \quad .$$

4.1. <u>LEMME</u> : Si le degré du polynôme f a été choisi assez grand, on a une suite exacte de $\mathcal{D}_T$-Modules.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_T^N \longrightarrow \underline{\underline{G}}^g \xrightarrow{\rho} \underline{\underline{G}} \longrightarrow 0$$

<u>Preuve</u>. Appliquons à l'homomorphisme ρ le foncteur "de microlocalisation" $\mathcal{E}_T \underset{\mathcal{D}_T}{\otimes}$, où $\mathcal{E}_T$ désigne l'anneau des germes à l'origine d'opérateurs micro-différentiels (dans la codirection dt). Cela revient à remplacer, dans la construction de ρ , les "images directes" $\int_g$ et $\int_f$ par les "images directes microlocales "étudiées dans [8] (Microlocalisation, § 6) ; de l'hypothèse que g a l'origine pour unique point critique, on déduit facilement que l'image directe microlocale $\check{\int_g} \mathcal{O}_Y$ est donnée par une construction <u>purement ponctuelle</u> (à l'origine de Z , dans la direction conormale au graphe de g) , de sorte que ρ devient après microlocalisation l'homomorphisme identique

$$\check{\rho} = 1 \quad : \quad \check{\int_g} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{=} \check{\int_f} \mathcal{O}_X \quad .$$

Autrement dit, le noyau et le conoyau de ρ deviennent nuls après microlocalisation et sont donc <u>libres</u> (de type fini) sur $\mathcal{O}_T$ (cf. [8] , Microlocalisation, Corollaire 4.1.3.). Par ailleurs, on a vu en 1.2 que si le degré de f a été choisi assez grand l'homomorphisme de restriction de la cohomologie $H^n(Y_t) \longrightarrow H^n(X_t)(t \in T')$ est <u>surjectif</u> ; cela signifie que le conoyau de ρ est nul dans T' , donc nul puisque libre.

<u>Corollaire</u> : <u>Le réseau canonique</u> $\underline{\underline{S}}^g$ <u>de</u> $\underline{\underline{G}}^g$ <u>est image réciproque de celui</u> $\underline{\underline{S}}$ de $\underline{\underline{G}}$:

$$\underline{\underline{S}}^g = \rho^{-1}(\underline{\underline{S}}) \quad .$$

De même, en notant $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{T}}^N \longrightarrow \hat{\underline{\underline{G}}}^g \xrightarrow{\hat{\rho}} \hat{\underline{\underline{G}}} \longrightarrow 0$ la suite exacte de $\mathcal{D}_{\hat{T}}$-Modules déduite de la précédente par action du foncteur $\mathcal{O}_{\hat{T}} \underset{\mathcal{O}_T}{\bullet}$, où $\lambda : \hat{T} \longrightarrow T$ est un revêtement ramifié de T, on aura une relation analogue $\hat{\underline{\underline{S}}}^g = \hat{\rho}^{-1}(\hat{\underline{\underline{S}}})$ entre les réseaux canoniques de $\hat{\underline{\underline{G}}}^g$ et de $\hat{\underline{\underline{G}}}$

4.2 - Description "à la Brylinski" de la variation de structure de Hodge associée à la fibration $g' : Y' \longrightarrow T'$.

(on a noté $Y' = Y - g^{-1}(0)$, $g' = g|Y')$.

En s'inspirant d'une idée de Brylinski ([3] §3), on peut définir sur le complexe de De Rham relatif $DR_\pi^\bullet \mathcal{B}_{Y[Z]}$ une filtration dite "de Hodge" :

$$F^p(DR_\pi^\bullet \mathcal{B}_{[Y]Z}) : 0 \to \dots \to 0 \to \Omega_\pi^p \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{B}^{(0)} \longrightarrow \Omega_\pi^{p+1} \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{B}^{(1)} \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \Omega_\pi^{n+1} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{B}^{(n+1-p)} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{B}^{(r)}$ désigne la filtration évidente de $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{[Y]Z}$.

Pour tout $t \in T'$ cette construction passe à l'image réciproque par l'inclusion $\mathbb{P}^{n+1} \times \{t\} \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1} \times T$ (transverse à Y), et donne dans $\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}^{n+1} \times \{t\}$ le complexe de De Rham absolu $DR^\bullet \mathcal{B}_{[Y_t]\mathbb{P}^{n+1}}$ muni, comme l'a remarqué Brylinski, d'une filtration quasi-isomorphe à la "filtration bête" de $DR^\bullet(Y_t)[1]$, le complexe de De Rham de Y_t décalé de 1 vers la gauche (cf. DELIGNE [5]). On en déduit la

PROPOSITION: Soit F la filtration sur $\underline{\underline{G}}^g$, image directe par $\underline{\underline{R}}^n \pi_*$ de la filtration de Hodge "de Brylinski" définie ci-dessus, décalée de 1 vers la gauche. Alors pour tout $t \in T'$, la filtration induite par F sur le système local $\underline{G}^g_{T'}$ (système des sections horizontales de $\underline{\underline{G}}^g$) coïncide avec la filtration de Hodge de la cohomologie $H^n(Y_t)$.

4.3 - Restriction à la situation locale

Un calcul immédiat montre que si l'on applique la construction de Brylinski 4.2 à la situation locale $X \xrightarrow{f} T$, on obtient sur $\underline{\underline{G}}$ la filtration définie en 3.2. De plus , il est clair que la construction 4.2. est compatible avec la restriction $\rho : \underline{\underline{G}}^g \longrightarrow \underline{\underline{G}}$, qui est ainsi un homomorphisme de modules filtrés.

De plus, le lemme 4.1 peut être précisé ainsi :

LEMME : Si le degré d du polynôme f a été choisi assez grand, l'homomorphisme

ρ induit pour tout p un <u>épimorphisme</u>

$$F^p \underline{\underline{G}}^g \longrightarrow F^p \underline{\underline{G}} \quad .$$

<u>Preuve</u> . Comme $F^p \underline{\underline{G}} = \partial_t^{n-p} \underline{\underline{G}}^{(o)}$ (resp. $F^p \underline{\underline{G}}^g = \partial_t^{n-p} \underline{\underline{G}}^{g(o)}$) , et que ∂_t est inversible, il suffit de démontrer la surjectivité de la restriction $\underline{\underline{G}}^{g(o)} \to \underline{\underline{G}}^{(o)}$. Or, il est bien connu que si $a \in \mathbb{C}\,\{x_o,x_1,\ldots,x_n\}$ appartient à une puissance assez grande de l'idéal maximal, la classe de $a\, dx_o \wedge \ldots \wedge dx_n \otimes \delta_{(t-f(x))}$ définit un élément de $t\, G^{(o)}$. Il en résulte que $G^{(o)}$ peut être engendré sur $\mathbb{C}\,\{t\}$ par des classes de formes différentielles à coefficients a <u>polynomiaux de degrés bornés</u>, de sorte que les $\dfrac{a\, dx_o \wedge \ldots \wedge dx_n}{t - f(x)}$ sont, pour f de degré assez grand, des formes différentielles méromorphes sur $Z = \mathbb{P}^{n+1} \times T$ à lieu polaire inclus dans Y , dont les classes modulo les formes holomorphes sont donc des sections globales de $\Omega_\pi^{n+1} \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{B}^{(n-p)}_{[Y]\, Z}$ (la démonstration qui précède est une adaptation d'une idée utilisée par Scherk et Steenbrink dans la preuve de leur Lemme 4.3 [13]) .

4.4. <u>Conclusion</u>.

La remarque 2.5 appliquée à la variation de structure de Hodge globale nous fournit immédiatement la relation suivante entre la filtration de Hodge limite $F_\infty H^g$ et la filtration de Hodge " de Brylinski " 4.2 :
l'<u>image dans</u> $\hat{\underline{\underline{S}}}{}^g_o \,/\, t\, \hat{\underline{\underline{S}}}{}^g_o \simeq H^g$ <u>de</u> $\lambda^*(F^p\, \underline{\underline{G}}^g_o) \cap \hat{\underline{\underline{S}}}{}^g_o$ <u>est incluse dans</u> $F^p_\infty H^g$.

Grâce au Lemme 4.3 et au corollaire du Lemme 4.1. on en tire le résultat suivant :
<u>la filtration</u> FH <u>définie en</u> 3.2. <u>est incluse dans la filtration</u> F_{St} H <u>définie en</u> 1.2.

L'<u>égalité</u> de ces deux filtrations peut se déduire de cette inclusion en invoquant 3.3. et le résultat de Varchenko cité en 3.1. (égalité des filtrations induites sur $Gr^W H$) , mais Morihiko SAITO en indique une démonstration autonome, basée sur la dualité des exposants caractéristiques et sur lemme semblable à l'un des lemmes-clefs de la démonstration de Varchenko ([19] , Lemme 2) .

5 . <u>LES INDICATEURS DE SINGULARITÉ ET LEUR COMPORTEMENT PAR DÉFORMATION</u>.

Rappelons (formules 2.2. (*)' et 2.3. (*)) que tout élément u du réseau canonique admet un développement asymptotique que l'on peut écrire sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$u = \sum_{\alpha} t^{\alpha} t^{N} A^{u}_{\alpha,0} \quad \text{et} \quad u = \sum_{\beta} \delta^{(\beta - N)} C^{u}_{\beta,0}$$

qui, comme on le voit en explicitant la Remarque 2.4 , se correspondent terme à terme, avec $\beta = -\alpha - 1$.

Posons $\beta(u) = \mathrm{Sup}\{\beta \mid C^{u}_{\beta,0} \neq 0\}$, et pour toute valeur propre λ de la monodromie, posons

$$\beta_{\lambda} = \mathrm{Max}\ \{\beta \mid e^{2\pi i \beta} = \lambda\ ,\ \exists\ u \in \underline{\underline{G}}^{(o)}\ ,\ \beta = \beta(u)\ \}\ .$$

Le plus grand de tous les β_{λ} (quand λ parcourt l'ensemble des valeurs propres de la monodromie) joue dans la description des intégrales de Laplace complexes (du type " méthode du col " [9]) un rôle analogue à " l'indicateur de singularité " d'Arnold [1] [1'] pour les intégrales oscillantes réelles (du type " méthode de la phase stationnaire ").

En remarquant que la filtration F est compatible avec la décomposition en somme directe $H = \bigoplus_{\lambda} H_{\lambda}$ (suivant les espaces propres de la partie semi-simple de la monodromie), on montre facilement, par un calcul analogue à celui de la Proposition 3.3. , que β_{λ} est caractérisé, parmi tous les nombres β tels que $e^{2\pi i\beta} = \lambda$, par la propriété

$$-n + p_{\lambda} - 1 \leq \beta_{\lambda} < -n + p_{\lambda}\ ,$$

où $p_{\lambda} = \mathrm{Max}\ \{\ p \mid F^{p} H_{\lambda} \neq 0\ \}$.

Ainsi, la filtration de Hodge détermine complètement les " indicateurs de singularité " β_{λ} (si l'on veut bien les appeler ainsi !). Cette remarque donne tout son sel au résultat suivant :

PROPOSITION . ([13] [18] [20]). Les nombres de Hodge $h_{p,q} = \dim_{\mathbf{C}} Gr^{p}_{F}\, Gr^{q}_{\overline{F}}\, Gr^{W}_{p+q} H$ (de la structure de Hodge mixte d'un germe de fonction à point critique isolé) sont constants lors d'une déformation " à μ constant " .

Corollaire . Les " indicateurs de singularité " β_{λ} sont constants lors d'une déformation à μ constant.

La proposition se démontre sans grande difficulté par un argument de " cohérence " qui implique la semi-continuité des nombres de Hodge, d'où leur constance se déduit du fait $\sum_{p,q} h_{p,q} = \mu$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.I. ARNOLD Intégrales de fonctions rapidement oscillantes ... (en Russe) Funkt. analiz i evo prilojenia 6 , 3 (1972) pp. 61-62 .

[1]' " " Remarques sur la méthode de la phase stationnaire ... (en Russe) Ousp. mat. naouk 28 , 5 (1973) pp. 17 - 44

[2] E. BRIESKORN Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. Man. Math. 2 (1970) pp. 103-161

[3] J.L. BRYLINSKI Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge (preprint, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 1981)

[4] P. DELIGNE Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. 163 (Springer 1970)

[5] P. DELIGNE Théorie de Hodge II Pub. math. IHES 40 (1972) pp. 5-57

[6] Ph. GRIFFITHS & W. SCHMID Recent developments in Hodge theory, in Discrete subgroups of Lie groups and applications to Moduli (Oxford 1975)

[7] B. MALGRANGE Intégrales asymptotiques et monodromie Ann. ENS 7 (1974) pp. 405-430

[8] F. PHAM Singularités des systèmes de Gauss-Manin Progress in Math. 2 (Birkhäuser 1979)

[9] F. PHAM Vanishing homologies and the n-variable saddle-point method (à paraitre dans les comptes-rendus du Colloque de l'A.M.S. à Arcata 1981)

[10] Morihiko SAITO Gauss-Manin system and mixed Hodge structure (RIMS preprint, Kyoto 1981, soumis pour publication aux Proceedings of the Japan Academy).

[11] Morihiko SAITO Supplement to " Gauss-Manin system and mixed Hodge structure " (RIMS preprint, Kyoto Jan. 1982)

[12] J. SCHERK A note on two local Hodge filtrations (à paraître dans les Comptes-rendus du Colloque de l'A.M.S. à Arcata (1981)

[13] J. SCHERK & J. STEENBRINK On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fibre (preprint)

[14] W. SCHMID Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping, Inventiones math 22 (1973) pp. 211-320.

[15] M. SEBASTIANI Preuve d'une conjecture de Brieskorn, Manuscripta math 2 (1970) pp. 301-308

[16] J. STEENBRINK Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, in Nordic School Symposium in Maths, Oslo 1976

[17] A. VARCHENKO Gauss-Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial, Bull. Sc. Math 104 (1980) pp. 205-223

[18] A. VARCHENKO Comportement de Hodge de la connexion de Gauss-Manin (en Russe) Funkt. Analiz i evo prilojenia 14, 1 (1980) pp. 46-47

[19] A. VARCHENKO Asymptotics of holomorphic forms define mixed Hodge structure (in Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 255, 5 (1980) pp. 1035-1038

[20] A. VARCHENKO Asymptotic mixed Hodge structure on vanishing cohomology Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. math. 45, 3 (1981) pp. 540-591.

Frédéric PHAM
Département de Mathématiques
Parc Valrose
06034 - NICE CEDEX