BERNARD MALGRANGE

Rapport sur les théorèmes d’indice de Boutet de Monvel et Kashiwara

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 230-242

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__230_0>

RAPPORT SUR LES THÉORÈMES D'INDICE DE BOUTET DE MONVEL ET KASHIWARA

B. MALGRANGE

I. Introduction

Soit X une variété analytique complexe de dimension n ; on note comme d'habitude $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}_X$; $\mathcal{D}_X$ est muni de la filtration croissante $\{\mathcal{D}_X(p)\}_{p\in\mathbb{N}}$, définie par le degré des opérateurs différentiels.

Dans la suite, on omettra l'indice X si cela ne crée pas de confusion. Soit M un $\mathcal{D}$-module cohérent ; rappelons que la variété caractéristique de M, qu'on note $\operatorname{car} M$ peut être définie par l'un ou l'autre des deux procédés suivants :

i) Soit $\{M(p)\}$ $(p \in \mathbb{N})$ une bonne filtration de M, par exemple une filtration quotient d'un morphisme surjectif $\mathcal{D}^p \to M$ (il en existe toujours <u>localement</u>, et cela nous suffira). Alors $\operatorname{gr} M$ est cohérent sur $\operatorname{gr}\mathcal{D}$; d'autre part, $\operatorname{gr}\mathcal{D}$ s'identifie canoniquement au faisceau (sur X) des fonctions holomorphes sur T^*X, polynomiales par rapport aux variables de la fibre ; donc en tensorisant $\operatorname{gr} M$ par $\mathcal{O}_{T^*X}$, on obtient un faisceau cohérent sur T^*X ; son support, qui ne dépend pas de la bonne filtration choisie, est par définition la variété caractéristique de M ; c'est une sous-variété réduite de T^*X, stable par les homothéties de la fibre.

ii) Soit π la projection $T^*X \to X$, et soit $\mathcal{E}$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels sur T^*X ; le microlocalisé $\widetilde{M} = \mathcal{E} \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D})} \pi^{-1}(M)$ est un $\mathcal{E}$-module cohérent, et l'on a $\operatorname{car} M = \operatorname{support}(\widetilde{M})$.

Rappelons aussi que la variété caractéristique de M est <u>involutive</u>, (voir [S.K.K.] ou [M2]) c'est-à-dire que son idéal $\mathcal{J}$ (car M) $\subset \mathcal{O}_{T^*X}$, est stable par le crochet de Poisson défini par la structure symplectique canonique de T^*X.

Dans la suite, on notera $\omega = d\lambda$ la 2-forme canonique de T^*X, λ étant la "forme de Liouville" de T^*X (en coordonnées locales, $\lambda = \sum \xi_i dx_i$). Le résultat précédent, joint à des considérations élémentaires de géométrie symplectique, montre ceci : en tout point a de Λ = car M, on a $\dim_a \Lambda \geq n$. Si de plus, on a $\dim_a \Lambda = n$ pour tout $a \in \Lambda$, alors Λ est isotrope, c'est-à-dire que la restriction de λ à la partie lisse de Λ est nulle. On dit alors que Λ est <u>lagrangienne</u>, et que M est <u>holonome</u>.

Dans la suite, on supposera toujours M holonome ; comme les résultats qui nous intéressent sont de caractère local, on pourra aussi supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit $x \in$ support (M), et soit B_ϵ la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ ; du fait que Λ = car M est isotrope et du "curve selection lemma", on déduit facilement ceci : <u>pour ϵ assez petit, disons $\leq \epsilon_0$, ∂B_ϵ est non caractéristique pour</u> M, c'est-à-dire que le fibré conormal à ∂B_ϵ ne rencontre pas Λ en dehors de la section nulle de T^*X. De là, on déduit le résultat suivant par des arguments d'ellipticité (soit un argument direct de Kashiwara, soit un argument utilisant les "opérateurs de Tœplitz" définis par Boutet de Monvel).

THÉORÈME 1.1. (Kashiwara [K2] ou [K4]) - <u>Les espaces $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}}(B_\epsilon ; M, \mathcal{O})$ sont de dimension finie sur $\mathbb{C}$, et ils ne dépendent pas de $\epsilon \leq \epsilon_0$; en particulier, ils sont égaux aux</u> $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}}(M,\mathcal{O})_x$.

Posons alors $\chi_x(M) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \underline{\mathrm{Ext}}^i(M,\mathcal{O})_x$. Le but de cet exposé est de donner deux formules pour calculer $\chi_x(M)$ qui ont été obtenues indépendamment, l'une par Boutet de Monvel, l'autre par Kashiwara.

2. La formule de Boutet de Monvel *(B)*

En fait, on ne va énoncer ici qu'un cas très particulier de cette formule, correspondant au problème ci-dessus ; le cas général s'applique, par exemple, dans la situation suivante : p est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes, agissant des sections d'un fibré vectoriel E sur X dans les sections d'un autre fibré vectoriel F ; $\Omega \subset\subset X$ est de Stein, à bord $\partial\Omega$ fortement pseudo convexe et non caractéristique pour p, et l'on calcule alors l'indice de $p : \Gamma(\Omega, E) \to \Gamma(\Omega, F)$. (Par exemple, si Ω est un voisinage tubulaire convenable d'une variété analytique réelle $X_{\mathbb{R}}$ dans son complexifié X, et si p est elliptique sur $X_{\mathbb{R}}$, ceci redonne le théorème d'Atiyah-Singer.) D'autre part, Boutet de Monvel n'énonce sa formule que pour un opérateur ; mais le procédé usuel de réduction d'un complexe à un opérateur s'applique aussi dans ce contexte.

Prenons alors M holonome au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, et soit $L^\cdot \to M$ une bonne résolution libre de longueur finie, i.e. une résolution libre de longueur finie telle que $gr(L^\cdot) \to gr\, M$ soit encore une résolution libre (de telles résolutions existent localement, la filtration de $L^i \simeq \mathcal{D}^{p_i}$ étant la filtration de $\mathcal{D}^{p_i}$ décalée de façon convenable). Alors $gr(L^\cdot)$ définit un complexe de fibrés vectoriels triviaux sur $T^*(B_\epsilon)$; pour ϵ assez petit, ce complexe est exact sur le conormal à ∂B_ϵ privé de la section nulle, puisque ∂B_ϵ est non caractéristique pour M ; l'application $x \mapsto (x, \bar{x})$ de ∂B_ϵ dans son conormal fournit alors par image réciproque un complexe exact de fibrés vectoriels triviaux sur ∂B_ϵ, d'où un élément de $K^1(\partial B_\epsilon)$ qu'on notera $\{M\}$. A priori, $\{M\}$ dépend de la résolution choisie ; en fait le théorème de l'indice montrera a posteriori qu'il en est indépendant.

Prenons en particulier $M = \mathcal{O}$, et prenons pour $L^\cdot$ le complexe de Koszul $K(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \mathcal{D})$ muni de la filtration évidente ; c'est évidemment une résolution graduée de $\mathcal{O}$ dont le "dual" $Hom_{\mathcal{D}}(L^\cdot, \mathcal{O})$ est le complexe de de Rham usuel. D'après le théorème de Bott, $\{\mathcal{O}\}$ est le générateur de $K^1(\partial B_\epsilon)$, d'où un isomorphisme bien déterminé $\chi_{top} : K^1(\partial B_\epsilon) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ défini par $\chi_{top}(\{\mathcal{O}\}) = 1$. Le théorème est alors le suivant :

THEOREME 2.1. (Boutet de Monvel) - $\chi_0(M) = \chi_{top}(\{M\})$.

Naturellement, cette formule peut aussi s'écrire en termes de caractère de Chern, ou encore d'intégrale sur ∂B_ϵ : par exemple, si q est une application $\partial B_\epsilon \to Gl(m, \mathbb{C})$ telle que $\{M\}$ soit représenté par le complexe $\mathbb{C}^m \xrightarrow{q} \mathbb{C}^m$, on a

$$(2.2) \quad \chi_0(M) = - \frac{(n-1)!}{(2n-1)!\,(2\pi i)^n} \int_{\partial B_\epsilon} Tr(q^{-1}dq)^{2n-1}$$

avec $\mathbb{C}^n$ muni de l'orientation usuelle, et ∂B_ϵ orienté comme le bord de B_ϵ.

3. Constructibilité des solutions et formule de Kashiwara

Prenons encore un M holonome sur X , et soit $\Lambda \subset T^*X$ sa variété caractéristique ; des propriétés de Λ , on déduit facilement qu'il existe des sous-variétés fermées $X_i \subset X$, non nécessairement lisses, telles qu'on ait $\Lambda = \bigcup_i \overline{N^*X_{i,reg}}$, où N^* désigne le fibré conormal et $X_{i,reg}$ la partie lisse de X_i ; on déduit de là qu'il existe une stratification de Whitney $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X telle qu'on ait $\Lambda \subset \bigcup_\alpha N^*X_\alpha$ (il est inutile ici d'écrire des adhérences, car la condition a) de Whitney signifie précisément que $\bigcup_\alpha N^*X_\alpha$ est fermé). En précisant les arguments qui conduisent au théorème 1.1, Kashiwara démontre le théorème fondamental suivant [K2] , [K4] .

THÉORÈME 3.1. - Soit $\{X_\alpha\}$ une stratification de Whitney de X telle que l'on ait $\Lambda \subset \bigcup_\alpha N^*X_\alpha$; alors, pour tout (i, α) le faisceau $Ext^i_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O})|_{X_\alpha}$ est localement constant. En particulier, les faisceaux $Ext^i_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O})$ sont constructibles.

Pour énoncer maintenant la formule de l'indice de Kashiwara, nous nous placerons dans la situation du théorème précédent, et nous utiliserons les notations suivantes :

i) d_α est la codimension de X_α dans X ;

ii) m_α est la multiplicité de M le long de N^*X_α, c'est-à-dire la multiplicité de $\mathrm{gr}\, M$ le long de N^*X_α pour une bonne filtration de M (on peut voir que cette multiplicité ne dépend pas de la bonne filtration choisie) ;

iii) $e(x, \bar{X}_\alpha)$ désigne "l'obstruction d'Euler" au sens de Mac-Pherson [M-P] de $x \in \bar{X}_\alpha$ dans $\bar{X}_\alpha$ (si $x \notin \bar{X}_\alpha$, on lui donne la valeur 0).

A noter que cet invariant est défini de façon indépendante par Kashiwara dans [K3] et [K4] ; pour la relation avec l'obstruction d'Euler, voir Dubson [D] et [B-D-K].

Le théorème de l'indice s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME 3.2. (Kashiwara, [K3], [K4]) - Dans les hypothèses du théorème 3.1, et avec les notations précédentes, on a

$$\chi_x(M) = \sum_\alpha (-1)^{d_\alpha} e(x, \bar{X}_\alpha) m_\alpha .$$

4. Indications sur les démonstrations

4.1. Nous nous contenterons d'indications sommaires, en examinant le cas d'une variable. Soit $p = \sum_0^m a_i(x)\partial^i$ $(\partial = \frac{d}{dx})$ un opérateur différentiel au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, et posons $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}p$; alors $\underline{\mathrm{Hom}}(M, \mathcal{O})$ (resp. $\mathrm{Ext}^1(M, \mathcal{O})$) est le noyau (resp. le conoyau) de l'application $\mathcal{O} \xrightarrow{p} \mathcal{O}$; si l'on note μ l'ordre du zéro de a_m en 0, il est bien connu que l'indice de l'application $\mathcal{O}_0 \xrightarrow{p} \mathcal{O}_0$, c'est-à-dire le nombre $\chi_0(M)$, est égal à $m - \mu$. Ce résultat, qui se trouve déjà plus ou moins chez Perron [P] semble avoir été énoncé explicitement pour la première fois, indépendamment dans [K1], [K0], [M1] (il était auparavant bien connu des spécialistes sour la forme affaiblie suivante, dite "théorème de Perron-Lettenmeyer" : $\dim \operatorname{Ker}(p,\mathcal{O}_0) \geq m-\mu$). Une démonstration rapide de ce résultat consiste à se ramener, par perturbation compacte, au cas évident où $p = a_m(x)\partial^m$. Bien entendu, il faut ici travailler avec des Banach ; par exemple, on considère l'application $p : H^m(B_\epsilon) \to H^0(B_\epsilon)$, où $H^p(B_\epsilon)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^p sur $\bar{B}_\epsilon$ et holomorphes à l'intérieur ; on lui applique l'argument de perturbation compacte et on passe à la limite pour $\epsilon \to 0$.

4.2. Indiquons maintenant comment la méthode de Boutet de Monvel marche dans ce cas particulier ; soit Q_+ (resp. $Q_- = 1 - Q_+$) le projecteur de $C^\infty(\partial B_\epsilon)$ sur le sous-espace des fonctions qui se prolongent en des fonctions holomorphes dans B_ϵ (resp. holomorphes dans $\mathbb{C} - \bar{B}_\epsilon$, et nulles à l'infini) ; l'application $Q_+pQ_+ \oplus Q_-$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique sur $C^\infty(\partial B_\epsilon)$ dont l'indice est visiblement égal à $\chi_0(M)$ pour $\epsilon \ll 1$; or, cet indice se calcule par Atiyah-Singer, et vaut $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\epsilon} q^{-1}dq$, avec $q = a_m(x)\bar{x}^{-m}$; ceci donne le résultat cherché. Dans le cas général, Boutet de Monvel opère de même par réduction à Atiyah-Singer sur ∂B_ϵ ; inutile de dire que c'est beaucoup plus compliqué !

4.3. Expliquons maintenant la méthode de Kashiwara sur le même exemple, et, plus généralement, sur l'exemple d'un système holonome M au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$; la variété caractéristique est alors contenue dans l'ensemble $x\xi = 0$; soit m (resp. μ) la multiplicité de M sur $x = 0$ (resp. $\xi = 0$) ; il s'agit d'établir qu'on a $\chi_0(M) = m-\mu$.

Comparée aux précédentes, la démonstration va être relativement longue ; mais elle fournira en cours de route des résultats importants, par euxmêmes ; de plus, dans cette méthode, modulo le théorème 3.2, l'extension du cas $n=1$ au cas général sera facile (pour ce dernier point, je renvoie à [K4]).

La méthode est fondée sur la <u>microlocalisation réelle</u>. Soit S l'ensemble des directions réelles cotangentes à $\mathbb{C}$ en 0 ; on définit un faisceau sur S, noté $C^{\mathbb{R}}$, de la manière suivante : pour $\theta \in S$, désignons par $Z_{\epsilon,\theta}$ l'intersection du secteur fermé $|\arg(xe^{i\theta})-\frac{\pi}{2}| < \epsilon$ et de la boule $B_\epsilon = \{|x|<\epsilon\}$; on pose alors $C^{\mathbb{R}}_\theta = \varinjlim_{\epsilon} \mathcal{O}(B_\epsilon - Z_{\epsilon,\theta})/\mathcal{O}(B_\epsilon)$. Le résultat-clef est le suivant :

THÉORÈME 4.3.1.-

i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_0}(M_0, C^{\mathbb{R}}_\theta)$ <u>est un faisceau sur</u> S <u>localement isomorphe à</u> $\mathbb{C}^\mu$;

ii) $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_0}(M_0, C^{\mathbb{R}}_\theta) = 0$ <u>pour</u> $i \geq 1$.

On aurait aussi des résultats analogues pour $\mathcal{O}(B_\epsilon - Z_{\epsilon,\theta})/\mathcal{O}(B_\epsilon)$ (ϵ assez petit), mais peu importe.

Admettons provisoirement ce théorème, et montrons comment on en déduit le résultat cherché ; on choisit une direction θ et on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_0 \longrightarrow \varinjlim_{\epsilon} \mathcal{O}(B_\epsilon - Z_{\epsilon,\theta}) \longrightarrow C^{\mathbb{R}}_\theta \longrightarrow 0 .$$

Le théorème précédent nous montre que l'indice

$$\chi(M_0, C^{\mathbb{R}}_\theta) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_0}(M_0, C^{\mathbb{R}}_\theta)$$

est égal à μ ; pour terminer, il suffit donc de voir que l'on a $\chi(M_0, \varinjlim \mathcal{O}(B_\epsilon - Z_{\epsilon,\theta})) = m$. Or, sur $B_\epsilon - \{0\}$, M est cohérent sur $\mathcal{O}$ puisque sa variété caractéristique est réduite à $\xi = 0$; par un raisonnement bien connu, on en déduit que $M|B_\epsilon - \{0\}$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}^m$ en tant que $\mathcal{D}$-module ; on est alors ramené au cas évident où $M = \mathcal{O}(= \mathcal{D}/\mathcal{D}\partial)$.

4.4. Reste à démontrer le théorème (4.3.1). Kashiwara montre qu'on peut cette fois-ci se ramener au cas trivial où $M = (\mathcal{D}/\mathcal{D}x)^{\mu}$. Plus précisément, il montre que, sur S , $M^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M$ est localement isomorphe à $(\mathcal{E}^{\mathbb{R}}/\mathcal{E}^{\mathbb{R}}x)^{\mu}$; ici, $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ désigne le faisceau sur $T^*\mathbb{C}-\{0\}$ des <u>opérateurs microdifférentiels réels</u>, qui se définit à partir de la diagonale $\Delta \subset \mathbb{C}^2$ de la même manière qu'on a défini $C^{\mathbb{R}}$ à partir de $\{0\} \subset \mathbb{C}$. Ce résultat est important, moins par son utilisation dans le théorème de l'indice que comme point de départ des travaux de Kashiwara-Kawai [K-K] sur les singularités régulières.

Je ne reproduirai pas ici l'argument de Kashiwara, d'ailleurs fort intéressant, qui est fondé sur l'étude d'une équation intégrale [K4] ; j'en donnerai un autre, peut-être un peu plus long mais qui donne un résultat supplémentaire, à savoir la structure des $\mathcal{D}$-modules holonomes à singularités irrégulières en dimension 1 ; j'expliciterai ailleurs cette application.

5. Démonstration du théorème (4.3.1)

Elle est fondée sur deux ingrédients.

5.1. <u>Transformation de Laplace des microfonctions</u>. Soit Γ l'arc de cercle $|x| = \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \arg(xe^{i\theta}) < \frac{3\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$; parcouru dans le sens direct ; pour $f \in \mathcal{O}(B_{\varepsilon} - Z_{\varepsilon,\theta})$, on pose $\hat{f}(\xi) = \int_{\Gamma} f(x)\, e^{-\xi x} dx$; on s'intéresse à $\hat{f}$ dans un petit secteur à l'infini $\Sigma_{\varepsilon',\theta}$: $|\arg \xi - \theta| < \varepsilon'$, $|\xi| > \frac{1}{\varepsilon'}$ (ε' petit devant ε) ; il est facile de voir que $\hat{f}$ est à croissance sous-exponentielle dans un tel secteur, i.e. qu'on a $|\hat{f}(\xi)| \leq c_{\eta} e^{\eta|\xi|}$ pour tout $\eta > 0$ (déformer Γ pour le faire passer très près de 0 dans $B_{\varepsilon} - Z_{\varepsilon,\theta}$) . D'autre part, si f est holomorphe dans B_{ε} , $\hat{f}$ sera à décroissance exponentielle dans $\Sigma_{\varepsilon',\theta}$, i.e. on aura pour un $\eta > 0$, $|\hat{f}(\xi)| \leq ce^{-\eta|\xi|}$, parce qu'ici on pourra déformer Γ de façon à lui faire traverser l'origine ; enfin, si l'on change Γ en diminuant ε , on modifie $\hat{f}$ par une fonction à décroissance exponentielle.

Désignons alors par $\mathcal{O}(\Sigma_{\varepsilon',\theta})$ (resp. $\mathcal{O}_+(\Sigma_{\varepsilon',\theta})$, resp. $\mathcal{O}_-(\Sigma_{\varepsilon',\theta})$) l'espace des fonctions holomorphes (resp. holomorphes à croissance sous-exponentielle, resp. holomorphes à décroissance exponentielle) dans $\Sigma_{\varepsilon',\theta}$; en faisant tendre ε' vers 0 , on obtient trois faisceaux sur S , notés respectivement $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_+$, $\mathcal{O}_-$; de la construction précédente, on déduit un morphisme de faisceaux $\mathcal{L} : \mathcal{C}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{O}_+/\mathcal{O}_-$.

PROPOSITION (5.1.1). - <u>L'application</u> $\mathcal{L}$ ("<u>transformée de Laplace</u>") <u>est bijective</u>.

Ceci est une conséquence facile de la formule d'inversion de Fourier et de la formule de Cauchy (l'application inverse est donnée par $g \to -\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta g(\xi)\, e^{\xi x} dx$, Δ une demi-droite $\subset \Sigma_{\varepsilon',\theta}$, d'origine fixe et de direction variable voisine de θ) . D'autre part, cette transformation possède les propriétés usuelles : $\mathcal{L}(xf) = -\frac{d}{d\xi}\mathcal{L}f$; $\mathcal{L}(\frac{df}{dx}) = \xi(\mathcal{L}f)$.

5.2. <u>Structure des $\mathcal{E}$-modules holonomes au point</u> $(0,1) \in T^*\mathbb{C}$

On écrit ici $\mathcal{E}$ pour $\mathcal{E}_{(0,1)}$; soit N un $\mathcal{E}$-module holonome, de multiplicité μ , et soit $\{N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ une bonne filtration de N ; alors N_0/N_{-1} est de dimension μ pour $\mathbb{C}$; on en prend une base $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_\mu$, et on relève les $\bar{e}_i$ en des éléments $e_i \in N_0$; par le théorème de préparation, $e_1,\dots,e_\mu$ est une base de N sur $\mathcal{E}(\partial)$, le sous-espace de $\mathcal{E}$ formé des opérateurs microdifférentiels dont le symbole est indépendant de x ; on a les équations suivantes :

(5.2.1) $xe_i = \Sigma a_{ij}(\partial)e_j$, $a_{ij}(\partial) \in \mathcal{E}(\partial)$, a_{ij} de degrés ≤ 0 ;

de plus la matrice a_{ij} formée des parties principales de degré 0 est nilpotente (puisqu'elle exprime l'action de x sur N_0/N_{-1} ; celle-ci est nilpotente parce que N a son support sur $x = 0$).

Rappelons maintenant qu'un $a(\partial) \in \mathcal{E}(\partial)$ s'écrit par définition $a(\partial) = \sum_{k \le k_0} a_k \partial^k$, la série $\sum_{k \le 0} \frac{a_k}{(-k)!} \xi^k$ étant convergente pour $|\xi| \gg 1$; en général, la série $a(\xi) = \sum_{k \le 0} a_k \xi^k$ ne sera pas convergente à l'infini : si c'est cependant le cas, on dira que $a(\partial)$ est <u>strictement convergent</u>. On a alors le théorème suivant [M 3] :

THÉORÈME (5.2.2). -

i) <u>On peut choisir les</u> e_i <u>de manière que, dans</u> (5.2.1), <u>les</u> $a_{ij}(\partial)$ <u>soient strictement convergents</u>.

ii) <u>Si l'on a deux tels choix,</u> $\{e_i\}$ <u>et</u> $\{e'_i\}$ <u>la matrice</u> $s_{ij}(\partial)$ <u>définie par</u> $e'_i = \sum s_{ij}(\partial) e'_j$ <u>est strictement convergente</u>.

Ce résultat peut encore s'énoncer comme une équivalence de catégories entre $\mathcal{E}$-modules holonomes et certains $\mathbb{C}\{\xi^{-1}\}[\xi]$ vectoriels à connexion ; voir [M 3] pour ce point.

5.3. Nous disposons maintenant de tout ce qu'il nous faut pour démontrer le théorème (4.3.1). Tout d'abord, $\mathcal{E}$ opère dans $C^{\mathbb{R}}$ [S-K-K] : ceci se voit en plongeant $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ et en faisant agir $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ sur $C^{\mathbb{R}}$ par intégration, ou "morphisme trace" ; le lecteur peut admettre ce point en 1ère approximation, et se laisser convaincre par le fait que ∂ est visiblement inversible sur $C^{\mathbb{R}}$ (deux primitives diffèrent par une constante, dont l'image dans $C^{\mathbb{R}}$ est nulle !) ; en remplaçant alors M_0 par $N = \mathcal{E}_{(0,1)} \otimes_{\mathcal{D}_0} M_0$, on est ramené à démontrer l'analogue de (4.3.1) avec $\mathcal{D}_0$ remplacé par $\mathcal{E}_{(0,1)}$ (= $\mathcal{E}$, dans les notations de ce paragraphe), et M_0 par N.

Ensuite, on voit facilement que N est <u>défini</u> par les équations (5.2.1) ; par suite, le complexe $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(N, C^{\mathbb{R}})$ est le complexe

$$(C^{\mathbb{R}})^{\mu} \xrightarrow{x - A(\partial)} (C^{\mathbb{R}})^{\mu} \quad , \text{ avec } \quad A(\partial) = (a_{ij}(\partial)) .$$

Il s'agit de démontrer que le noyau de cette flèche est localement isomorphe à $\mathbb{C}^{\mu}$, et que le conoyau est nul ; d'après le théorème (5.2.2), on peut supposer $A(\partial)$ strictement convergent, i.e. $A(\xi)$ convergent à l'infini ; par transformation de Laplace, il revient au même d'établir le même résultat pour le complexe $(\mathcal{A}_+/\mathcal{A}_-)^{\mu} \xrightarrow{\frac{d}{d\xi}+A(\xi)} (\mathcal{A}_+/\mathcal{A}_-)^{\mu}$, complexe que nous noterons $K(\frac{d}{d\xi}+A(\xi), \mathcal{A}_+/\mathcal{A}_-)$; or le résultat est évident, par le théorème d'existence et d'unicité usuel, si l'on remplace $\mathcal{A}_+/\mathcal{A}_-$ par $\mathcal{A}$. Par conséquent, il suffit en définitive d'établir le résultat suivant :

LEMME (5.3.1). - Soient i et j les flèches évidentes $\mathcal{A} \xleftarrow{i} \mathcal{A}_+ \xrightarrow{j} \mathcal{A}_+/\mathcal{A}_-$. Alors les flèches
$$K(\frac{d}{d\xi}+A(\xi), \mathcal{A}) \xleftarrow{i} K(\frac{d}{d\xi}+A(\xi), \mathcal{A}_+) \xrightarrow{j} K(\frac{d}{d\xi}+A(\xi), \mathcal{A}_+/\mathcal{A}_-)$$
sont des quasi-isomorphismes.

La démonstration se fait en 2 temps :

i) Si $F \in \mathcal{A}^{\mu}$ vérifie $\frac{dF}{d\xi}+A(\xi)F = 0$, on a $F \in \mathcal{A}_+^{\mu}$, autrement dit F est à croissance sous-exponentielle ; ceci résulte facilement du fait que A est holomorphe à l'infini, de partie principale nilpotente (en termes techniques, du fait que l'équation $\frac{d}{d\xi}+A(\xi)$ a un invariant de Katz < 1), et de majorations élémentaires.

ii) Prenons alors $Y = (F^1, \ldots, F^{\mu})$ une base des solutions de cette équation dans $\mathcal{A}_{+,\theta}$; le changement de base $F = YG$ nous ramène au cas où $A(\xi) = 0$, auquel cas le résultat, évident, peut être laissé au lecteur. Ceci achève la démonstration.

Remarques.

i) La réduction à $\frac{d}{d\xi}$ qui vient d'être faite redémontre le résultat suivant : $N^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}} N$ est localement isomorphe sur S à $(\mathcal{E}^{\mathbb{R}}/\mathcal{E}^{\mathbb{R}}x)^{\mu}$ (cf. l'énoncé à la fin du §4).

ii) On peut éviter l'emploi du théorème (5.2.2), moins élémentaire que les autres résultats de ce paragraphe ; en effet, $\mathcal{E}(\partial)$ se plonge naturellement dans $\Gamma(S, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}) \underset{\text{déf}}{=} \mathcal{C}^{\infty}$; par ce plongement, $\mathcal{E}(\partial)$ est isomorphe à $\mathcal{C}$, espace des sections à croissance modérée de $\mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage de 0, et, pour $f \in \mathcal{C}_{\theta}^{\mathbb{R}}$, on a $\mathcal{L}(a(\partial)f) = \mathcal{L}(a(\partial))\mathcal{L}(f)$. On part alors de (5.2.1), avec $a_{ij}(\partial)$ non nécessairement strictement convergent ; soit $\widetilde{a}_{ij}(\xi)$ un relèvement de $\mathcal{L}(a_{ij}(\partial))$ dans $\mathcal{C}_{+,\theta}$; on peut voir que $\widetilde{a}_{ij}(\xi)$ admet la série formelle $a_{ij}(\xi)$ comme développement asymptotique à l'infini. Alors, il suffit d'établir le lemme avec $A(\xi)$ remplacé par $\widetilde{A}(\xi) = (\widetilde{a}_{ij}(\xi))$, ce qui se fait de la même manière.

Bibliographie

[B] L. BOUTET DE MONVEL, On the index of Tœplitz operators of several complex variables, Inv. Math. 50 (1979), pp. 249-272.

[B-D-K] J.L. BRYLINSKI, A.S. DUBSON, M. KASHIWARA, Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale, C.R. Acad. Sc.

[D] A.S. DUBSON, Calcul des invariants numériques des singularités et applications, Bonn (1981), multigraphié.

[K1] M. KASHIWARA, Thèse (1970) (en japonais).

[K2] M. KASHIWARA, On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I, Publ. RIMS, Kyoto University 10 (1975), pp. 563-579.

[K3] M. KASHIWARA, Index theorem for a maximally overdetermined system of linear differential equations, Proc. Jap. Acad. 49-10 (1973), pp. 803-804.

[K4] M. KASHIWARA, Systèmes d'équations microdifférentielles, Paris Nord (1977), notes miméographiées.

[K-K] M. KASHIWARA, T. KAWAI, On holonomic systems of microdifferential equations III, Systems with regular singularities, RIMS, Kyoto University, n° 293 (1979).

[Ko] H. KOMATSU, On the index of ordinary differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, IA, 18 (1971), pp. 379-398.

[M1] B. MALGRANGE, Remarques sur les points singuliers des équations différentielles, C.R. Acad. Sc. 273-23 (1971), pp. 1136-1137.

[M2] B. MALGRANGE, L'involutivité des caractéristiques des sytèmes différentiels et microdifférentiels, Séminaire Bourbaki n°522 (1977-78).

[M3] B. MALGRANGE, Modules microdifférentiels et classes de Gevrey, Advances in Math., 7 B, Academic Press (1981), pp. 513-530.

[M-P] R.D. Mac PHERSON, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Math. 100-2 (1974), pp. 424-432.

[P] O. PERRON, Ueber Summergleichungen and Poincaréshe Differenzengleichungen, Math. Ann. 84 (1921), pp. 1-15.

[S-K-K] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. n°287, Springer (1973), pp. 265-529.

Institut FOURIER
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques
Pures associé au CNRS
B.P.74
38402 - Saint-Martin-d'Hères
FRANCE