Astérisque

D. CERVEAU
J.-F. MATTEI

Formes intégrales holomorphes singulières

Astérisque, tome 97 (1982)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__97__1_0>

© Société mathématique de France, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TABLE DES MATIÈRES

Ce volume est composé de six parties ; le code des références internes est le suivant :

[1 ; II ; 5.2] signifie partie 1, chapitre II, paragraphe 5, énoncé 2.

[II ; 3.4] signifie chapitre II, paragraphe 3, énoncé 4 dans la partie où l'on se trouve.

Index.

$\mathcal{O}_n$	= l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $0 \in \mathbb{C}^n$.
$\mathcal{M}$	= l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$.
$\mathcal{M}_n$	= le corps des germes de fonctions méromorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$.
$\hat{\mathcal{O}}_n$	= l'anneau des séries formelles à n indéterminées.
$\hat{\mathcal{M}}_n$	= le corps des fractions de $\hat{\mathcal{O}}_n$.
$\mathcal{X}(n)$	= le $\mathcal{O}_n$ module des germes de champs holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$.
$\widehat{\chi(n)}$	= le $\hat{\mathcal{O}}_n$ module des champs formels.
$\Lambda^p(n)$	= le $\mathcal{O}_n$ module des germes de p-formes holomorphes en $0 \in \mathbb{C}^n$.
$\widehat{\Lambda^p}(n)$	= le $\hat{\mathcal{O}}_n$ module des p-formes formelles.
$E : \widehat{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{C}^n$	= l'éclatement de $0 \in \mathbb{C}^n$.
$\mathbb{P}\mathbb{C}(n)$	= l'espace projectif complexe de dimension n.

Si $\alpha \in \Lambda^p(n)$, on désigne par $S(\alpha)$ (ou Sing α) le germe d'ensemble analytique des zéros de α et par $\mathcal{I}(\alpha)$ l'idéal des composantes de α .

$j^\ell \beta$ signifie le jet d'ordre ℓ en 0 de l'objet β .

Si $i = (i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice , la longueur de i est $|i| = i_1 + \dots + i_n$.

0. INTRODUCTION

Ce volume a pour but d'étudier la nature des singularités des germes de 1-formes intégrables holomorphes à travers leurs intégrales premières, l'objectif majeur étant de prouver qu'en général, dans un sens à préciser, de telles intégrales existent. Pour celà nous avons essentiellement dégagé quatre grandes optiques. Deux consistent à donner des critères d'existence : ils sont de nature topologique (i.e portent sur la topologie des feuilles) ou bien algébrique (i.e portent sur un jet fini des formes considérées). Le troisième point de vue a trait aux problèmes de convergence : savoir sous quelles conditions une intégrale première obtenue par un calcul formel converge ou non. Dans le quatrième et dernier point on cherche à simplifier au maximum l'écriture des intégrales premières rencontrées ; d'où une théorie de la détermination finie de certaines fonctions multiformes et des singularités quasi-homogènes de ces mêmes fonctions.

Soit donc ω un germe de forme holomorphe <u>intégrable</u> ($\omega \wedge d\omega = 0$) à l'origine de $\mathbb{C}^n$ s'annulant sur un ensemble analytique $S(\omega)$, le lieu singulier de ω, que l'on pourra toujours sans aucune restriction supposer de codimension au moins deux. <u>Un facteur intégrant holomorphe</u> de ω est la donnée d'un germe de fonction holomorphe f tel que :

(1) $$d(\frac{\omega}{f}) = 0.$$

Si f est formel et vérifie (1), nous dirons que f est un <u>facteur intégrant formel</u>. Lorsqu' un facteur intégrant existe, on peut exhiber une intégrale première multiforme, comme l'assure le

<u>Théorème d'intégration</u> : Soit f un facteur intégrant holomorphe de ω et $f = f_1^{n_1} \dots f_p^{n_p}$ la décomposition de f en facteurs irréductibles. Il existe alors un germe de fonction holomorphe α et des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

(2) $$\frac{\omega}{f} = \lambda_1 \frac{df_1}{f_1} + \dots + \lambda p \frac{df_p}{f_p} + d\left(\frac{\alpha}{f_1^{n_1-1} \dots f_p^{n_p-1}}\right).$$

On remarquera qu'à ce moment la fonction multiforme

$$F = e^{\frac{\alpha}{f_1^{n_1-1} \cdots f_p^{n_p-1}}} \cdot f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$$

est une <u>intégrale première de ω</u> : sa dérivée logarithmique est précisément (2).

Lorsque les intégrales premières seront du type $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, ce qui est le cas quand f est <u>réduit</u> (i.e. sans branche multiple), nous emploierons la terminologie suivante :

- nous parlerons d'<u>intégrales premières holomorphes usuelles</u> lorsque les exposants λ_j sont des entiers positifs ;

- d'<u>intégrales premières méromorphes pures</u> lorsque les λ_j sont des entiers relatifs et ne sont pas tous de même signe ;

- nous dirons que $F = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ est une <u>intégrale première formelle</u>, lorsque les f_j sont des séries formelles et que $\omega \wedge \frac{dF}{F} = 0$; F est <u>convergente</u> s'il existe des unités formelles $u_j \in \hat{\mathcal{O}}_n$, vérifiant la relation $u_1^{\lambda_1} \ldots u_p^{\lambda_p} = 1$ et telles que chaque $u_j f_j$ converge.

Comme beaucoup de phénomènes liés aux formes intégrables, l'existence d'un facteur intégrant est une propriété spécifique de la dimension deux :

<u>Théorème d'extension [8], [9]</u> : Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^{n+p}$, $n \geqslant 2$ et $i : \mathbb{C}^n, 0 \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+p}, 0$ un plongement transverse à ω. Alors ω possède un facteur intégrant holomorphe dès que $i^*(\omega)$ en possède un.

La transversalité du plongement signifie en particulier que le lieu singulier de $i^*(\omega)$ est de codimension $\geqslant 2$. L'existence et la généricité de tels plongementsest prouvée dans [32].

De ce théorème nous ferons essentiellement l'usage suivant : si ω possède une intégrale première $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ en restriction à un deux-plan générique, alors, modulo une condition générique sur les exposants λ_j (ne pas avoir de relation dans $\mathbb{N}$), ω possède aussi une intégrale première du même type.

Les premiers résultats de nature topologique concernant les intégrales premières holomorphes (usuelles) ont été obtenus par Robert Moussu et l'un des auteurs dans [32] : on dit que le feuilletage singulier $\mathfrak{F}_\omega$ défini par ω est <u>simple</u>, s'il existe un ouvert U tel que :

a) les feuilles de la restriction $\mathfrak{F}_\omega|U$ sont des fermés de $U - S(\omega)$;

b) l'ensemble des feuilles de $\mathfrak{F}_\omega|U$ adhérentes à 0 est au plus dénombrable.

Dans [32] est établi le

<u>Théorème</u> : ω possède une intégrale première holomorphe si et seulement si le feuilletage singulier $\mathfrak{F}_\omega$ est simple.

Nous généralisons ce résultat au cas des intégrales premières du type : $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$.

<u>Théorème</u> : Un germe de forme holomorphe intégrable ω à l'origine de $\mathbb{C}^n$ possède une intégrale première multiforme $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ à exposants réels positifs si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

α) $\mathfrak{F}_\omega$ ne possède qu'un nombre fini de feuilles fermées adhérentes à l'origine $X_1, \ldots, X_p$;

β) Dans un voisinage ouvert U de O, il existe un système de voisinages ouverts de l'union X des $\overline{X}_j$, saturés par le feuilletage singulier, et dont l'intersection est égale à X.

L'intérêt de ces critères est d'être purement topologique : en particulier si deux germes de formes intégrables ω' et ω'' sont <u>topologiquement conjugués</u> , (i.e : il existe un germe d'homéomorphisme $h : U' \xrightarrow{\sim} U''$ de voisinages ouverts de 0, qui transforme $S(\omega')$ en $S(\omega'')$ et les feuilles de $\mathfrak{F}_{\omega'}|U'$ en les feuilles de $\mathfrak{F}_{\omega''}(U'')$), alors ω'' possède une intégrale première du type $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$, (resp. $\lambda_j \in \mathbb{N}$) dès que ω' possède une telle intégrale première.

La démonstration des théorèmes utilise l'idée de réduction à la dimension deux, déjà citée, des techniques "holonomiques", la désingularisation par éclatements, et un procédé de recollement d'intégrales premières auquel nous avons consacré un chapitre.

Nous ne disposons pas de critère topologique agréable dans le cas général, où les λ_j sont quelconques. Par contre nous obtenons un résultat négatif pour le cas méromorphe. Plus précisément, dans [46] et [47] M. SUZUKI donne l'exemple de la 1-forme holomorphe

$$\omega = (y^3 + y^2 - xy)\, dx - (2\, xy^2 + xy - x^2)\, dy,$$

dont les feuilles du feuilletage associé $\mathcal{F}_\omega|U$ sur un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^2$ sont toutes des courbes analytiques passant par 0 et cependant ω ne possède pas d'intégrale première méromorphe. Ainsi la propriété suivante :

> (α) Il existe un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^n$ tel que les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_\omega|U$ de $U - S(\omega)$ sont fermées (et à fortiori analytiques si codim $S(\omega) \geqslant 2$),

ne peut constituer un critère topologique d'existence d'une intégrale première méromorphe, même en dimension 2.

Nous construisons dans la partie 3 un homéomorphisme h de U sur un voisinage ouvert U' de $0 \in \mathbb{C}^2$, $h(0) = 0$, qui envoie les feuilles de $\mathcal{F}_\omega|U$ sur les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_\eta|U'$, défini par la forme :

$$\eta = (2\, y^2 + x^3)dx - 2xy\, dy.$$

Cette dernière admet visiblement l'intégrale première méromorphe

$$g = \frac{y^2 - x^3}{x^2} \,.$$

Nous affirmons donc que, contrairement au cas holomorphe, il n'existe aucun critère topologique d'existence d'une intégrale première méromorphe. Il semble cependant que la situation observée dans l'exemple précédent soit le cas général ce qui nous amène à poser les :

<u>Conjectures</u> : 1) si un germe ω de forme holomorphe en $0 \in \mathbb{C}^n$ vérifie la propriété (α), le germe de feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ est topologiquement conjugué à un germe de feuilletage défini par une intégrale première méromorphe.

2) Sous l'hypothèse α), ω possède une intégrale première du type

$$e^{\frac{\alpha}{f_1^{k_1}\cdots f_p^{k_p}}} \, . \, f_1^{n_1}\cdots f_p^{n_p}$$

où les k_j sont des entiers positifs et les n_j appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Nous nous intéressons ensuite à des critères algébriques d'existence d'intégrales premières. Après les travaux de G. Reeb [36], qui s'intéressait, en dimension au moins trois, à des formes ayant pour premier jet non nul la différentielle d'une fonction quadratique de rang maximum, R. Moussu prouvait dans [34] l'existence d'une intégrale première formelle (usuelle) lorsque ω ne présentait que des singularités assez petites (codim $S(\omega) \geqslant 3$). Sous ces mêmes hypothèses B. Malgrange dans son "Frobenius avec singularités" [28] montrait l'existence d'intégrales premières convergentes, puis généralisait ces résultats aux systèmes de Pfaff, [29]. On pouvait penser, à ce moment, qu'il s'agissait là de la situation générique. Il n'en est rien, comme l'avait déjà remarqué dans certains cas l'école brésilienne [5] et comme nous allons le voir dans ce qui suit.

Faisons d'abord quelques remarques sur l'ensemble algébrique $\mathfrak{J}_\nu$ des formes <u>homogènes</u> intégrables de degré ν, i.e. des formes

$$\omega_\nu = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n, \quad \omega_\nu \wedge d\omega_\nu = 0,$$

où les $a_i(x)$ sont des polynomes homogènes de degré ν.

De part l'homogénéité, le <u>champ radial</u>

$$R = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

va jouer un rôle particulier pour ω_ν : un rôle de <u>symétrie</u>. Plus précisément, si L_R désigne la dérivée de Lie suivant le champ R, nous avons l'identité d'Euler :

$$L_R \, \omega_\nu = (\nu+1) \, \omega_\nu \qquad (3).$$

Ceci signifiant que le champ R, ou bien laisse invariant transversalement le feuilletage singulier $\mathfrak{F}\omega_\nu$ défini par ω_ν, ou bien est tangent à ce feuilletage suivant que $\omega_\nu(R)$ est ou non identiquement nul. Respectant la terminologie de H. Dulac [13] disons que ω_ν est <u>dicritique</u> lorsque $\omega_\nu(R)$ est identiquement nul. Quand ω_ν est <u>non dicritique</u> le polynôme homogène $P_{\nu+1} = \omega_\nu(R)$ s'appelle le cône tangent de ω_ν ; un calcul simple prouve alors que $P_{\nu+1}$ est un facteur intégrant de ω_ν . En vertu du théorème d'intégration en présence de facteur intégrant, ω_ν s'écrit :

$$* \qquad \omega_\nu = P_1^{n_1} \cdots P_p^{n_p} \left(\Sigma \lambda_i \frac{dP_i}{P_i} + d\left(\frac{\alpha}{P_1^{n_1-1} \cdots P_p^{n_p-1}}\right)\right) \tag{4}$$

où les P_i sont les composantes irréductibles de $P_{\nu+1}$, et α est homogène de même degré que $P_1^{n_1-1} \cdots P_p^{n_p-1}$; considérons l'ensemble $\Sigma^p_{n_1,\dots,n_p;\ \nu_1\dots\nu_p}$ constitué des formes non dicritiques ω_ν possédant l'écriture (4), où les ν_i sont les degrés des P_i. Si $\mathfrak{D}_\nu$ désigne l'ensemble des formes dicritiques, nous montrerons le :

<u>Théorème</u> : a) les $\Sigma^p_{n_1,\dots,n_p;\ \nu_1,\dots,\nu_p}$ forment une partition de $\mathfrak{J}_\nu - \mathfrak{D}_\nu$ en sous-variétés analytiques lisses et leurs adhérences sont des cônes algébriques.

b) les adhérences $\overline{\Sigma^p_{1,\dots,1;\ \nu_1,\dots,\nu_p}}$, $\Sigma\nu_j = \nu+1$, $p = 1,\dots,\nu+1$, sont les composantes irréductibles de $\overline{\mathfrak{J}_\nu - \mathfrak{D}_\nu}$.

Une forme ω_ν de la strate $\Sigma^p_{1\dots1;\nu_1\dots\nu_p}$:

$$\omega_\nu = P_1 \dots P_p \ \Sigma\ \lambda_i \frac{dP_i}{P_i} \ , \quad \nu_i = d^\circ P_i,\ \Sigma\ \lambda_i\ \nu_i = 1,$$

est dite <u>apprivoisée</u> si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) les λ_i sont non nuls, non entiers négatifs, ni inverses d'entiers négatifs et, lorsque $p \geqslant 2$, l'un au moins des λ_i est ou bien non réel ou bien réel Siegelien.

b) l'hypersurface de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ d'équation $P_1 \dots P_p = 0$ n'a que des singularités ordinaires.

On établit assez facilement que l'ensemble des formes apprivoisées est "<u>générique</u>" dans $\mathfrak{J}_\nu - \mathfrak{D}_\nu$; il contient en fait un ouvert

* (4) nous avait été signalé par A.LINS N. dans le cas réduit où les n_i valent un.

semi-analytique réel dense de $\mathfrak{J}_\nu - \mathfrak{D}_\nu$.

Avant d'énoncer un des résultats les plus importants de ce travail remarquons que le premier jet non nul d'une forme intégrable est lui même intégrable, donc dans un certain $\mathfrak{J}_\nu$.

Théorème : Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$ dont le premier jet non nul ω_ν est apprivoisé. Alors ω possède une intégrale première multiforme du type $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$.

Ce théorème est une conséquence, pas tout à fait directe, d'une vieille conjecture de Zariski [53] démontrée récemment par W. Fulton([19] [11]) concernant la commutativité du π_1 du complémentaire d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires. Lorsque $n = 3$ la courbe considérée sera $\{P_1 \dots P_p = 0\} \subset \mathbb{P}\mathbb{C}(2)$; puisque ω_ν est non dicritique, $\mathbb{P}\mathbb{C}(2) - \{P_1 \dots P_p = 0\}$ est une feuille du feuilletage éclaté de ω. Par la conjecture, l'holonomie de cette feuille est abélienne et linéarisable du fait de la condition a) c'est le principal argument de la démonstration.

Remarque : Lorsque $p = 1$, ceci signifie que ω possède une intégrale première holomorphe forte usuelle. On notera que dans ce cas on peut atteindre des formes qui n'entrent pas dans le champ d'application du Frobenius de B. Malgrange. Celui-ci nous a signalé d'ailleurs qu'il lui semblait possible, toujours dans le cas $p = 1$, d'obtenir d'une façon algorithmique à la Godbillon-Vey, ce même résultat.

On ne possède pas de critère algébrique d'existence d'intégrale première méromorphe. Cependant la situation formelle est, si l'on peut dire, convergente ; en dimension deux le problème de la convergence d'une intégrale première méromorphe formelle a été étudié par H. Dulac dans le cas semi-divergent :

$$f = u\, f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \; ; \; \lambda_j \in \mathbb{Z} ,$$

où $f_j \in \mathcal{O}_2$ et u est une unité formelle, c.f. [13] à [16].

Nous étendons les résultats de DULAC en dimension supérieure dans le cadre général :

<u>Théorème</u> : Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable et $f = h/g$ une intégrale première méromorphe formelle pure de ω. Alors f <u>converge</u>, i.e il existe une unité formelle u telle que uh et ug convergent.

La démonstration se fait d'abord en dimension deux. En dimension supérieure, on montre dans un premier temps que toute intégrale première formelle $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ admet une écriture semi divergente. Pour cela nous sommes amenés à déterminer un critère de convergence des <u>séparatrices formelles</u> de ω, i.e. des séries $h \in \hat{\mathcal{O}}_n$ telles que :

$$\omega \wedge dh = h\eta \ ,$$

où η désigne une deux-forme à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}_n$.

<u>Théorème</u> : Soit $h \in \hat{\mathcal{O}}_n$ une séparatrice formelle de ω et γ : $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ une courbe analytique non contenue dans $S(\omega)$ telle que $h \circ \gamma \equiv 0$. Alors, il existe une unité formelle u telle que uh converge.

L'ensemble des intégrales premières méromorphes d'une forme holomorphe constitue visiblement un corps. Nous déterminons sa structure dans le

<u>Théorème</u> : Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe possédant une intégrale première méromorphe pure. Il existe alors un germe de fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}_n$ tel que l'ensemble des intégrales premières méromorphes de ω soit le corps $\mathbb{C}(f)$ des fractions rationelles en f.

Ces théorèmes de convergence et de factorisation s'interprètent intuitivement de la manière suivante : une série formelle ou une "fonction" méromorphe formelle pure f, qui est une intégrale première d'un germe de forme holomorphe ω, a la particularité de posséder des "hypersurfaces de niveau" : les feuilles du feuilletage défini par ω. Elle ne peut donc diverger que transversalement aux feuilles. Si $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ et n'est pas une puissance cette structure transverse est représentée par le "but" $(\mathbb{C}, 0)$ de f car les "hypersurfaces de niveau" de f sont alors connexes [32]. Dans le cas holomorphe le théorème A de [32] exprime ce fait : la divergence de f ne peut résulter que du choix d'une coordonnée divergente au but et il existe une série ℓ, $\ell'(0) \neq 0$ telle que $\ell \circ f$ converge. En transportant cette interprétation au cas méromorphe nous voyons que la convergence était prévisible : on peut considérer une application méromorphe comme une application à valeur dans la droite projective $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, définie en dehors d'un sous ensemble analytique de codimension 2, l'intersection de ses zéros et de ses pôles. Ainsi une intégrale première méromorphe formelle pure "ne peut diverger transversalement aux feuilles", car il n'existe pas de changement de "coordonnées formelles" de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$: les seuls automorphismes holomorphes de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ sont les homographies.

En ce qui concerne les intégrales premières du type $f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, le problème de la convergence a été ici encore étudié par H.Dulac en dimension deux dans le cas particulier semi-divergent :

$$f = u\, f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}$$

où u est une unité formelle et $f_1,\dots,f_p$ sont des germes en 0 de fonctions holomorphes et lorsque les λ_i appartiennent à ce que l'on appelle usuellement le domaine de Poincaré. Nous étendons en dimension quelconque ces résultats dans le cas général. Le critère suivant permet encore de se ramener à la dimension deux :

<u>Critère de convergence</u>. Soit ω un germe de 1-forme holomorphe intégrable possédant une intégrale première multiforme $f = f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, et $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germe de courbe analytique, <u>transverse</u> à ω, i.e. $\gamma^*(\omega) \not\equiv 0$. Alors f converge dès que $f \circ \gamma$ converge.

Les conditions de convergence que nous obtenons portent uniquement sur les exposants λ_j. Il s'agit en fait d'une généralisation des domaines de convergence d'une linéarisation d'un champ de vecteur : le domaine de Poincaré, et le domaine de Siegel avec une condition de petits dénominateurs. Cette dernière pouvant être remplacée par une condition topologique du type "domaine invariant". On obtient finalement le :

<u>Théorème</u> : Soit ω un germe en 0 de 1-forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ possédant une intégrale première multiforme formelle

$f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $f_j(0) = 0$, et ne possédant pas d'intégrale première holomorphe. Alors f converge dans les cas (génériques) suivants :

(1) les exposants λ_j ne sont pas sur une même demi-droite passant par l'origine de $\mathbb{C}$.

(2) les λ_j sont tous sur une même demi-droite de $\mathbb{C}$ et vérifient une condition diophantienne :

$$|i_1\lambda_1 + \ldots i_p\lambda_p| \geqslant \frac{c}{(|i_1|+\ldots+|i_p|)^{\varepsilon}}$$

où c et ε sont des constantes positives, pour tout p-uple d'entiers relatifs $i_1,\ldots,i_p$ tel que $i_1\lambda_1 + \ldots i_p\lambda_p \neq 0$.

Le problème de la classification des équations A dX + B dY à deux variables excite depuis plus d'un siècle nombre de mathématiciens ; notamment des problèmes de convergence des "formes normales" se posent naturellement. Dans [4] A.D. Brujno prouve (notamment) qu'une forme holomorphe à deux variables dont le 1-jet à l'origine est :

$$j^1\omega = p\, y\, dx + q\, x\, dy\ , \quad p,q \in \mathbb{N},$$

possède une forme normale convergente dès que ω possède une intégrale première formelle ; ω possèdera donc une intégrale première holomorphe et donc un facteur intégrant holomorphe.

Un petit calcul formel, à coups de formes normales, permet alors de remarquer le phénomène suivant : tout germe de forme à deux variables $\omega = A\, dx + B\, dy$ dont le 1-jet est non nul et non équivalent à x dx possède un facteur intégrant formel. Ce facteur intégrant est toujours unique (à une constante multiplicative près) sauf en présence d'intégrales premières holomorphes ou méromorphes. Un calcul bref permet en effet de remarquer que le quotient de deux facteurs intégrants d'une forme ω en est une intégrale première ; mais dans ces deux cas les formes normales convergent.

Notre contribution modeste aux problèmes de convergence des formes normales se trouve dans le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : Soit ω un germe de forme holomorphe réduite (au sens de [32]) à l'origine de $\mathbb{C}^2$, sans intégrale première usuelle (cas réglé par Dulac et Brjuno). Il y a équivalence entre les propriétés

(1) ω possède une mise sous forme normale convergente,

(2) le facteur intégrant de ω converge.

Une fois réglé ces problèmes de convergence, nous avons essayé de simplifier l'écriture des intégrales premières du type $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$. Tout d'abord en établissant des théorèmes de détermination finie de ces fonctions multiformes. Après avoir donné une définition du <u>lieu critique strict</u> de f, on prouve que f est de détermination finie si et seulement si son ensemble critique est réduit à 0, ou bien est vide. La notion de <u>détermination finie</u> que nous introduisons est plus générale que celle employée usuellement pour les fonctions , où seules les singularités isolées sont prises en considération : Modulo quelques restrictions sur les λ_j, $f=f_1^{\lambda_1}\ldots f_p^{\lambda_p}$ est de détermination finie si et seulement si chaque f_j est à singularité isolée, et les hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$ se croisent normalement en dehors de l'origine. Un corollaire immédiat de cette étude est :

- toute fonction holomorphe à deux variables est <u>conjuguée</u> (par changement de coordonnée) à un polynôme.

- Tout germe de fonction dont les zéros ne présentent que des singularités ordinaires, sauf éventuellement à l'origine, est conjugué à un polynôme.

J. Bochnack nous a signalé que l'on pouvait trouver la première partie de ce corollaire dans la thèse de M. Shiota [40].

Enfin nous avons étudié les singularités <u>quasi-homogènes</u> des fonctions multiformes : celles pour lesquelles il existe un champ de vecteur holomorphe X tel que

$$\Sigma\, \lambda_j \frac{df_j(X)}{f_j} = 1.$$

Les fonctions multiformes quasihomogènes possèdent des propriétés analogues aux fonctions holomorphes quasihomogènes, étudiées par Saito dans le cas à singularité isolée [38]. Sous des hypothèses raisonnables, on obtient, pour

$$F = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p} \text{ quasihomogène :}$$

- Si U est une unité, F et UF sont conjuguées via un changement de coordonnées, si bien que F est déterminé uniquement par les hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$ et les exposants λ_j ;

- F possède une écriture "polynomiale quasi-homogène" : dans des coordonnées ad-hoc, on a :

$$F = P_1^{\lambda_1} \ldots P_p^{\lambda_p},$$

où les P_j sont des polynomes quasihomogènes, dans le sens usuel.

Nous tenons à remercier Mesdames S. Caumette et D. Henry de Dijon, Madame Y. Panabière de Toulouse-Sabatier qui ont assuré la frappe du manuscript avec beaucoup de métier et de rigueur.

Ce travail a bénéficié des conseils, des critiques et des idées de R. Moussu et I. Kupka. Nous les remercions particulièrement ainsi que B. Perron et J. Martinet ; sans oublier le referee pour sa lecture critique du texte original et ses suggestions.

L'un des auteurs remercie l'Université Paul Sabatier de Toulouse pour avoir accepté de prendre en charge une partie de la frappe du texte.

première partie

notions fondamentales
et
résultats préliminaires

. CHAPITRE I .

FEUILLETAGE SINGULIER ET HOLONOMIE.

1. Feuilletage singulier. Une 1-forme différentielle holomorphe ω sur une variété holomorphe M, vérifiant la condition d'intégrabilité $\omega \wedge d\omega = 0$, défini un feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ du complémentaire de son lieu singulier $S(\omega) = \{m \in M ; \omega(m) = 0\}$. Nous appelons feuilletage singulier de M la donnée du couple :

$$\underline{\mathcal{F}}_\omega = (S(\omega), \mathcal{F}_\omega).$$

En tout point de M le germe de ω peut s'écrire $g\eta$ où g est "le plus grand commun diviseur" des composantes de ω dans un système de coordonnées en m. Alors $S(\eta)$ est de codimension $\geqslant 2$ et définit sur un voisinage ouvert de m le feuilletage singulier $\underline{\mathcal{F}}_\eta = (S(\eta), \mathcal{F}_\eta)$ qui coïncide avec $\underline{\mathcal{F}}_\omega$ en dehors de $S(\omega)$. Par recollement on obtient un feuilletage singulier unique de M noté :

$$\overline{\underline{\mathcal{F}}}_\omega = (S(\overline{\underline{\mathcal{F}}}_\omega), \overline{\mathcal{F}}_\omega).$$

Le lieu singulier $S(\overline{\underline{\mathcal{F}}}_\omega)$ est un sous-ensemble analytique de M de codimension $\geqslant 2$ et $\overline{\mathcal{F}}_\omega$ est un feuilletage du complémentaire, qui coïncide avec $\mathcal{F}_\omega$ en restriction à $M - S(\omega)$. Nous l'appelons saturé de $\mathcal{F}_\omega$.

Toute forme holomorphe ω' telle que $\omega \wedge \omega' = 0$ définit le même feuilletage singulier saturé que ω. Ceci résulte directement du lemme de division de de Rham généralisé pour K. Saito dans [37]:

Lemme de division: Soient ω, ω' deux germes à l'origine de $\mathbb{C}^n$ de formes holomorphes (resp. de formes à coefficients dans l'anneau des séries formelles $\hat{\mathcal{O}}_n$) telles que $\omega \wedge \omega' = 0$. Si la codimension du lieu singulier de ω (resp. la hauteur de l'idéal $I(\omega)$ de $\hat{\mathcal{O}}_n$ engendré par les coefficients de ω) est $\geqslant 2$, il existe $g \in \mathcal{O}_n$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_n$) tel que $\omega' = g\omega$.

En particulier s'il existe $f \in \mathcal{O}_n$ tel que $\omega \wedge df = 0$,

$S(\mathfrak{F}_\omega)$ est l'ensemble des points m de M où l'hypersurface $f^{-1}(f(m))$ est singulière et les feuilles de $\mathfrak{F}_\omega$ sont les composantes connexes des parties lisses des hypersurfaces de niveau de f.

2. Eclatement d'un point. Cette notion est bien connue et nous ne la rappellerons que brièvement. Pour plus de détails le lecteur pourra consulter [51], par exemple. Le transformé $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ de $\mathbb{C}^n$ par éclatement du point 0 est l'adhérence, dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$, du graphe G de l'application de passage au quotient

$$\mathbb{C}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1) \ , \qquad x \longrightarrow [x] .$$

C'est une variété holomorphe (lisse) : si $t^{(j)} : V_j \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ désignent les cartes canoniques de l'espace projectif, $t^{(j)} = (t_1^j,..t_{j-1}^j,t_{j+1}^j,..,t_n^j)$, $t_k^j = x_k/x_j$, les applications :

$$(*)_j \quad (x_j, t^{(j)}) : \widetilde{\mathbb{C}^n} \cap (\mathbb{C} \times V_j) \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$$

constituent un atlas de $\widetilde{\mathbb{C}^n}$. Dans ces cartes la restriction $E : \widetilde{\mathbb{C}^n} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de la première projection, appelée application d'éclatement s'écrit

$$E(x_j, t^{(j)}) = (x_j t_1^j, \dots, x_j t_{j-1}^j, x_j, x_j . t_{j+1}^j, \dots, x_j . t_n^j) .$$

Le diviseur exceptionnel $E^{-1}(0)$ s'identifie à $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ et visiblement E est un isomorphisme de $\widetilde{\mathbb{C}^n} - \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ sur $\mathbb{C}^n - \{0\}$.

Signalons quelques propriétés de E que nous utiliserons par la suite. Si f est une série formelle nous pouvons considérer en tout point t_o de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ le composé $F,_{t_o}$ de f avec le germe $E,_{t_o}$ de E en t_o. Un calcul facile dans les cartes $(*)_j$ montre que $F,_{t_o}$ est une série $\Sigma\, A_j(t)x^j$ dont les coefficients sont des germes de fonctions analytiques en t (en fait des polynômes). On peut considérer $F = f{\circ}E$ comme une section globale du faisceau $\hat{\mathcal{E}}$ associé au préfaisceau de base $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ dont les sections locales $\hat{\mathcal{E}}(U)$ sont les séries $\Sigma\, A_j(t)x^j$ les A_j étant holomorphes sur U. Nous appelons $\hat{\mathcal{E}}$ l'anneau des germes le long de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ de fonctions holomorphes transversalement formelles.

Remarquons aussi que la série f converge dès qu'il existe un point t_o de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ tel que $F,_{t_o}$ converge. Celà se vérifie aisément par un calcul direct (cf. [32] p.494).

On peut voir enfin que dans une carte canonique, par exemple (x_1,t), $t = t^{(1)}$, $F(x_1,t) = f(x_1,tx_1)$ est divisible par x_1^ν, ν étant l'ordre de f, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que le k jet de f ne soit pas nul :

$$F(x,t) = x_1^\nu \tilde{f}(x_1,t).$$

L'élément $\tilde{f}$ de $\hat{\mathcal{E}}(V_1)$ s'appelle éclaté divisé de f dans la carte (x_1,t). Les zéros de $\tilde{f}(0,t)$ constituent un sous-ensemble algébrique C_f de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ appelé cône tangent de f. Si f est holomorphe C_f est l'ensemble des limites des sécantes $\mathbb{C}.a_j$, où a_j tend vers 0 sur $f^{-1}(0)$.

Toutes ces notions peuvent se définir plus généralement en un point m quelconque d'une variété M holomorphe.

3. Eclatement d'un germe de feuilletage singulier. L'image réciproque $E^*(\omega)$ d'une 1 forme holomorphe intégrable sur un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}^n$, définit un feuilletage saturé de $\tilde{U} = E^{-1}(U)$ que nous notons

$$\underline{\tilde{\mathfrak{F}}}_\omega = (S\ (\tilde{\mathfrak{F}}_\omega),\ \tilde{\mathfrak{F}}_\omega)$$

et appelons éclaté de $\underline{\mathfrak{F}}_\omega$. Le cône tangent de ω en 0 est le sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$

$$C_\omega = S(\tilde{\mathfrak{F}}_\omega) \cap \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1).$$

Il est facile de voir que C_ω ne dépend que du feuilletage saturé $\underline{\mathfrak{F}}_\omega$: $C_\omega = C_{\omega'}$ dès que $\omega \wedge \omega' = 0$, et nous pouvons donc supposer que $S(\omega)$ est de codimension $\geqslant 2$. Déterminons une équation homogène de C_ω. Soit ν l'ordre de ω en 0, i.e. le plus petit entier k tel que le k-jet $J^k\omega$ en 0 soit non nul et écrivons, dans les coordonnées (x, y), $y = (y_1,\ldots,y_{n-1})$,

$$\omega_\nu = J^\nu\omega = a_\nu dx + b_{1,\nu}dy_1+\ldots+ b_{n-1,\nu}dy_{n-1},$$

$$P_{\nu+1}(x,y) = xa_\nu + y_1b_{1,\nu} +\ldots+ y_{n-1}b_{n-1,\nu}.$$

Un calcul immédiat montre que, dans la carte (x,t), $t = y/x$, de $\widetilde{\mathbb{C}^n}$, $E^*(\omega)$ s'écrit :

$$E^*(\omega) = x^\nu((P_{\nu+1}(1,t) + xQ(x,t)dx + x\sum_{j=1}^{n-1}(b_{j,\nu}(1,t) + xQ_j(x,t)dt_j)).$$

On distingue alors deux cas :

<u>Le cas dicritique</u> : $P_{\nu+1} \equiv 0$. Il existe alors un j tel que $b_{j,\nu}$ ne soit pas identiquement nul et $x^{\nu+1}$ divise $E^*(\omega)$. En tout point de l'ouvert semi algébrique de V_1 défini par $b_{j,\nu}(1,t) \neq 0$, <u>l'éclaté divisé de ω dans la carte</u> (x,t), $\tilde{\omega} = E^*(\omega)/x^{\nu+1}$, ne s'annule pas. Les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ sont transverses à $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ en ces points et lorsque $n = 2$, ω admet une infinité non dénombrable de <u>courbes intégrales en 0</u>, i.e. de germes de courbes analytiques $\gamma : \mathbb{C}, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^2, 0$ telles que $\gamma^*(\omega)$ soit identiquement nul.

<u>Le cas non dicritique</u> : $P_{\nu+1} \not\equiv 0$. L'éclaté divisé de ω dans la carte (x,t) s'écrit alors

$$\tilde{\omega} = \frac{E^*(\omega)}{x^\nu} = P_{\nu+1}(0,t)dx + x\eta,$$

(où η est une 1-forme holomorphe au voisinage de V_1) et son lieu singulier est de codimension $\geqslant 2$. Ainsi $P_{\nu+1} = 0$ est une équation homogène du cône tangent C_ω. Remarquons aussi que

$$C_\omega \subset C_{\omega_\nu},$$

l'égalité ayant lieu lorsque $S(\omega_\nu)$ est de codimension $\geqslant 2$.

4. <u>Réduction d'un germe de 1 forme holomorphe en $0 \in \mathbb{C}^2$</u>. Ce procédé généralise le processus de désingularisation des courbes planes par éclatements successifs. Depuis I. Bendixon il a été étudié par divers auteurs[2],[17],[39] . Pour une démonstration concise et élégante de l'existence de ce processus nous renvoyons le lecteur à A. Ven den Essen [49]. Ce dernier montre qu'après un éclatement d'une 1-forme $\omega = adx + bdy$, les singularités du feuilletage éclaté qui apparaissent aux points du cône tangent de ω sont moins "complexes". Pour ce faire il prouve que le "nombre de Milnor de ω", c'est-à-dire $\mu_0(\omega) = \dim \mathcal{O}_2/\mathcal{J}(\omega)$ diminue après un éclatement, sauf si le 1-jet

de ω n'est pas nul. Dans cette dernière éventualité on peut, en effectuant une nouvelle série d'éclatements , c.f. Seidenberg [39],ou [32], éliminer les cas les plus dégénérés et se ramener à des modèles locaux relativement simples qui constituent une classe de 1-forme stable par éclatement. Nous les appellons ici <u>formes réduites</u>.

<u>Définition</u>. Soit ω une 1-forme holomorphe sur une variété holomorphe M de dimension 2, et $m \in M$. Nous dirons que le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ est <u>réduit</u> en m, ou encore que <u>le germe</u> $\omega,_m$ <u>de ω au point m est réduit</u>, s'il existe un système de coordonnées (u, v) centré en m et un facteur multiplicatif $h \in \mathcal{O}_{M,m}$ tels que $\omega,_m = h\,\tilde{\omega},_m$ et le 1-jet de $\tilde{\omega},_m$ soit de l'un des trois types suivants :

(*) $\lambda_1 vdu - \lambda_2 udv$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, λ_1/λ_2 et $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}_+$;

(**) λudv , $\lambda \neq 0$;

(***) $\tilde{\omega}(m) \neq 0$.

Depuis H. Poincaré et H. Dulac la classification formelle des germes de 1-formes dont le 1-jet n'est pas nul est bien connue et a été étendue depuis aux champs de vecteur en dimension supérieure par Brjuno [4] (c.f. aussi [30]). Au chapitre 4 de la cinquième partie nous y reviendrons plus en détail, pour faire le lien entre la convergence des modèles formels et celle des facteurs intégrants. Bien que nous n'aurons pas à l'utiliser avant cette cinquième partie donnons, à titre indicatif, les modèles locaux des formes <u>réduites</u> ; (X, Y) désigne un système de <u>coordonnées formelles</u> en m, approprié:

<u>Cas (*) avec $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$.</u>

(1) $\tilde{\omega},_m = \lambda_1 XdY - \lambda_2 YdX$;

<u>Cas (*) avec $\lambda_1/\lambda_2 = -p/q$, $p,q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.</u>

(2) $\tilde{\omega},_m = pY(1+A(X^pY^q))dX + qX(1+B(X^pY^q))dY$,

où $A(T)$ et $B(T)$ désignent des séries formelles d'une variable T ;

<u>Cas (**)</u>

(3) $\tilde{\omega} = XdY + \ell(Y)dX$,

où $\ell(Y)$ désigne une série formelle d'une variable.

D'après les théorèmes classiques de H. Poincaré et C.L. Siegel [41] l'écriture (1) est convergente lorsque λ_1/λ_2 n'est pas réel ou bien est un irrationnel > 0 qui vérifie des conditions diophantiennes. Signalons aussi que la classification analytique des formes admettant les modèles formels (2) et (3) a été récemment effectuée par J. Martinet et J.P. Ramis [31] faisant apparaitre des liens étroits avec la théorie d'Ecalle [18].

Remarquons enfin que la condition imposée dans (*) : λ_1/λ_2 et $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}$ est plus forte que celle utilisée dans [32]. Nous aurons aussi besoin d'un théorème de réduction légèrement plus fort que celui de l'appendice I de [32]. Il s'en déduit sans trop de peine et nous laissons au lecteur le soin d'en compléter la démonstration. En particulier le diviseur exceptionnel apparaitra ici "en position générale" relativement au feuilletage réduit (condition (iv) qui suit).

<u>Théorème de réduction</u>. Soit ω une forme de Pfaff sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, à singularité isolée $0 \in U$. Il existe alors une application analytique (propre) $\pi : M \to U$, d'une variété analytique complexe M de dimension 2 sur U,obtenue par composition d'éclatements ponctuels E_i, telle que :

(i) <u>le diviseur exceptionnel</u> $D = \pi^{-1}(0)$ soit une hypersurface à croisements normaux,

(ii) la restriction de π à M-D soit un isomorphisme sur $\overline{U - \{0\}}$,

(iii) en tout point de M le <u>feuilletage éclaté</u> $\tilde{\underline{\mathfrak{F}}}_\omega = \underline{\mathfrak{F}}_{\pi^*(\omega)}$ soit réduit,

(iv) en tout point régulier de $\tilde{\underline{\mathfrak{F}}}_\omega$ chaque branche du diviseur exceptionnel est soit transverse au feuilletage, soit une feuille.

Remarquons que le procédé de réduction est "canonique" : On éclate nécessairement les points singuliers des feuilletages images réciproques $E_i^*\omega$, jusqu'à ce que les conditions (i)...(iv) soient toutes satisfaites. Dans la suite nous raisonnerons fréquemment par récurrence sur le <u>nombre minimum</u> $N(\omega)$ d'éclatements nécessaires à la construction de π.

5. Holonomie des variétés intégrales des formes réduites. Considérons un germe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ de forme réduite du type (*).

$$\omega = \lambda_1 y dx - \lambda_2 x dy + \ldots$$

Nous avons vu notamment dans le paragraphe précédent que dans un système de coordonnées formelles (X,Y), ω possède les courbes intégrales [1] $X = 0$ et $Y = 0$. On peut démontrer que, même si ces coordonnées sont divergentes, ω admet toujours deux courbes intégrales transverses. En d'autres termes, si le système de coordonnées (x,y) est bien choisi, ω s'écrit :

(a) $\omega = \lambda_1 y(1+A(x,y))dx - \lambda_2 y(1+B(x,y))dy$,

où A et B s'annulent à l'origine.

Par contre, lorsque ω est du type (**), c'est-à-dire $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$, on peut faire apparaitre dans un système de coordonnées formelles deux variétés invariantes, mais la variété tangente à l'axe des y ne convergera pas en général. Dans [13] H. Dulac montre que ω peut s'écrire, pour des coordonnées (x, y) appropriées :

(b) $\omega = (x+y\ A(x,y))dy - y^m dx$,

avec $m > 1$ et $A(0,0) = 0$. Pour une démonstration de (a) et (b) le lecteur peut se rapporter à l'appendice II de [32].

Dans les deux cas nous pouvons donc supposer que l'axe des x est variété invariante. En d'autre terme, si ω est holomorphe sur une boule U,

$$V = U \cap (\mathbb{C} \times 0 - \{0\})$$

est une feuille de $\mathcal{F}_\omega$. Considérons l'holonomie de V. Sa réalisation $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C})$ sur le facteur transverse $\{x = x_0\}$ s'obtient en posant (1) $x = x_0 e^{2i\pi\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ dans l'équation différentielle (2): $\omega = 0$. Si (3) $y = H(y', \theta)$ est la solution de condition initiale y', on a $h(y') = H(y',1)$. Les coefficients $c_j(\theta)$ du développement $\Sigma\, c_j(\theta)y'^j$ de H se calculent en explicitant (2) à l'aide de (1) et (3). Dans le cas (a) on obtient $c_1'(\theta) = (2i\pi\lambda_2/\lambda_1)\ c_1(\theta)$. On en déduit,

---

(1) Nous dirons aussi "variété invariante" pour "courbe intégrale lisse", bien que cette terminologie soit plutôt employée pour les champs de vecteurs ou difféomorphismes.

puisque $c_1(0) = 1$,

$$h(y) = e^{2i\pi\lambda}y + y^2 g(y), \quad \lambda = \lambda_2/\lambda_1 .$$

Dans le cas (b) on obtient le système

$$c'_k(\theta) = 0 \text{ pour } k < m, \ c'_m(\theta) = 2i\pi C_1(\theta)^m. \text{ Ce qui donne :}$$

$$h(y') = y' + y'^m(2i\pi + y'g(y')).$$

L'holonomie d'une variété invariante est un invariant très riche du germe de feuilletage singulier, comme le montre le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> [32] : Soit $\omega = \lambda_1 xdy + \lambda_2 ydx + \ldots$ un germe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe, avec $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Alors ω est linéarisable si et seulement si l'holonomie d'une variété invariante est linéarisable.

6. <u>Holonomie projective</u>. Soit ω un germe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable non dicritique. Le diviseur $E^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ est une variété invariante du feuilletage éclaté $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$: le complémentaire L_ω du cône tangent C_ω dans $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ est une feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$. Etudions son holonomie :

$$\mathcal{H}_\omega : \pi_1(L_\omega ; t_0) \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, t_0)$$

réalisée sur le facteur transverse $\mathbb{C}, t_0 = E^{-1}(\mathbb{C}.a)_{,t_0}$, a étant un point de $\mathbb{C}^n$ qui porte la droite définie par t_0. Si $\dot{\gamma}$ est la classe d'homotopie d'un lacet $\gamma(s)$, $s \in [0,1]$ contenu dans $L_\omega \cap V_j$ où V_j est le domaine de la coordonnée projective $t = t^{(j)}$, c.f. 2, on calcule le difféomorphisme d'holonomie $h = \mathcal{H}_\omega(\dot{\gamma})$ en procédant comme au paragraphe précédent : on intègre l'équation différentielle $\tilde{\omega} = 0$ après avoir posé $t = \gamma(s)$, $\tilde{\omega}$ désignant l'éclaté divisé de ω dans la carte (x_j, t). Si $x_j = H(z, s)$ est la solution de condition initiale z, on a $h(z) = H(z, 1)$.

Un calcul facile laissé au lecteur montre que le 1-jet de h correspond à l'holonomie de la forme homogène ω_ν, premier jet non nul de ω en 0. Plus précisément si $Z : (\mathbb{C}, t_0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ désigne la coordonnée $Z(E^{-1}(\alpha a)) = \alpha$, $\mathcal{H}_{\omega_\nu}$ est à valeur dans le groupe des diffé-

difféomorphismes $\mathcal{L}_Z(\mathbb{C}, t_0)$ linéaires en Z et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(L_\omega \; ; \; t_0) & \xrightarrow{\quad\mathcal{H}_\omega\quad} & \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, t_0) \\
\uparrow \tau_\# & & \downarrow d_0 \\
\pi_1(L_{\omega_\nu} \; ; \; t_0) & \xrightarrow{\quad\mathcal{H}_{\omega_\nu}\quad} & \mathcal{L}_Z(\mathbb{C}, t_0) \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, t_0)
\end{array}$$

où d_0 désigne la différentiation $(d_0 h)(Z) \equiv h'(0)Z$ et $\tau_\#$ est induit par l'inclusion $\tau : L_{\omega_\nu} \hookrightarrow L_\omega$.

<u>Exercice</u> : Si $\omega_\nu = a_\nu\, dx + b_\nu\, dy$ est une forme à coefficients polynomiaux homogènes de degré ν de $\mathbb{C}^2$ et

$$P_{\nu+1}(x,y) = x\, a_\nu + y\, b_\nu = \prod_{j=1}^{p} (y - t_j x)^{\nu_j},$$

le cône tangent $C_\omega = \{t_1, \dots, t_p\}$ est contenu dans V_1 et $\pi_1(L_\omega \; ; \; t_0)$ est engendré par les classes des lacets $\gamma_j, j = 1,\dots p$, d'indice 1 par rapport à t_j et 0 par rapport à t_k, $k \neq j$. Les holonomies $h_j = \mathcal{H}_{\omega_\nu}(\dot{\gamma}_j)$ sont données par

$$h_j(Z) = e^{2i\pi\lambda_j} Z \text{ , avec } \lambda_j = - \frac{b_\nu(1,t_j)}{\frac{\partial P_{\nu+1}}{\partial y}(1,t_j)} \; .$$

Le <u>groupe d'holonomie de</u> ω, $H(\omega \; ; \; t_0) = \mathrm{Im}(\mathcal{H}_\omega)$ est en fait complètement caractérisé par le groupe d'holonomie de la restriction $i^*(\omega)$ de ω à un 2-plan linéaire générique (1) $i : \mathbb{C}^2, 0 \hookrightarrow \mathbb{C}^n, 0$. En effet d'après un théorème classique de Zariski [32] si I désigne le plongement de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ dans $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ induit par i, le morphisme de groupe :

$$I_* : \pi_1(I^{-1}(C_\omega) \; ; \; t_0) \longrightarrow \pi_1(L_\omega \; ; \; I(t_0))$$

est surjectif. D'autre part $I^{-1}(C_\omega) \subset C_{i^*(\omega)}$ et le diagramme suivant est commutatif :

---

(1) générique signifie qu'il existe un ouvert de Zariski non vide de la grassmanienne des 2-plans de $\mathbb{C}^n$ pour lequel les morphismes associés sont surjectifs.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(L_\omega \;;\; I(t_0)) \arrow[rr, "\mathcal{H}_\omega"] & & \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, I(t_0)) \\
\pi_1(I^{-1}(L_\omega) \;;\; t_0) \arrow[u, "I_\#"'] & & \\
\pi_1(L_{j^*(\omega)} \;;\; t_0) \arrow[u, "\tau_\#"'] \arrow[uurr, "\mathcal{H}_{i^*(\omega)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

où $\tau^\#$ est induit par l'inclusion $\tau : L_{i^*(\omega)} \hookrightarrow L_\omega$. On en déduit l'égalité des groupes d'holonomie :

$$H(\omega,\, t_0) = H(i^*(\omega) \;;\; t_0).$$

. CHAPITRE II .

SÉPARATRICES D'UNE FORME INTÉGRABLE HOLOMORPHE.

1. <u>Notion de séparatrices</u>. Soit ω un germe de forme holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$, codim $S(\omega) \geqslant 2$. <u>Une séparatrice analytique</u> (resp. <u>formelle</u>) de ω est la donnée d'un germe d'hypersurface réduite S dont l'équation $f = 0$, $f \in \mathcal{O}_n$ (resp. $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$), $f(0) = 0$, satisfait l'égalité

$$(1) \qquad \omega \wedge df = f\,\eta$$

pour une certaine deux forme η. En d'autre termes, $\omega \wedge df$ s'annule avec f. La condition ci-dessus ne dépend pas de l'équation réduite $f = 0$ de S : si on change f en uf, $u(0) \neq 0$, il vient :

$$\omega \wedge d(uf) = uf.\ (\eta + \frac{\omega \wedge du}{u}).$$

Dans le cas analytique les composantes connexes des parties lisses de $S - S(\omega)$ sont des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ de $\mathbb{C}^n - S(\omega)$. Plus précisément nous avons la

<u>Proposition 1.1</u> - Soit S un germe de séparatrice analytique, (resp. formelle) de ω d'équation réduite $f = 0$, $f \in \mathcal{O}_n$(resp. $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$). Alors tout chemin $\gamma \in \mathcal{O}_1^n$ contenu dans S,i.e. $f \circ \gamma = 0$, et non contenu dans $S(\omega) \cup S(df)$ est une courbe intégrale de ω.

<u>Preuve</u> : L'égalité

$$\omega(\gamma(t)) \wedge df(\gamma(t)) = 0$$

implique l'existence de fonctions holomorphes $u(t)$, $v(t) \not\equiv 0$ telles que

$$\omega(\gamma(t)) = \frac{u(t)}{v(t)}\, df(\gamma(t)).$$

Ainsi

$$\gamma^*(\omega) = \frac{u}{v}\, \gamma^*(df) = 0.$$

<u>Remarques</u> : 1) Il est facile de prouver la réciproque de cette proposition dans le cas analytique, et de plus la condition $\gamma \not\subset S(\omega) \cup S(df)$

est alors visiblement superflue. On pourrait voir aussi que cette caractérisation des séparatrices est encore vraie dans le cadre formel.

2) Lorsque $n = 2$ la notion de séparatrice est équivalente à celle de courbe intégrale, aussi bien dans le cadre analytique que formel. Nous utiliserons alors indifféremment ces deux notions.

2. Existence de séparatrices. Récemment encore le problème de l'existence d'une séparatrice pour un germe de forme intégrable restait sans solution. Une réponse affirmative vient d'être donnée par C. Camacho et P. Sad dans [6] lorsque la dimension ambiante est deux :

Théorème 2.1 - Tout germe de un forme holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ possède une séparatrice.

En dimension plus grande que deux il existe des formes intégrables sans séparatrice . Il en est ainsi pour la forme ω suivante donnée par G. Darboux :

$$\omega = (x^n z - y^{n+1})dx + (y^n x - z^{n+1})dy + (z^n y - x^{n+1})dz,$$

où $n \geqslant 2$. Pour établir le fait que ω ne possède pas de séparatrices on pourra se référer à [23] page 157 à 197.

3. Majoration du nombre de séparatrices en dimension 2. Ce problème a été étudié par H. Dulac dans [13], pages 74-92 ainsi que dans [14], [15], c.f.aussi [16] en utilisant la méthode de réduction de BRIOT-BOUQUET [3]. On obtient les mêmes résultats en raisonnant par récurence sur le nombre d'éclatements $N(\omega)$ nécessaire à la réduction de ω

Proposition 3. 1 - Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de forme holomorphe, à singularité isolée, d'ordre ν. Si ω possède $\nu + 2$ courbes intégrales formelles (au moins), alors ω possède une infinité non dénombrable de courbes intégrales analytiques.

Démonstration. Le cas $N(\omega) = 0$ est trivial puisque les hypothèses de la proposition ne sont jamais vérifiées. Supposons la proposition vraie lorsque $N(\omega) < N$ et considérons le cas $N(\omega) = N$. Si ω est dicritique, en tout point de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1) - C_\omega$ passe une feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$

transverse à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$. Son image par le morphisme d'éclatement est un germe de courbe intégrale analytique de ω.

Supposons donc ω non dicritique et désignons par $\nu_1,\ldots,\nu_p$ les ordres de l'éclaté divisé $\tilde{\omega}$ de ω aux points $t_1,\ldots,t_p$ du cône tangent C_ω. Il est clair que

$$\nu_1 +\ldots+ \nu_p \leqslant \nu + 1.$$

Supposons que ω possède (au moins) $\nu + 2$ courbes intégrales formelles distinctes $Z_1,\ldots, Z_{\nu+2}$ et notons n_j le nombre de courbes Z_k dont le cône tangent est t_j, $j = 1,\ldots,\nu + 2$. Nous disons qu'il existe $j \in \{1,\ldots,\nu + 2\}$ tel que $n_j + 1 \geqslant \nu_j + 2$, et la conclusion résultera alors de la récurrence. En effet si cela n'était pas le cas, on aurait $n_j \leqslant \nu_j$ et donc

$$n_1 + \ldots n_p \leqslant \nu_1 + \ldots + \nu_p \leqslant \nu + 1,$$

ce qui contredirait l'hypothèse.

4. Description d'un feuilletage singulier au voisinage d'une courbe intégrale et paramétrisations invariantes.

En dimension deux la donnée d'une séparatrice d'un germe de 1-forme ω équivaut à la donnée d'une courbe intégrale, i.e. d'une application holomorphe non constante $\gamma : \mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}^2,0$ telle que $\gamma^*(\omega) \equiv 0$. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2, une forme intégrable ω peut, en dimension supérieure à 2, ne pas posséder de séparatrice. Cependant elle possède toujours des courbes intégrales. D'après le théorème 2.1 il en existe au moins une dans chaque section plane $i : \mathbb{C}^2,0 \hookrightarrow \mathbb{C}^n,0$ générique (i.e $S(i^*(\omega)) = \{0\}$) ; l'existence et la généricité de telles sections a été montré dans [32].

Dans ce paragraphe nous allons décrire le feuilletage régulier $\mathcal{F}_\omega$ de $\mathbb{C}^n - S(\omega)$ sur un voisinage ouvert U d'une courbe intégrale épointée, $\gamma(\mathbb{C})^* = \gamma(\mathbb{C}) - \{0\}$, qui n'est pas contenue dans le lieu singulier de ω. Nous déterminerons en particulier une paramétrisation analytique de la feuille de $\mathcal{F}_\omega|U$ qui s'appuie sur $\gamma(\mathbb{C})^*$.

Théorème 4.1 - Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable et $\gamma : \mathbb{C},0 \longrightarrow \mathbb{C}^n,0$ un germe de courbe intégrale de ω, i.e.

$\gamma^*(\omega) = 0$, qui n'est pas contenue dans $S(\omega)$. Il existe alors un germe d'application analytique $F : \mathbb{C}^{n-1}, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n, 0$ tel que

1) l'ensemble critique $C(F), 0$ de F est strict : $\dim_0 C(F) < n-1$;

2) F factorise γ : il existe $\bar{\gamma} : \mathbb{C}, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n, 0$ tel que $F \circ \bar{\gamma} = \gamma$, et $\bar{\gamma}(\mathbb{C}), 0$ n'est pas contenu dans $C(F), 0$;

3) $F^*(\omega) \equiv 0$.

Dans un premier temps nous considèrerons le cas où γ est à valeurs dans un 2-plan générique sur lequel ω_0 est réduite. Ensuite, par un procédé d'éclatements successifs nous nous ramènerons à cette situation.

<u>Théorème 4.2</u> - Soit ω un germe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ de forme intégrable et $i : \mathbb{C}^2, 0 \hookrightarrow \mathbb{C}^n, 0$ un plongement tel que $\omega_0 = i^*(\omega)$ soit réduite à singularité isolée 0. Alors, ou bien ω possède une intégrale première holomorphe, ou bien il existe une rétraction $R : \mathbb{C}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^2, 0$ de i et une unité $U \in \mathcal{O}_n$ telle que $\omega = UR^*(\omega_0)$; dans ce dernier cas on dira que ω est <u>triviale au dessus de ω_0</u>.

<u>Démonstration</u> : Puisque ω_0 est à singularité isolée, le lieu singulier $S(\omega)$ de ω est de codimension $\geqslant 2$. S'il est de codimension $\geqslant 3$, le théorème de Frobenius singulier [28] assure l'existence d'une intégrale première holomorphe. Montrons que lorsque codim $S(\omega) = 2$, ω est triviale au dessus de ω_0.

Tout d'abord, si $d\omega_0$ ne s'annule pas en 0, nous sommes en présence d'un phénomène de Kupka-Reeb, [25] [36], et il est alors bien connu que ω est triviale au dessus de ω_o.

Lorsque $d\omega_0(0) = 0$, le 1-jet de ω_0 est nécessairement du type

$$j^1\omega_0 = \lambda(x\,dy + y\,dx), \qquad \lambda \neq 0,$$

où $(x, y, t_3, -, t_n)$ est un système de coordonnées tel que le 2-plan $i(\mathbb{C}^2)$ soit donné par $t_3 = \ldots = t_n = 0$. Ainsi :

$$\omega = a\,dx + b\,dy + \sum_{j=z}^{n} c_j\,dt_j,$$

$$a = \lambda x + \dots,$$
$$b = \lambda y + \dots,$$
$$c_j(0) = 0, \ j = 3,\dots,n$$

Remarquons que l'application $(a, b) : \mathbb{C}^n,0 \longrightarrow \mathbb{C}^2, 0$ est une submersion, et donc $(a, b)^{-1}(0)$ est une variété analytique lisse de codimension deux. Comme elle contient le lieu singulier de ω, qui est aussi de codimension deux, on a l'égalité :

$$S(\omega) = \{a = b = 0\}.$$

Les coefficients c_j, qui s'annulent sur $S(\omega)$, appartiennent à l'idéal $(a, b) \subset \mathcal{O}_n$ engendré par a et b :

$$c_j = u_j a + v_j b, \qquad j = 3,\dots,n.$$

Ainsi les n-2 champs de vecteurs, linéairement indépendants

$$X_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - u_j \frac{\partial}{\partial x} - v_j \frac{\partial}{\partial y},$$

annulent ω. L'application :

$$\phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2}, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(x,y,z_3,\dots,z_n) \longrightarrow \phi^n_{z_n} \circ \dots \circ \phi^3_{z_3}(x, y, 0,\dots,0)$$

ϕ^j_z désignant le flot de X_j, transforme le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ en un produit $\mathcal{F}_{\omega_0} \times \mathbb{C}^{n-2}$, c.f. [7]. La rétraction est le composé $R = p \circ \phi^{-1}$ de ϕ^{-1} avec la projection linéaire sur $\mathbb{C}^2 \times 0$.

Q.E.D.

Remarque 4.3 - Dans chacune des deux éventualités du théorème 4.2., si $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ est une courbe intégrale de ω_0, il existe une application $F : \mathbb{C}^{n-1}, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n, 0$ qui vérifie les conclusions du théorème 4.1. C'est clair lorsque ω est triviale au dessus de ω_0. Lorsque ω possède une intégrale première f, la courbe γ est contenue dans la partie lisse de l'hypersurface $\{f = 0\}$ et on utilise alors le théorème de désingularisation d'H.Hironaka [21].

Remarque 4.4 - Soit $\pi : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une application holomorphe d'une variété holomorphe M de dimension n dans $\mathbb{C}^n$ qui factorise la courbe γ, i.e. il existe $\tilde{\gamma} : \mathbb{C},0 \to M,m$ telle que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Si la courbe $\tilde{\gamma}$

n'est pas contenue dans l'ensemble critique $C(\pi)$ de π et s'il existe une application holomorphe $\tilde{F} : \mathbb{C}^{n-1},0 \to M,m$ qui vérifie les conditions 1)-3) du théorème 4.1., relativement à $\pi^*(\omega)$ et $\tilde{\gamma}$, alors $F = \pi \circ \tilde{F}$ véfifie aussi les conditions de 4.1. relativement à ω et γ.

Démonstration du théorème 4.1. - D'après la remarque ci-dessus, par éclatements ponctuels successifs qui désingularisent la courbe γ, nous sommes ramenés au cas où γ est une courbe lisse. Considérons un 2-plan $i : \mathbb{C}^2,0 \to \mathbb{C}^n,0$, transverse à ω, qui contient la courbe γ. Par éclatements successifs de variétés de codimension 2 transverses au 2 plan, nous pouvons réduire ω_o (ou plutôt $\mathcal{F}_{\omega_o}$) en ce sens que nous réduisons ω_o dans l'espace ambiant $\mathbb{C}^n$ en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2}$.

Plus précisément, si $x,y, t_3,\dots,t_n$ désignent des coordonnées telles que $(\mathbb{C}^2,0)$ soit donné par $t_3 = \dots = t_n = 0$, et γ paramétrise l'axe des x, on se ramènera à :

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \sum_{j=3}^{n} t_j(a_j(x,y,t)dx + b_j(x,y,t)dy) + \sum_{j=3}^{n} c_j(x,y,t)dt_j \\ \omega_0 = x^p\tilde{\omega},\ \tilde{\omega} \text{ réduite, } S(\tilde{\omega}) = 0,\ c_j(0) = 0\ ; \\ \gamma(x) = (x,\ 0,\ -,\ 0). \end{cases}$$

Considérons alors l'application :

$\sigma : \mathbb{C}^n,\ 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n,\ 0$

$\sigma(u,\ v,\ z) = (u,\ v,\ u^{p+1}z)$, où $z = (z_3\ ,\ -,\ z_n)$.

Sur le facteur $\mathbb{C}^2 \times 0$, σ est l'identité. Ainsi γ se factorise à travers σ par $\tilde{\gamma}(u) = (u,\ 0,\ -,\ 0)$ qui n'est pas contenu dans l'ensemble critique $C(\sigma) = \{u = 0\}$ de σ. D'autre part $\sigma^*(\omega)$ est divisible par u^p :

$$\sigma^*(\omega) = u^p\bar{\omega}$$

et visiblement la restriction de $\bar{\omega}$ à $\mathbb{C}^2 \times 0$ est réduite, à singularité isolée. Les remarques 4.3 et 4.4 permettent de conclure.

. CHAPITRE III .

FACTEURS INTÉGRANTS ET SYMÉTRIES.

1. Notions de facteur intégrant et de symétrie.

Définition : Un facteur intégrant holomorphe (respectivement méromorphe) de la forme intégrable holomorphe ω est un germe f de fonction holomorphe (respectivement méromorphe) tel que la 1-forme méromorphe $\frac{\omega}{f}$ soit fermée, i.e. :

$$d(\frac{\omega}{f}) = 0 \qquad (1).$$

Remarque : le quotient de deux facteurs intégrants est une intégrale première méromorphe de ω.

Si f est une série formelle (ou un quotient de séries formelles) nous dirons que f est un facteur intégrant formel. Mentionnons de suite, et ceci sera précisé lors de la connexion avec les problèmes de formes normales, que l'existence d'un facteur intégrant formel n'implique pas toujours l'existence d'un facteur intégrant convergent.

En réécrivant (1) sous la forme :

$$f\, d\omega = df \wedge \omega \qquad (2)$$

on établit, lorsque cod $S(\omega) \geq 2$, la :

Proposition 1.1. Les composantes irréductibles des zéros et des pôles de f sont des séparatrices de ω (cod $S(\omega) \geq 2$).

Considérons une forme ω possédant un facteur intégrant f et soit X un champ de vecteur méromorphe solution de l'équation linéaire :

$$\omega(X) = f.$$

Nous avons la :

<u>Proposition 1.2.</u> Le champ X laisse invariant le germe de feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ transversalement, i.e. transporte feuille sur feuille. Plus précisément, nous avons l'identité :

$$(L_X\omega) \wedge \omega = 0$$

où L_X, désigne la dérivée de Lie suivant X.

Le mot <u>transversalement</u> est justifié par le fait que $\omega(X) = f \not\equiv 0$, et donc X n'est tangent à $\mathcal{F}_\omega$ que le long des séparatrices $(f = 0)$.

<u>Démonstration</u> : La condition d'intégrabilité :

$$\omega \wedge d\omega = 0$$

conduit à l'identité :

$$\omega(X).d\omega + (i_X\, d\omega) \wedge \omega = 0.$$

Puisque d'après (2) :

$$\omega(X).d\omega = d(\omega(X)) \wedge \omega,$$

il vient :

$$d(\omega(X)) \wedge \omega + i_X\, d\omega \wedge \omega = 0\ ;$$

soit encore :

$$L_X\, \omega \wedge \omega = 0.$$

Q.E.D.

Ceci nous conduit naturellement à introduire la :

<u>Définition</u> : Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Une <u>structure transverse ou symétrie holomorphe (respectivement méromorphe</u>) est la donnée d'un germe de champ de vecteurs X holomorphe (respectivement méromorphe) satisfaisant les conditions suivantes :

$$\omega(X) \not\equiv 0, \quad L_X\omega \wedge \omega = 0.$$

Notons qu'une forme ω peut posséder un facteur intégrant holomorphe f sans posséder pour autant de symétrie holomorphe, mais seulement méromorphe : il n'est pas sûr en effet que f appartienne à l'idéal des composantes de ω. C'est le cas en général pour une forme du type $f_1 \ldots f_p \, \Sigma \, \lambda_i \, \frac{df_i}{f_i}$ (ici $f = f_1 \ldots f_p$) lorsque les f_i ne sont pas des coordonnées.

En relisant la preuve de 1.2 à reculons on établit facilement la :

<u>Proposition 1.3.</u> Si X est une symétrie de ω, $f = \omega(X)$ est un facteur intégrant de ω.

Justifions maintenant l'appellation "symétrie" celle de structure transverse étant naturelle. Considérons le sous groupe g_ω des germes de difféomorphismes, disons holomorphes, qui laissent invariant le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$:

$$g_\omega = \{\phi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n,0) \, , \; \phi^*\omega \wedge \omega = 0\} \, .$$

g_ω n'est jamais réduit à l'identité puisqu'il contient tous les groupes à un paramètre $\phi_{Y,t}$ des champs Y annulés par ω : $\omega(Y) = 0$.

Ceci fait d'ailleurs de g_ω un groupe continu. Si X est une structure transverse holomorphe de ω, le flot $\phi_{X,t}$ de X est dans g_ω et les seules feuilles L qui sont laissées fixes par $\phi_{X,t}$, i.e. $\phi_{X,t}(L) \subset L$, sont les séparatrices holomorphes d'équations $\omega(X) = 0$. Notamment deux feuilles "voisines" L et L' sont analytiquement difféomorphes via $\phi_{X,t}$: $L = \phi_{X,t_o} L'$.

Pour illustrer ceci, énonçons la :

<u>Proposition 1.4.</u> Soit ω_ν une forme homogène intégrable sur $\mathbb{C}^n$ non dicritique, i.e. :

$$\omega_\nu = \Sigma \, a_i(x) \, dx_i \, ,$$

où les a_i sont des polynômes homogènes de degrés ν tels que $\Sigma \, x_i a_i(x) \not\equiv 0$. Alors le <u>champ radial</u> $R = \Sigma \, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est une symétrie pour ω_ν et donc $\omega_\nu(R)$ est un facteur intégrant de ω_ν.

<u>Démonstration</u> : Le flot $\varphi_t(x) = e^t.x$ du champ R satisfait à :

$$\varphi_t^*. \, \omega_\nu = \Sigma \, a_i(e^t.x) \, e^t.dx_i = e^{(\nu+1)t}.\omega_\nu \, ,$$

si bien que :

$$L_R\, \omega_\nu = (\nu + 1) .\, \omega_\nu .$$

Q.E.D.

2. Existence d'intégrales premières multiformes en présence de symétries.

Intuitivement, en présence d'une symétrie l'espace des feuilles est "paramétré" par le temps du flot de X. Il n'est donc pas étonnant que l'on puisse exhiber des intégrales premières i.e. des fonctions F telles que :

$$\omega \wedge dF = 0 \;;$$

Si F est multiforme, cette égalité devant être vérifiée pour chacune de ses déterminations.

Théorème 2.1 : Soit ω un germe de forme intégrable holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ possédant un facteur intégrant méromorphe :

$$h = \frac{f}{g} = \frac{f_1^{m_1} \ldots f_p^{m_p}}{g_1^{n_1} \ldots g_q^{n_q}} \quad ,$$

où les f_i, g_j sont irréductibles étrangers ; m_i, $n_j \in \mathbb{N}$. Alors ω possède une intégrale première multiforme du type suivant :

$$F = e^{\frac{\alpha}{f_1^{m_1-1} \ldots f_p^{m_p-1}}} .\, f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$$

où les $\lambda_j \in \mathbb{C}$ se calculent en intégrant $\frac{\omega}{h}$ sur de petits cercles γ_j autour des hypersurfaces $f_j = 0$:

$$\lambda_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \frac{\omega}{h} \; ,$$

et α est un germe de fonction holomorphe. En d'autres termes, si on passe au revêtement universel

$$\rho : Z \to \mathbb{C}^n - \bigcup (f_j = 0)$$

de $\mathbb{C}^n$ moins les séparatrices $(f_j = 0)$, la forme $\rho^*\omega$ possède alors sur

Z l'intégrale première holomorphe usuelle F : $\rho^*\omega \wedge dF = 0$, la croissance de cette intégrale à l'infini étant liée à la nullité ou non de α.

Démonstration du théorème 2.1 : Considérons la forme fermée méromorphe :

$$\Omega = \frac{\omega}{h} - \Sigma\, \lambda_j \frac{df_j}{f_j}\,,$$

où les λ_j sont définis comme dans l'énoncé par :

$$\lambda_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \frac{\omega}{h}\,.$$

Si les cycles γ_j autour des hypersurfaces $f_j = 0$ sont choisis assez petits, ils engendrent $H_1(\mathbb{C}^n - \underset{j}{U}(f_j = 0))$ [22] et les λ_j sont alors définis sans ambiguité. La forme Ω est alors exacte dans $\mathbb{C}^n - \underset{j}{U}(f_j = 0)$, i.e.

$$\Omega = d\,H,$$

où H est une fonction holomorphe (uniforme) sur $\mathbb{C}^n - \underset{j}{U}(f_j = 0)$ obtenue de façon usuelle par intégration de Ω sur les chemins. Nous allons montrer que H s'étend en une fonction méromorphe à l'origine 0 de $\mathbb{C}^n$. Soient $S(\omega)$ le lieu singulier de ω et $X = U(f_j = 0)$; pour obtenir le résultat il suffit, en vertu du théorème de Lévy, de prouver que H s'étend en une fonction méromorphe en tout point $a \in X_{lisse} - S(\omega)$; soit donc a un tel point, disons $a \in (f_1 = 0)$; puisque $a \notin S(\omega)$ il existe une submersion V en a et des unités U et α telles que :

$$\omega,a = U\, dV,$$

$$f_1,a = \alpha\,.\,V.$$

Nous avons alors :

$$\Omega,a = \frac{\omega,a}{h,a} - \Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i} = \frac{U}{h,a}\, dV - \Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i}\,.$$

Ce qui s'écrit encore, puisque $f_j(a) \neq 0$ pour $j > 1$:

$$\Omega,a = W_1 \frac{dV}{V^{n_1}} - \lambda_1 \frac{dV}{V} + dW_2\,,$$

où W_1 et W_2 sont holomorphes et a et $W_1(a) \neq 0$.

Puisque Ω est fermée, W_1 est visiblement une fonction de V :

$$W_1 = \Sigma\, a_i\, V^i, \quad a_o \neq 0.$$

Sur un petit voisinage B de a privé de l'hypersurface V = 0, nous avons :

$$\Omega = \Sigma\, a_i\, V^i \frac{dV}{V^{n_1}} - \lambda_1 \frac{dV}{V} + dW_2 = dH.$$

Comme H est uniforme $a_{n_1-1} = \lambda_1$ et H s'étend sans ambiguité à V = 0 par la formule :

$$H = W_2 + \sum_{i \neq n_1 - 1} \frac{a_i}{i+1-n_1} V^{i+1-n_1}, \quad a_o \neq 0$$

en une fonction méromorphe au voisinage de a, possédant un pôle d'ordre n_1-1 sur $\{V = 0\}_{,a} = \{f_1 = 0\}_{,a}$. Ainsi H se prolonge en une fonction méromorphe à pôles d'ordre n_j-1 sur les hypersurfaces $\{f_j = 0\}$. Elle s'écrit

$$H = \frac{\alpha}{f_1^{n_1-1} \ldots f_p^{n_p-1}},$$

où $\alpha \in \mathcal{O}_n$ et les f_j ne divisent pas α.

<u>Proposition 2.2</u> : Si ω possède une intégrale première multiforme :

$$F = e^{\frac{\alpha}{f_1^{m_1-1} \ldots\ldots f_p^{m_p-1}}} \cdot f_1^{\lambda_1} \ldots . f_p^{\lambda_p},$$

alors ω possède un facteur intégrant.

<u>Démonstration</u> : On a l'égalité :

$$\omega \wedge \left[\Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d \frac{\alpha}{f_1^{m_1-1} \ldots f_p^{m_p-1}} \right] = 0.$$

La forme ω_1 :

$$\omega_1 = f_1^{m_1} \ldots f_p^{m_p} \left(\Sigma\, \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d \frac{\alpha}{f_1^{m_1-1} \ldots f_p^{m_p-1}} \right)$$

est visiblement holomorphe ; du lemme de division de K. Saïto (I,1) résulte l'existence d'un germe $g \in \mathcal{O}_n$ tel que $\omega_1 = g.\ \omega$.

Le germe de fonction méromorphe $h = \dfrac{f_1^{m_1}\dots f_p^{m_p}}{g}$ est alors un facteur intégrant de ω. Q.E.D.

Suivant la nature du facteur intégrant on peut préciser 2.1. :

<u>Corollaire 2.3.</u> a) Si le numérateur du facteur intégrant est irréductible, ω possède une intégrale première holomorphe usuelle.

b) Si le numérateur est réduit, ω possède une intégrale première multiforme du type $f_1^{\lambda_1}\dots\ f_p^{\lambda_p}$.

c) Si le numérateur n'est pas réduit alors α n'est pas identiquement nul.

<u>Démonstration</u> : exercice.

3. <u>Les formes modèles $\omega_{m,\lambda}$</u> ; <u>connexion avec des feuilletages donnés par des actions linéaires abéliennes</u>. Lorsqu'une forme ω possède un facteur intégrant f, nous venons de voir que ω possède l'intégrale première $e^{\frac{\alpha}{f_1^{m_1-1}\dots f_p^{m_p-1}}} . f_1^{\lambda_1}\ \dots\ f_p^{\lambda_p}$, avec $f = \dfrac{f_1^{m_1}\dots\ f_p^{m_p}}{g_1^{n_1}\dots\ g_q^{n_q}}$.

Considérons l'application $F = (f_1,\dots,f_p, \alpha)$:

$$F : \mathbb{C}^n,0 \longrightarrow \mathbb{C}^{p+1},0\ ,$$

et la forme intégrable polynomiale sur $\mathbb{C}^{p+1}$:

$$\omega_{m,\lambda} = x_1\ \dots\ x_p.x_{p+1}\left[\frac{dx_{p+1}}{x_{p+1}} - \sum_{j=1}^{p}(m_j-1)\frac{dx_j}{x_j} + x_1^{m_1}\dots x_p^{m_p}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{dx_i}{x_i}\right]$$

où les x_i sont des coordonnées de $\mathbb{C}^{p+1},0$. Visiblement

$$F^*\ \omega_{m,\lambda}\ \wedge\ \omega = 0.$$

Lorsque l'application F est transverse à la forme $\omega_{m,\lambda}$ i.e. $S(F^*_{\omega,\lambda}) = F^{-1}\ S(\omega_{m,\lambda})$ et codim $S(F^*\omega_{m,\lambda}) = \inf\ (\text{codim } S(\omega_{m,\lambda}),n)$, alors le facteur intégrant f est holomorphe. En effet, si F est transverse à $\omega_{m,\lambda}$, alors cod $S(F^*\omega_{m,\lambda}) \geqslant 2$; de plus si le facteur intégrant f s'écrit :

$$f = f_1^{m_1} \dots f_p^{m_p} / g ,$$

nous avons clairement :

$$g.\ \omega = F^* \omega_{m,\lambda} .$$

De sorte que g est nécessairement une unité.

La distinction entre facteur intégrant holomorphe et méromorphe apparait donc naturellement : c'est une condition de transversalité. Nous obtenons ainsi le :

Théorème 3.1. Si la forme intégrable ω possède un facteur intégrant holomorphe $f = f_1^{m_1} \dots f_p^{m_p}$, il existe une application $F : \mathbb{C}^n,0 \to \mathbb{C}^{p+1},0$ et une unité U telles que $\omega = U.F^* \omega_{m,\lambda}$, où $\omega_{m,\lambda}$ est une forme modèle sur $\mathbb{C}^{p+1}$.

Notamment si ω est une forme homogène non dicritique sur $\mathbb{C}^n$ de degré $\nu \leqslant n-1$, ou bien ω est conjuguée à une forme $\omega_{m,\lambda}$ sur $\mathbb{C}^n$, ou bien il existe un entier $p < n$ et une application polynomiale $F : \mathbb{C}^n,0 \to \mathbb{C}^p,0$ telle que $\omega = F^* \omega_{m,\lambda}$, où cette fois $\omega_{m,\lambda}$ vit sur $\mathbb{C}^p$.

Les seules formes homogènes non dicritiques sans réduction possible de variables sont donc les formes $\omega_{m,\lambda}$.

Exercice : Toute forme homogène intégrable non dicritique de degré deux sur $\mathbb{C}^n$ est linéairement conjuguée à l'un des modèles suivant :

$$\Omega_1 = x_1x_2x_3 \left[\lambda_1 \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3}\right], \quad \lambda_i \in \mathbb{C} ;$$

$$\Omega_2 = x_1x_2^2\left[dx_3 - x_3 \frac{dx_2}{x_2} + x_2\left[\lambda_1 \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2}\right]\right] \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{C};$$

$$\Omega_3 = x_1^3 \left[\frac{dx_1}{x_1} + d \frac{\alpha}{x_1^2}\right]$$ où α est un polynôme de degré deux non divisible par x_1;

$$\Omega_4 = x_1 \varphi \left[\frac{dx_1}{x_1} + \lambda\frac{d\varphi}{\varphi}\right]$$ où φ est un polynôme irréductible homogène

de degré deux (premier avec x_1) , $\lambda \in \mathbb{C}$,

$\Omega_5 = d\psi$ où ψ est un polynôme irréductible de degré 3.

Nous allons maintenant essayer de décrire les formes $\omega_{m,\lambda}$. Remarquons dans un premier temps que l'on peut supposer satisfaite la condition suivante : les couples (m_j, λ_j) et (m_i, λ_i) sont distincts pour $i \neq j$. Si ce n'était pas le cas, par exemple $(m_1, \lambda_1) = (m_2, \lambda_2)$, en posant $h = f_1.f_2$ on obtiendrait :

$$e^{\overline{\frac{\alpha}{f_1^{m_1-1} f_2^{m_2-1} \cdots f_p^{m_p-1}}}} . f_1^{\lambda_2} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} \cdots f_p^{\lambda_p} = e^{\overline{\frac{\alpha}{h^{m_2-1} f_3^{m_3-1} \cdots f_p^{m_p-1}}}} . h^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} \cdots f_p^{\lambda_p}$$

ce qui signifie qu'un pull-back nous ramène à l'hypothèse anoncée. Nous désignons par $|m|$ la longueur Σm_i du multi-indice $m = (m_1, \ldots, m_p)$. Il est nécessaire de distinguer les trois cas suivants :

<u>3.a. : $|m| = p$</u>.

Ici tous les m_i valent 1, donc les λ_i sont distincts deux à deux ; dans ce cas les formes modèles $\omega_{1,\ldots,1,\lambda}$ s'écrivent :

$$\omega_{1,\ldots,1,\lambda} = x_1 \ldots x_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} + x_1 \ldots x_p \, dx_{p+1} .$$

Le lecteur se convaincra aisément que la forme $\omega_{1,\ldots,1,\lambda}$ est conjuguée à la forme :

$$\bar{\omega}_{p-1} = x_1 \ldots x_p \, \Sigma \, \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} .$$

Nous retiendrons que la forme $\bar{\omega}_{p-1}$ (et donc $\omega_{1\ldots 1,\lambda}$ après isomorphisme) est obtenue de la façon suivante :

$$\bar{\omega}_{p-1} = i_{A_1 \ldots A_{p-1}} (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p) ,$$

où les A_i sont n-1 champs de vecteurs diagonaux indépendants :

$$A_i = \Sigma \, A_i^j \, x_j \frac{\partial}{\partial x_j} , \; A_i^j \in \mathbb{C} , \; \Sigma \, \lambda_j \, A_i^j = 0.$$

Remarquons que puisque les A_i commutent, le feuilletage $\mathcal{F}_{\bar{\omega}_{p-1}}$ (et donc aussi $\mathcal{F}_{\omega_{1,\ldots,\lambda}}$) est obtenu par une action linéaire de $\mathbb{C}^{p-1}$

sur $\mathbb{C}^p$: les feuilles de $\mathcal{F}_{\overline{\omega}_{p-1}}$ sont les orbites suivant cette action.

La topologie de ces feuilletages singuliers a été décrite indépendemment par B. Klarès [24] et Camacho-A.Lins Neto [5] :

Théorème 3.2 (C. Camacho, A. Lins et B. Klarès) : Une condition nécessaire et suffisante pour que les formes

$$\Omega_1 = x_1 \ldots x_p \, \Sigma \, \lambda_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad \text{où } \lambda_i \neq 0 \text{ et } \mathbb{R}\lambda_i \neq \mathbb{R}\lambda_j,$$

$$\Omega_2 = x_1 \ldots x_p \, \Sigma \, \mu_i \frac{dx_i}{x_i}$$

soient topologiquement conjuguées est qu'il existe, après permutation éventuelle des indices, $g \in G\ell(2, \mathbb{R})$ tel que :

$$g(\lambda_j) = \mu_j \,, \quad j = 1,\ldots,p.$$

3.b. : $|m| = p+1$

Ici tous les indices m_i valent 1 sauf l'un d'entre eux, disons m_p, qui vaut deux ; on a donc $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j \neq p+1$. Ainsi

$$\omega_{1,\ldots,1,2,\lambda} = x_1 \ldots x_p \, x_{p+1} \left[\frac{dx_{p+1}}{x_{p+1}} - \frac{dx_p}{x_p}\right] + x_1 \ldots x_p^2 \, \Sigma \lambda_i \frac{dx_i}{x_i}$$

$$= x_1 \ldots x_p \left[dx_{p+1} - x_{p+1} \frac{dx_p}{x_p} + x_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_j \frac{dx_i}{x_i}\right]$$

qui est une forme homogène de degré p. Le feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_{1,\ldots,1,2,\lambda}}$ est encore obtenu via une action commutative de $\mathbb{C}^p$ sur $\mathbb{C}^{p+1}$ mais celle-ci n'est pas diagonalisable ; en effet $\omega_{1\ldots1,2,\lambda}$ annule les champs linéaires X_j commutants :

$$X_j = \lambda_j \, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1 \, x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \,, \quad j = 2,\ldots,p-1 \,,$$

$$X_p = x_p \frac{\partial}{\partial x_p} - (\lambda_p \, x_p - x_{p+1}) \frac{\partial}{\partial x_{p+1}} \,,$$

$$x_{p+1} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1 \, x_p \frac{\partial}{\partial x_{p+1}} \,,$$

qui correspondent à une algèbre de Lie de matrices dont les éléments sont du type suivant :

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & \mathcal{O} & \\ & & a_{p-2} & & \\ & \mathcal{O} & & a_p & \varepsilon \\ & & & 0 & a_p \end{bmatrix}$$

C'est donc la présence d'éléments nilpotents dans la décomposition de Jordan qui fait apparaitre le facteur en exponentielle dans l'intégrale première.

En fait l'algèbre de Lie peut être engendrée par n-1 matrices :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & & & & \\ & \ddots & & \mathcal{O} & \\ & & \lambda_{p-2}^1 & & \\ & \mathcal{O} & & \lambda^1 & 1 \\ & & & 0 & \lambda^1 \end{bmatrix} ; \qquad \underset{i=2,\dots,n-1}{A_i} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{i_1} & & & & \\ & \ddots & & \mathcal{O} & \\ & & \lambda_{p-2}^i & & \\ & \mathcal{O} & & \lambda^i & 0 \\ & & & 0 & \lambda^i \end{bmatrix}$$

On peut alors approcher la matrice A_1 par les matrices

$$A_{1,t} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & & & & \\ & \ddots & & \mathcal{O} & \\ & & \lambda_{p-2}^1 & & \\ & \mathcal{O} & & \lambda^1 & 1 \\ & & & t & \lambda^1 \end{bmatrix}$$

en gardant la commutation avec les autres matrices A_i :

$$[A_{1,t}, A_i] = 0.$$

De sorte que les formes $\omega_{1,\ldots,1,2,\lambda}$ se laissent approcher par les formes du type $\omega_{1,\ldots,1,\lambda}$, ou plus précisément par les formes $\bar{\omega}_{p-1}$ décrites précédemment dans 4.a. Nous reviendrons d'ailleurs à de tels problèmes d'approximations ultérieurement.

3.c : $|m| > p+1$.

Dans ce cas le premier jet non nul de :

$$\omega_{m,\lambda} = x_1\ldots x_p.x_{p+1}\left[\frac{dx_{p+1}}{x_{p+1}} - \sum_{j=1}^{p} (m_j-1)\frac{dx_j}{x_j}\right] + x_1^{m_1}\ldots x_p^{m_p}\left(\Sigma\, \lambda_i \frac{dx_i}{x_i}\right)$$

est :

$$x_1\ldots x_p.x_{p+1}\ \frac{dx_{p+1}}{x_{p+1}} - \sum_{j=1}^{p} (m_j-1)\frac{dx_j}{x_j}\ ),$$

qui possède l'intégrale première méromorphe $\dfrac{x_1^{m_1-1}\ldots x_p^{m_p-1}}{x_{p+1}}$.

L'action commutative de $\mathbb{C}^p$ sous jacente à $\omega_{m,\lambda}$ est engendrée par les flots des champs commutants suivants :

$$X_j = ((m_j-1)\ x_{p+1} - \lambda_i\ x_1^{m_1-1}\ldots x_p^{m_p-1})\ \frac{\partial}{\partial x_{p+1}} + x_i\ \frac{\partial}{\partial x_i}\ .$$

Il y a ici encore des termes nilpotents dans la décomposition de Jordan (au sens des formes normales) des champs X_j : les termes $x_1^{m_1-1}\ldots x_p^{m_p-1}\ \dfrac{\partial}{\partial x_{p+1}}$ tombent en effet dans les résonnances des parties linéaires $j^1\, X_j$ (en fait dans les résonnances de l'algèbre des j^1X_j).

Comme conséquence nous avons le :

Théorème 3.3. Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable possédant un facteur intégrant. Le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ est le relevé par une application analytique d'un feuilletage singulier obtenu par une action commutative d'un $\mathbb{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{C}^n$.

4. Quelques remarques et commentaires.

4.a. Dans le cas général on ne sait pas, en dimension autre que deux, si toute forme intégrable ω possède une désingularisation, i.e. un morphisme

$$\pi : X \to \mathbb{C}^n,0$$

d'espaces analytiques qui soit un isomorphisme en dehors d'un diviseur $\pi^{-1}(S)$ à croisements normaux, cod $S \geqslant 2$, et tel que les singularités du feuilletage relevé $\mathcal{F}_{\pi^*\omega}$ soient "irréductibles" et décrites par une liste de modèles simples. Ceci est possible lorsque le 1er jet non nul de ω est assez générique, auquel cas ω se désingularise au bout d'un éclatement(de point), cette situation sera étudiée en détail au ch. II de la 4ème partie ; les singularités possibles de $E^*(\omega)$ en un point étant décrites par la famille $\omega_{m,\lambda}$. On peut conjecturer que ceci est général : les singularités irréductibles seraient décrites par des actions de groupes et des pull-back via des applications monomiales.

En présence de facteur intégrant il y a possibilité d'obtenir une telle réduction, en désingularisant via Hironaka [2] l'application

$$(f_1,\ldots,f_p,\alpha) : \mathbb{C}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^{p+1}, 0$$

où les f_i et α sont donnés par l'écriture de l'intégrale générale. Les modèles singuliers aux points du diviseur exceptionnel sont alors précisément les formes $\omega_{m,\lambda}$.

4.b. La donnée d'un facteur intégrant f (uniforme) a permis de trouver une nouvelle classe d'intégrales premières. On peut imaginer d'autres classes de facteurs intégrants : par exemple du type $f_1^{\alpha_1}\ldots f_p^{\alpha_p}$. De tels objets apparaissent dans le cas homogène dicritique en dimension 3 pour des formes de degrés ν ayant $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)\binom{\nu+n}{n-1}+1$ séparatrices algèbriques (c.f. [23], page 117). A cette nouvelle classe de facteurs intégrants correspond un certain type d'intégrale première. Il serait intéressant de savoir si celles-ci possèdent une écriture sympatique.

5. Extension des facteurs intégrants holomorphes, d'après [9].

Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^{n+p}$ de forme holomorphe intégrable ; rappelons qu'un plongement $i:\mathbb{C}^n,0 \to \mathbb{C}^{n+p},0$ est dit transverse à ω si $S(i^*(\omega)) = i^{-1}(S(\omega))$ et codim $S(i^*(\omega))$=codim $S(\omega)$ et que l'existence et la généricité de tels plongements est prouvée dans [32].

Lorsque nous établierons des théorèmes d'existence d'intégrales premières multiformes, un pas important consistera à se ramener à la dimension 2. Ceci est possible grâce au

Théorème 5.1. : Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^{n+p}$ et $i : \mathbb{C}^n,0 \to C^{n+p},0$ un plongement transverse à ω , $n \geqslant 2$. Si $\omega_0 = i^*\omega$ possède un facteur intégrant holomorphe f_0, $d(\frac{\omega_0}{f_0}) = 0$, alors ω possède un facteur intégrant holomorphe f tel que $f \circ i = f_0$.

Démonstration : Identifions le plongement i à l'inclusion canonique de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{n+p} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$; soient U et V des ouverts de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^p$ respectivement tels que l'on puisse définir des représentants de ω_0 et f_0 sur U et de ω sur $U \times V$; plaçons nous en un point m de $U - S(\omega_0)$. Puisque $\omega,_m$ est non singulière, il existe un germe de submersion X en m et une unité W tels que :

$$\omega,_m = W\, d X.$$

Nous avons alors :

$$\omega_{0,m} = W_0\, d X_0,$$

où W_0 et X_0 sont les restrictions à U de W et X :

$$W_0 = W \circ i, \quad X_0 = X \circ i.$$

Notons, puisque $\omega_{0,m}$ est non singulière, que X_0 est une submersion en m, et toute intégrale première de $\omega_{0,m}$ est une fonction de X_0.

En particulier $\frac{f_0}{W_0},m$ (quotient de deux facteurs intégrants) est une intégrale première holomorphe de $\omega_{0,m}$, et il existe donc une série convergente $\ell \in \mathcal{O}_1$ telle que :

$$\frac{f_0}{W_0},m = \ell(X_0).$$

Considérons le germe en m de fonction holomorphe :

$$f,m = W.\ell(X).$$

Il est immédiat que $f,_m$ est un facteur intégrant holomorphe de ω qui étend $f_{0,m}$; de plus c'est le seul : si $g_{,m}$ était en effet un autre facteur intégrant de ω,m étendant $f_{0,m}$, le quotient $\frac{f,m}{g,m}$ serait une intégrale première (méromorphe) de $\omega,_m$ constante en restriction à $\mathbb{C}^n \times \{0\}$, donc constante.

Munissons maintenant le produit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ de coordonnées (x,t), $x \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^p$; en tout point $m \in (U-S(\omega_0)) \times \{0\}$, il existe des germes de fonctions holomorphes $f_{I,m}$, $I \in \mathbb{N}^p$ tels que :

$$f,_m(x) = \sum_{I \in \mathbb{N}^p} f_{I,m}(x).t^I \ , \quad f_{0,m}(x) = f_0(x),_m.$$

L'unicité des $f_{I,m}$ implique que les $f_{I,m}$ se recollent en des fonctions holomorphes f_I définies sur $U - S(\omega_0)$; comme $S(\omega_0)$ est analytique de codimension 2 les f_I s'étendent en des fonctions holomorphes sur U. La série :

$$f = \sum_{I \in \mathbb{N}^p} f_I(x)\ t^I$$

qui est a priori une série formelle, satisfait évidemment à :

$$d(\frac{\omega}{f}) = 0$$

$$\text{et} \qquad f \circ i = f_0.$$

Il nous reste à nous assurer de sa convergence. Elle découle du :

<u>Théorème 5.2</u> : Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ et f un facteur intégrant formel de ω. Alors f converge dès qu'il existe une courbe $\gamma : \mathbb{C},0 \to \mathbb{C}^n,0$, <u>transverse à ω</u>, i.e. $\gamma^*(\omega) \not\equiv 0$, sur laquelle f est convergente : $f \circ \gamma \in \mathcal{O}_1$.

Démonstration. Nous adaptons aux facteurs intégrants la démonstration utilisée dans [32] p.494 pour les intégrales premières.

Dans un premier temps examinons le cas où le feuilletage $\mathfrak{F}_\omega$ est non singulier : $\omega = g\,dx$, $g \in \mathcal{O}_n$, et γ une courbe transverse au n-1 plan $x = 0$. On choisit le système de coordonnées $x, y_1,\dots,y_n$, pour que $\gamma(t) = (t^p, 0,\dots,0)$. Puisque g est aussi un facteur intégrant le quotient f/g est une fonction de x :

$$f = g\,\ell(x), \qquad \ell \in \hat{\mathcal{O}}_1.$$

Mais, par hypothèse, $f \circ \gamma(t) = g(t^p, 0,\dots,0)\,\ell(t^p)$ converge ; comme g est convergente il en est de même de $\ell(t^p)$ et donc de $\ell(t)$.

Nous allons voir que par éclatements ponctuels successifs, on peut se ramener à ce cas. Par ce procédé nous désingulariserons d'abord la courbe γ, que nous supposons désormais paramétrer l'axe des x. Ensuite par la série de k éclatements :

$$E_k(x,t) = (x,\ x^k t), \qquad t = (t_2,\dots,t_n),$$

nous "désingularisons" le germe en 0 du feuilletage : en effet, soit μ le plus petit entier r tel que x^r divise le germe en 0 de $E_k^*(\omega)$. Notons

$$\omega = a\,dx + b_2\,dy_2 + \dots + b_n\,dy_n\ ,$$

$$\tilde{\omega} = \frac{E_k^*(\omega)}{x^\mu} = \Big(\frac{a(x,x^k t)}{x^\mu} + \sum_{j=2}^{n} t_j A_j\Big)\,dx + \sum_j B_j\,dt_j.$$

Si $\tilde{\omega}$ est encore singulière en 0, il est clair que $\mu \geqslant k$. Mais ceci ne peut se produire pour k arbitrairement grand que si $a(x,0)$ est identiquement nul, ce qui est exclu car $\gamma^*(\omega) = a(x,0)\,dx \not\equiv 0$.

Après cette réduction, le théorème découle immédiatement du fait qu'une série formelle $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ converge dès que son éclaté $f \circ E, t_o$ au point t_o converge, où t_o est un point de l'espace projectif $\mathbb{P}\mathbb{C}\,(n-1)$.

En fait le résultat qui sera fondamental dans la suite est le corollaire suivant :

Corollaire 5.3.: Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^{n+p}$ et $i : \mathbb{C}^n_{,0} \to \mathbb{C}^{n+p},0$ un plongement transverse à ω, $n \geq 2$. Si $\omega_o = i^*(\omega)$ possède une intégrale première multiforme $f_1^{\lambda_1} \ldots f_q^{\lambda_q}$, à exposants $\mathbb{N}$-indépendants (les f_j étant réduits et sans branches communes), alors il en est de même pour ω.

Démonstration : Supposons que le lieu singulier de $\Omega = f_1 \ldots f_q \; \Sigma \; \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$ est de codimension ≥ 2. Il résulte alors du théorème de division que $\omega = U\Omega$, $U(0) \neq 0$ et $f = f_1 \ldots f_p U^{-1}$ est un facteur intégrant holomorphe réduit de ω_o. Par le théorème 5.1., f s'étend en un facteur intégrant $F \in \mathcal{O}_{n+p}$ de ω, qui est nécessairement réduit. D'après le théorème 2.1., ω possède aussi une intégrale première multiforme du type $F_1^{\lambda'_1} \ldots F_{q'}^{\lambda'_{q'}}$. Il est de plus facile de se convaincre que si les f_i sont irréductibles alors $q' = q$ et $\lambda'_i = \lambda_i$ (à une permutation près des indices).

Assurons nous maintenant que l'hypothèse de $\mathbb{N}$-indépendance des exposants λ_j implique que cod $S(\Omega) \geq 2$. Pour cela il suffit de vérifier l'inclusion

$$S(\Omega) \subset \bigcup_i (f_i = 0)$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi: il existerait un chemin analytique $t \to \gamma(t)$ contenu dans $S(\Omega)$, notamment $\gamma^*(\Omega) = 0$, et n'annulant pas les f_j. Posons

$$f_j \circ \gamma(t) = t^{p_j} u_j(t) \quad , \; p_j \in \mathbb{N}$$

où les u_j sont des unités, $u_j(0) \neq 0$. La condition $\gamma^*(\Omega) = 0$ conduit alors à l'identité :

$$(\Sigma \quad p_j \; \lambda_j) \; \frac{dt}{t} \; + \Sigma \; \lambda_j \; d(\mathrm{Log}\; u_j) \equiv 0$$

qui implique la relation $\Sigma \; p_j \; \lambda_j = 0$; ce qui est exclu.

Le corollaire 5.3. généralise le théorème d'extension des intégrales premières usuelles de [32], mais l'idée de la démonstration de [32] ne semble pas s'appliquer ici. Dans [9] en s'appuyant sur 5.1. on ébauche une théorie des déformations des formes intégrables, le problème de la déformation universelle étant résolu en présence de facteurs intégrants. Cette notion de déformation universelle ne coïncide pas avec la notion usuelle utilisée pour les fonctions ; on trouvera un point de vue plus proche de celui-ci dans divers préprints de T. Suwa [42] à [45].

deuxième partie

recollement d'intégrales premières multiformes

Le but de cette partie est de décrire l'obstruction au recollement d'intégrales premières multiformes (en fait celles dont l'espace des déterminations est de dimension 1) données localement le long d'une séparatrice. En dimension deux, les raisonnements "par récurrence sur le nombre d'éclatements" nous conduirons souvent à ce type de situation, la séparatrice considérée ici étant l'espace projectif, l'existence d'intégrales premières en chaque point du cône tangent étant assurée par l'hypothèse de récurrence. Avant d'aborder cette étude nous nous bornerons dans un premier chapitre au cas où le cône tangent est sans multiplicité. Sous des hypothèses génériques il existera toujours localement des intégrales premières et l'obstruction au recollement apparaîtra dans la possibilité - ou non, de linéariser le groupe H_ω d'holonomie projective de la forme ω. Dans le cas général il ne suffit plus de considérer H_ω, qui ne rend compte, après réduction complète de ω, que du feuilletage au voisinage d'une branche du diviseur exceptionnel : le premier espace projectif apparu dans le processus de réduction. On s'en tirera en introduisant un groupe plus "gros" que H_ω, le groupe d'invariance des intégrales premières multiformes locales.

. CHAPITRE I .

ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER.

1. Formes à cône tangent générique. Considérons un germe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe d'ordre ν, $\omega = adx + bdy$ dont le jet d'ordre ν

$$\omega_\nu = a_\nu dx + b_\nu dy$$

est "générique", dans un sens que nous préciserons au cours du texte. Tout d'abord exigeons que le cône tangent C_ω de ω soit constitué de $\nu + 1$ points distincts. Ainsi $P_{\nu+1}(x,y) = xa_\nu + yb_\nu = 0$ est l'équation homogène de C_ω (qui est alors égal au cône tangent C_{ω_ν} de ω_ν). Après s'être assuré, quitte à effectuer un changement linéaire de variables, que les axes des x et des y n'appartiennent pas à C_ω, écrivons l'expression de l'éclaté divisé de ω dans la carte (x, t), $t = y/x$:

$$\tilde{\omega} = (P_{\nu+1}(1,t)+x(\ldots))dx + x(b_\nu(1,t)+x(\ldots))dt.$$

Les points $t_1,\ldots,t_{p+1}$ de C_ω annulent $P_{\nu+1}(1,t)$, sans annuler la dérivée $P'_{\nu+1}(1,t)$ et le 1-jet de $\tilde{\omega}$ en t_j s'écrit :

$$(1)\quad j^1_{t_j}\tilde{\omega} = j^1_{t_j}\tilde{\omega}_\nu = P'_{\nu+1}(1,t_j)(t-t_j)dx + x\, b_\nu(1,t_j)dt.$$

Rappelons (partie 1) que ω_ν s'écrit :

$$(2)\qquad \omega_\nu = c.\prod_j (y - t_jx) \sum_j \lambda_j \frac{d(y-t_jx)}{y-t_jx}\ , \qquad c \in \mathbb{C},$$

avec

$$P_{\nu+1} = c.\prod_j (y - t_jx),\quad \lambda_j = \frac{b_\nu(1,t_j)}{P'_{\nu+1}(t_j)}\ ,$$

et

$$(3)\qquad \lambda_1 +\ldots+ \lambda_{p+1} = 1.$$

Nous supposerons que les λ_j ne sont pas réels, ce qui est une condition générique (semi-analytique réelle) sur les polynômes a_ν et b_ν.

Il résulte du théorème classique de Poincaré, qu'en chaque point t_j le germe $\tilde{\omega}, t_j$ de $\tilde{\omega}$ est linéarisable. Ainsi on voit apparaître des variétés invariantes $\tilde{X}_j$, transverses à l'espace projectif (ici l'axe des t). Nous pouvons les considérer comme les éclatés stricts de séparatrices lisses $X_j = \{f_j = 0\} \subset \mathbb{C}^2$, 0 de ω, les f_j étant des submersions. D'après (3) on a :

$$(4) \quad E^*(\sum_j \lambda_j \frac{df_j}{f_j}) = \frac{dx}{x} + \sum_j \lambda_j \frac{d\tilde{f}_j}{\tilde{f}_j} \quad ,$$

où les $\tilde{f}_j$ sont les éclatés divisés $(f_j \circ E)/x$ des f_j, dans la carte (x,t). Au point t_j, $\tilde{f}_j = 0$ est une équation de $\tilde{X}_j$ et les autres facteurs $\tilde{f}_k$, $k \neq j$ sont des unités. Puisque $\tilde{\omega}, t_j$ est <u>linéarisable</u>, il est facile de voir qu'il existe des unités $u_j \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^2, t_j}$,$u_j(t_j) \neq 0$, telles que :

$$(5) \qquad \tilde{\omega}, t_j \wedge (\frac{dx}{x} + \sum \lambda_j \frac{d\tilde{f}_j}{\tilde{f}_j} + \frac{du_j}{u_j}) = 0.$$

D'autre part $\tilde{\omega}, t_j$ n'a visiblement pas d'intégrale première méromorphe ; les u_j sont donc uniques à une constante multiplicative près, mais leurs dérivées logarithmiques $\frac{du_j}{u_j}$ elles, sont uniques.

Nous allons déterminer une intégrale première multiforme de ω, du type $u\, f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, $u(0) = 1$:

$$(6) \qquad \omega \wedge (\sum_j \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + \frac{du}{u}) = 0.$$

Pour cela nous allons recoller les $\frac{du_j}{u_j}$.

On peut voir facilement que chaque u_j se prolonge au voisinage de tout ouvert connexe simplement connexe de $\mathbb{PC}(1)$ qui ne contient d'élément de C_ω que le point t_j. Supposons donc les u_j holomorphes sur des ouverts V'_j qui recouvrent $\mathbb{PC}(1)$ et se coupent au point t_0 de $\mathbb{PC}(1)$ correspondant à la direction de l'axe des x.

<u>Théorème 1.1.</u> - Sous les hypothèses précédentes, ω admet une intégrale première du type $f = uf_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, $u(0) \neq 0$, si et seulement si le groupe d'holonomie H_ω de la feuille $L_\omega = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - C_\omega$ du feuilletage éclaté est <u>linéarisable</u> : dans une coordonnée appropriée z, H_ω est un sous groupe du groupe $G\ell_z(1, \mathbb{C}) = \{z \to az \ / \ a \in \mathbb{C}^*\}$.

<u>Démonstration</u> : Prenons $t_0 = [y = 0]$ comme point de base dans la feuille L_ω et l'éclaté de l'axe des x, $\{t = 0\}$, comme facteur transverse $(\mathbb{C}, t_0)$ à L_ω, pour réaliser le groupe d'holonomie H_ω. Ainsi que nous l'avons décrit au chapitre I, § 6 de la première partie, H_ω est engendré par les difféomorphismes :

$$h_j = \mathcal{H}_\omega(\dot{\gamma}_j),$$

où $\dot{\gamma}_j$ est la classe d'homotopie d'un lacet C^∞ γ_j, d'origine le point $t_0 = 0$ et d'indice 1 par rapport à t_j et 0 par rapport aux autres points de C_ω, dans la carte $(V_1, t = y/x)$ de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$. De plus, on a :

$$h_j(x) = e^{-2i\pi\lambda_j} x + \ldots .$$

Pour chaque j considérons la 1-forme méromorphe donnée par (5) :

$$\Omega_j = \frac{dx}{x} + \Sigma \ \lambda_k \frac{df_k}{f_k} + \frac{du_j}{u_j} .$$

Par construction, l'holonomie h_j s'obtient en intégrant au voisinage du lacet γ_j, "un champ tangent à Ω_j." Il résulte du fait que Ω_j est fermée que sa restriction au facteur transverse $(\mathbb{C}, t_0)$, qui s'écrit :

$$\Omega_j \Big| (\mathbb{C}, t_0) = \frac{dW_j}{W_j} = \frac{dx}{x} + dv_j \ , \quad v_j, W_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}, t_0} \ ,$$

est laissée invariante par l'action de $h_j(x)$. Soit $z = x + \ldots$ une coodonnée dans laquelle H_ω est linéaire. Pour chaque j on a :

$$\begin{cases} h_j(z) = \mu_j z \ , \qquad \mu_j = e^{-2i\pi\lambda_j} \ ; \\ \dfrac{dW_j}{W_j} = \dfrac{dz}{z} + dV_j(z), \quad V_j(z) \in \mathcal{O}_1 \ ; \\ \dfrac{dz}{z} + dV_j(z) = \dfrac{dz}{z} + d(V_j(\mu_j z)) \ ; \end{cases}$$

. On en déduit que $dV_j(z) = dV_j(\mu_j z)$ et, puisque λ_j n'est pas réel :

$$dV_j(z) \equiv 0.$$

Ainsi les formes méromorphes Ω_j coïncident en restriction au facteur $(\mathbb{C}, t_0)$. D'après (5) on a aussi : $\Omega_j \wedge \Omega_k = 0$. On en déduit sans peine que $\Omega_j = \Omega_k$ sur l'intersection de leurs domaines. En particulier les $\frac{du_j}{u_j}$ définissent une forme holomorphe fermée au voisinage de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ qui, par intégration, donne une fonction holomorphe $u \in \mathcal{O}(V)$ sur un voisinage épointé de 0 dans $\mathbb{C}^2$. Par le théorème de Lévy [35], u est holomorphe en 0. Visiblement $u\, f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ vérifie (6).

Nous laissons le soin au lecteur de montrer que H est linéarisable dès qu'il existe une intégrale première du type $u.f_1^{\lambda_1} \ldots . f_p^{\lambda_p}$.

Q.E.D.

. CHAPITRE II .

LE CAS GÉNÉRAL.

1. Généralités sur les fonctions multiformes. Soit U une variété holomorphe et $r : \mathcal{U} \to U$ son revêtement universel. On appelle fonction multiforme sur U toute fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$. Toute 1-forme holomorphe fermée η sur U définit par intégration une fonction multiforme f unique, à une constante près, qui vérifie la relation

$$r^*(\eta) \wedge df = 0.$$

Depuis les travaux de G. REEB [36] de tels feuilletages définis par des 1-formes fermées ont été largement étudiés dans le cas réel, c.f [33], [48], et cette situation est bien connue des spécialistes. Dans les cas qui nous intéressent nous adopterons un point de vue plus spécifique faisant intervenir directement l'holomorphie de f : par prolongement analytique f est entièrement déterminée par l'une de ses déterminations en un point.

Si f est multiforme sur U on appelle déterminations de f en $a \in U$ l'ensemble des germes $f_{,a'} \circ r^{-1}_{a,a'}$ aux points a' de $r^{-1}(a)$, où $r^{-1}_{a,a'}$ est la section de r telle que $r^{-1}_{a,a'}(a) = a'$. Nous désignons par $D(f)_a \subset \mathcal{O}_{U,a}$ l'ensemble des déterminations de f en a et par $V(f)_a$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel de $\mathcal{O}_{U,a}$ engendré par $D(f)_a$. Le groupe d'homotopie $\pi_1(U,a)$ agit sur $D(f)_a$ et donc aussi sur $V(f)_a$ par prolongement analytique :

$$\pi_1(U,a) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\, V(f)_a.$$

Etudions maintenant plus précisément le cas d'une fonction multiforme $f = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, les $f_j \in \mathcal{O}_n$ étant réduits irréductibles. Quitte à réordonner les indices nous supposerons que $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ ne sont pas des entiers positifs et que $\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_p$ le sont, l'égalité p = q étant bien sûr autorisée. Soient U une boule assez petite centrée en 0, X_j l'hypersurface d'équation $f_j = 0$,

U_k les ouverts

$$U_k = U - X_1 \cup \ldots \cup X_k \;, \qquad k = 1, \ldots, p,$$

et $r_k : \mathcal{U}_k \longrightarrow U_k$ leurs revêtements universels. Décomposons f en le produit $f'.f''$ où $f' = f_1^{\lambda_1} \ldots f_q^{\lambda_q}$ est multiforme sur U_q et $f'' = f^{\lambda_{q+1}} \ldots f^{\lambda_p}$ est holomorphe (uniforme sur U). Ainsi f est multiforme sur U_q et Log f' est obtenue par intégration de la forme η, holomorphe sur U_q :

$$\eta = \lambda_1 \frac{df_1}{f_1} + \ldots + \lambda_q \frac{df_q}{f_q} .$$

Il en résulte que si $\gamma : [0,1] \longrightarrow U_q$ est un lacet d'origine a, sa classe d'homotopie $\dot{\gamma} \in \pi_1(U_q \; ; \; a)$ agit sur l'espace des déterminations $V(f)_a$ suivant la formule

$$\dot{\gamma} \; . \; f_0 = e^{2i\pi\lambda} f_0 ,$$

avec

$$2i\pi\lambda = \int_\gamma (\lambda_1 \frac{df_1}{f_1} + \ldots + \lambda_q \frac{df_q}{f_q}) .$$

Ainsi $V(f)_a$ est de dimension 1 ; plus précisément :

<u>Proposition 1.1</u> : Sous les hypothèses précédentes, $D(f)_a$ est le sous groupe multiplicatif de $V(f)_a = \mathbb{C}.f_0$ engendré par

$$f_0 , \; e^{2i\pi\lambda_1} f_0 , \ldots , \; e^{2i\pi\lambda_q} f_0 .$$

L'action de $\pi_1(U_q \; ; \; a)$ est transitive ; c'est de plus un morphisme de groupe.

<u>Démonstration</u> : L'action de $\pi_1(U_q \; ; \; a)$ est visiblement commutative et $\dot{\gamma} \; . \; f_0$ ne dépend que de la classe d'homologie $[\gamma] \in H_1(U_q \; ; \mathbb{Z})$ de γ. Pour prouver la transitivité, il suffit de déterminer q lacets γ_j dans U_q, d'origine a, qui induisent une base $[\gamma_j]$ de $H_1(U_q \; ; \mathbb{Z})$ et tels que

$$\dot{\gamma}_j \; . \; f_0 = e^{2i\pi\lambda_j} f_0 , \quad j = 1, \ldots, q.$$

Pour cela donnons nous des disques assez petits $\overline{D}_j \hookrightarrow U$ transverses à la partie lisse de l'hypersurface $X = X_1 \cup \ldots \cup X_q$ en des points a_j de X_j respectivement, $j = 1, \ldots, q$, et des paramétrisations $\alpha_j : [0,1] \longrightarrow U_q$ du bord C_j de $\overline{D}_j$. Soient β_j des lacets d'origine a, d'extrémité $\alpha_j(0)$, à valeurs dans U_q et notons γ_j le composé

$\beta_j * a_j * \beta_j^{-1}$. Il est clair que

$$\int_{\gamma_j} \eta = \lambda_j \int_{\alpha_j} \frac{df_j}{f_j} = \mp 2i\pi\lambda_j, \; j = 1,\ldots,q.$$

La conclusion résulte alors du résultat suivant bien connu (c.f. [22]): les classes d'homologies des C_j engendrent $H_1(U_q \, ; \, \mathbb{Z})$.

Introduisons maintenant la notion de groupe d'invariance le long d'une séparatrice "uniforme." Dans ce qui suit on supposera que l'inégalité $p > q$ est satisfaite ; c'est toujours possible, quitte à élever f à une puissance complexe convenable, et cela est sans importance pour la suite. Désignons par X l'union des séparatrices :

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_q \cup X_{q+1} \cup \ldots \cup X_p,$$

et fixons un point $a_0 \neq 0$ de X_{lisse} sur une composante X_{j_0}, où $j_0 > q$. Donnons nous un plongement

$$i : \mathbb{C}, 0 \hookrightarrow U_q, x_0$$

transverse à X_{j_0} au point $i(0) = a_0$ et considérons les sous ensembles $D'(f)_{a_0}$ et $V'(f)_{a_0}$ de $\mathcal{O}_1$ constitués respectivement des restrictions, par i, des éléments de $D(f)_{a_0}$ et $V(f)_{a_0}$. Nous appelons groupe d'invariance de f en a_0 le sous groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, formé des difféomorphismes holomorphes de $\mathbb{C},0$ qui laissent $D'(f)_{a_0}$ invariant :

$$H(f \, ; \, a_0) = \{h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0) \; / \; \forall g \in D'(f)_{a_0}, \; g \circ h \in D'(f)_{a_0}\}.$$

Il est facile de voir, par transport holonome , qu'à un automorphisme intérieur de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ près, $H(f \, ; \, a_0)$ ne dépend pas du choix du point a_0 sur $X^*_{j_0} = X_j - \mathrm{Sing}(X)$, ni même du choix du facteur transverse à X^*_j en a.

En fait on pourrait remarquer :

Exercice 1.2: $H(f;a_0)$ est précisément l'ensemble des difféomorphismes holomorphes h qui laissent invariants la dérivée logarithmique

$\frac{d\ f\circ i}{f\circ i} = i^*(\frac{df}{f})$.

De la proposition 1.1., on déduit directement la

Proposition 1.3. - Si $\lambda_{j_0} = 1$, tout élément z de $D'(f)_{a_0}$ est une coordonnée de $(\mathbb{C},0)$ qui linéarise $H(f\ ;\ a_0)$. Plus précisément $H(f\ ;\ a_0)$ est engendré par les difféomorphismes :

$$z \longrightarrow e^{2i\pi\lambda_j}.z, \quad j = 1,\dots,q.$$

De plus, $H(f\ ;\ a_0)$ est fini si et seulement si f est une puissance de fonction méromorphe (peut-être holomorphe) : il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que : $s\ \lambda_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j = 1,\dots,q$.

Remarque 1.4. - Soit H_{j_0} le groupe d'holonomie de la feuille $X_{j_0}^* = X_{j_0} - \mathrm{Sing}(X)$, représenté sur un facteur transverse au point a_0. Par construction l'action de H_{j_0} sur les éléments de $V'(f)_{a_0}$ correspond au prolongement analytique. Si γ est un lacet d'origine a_0 dans U_q, homologue à un lacet γ' dans $X_{j_0}^*$, et si $g \in V'(f)_{a_0}$, alors on a

$$g \circ h = \dot{\gamma} \cdot g,$$

où h désigne le difféomorphisme d'holonomie induit par γ'. Il en résulte l'inclusion :

$$H_{j_0} \subset H(f\ ;\ a_0).$$

2. Recollement d'intégrales premières multiformes. Faisons d'abord quelques considérations d'ordre général : U_1 et U_2 sont deux ouverts d'une variété holomorphe, d'intersection U_{12} connexe et f_1, f_2 deux fonctions multiformes sur U_1 et U_2 respectivement :

$$f_j : \mathcal{U}_j \to \mathbb{C}, \quad j = 1,2,$$

où $r_j : \mathcal{U}_j \to U_j$ est le revêtement universel de U_j. Nous dirons que f_1 et f_2 se recollent s'il existe une fonction multiforme sur l'union

$U = U_1 \cup U_2$, qui factorise f_1 et f_2. Plus précisément si $i_j : U_j \to U$ sont les inclusions canoniques des U_j dans U et $\mathcal{U}$ le revêtement de U ceci signifie que

$$f_j = f \circ \overline{i}_j$$

où $\overline{i}_j$ sont les relevés des i_j, $\overline{i}_j : \mathcal{U}_j \to \mathcal{U}$ à partir d'un point de base situé dans $U_{12} = U_1 \cap U_2$. Nous avons le :

<u>Lemme 2.1.</u> - Soit a un point de U_{12}. Si f_1 et f_2 admettent une détermination commune en a et si $V(f_1)_a = V(f_2)_a$ alors f_1 et f_2 se recollent.

<u>Démonstration</u> : Le recollement f se construit à partir d'une détermination commune f_0, par prolongement analytique le long de tout chemin dans U_1 et dans U_2. Cette construction n'est affectée d'aucune ambiguité car $\pi_1(U_1 \cup U_2 \; ; \; a)$ est la somme amalgamée de $\pi_1(U_1 \; ; \; a)$ et $\pi_1(U_2 \; ; \; a)$ sur $\pi_1(U_{12} \; ; \; a)$, et par construction les deux actions de $\pi_1(U_{12} \; ; \; a)$ coïncident sur $V(f_1) = V(f_2)$.

<u>Remarque</u> : Dans le cas de fonctions multiformes f et f', toutes deux du type $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, f et f' se recollent si et seulement si leurs dérivées logarithmiques , qui sont uniformes, coïncident.

On a le lemme général suivant :

<u>Lemme 2.2.</u> : Soit η une 1-forme holomorphe non singulière sur une variété holomorphe M et L une feuille propre du feuilletage $\mathcal{F}_\eta$ défini par η, dont le groupe d'holonomie $H(L \; ; \; a)$, $a \in L$, est linéarisable. Alors il existe au voisinage de L une intégrale première multiforme unique dont l'ensemble $D(f)_a$ des déterminations vérifie :

$$D'(f)_a = z \circ H(f \; ; \; a),$$

où $z : (\mathbb{C}, 0) \to \mathbb{C}$ est une coordonnée linéarisante $H(L \; ; \; a)$ sur un facteur transverse fixé et $D'(f)_a$ est comme précédement l'ensemble des restrictions à une transversale $i : \mathbb{C},0 \to M,a$ des éléments de $D(f)_a$.

Démonstration : Soient $a' \in L$, $i, i' : (\mathbb{C}, 0) \to M$ des facteurs transverses à L en a, a' respectivement, et γ un chemin injectif d'origine a et d'extrémité a' dans L. Nous notons $\kappa : \pi_1(L ; a) \to \pi_1(L ; a')$ l'isomorphisme $\alpha \to \gamma^{-1} * \alpha * \gamma$. Au voisinage de γ le feuilletage est trivial et définitsans ambiguité un difféomorphisme $z \to g(z)$ de $(\mathbb{C},0)$ par la relation : $i(z)$ et $i'(g(z))$ sont dans une même feuille. Visiblement κ et l'automorphisme intérieur de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, $h \to g^{-1} \circ h \circ g$ conjuguent les actions d'holonomie réalisées sur les facteurs i et i' respectivement. Ainsi $z' = z \circ g$ est une coordonnée linéarisant $H(L ; a')$ dès que z linéarise $H(L ; a)$. Donnons nous une rétraction r d'un voisinage ouvert $W_{a'}$ de a' sur un disque D de $(\mathbb{C}, 0)$ qui vérifie $dr \wedge \eta = 0$. Nous choisissons D assez petit pour que z' soit holomorphe au voisinage de D.

Clairement z' s'étend en une intégrale première f au voisinage de a' qui vérifie $f \circ i = z'$. Tout autre chemin μ dans L d'origine a et d'extrémité a' se décompose en :

$$\mu = \gamma * \alpha,$$

où α est un lacet d'origine a'. On lui associe l'intégrale première au point a' :

$$f_\mu = r \circ z' \circ h,$$

h désignant le difféomorphisme d'holonomie induit par α. Par construction f_μ est aussi le prolongement analytique de f le long de μ. Comme z' linéarise h, f_μ est holomorphe sur tout $W_{a'}$.

Cette construction définit sans aucune ambiguité une intégrale première multiforme de η sur l'ouvert :

$$V = \bigcup_{a' \in L} W_{a'} \,.$$

Q.E.D.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le problème de recollement annoncé. Pour alléger le texte nous appellerons ici <u>élémentaires</u> les fonctions multiformes du type $f = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ et nous dirons que f est <u>uniforme le long de</u>

$X_j = \{f_j = 0\}$ lorsque λ_j est entier > 0.

Soit η un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme ne possédant qu'un nombre fini de séparatrices $X_1, \ldots, X_p$. Supposons données, en chaque point t_j, $j = 1, \ldots, n$, du cône tangent C_η, des intégrales premières élémentaires g_j. Peut-on, après les avoir convenablement modifiées, recoller les g_j en une intégrale première élémentaire globale de $E^*(\eta)$?

Nous pouvons supposer, quitte à les élever à des puissances convenables, que les g_j sont uniformes et régulières ($dg_j \neq 0$) en tout point de la feuille $L_\eta = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - C_\eta$ de $\tilde{\mathfrak{F}}_\eta$. Les lemmes 2.1. et 2.2. permettent de les étendre sur des ouverts $V_j^* = V_j - \tilde{X}$, où : $\tilde{X}$ désigne l'éclaté strict de $X = X_1 \cup \ldots \cup X_p$, les V_j sont des ouverts dont les intersections W_j avec $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ forment un recouvrement simplement connexe de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, $t_j \in W_j$. Nous pouvons aussi exiger que les W_j admettent un point commun $t_0 \in L_\eta$.

Notons encore D'_j et V'_j les réalisations sur un facteur transverse $(\mathbb{C}, t_0)$ à L_η en t_0 de $D'(g_j)_{t_0}$ et $V'(g_j)_{t_0}$ et $H_j \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}\ ;\ t_0)$ le groupe d'invariance $H(g_j\ ;\ t_0)$. Chaque H_j contient le groupe d'holonomie $H(W_j^*\ ;\ t_0)$ de l'ouvert $W_j^* = W_j - \{t_j\}$, d'après la remarque 1.4. Ainsi le sous groupe

$$H(g_1, \ldots, g_p\ ;\ t_0) \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}\ ;\ t_0) \tag{2.2.1}$$

engendré par l'union des H_j, $j = 1, \ldots, n$, contient le groupe d'holonomie $H(L_\eta\ ;\ t_0)$ de la feuille L_η. On en déduit sans peine qu'il est indépendant de la construction effectuée : il ne dépend que de la donnée des germes g_j aux points t_j, et non du choix des ouverts V_j sur lesquels on les a prolongés. A une conjugaison près, ce groupe ne dépend pas non plus du choix du point t_0 sur L_η, ni du facteur transverse $(\mathbb{C}, t_0)$ en t_0.

<u>Théorème 2.3 (de recollement)</u>. Sous ces hypothèses (η n'a qu'un nombre fini de séparatrices et admet des intégrales premières élémentaires locales après éclatement, uniformes le long de L_η), on a :

1) η admet une intégrale première holomorphe si et seulement si le groupe $H(g_1,\dots,g_n\ ;\ t_0)$ est fini.

2) η admet une intégrale première du type $f = f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $f_j \in \mathcal{O}_2$, si et seulement si le groupe $H(g_1,\dots,g_p\ ;\ t_0)$ est linéarisable.

<u>Démonstration</u> : Soit $z : (\mathbb{C}, t_0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ une coordonnée qui linéarise le groupe $H(g_1,\dots,g_p\ ;\ t_0)$. A fortiori z linéarise le groupe d'holonomie $H(L_\eta\ ;\ t_0)$ de la feuille $L_\eta = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - C_\eta$. D'après le lemme 2.2, il existe une intégrale première multiforme g_0 de $E^*(\eta)$ sur un voisinage de L_η, dont l'ensemble des déterminations sur $(\mathbb{C}, t_0)$, $D'(g_0)_{t_0}$ est égal à $z \circ H(L_\eta\ ;\ t_0)$. En particulier $V'(g_0)_{t_0}$ est de dimension 1, car $H(L_\eta\ ;\ t_0)$ est linéaire.

Pour que g_j se recolle avec g_0, il suffit d'après le lemme 2.1 que g_0 et g_j possèdent une détermination commune, car $V(g_j)_{t_0}$ est aussi de dimension 1 (proposition 1.1). Comme il s'agit d'intégrales premières en un point régulier du feuilletage $\tilde{\mathfrak{F}}_\eta$, il suffit en fait d'obtenir cette détermination commune en restriction au facteur transverse $(\mathbb{C}, t_0)$. Distinguons les deux éventualités suivantes:

(a) <u>g_j est une puissance d'une fonction holomorphe</u> :

$$g_j = G_j^{s_j},\ s_j \in \mathbb{C}^*,\ G_j \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^2, t_j}.$$

D'après la proposition 1.3., le groupe d'invariance H_j de g_j est fini. Il est engendré par une rotation périodique

$$z \longrightarrow e^{2i\pi/\nu_j}.z, \qquad \nu_j = \# H_j.$$

Visiblement l'action de H_j laisse la restriction G_j^o de G_j à $(\mathbb{C}, t_0)$ invariante. On déduit de l'égalité :

$$G_j^o(e^{2i\pi/\nu_j}.z) = G_j^o(z),$$

que G_j^o est une fonction de z^{ν_j} :

$$G_j^o = \ell_j(z^{\nu_j}), \qquad \ell_j \in \mathcal{O}_1.$$

Mais, si l'on a choisi s_j pour que G_j ne soit pas une puissance, on voit facilement à l'aide de la proposition 1.3, que ν_j est l'ordre de $G_j^o \in \mathcal{O}_1$. Ainsi $\ell_j'(0) \neq 0$ et

$$z^{\nu_j} = \ell_j^{-1} \circ G_j^o ,$$

de sorte que z est une détermination, sur $(\mathbb{C},t_0)$ de l'intégrale première élémentaire :

$$(1) \qquad \overline{g}_j = (\ell_j^{-1} \circ G_j)^{1/\nu_j}.$$

(b) g_j n'est puissance d'aucune fonction holomorphe.

Remarquons que g_j ne peut être puissance d'une fonction méromorphe du fait de la finitude du nombre des séparatrices. D'après la proposition 1.3, cela signifie que son groupe d'invariance H_j contient un élément d'ordre infini :

$$h(z) = \rho\, e^{2i\pi\alpha} z, \quad \rho \in \mathbb{R}^*, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

avec $\rho \neq 1$, ou bien, $\rho = 1$ et α irrationnel. Sa linéarisation est unique, à une constante multiplicative près. Mais, toujours d'après la proposition 1.3, la restriction $g_j^o \in D'_j$ d'une détermination quelconque de g_j à $(\mathbb{C}, t_0)$ est une coordonnée linéarisante du groupe H_j. Ainsi il existe $\xi_j \in \mathbb{C}$ tel que :

$$(2) \qquad z = \xi_j\, g_j^o.$$

Finalement les $\overline{g}_j$ donnés par (1), ou bien les $\xi_j g_j$ suivant le cas, admettent la coordonnée z comme détermination commune sur $(\mathbb{C}, t_0)$. Ils se recollent en une intégrale première élémentaire g, définie sur $\tilde{\mathbb{C}}^2 - \tilde{X}$, dont l'espace des déterminations est de dimension 1, et dont le groupe d'invariance $H(g\ ;\ t_0)$ en t_0 est égal à $H(g_1,\ldots,g_n\ ;\ t_0)$.

En particulier, si $H(g_1,\ldots,g_n\ ;\ t_0)$ est fini, g est la puissance d'une fonction holomorphe $\overline{g}$ définie au voisinage de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, d'après 1.3. Dans ce cas $\overline{g} \circ E^{-1}$ définit une intégrale première holomorphe de η sur $\mathbb{C}^2 - \{0\}$, qui est aussi holomorphe en 0, grâce au théorème de Lévy.

Montrons, lorsque $H(g_1,\dots,g_p\ ;\ t_0)$ n'est pas fini, que g se "redescend" encore en une intégrale première multiforme élémentaire de η.

Par construction, la différentielle $\eta'' = d\,\mathrm{Log}(g)$ est uniforme, et même méromorphe à poles simples sur les X_j^*. Son image directe $\eta' = E_*(\eta'')$ par l'application d'éclatement est entièrement définie en dehors de 0. Elle se prolonge, d'après le théorème de Lévy, en une forme méromorphe fermée, à pôles simples sur l'union X des X_j et, de plus, $\eta' \wedge \eta = 0$. Ainsi la forme

$$f_1 \dots f_p\ \eta'$$

est holomorphe et divisible par η, qui admet de ce fait, un facteur intégrant réduit. Pour conclure, il nous suffit d'appliquer le théorème d'intégration de la première partie.

Q.E.D.

<u>Remarque 2.4</u> : On pourrait énoncer le théorème en dimension supérieure à deux, mais en vertu des théorèmes d'extension, cela ne nous sera pas utile.

<u>Remarque 2.5</u> : On peut remplacer dans l'énoncé du théorème de recollement, l'hypothèse : "ω n'a qu'un nombre fini de séparatrices", par les hypothèses sur les g_j : "aucun g_j n'est une puissance d'une fonction méromorphe pure".

<u>Remarque 2.6</u> : On peut évidemment calculer les exposants λ_j de l'intégrale première finalement obtenue par rapport aux exposants initiaux des g_j. (exercice).

troisième partie

critère topologique assurant l'existence d'intégrales premières multiformes

un contre-exemple dans le cas méromorphe

. CHAPITRE I .

UN CRITÈRE TOPOLOGIQUE D'EXISTENCE D'UNE INTÉGRALE PREMIÈRE MULTIFORME DU TYPE

$$f = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}, \quad \lambda_j > 0, \quad f_j \in \mathcal{O}_n.$$

Soit ω une 1-forme holomorphe sur un voisinage ouvert U de O dans $\mathbb{C}^n$ à singularité isolée O, possèdant une intégrale première multiforme

$$f = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}, \quad f_j \in \mathcal{O}(U)$$

à exposants λ_j positifs. Les seules feuilles de $\mathcal{F}_\omega | U$ qui contiennent O dans leur adhérence sont les composantes connexes de X_{lisse}, où $X \subset U$ est l'hypersurface d'équation $f_1 \dots f_p = 0$. Les ouverts :

$$U_\varepsilon = \{x \in U / |f_1(x)|^{\lambda_1} \dots |f_p(x)|^{\lambda_p} < \varepsilon\}$$

constituent un système fondamental de voisinages connexes de X dans U, saturés pour le feuilletage $\mathcal{F}_\omega | U$. Nous allons montrer que cette propriété caractérise l'existence d'une intégrale première multiforme à exposants positifs.

<u>Théorème 1</u> : Soit ω un germe en $O \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable singulière. Alors ω possède une intégrale première multiforme $f = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ à exposants λ_j réels positifs si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(α) Il existe un voisinage ouvert U de O tel que le feuilletage $\mathcal{F}_\omega | U$ de $U - S(\omega)$ ne possède qu'un nombre fini de feuilles fermées $X'_1, \dots, X'_p$ adhérentes à O.

(β) Il existe dans U une suite de voisinages ouverts connexes U_k de l'union X des hypersurfaces $X_j = \overline{X'_j}$, dont l'intersection est égale à X et tels que chaque $U_k^* = U_k - X$ soit saturé par le feuilletage $\mathcal{F}_\omega | (U-X)$ de U-X défini par ω.

Remarque : On peut, comme nous le verrons plus loin, rajouter une condition supplémentaire (γ) qui caractérise le fait, pour une fonction multiforme $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j > 0$, d'être la puissance d'une fonction holomorphe, et ainsi obtenir un critère topologique d'existence d'intégrale première holomorphe :

(γ) dans chaque voisinage ouvert U_k de 0, le feuilletage $\mathcal{F}_\omega | U_k - X$ possède une feuille fermée.

Ces critères diffèrent de celui obtenu par R. Moussu et l'un de nous dans [32] : ω vérifie (α) et (δ) = "toutes les feuilles du feuilletage de U - Sing (ω) sont fermées". L'intérêt d'un critère topologique est essentiellement son existence, sa vérification pratique étant en général impossible; en fait , le résultat essentiel est le suivant :

Corollaire 1' : Soient ω' et ω'' deux germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-formes holomorphes intégrables topologiquement conjuguées, i.e. il existe un homéomorphisme $h : U' \overset{\sim}{\to} U''$ de voisinages ouverts de 0 qui transforme $S(\omega')$ en $S(\omega'')$ et toute feuille de $\mathcal{F}_{\omega'}$ en une feuille de $\mathcal{F}_{\omega''}$. Alors ω' admet une intégrale première multiforme $f = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ à exposants λ_j réels > 0 si et seulement si ω'' admet une telle intégrale première.

Corollaire 1" [32] : Sous les hypothèses du corollaire précédent, ω' admet une intégrale première holomorphe si et seulement si il en est de même pour ω''.

Compte tenu du théorème d'extension des facteurs intégrants ou plutôt de son corollaire [1 ; III ; 5.3.] il suffit d'établir la preuve du théorème 1 en dimension 2. En effet, si ω vérifie les conditions (α) et (β) (ou (δ)) il en est de même de sa restriction à un 2-plan générique.
En dimension 2, nous raisonnerons par récurrence sur le nombre minimum d'éclatements $N(\omega)$ nécessaires à la réduction de ω. Mais auparavant, rappelons une propriété des fonctions multiformes à exposants positifs qui sera la clef de l'utilisation des conditions (α) et (β).

1. Surfaces de niveau des fonctions multiformes du type $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$.

Soient U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}^2$, X_j des hypersurfaces irréductibles dans U d'équations réduites $f_j = 0$, $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$ et $f = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ une fonction multiforme à exposant λ_j réel > 0 définie sur $U^* = U - X$; nous avons la :

Proposition 1.1. : Si les rapports λ_i/λ_j ne sont pas tous rationnels, pour tout point a de U^* assez proche de O, l'adhérence de la feuille L_a du feuilletage défini par :

$$\eta = \Sigma\ \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

est la variété analytique réelle de dimension 3 ∂K_ε, $\varepsilon = |f(a)|$, qui borde $K_\varepsilon = \{x, |f(x)| = |f_1(x)|^{\lambda_1} \ldots |f_p(x)|^{\lambda_p} \leq \varepsilon\}$.

Démonstration : Raisonnons par récurrence sur $N(\omega)$, $\omega = f_1 \ldots f_p \eta$, ou ce qui revient au même, sur le nombre d'éclatements nécessaires à désingulariser la courbe X. La démonstration est immédiate lorsque $N(\omega) = 0$; en effet, dans un système de coordonnées appropriées (x,y), ω s'écrit à un facteur multiplicatif près,

$$\omega = \lambda_1 x\ dy + \lambda_2\ y\ dx \quad , \qquad \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$$

et il suffit de remarquer que les holonomies des variétés invariantes $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ sont des rotations d'angles irrationnels. Supposons la proposition vérifiée lorsque $N(\omega) < N$ et considérons le cas $N(\omega) = N$. Désignons par $\tilde{X}_j$ les éclatés stricts des X_j :

$$\tilde{X}_j = \overline{E^{-1}(X_j) - \mathbb{P}\mathbb{C}(1)},$$

où E désigne toujours l'application d'éclatement. Aux points $t_1, \ldots, t_n$ du cône tangent C_ω de ω, $E,^*_{t_j}(\omega)$ admet l'intégrale première multiforme

$$F_j = x^{\nu_1\lambda_1 + \ldots + \nu_p\lambda_p} \cdot v_j \cdot \prod_{k \in I_j} \tilde{f}_k^{\lambda_k} ,$$

où ν_k désigne l'ordre de f_k en O, $\tilde{f}_k$ son éclaté divisé en t_j, I_j l'ensemble des indices $k = 1, \ldots, n$ tels que t_j soit le cône tangent de f_k et $v_j \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^2, t_j}$ l'unité

$$v_j = \prod_{k \in I_j} \tilde{f}_k^k \ ; \ v_j(t) \neq 0.$$

Notons $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ la fibration canonique de fibre $\mathbb{C}$, $\pi(x,t) = t$, $t = y/x$, D_j les disques $\{|t-t_j| < \delta\}$, et

$$W = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - \bigcup_{j=1}^{n} \bar{D}_j \ ;$$

$\delta > 0$ étant choisi assez petit pour que les disques $\overline{D_j}$ soient deux à deux disjoints. Notons enfin V_j, (resp. V), l'intersection de $\pi^{-1}(D_j)$ (resp. $\pi^{-1}(W)$), avec $E^{-1}(K_\varepsilon)$. La restriction de π à une feuille quelconque de $\tilde{\mathcal{F}}_\eta | \overline{V}$ est un revêtement. Ainsi toute feuille L de $\tilde{\mathcal{F}}_\eta | \partial\overline{V}$ coupe chaque composante connexe $C_j = \pi^{-1}(\partial\overline{D_j}) \cap \partial\overline{V}$ du bord de $\partial\overline{V}$ et le saturé par les feuilles d'une composante C_j est $\partial\overline{V} = E^{-1}(\partial K_\varepsilon) \cap \partial(\overline{V})$.

Si en un point t_j les rapports $\mu_k = \lambda_k / \sum_{j=1}^{n} \nu_j \lambda_j$ pour $k \in I_j$ sont tous rationnels, F_j est une puissance réelle d'une fonction holomorphe G_j, que nous pouvons supposer n'être pas une puissance. Ses surfaces de niveau sont alors connexes, c.f. ([32] V. Lemme 1), et le saturé de C_j par le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\eta | \partial\overline{V}_j$ est $\partial\overline{V}_j$.

Comme les rapports λ_j / λ_k ne sont pas tous rationnels, il existe des éléments t_j de C_ω où les rapports μ_k ne sont aussi pas rationnels. En ces points, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence : l'adhérence d'une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}_\eta | \partial\overline{V}_j$ est $\partial\overline{V}_j$. Cette description permet de conclure. Q.E.D.

2. Démonstration du théorème 1 : Nous raisonnons par récurrence sur $N(\omega)$. Examinons d'abord les deux cas réduits :

$$(*) \quad \omega = x\,dy - \lambda y\,dx + \dots \quad , \lambda\ ,\ 1/\lambda \notin \mathbb{Q}_+ ,$$
$$(**) \quad \omega = x\,dy + \dots .$$

Dans chaque cas nous supposons, quitte à modifier la coordonnée y, que l'axe des x est une variété invariante, (c.f. [1;I;5]). La condition (β) implique que l'holonomie de cet axe, h, possède un domaine invariant D. Il est bien connu qu'alors h se linéarise en une rotation. Ceci permet d'exclure le cas (* *), car sur le facteur $1 \times \mathbb{C}$, h peut s'écrire :

$$h(y) = y + y^m(2i\pi + y\,g(y)) \quad , \quad g \in \mathcal{O}_1 \ ;$$

et n'est visiblement pas linéarisable. Dans le cas (*), la linéarisation de l'holonomie implique l'existence de coordonnées u,v qui linéarisent ω et $uv^{-\lambda}$ est intégrale première de ω.

Supposons maintenant le théorème vérifié lorsque $N(\omega) < N$, et considérons le cas où $N(\omega) = N$. Nous choisissons les coordonnées x,y telles que l'axe des y ne soit pas dans le cône tangent $C_\omega = \{t_1,\dots,t_n\}$ de ω. Notons encore $t = y/x$ la carte de $P\mathbb{C}(1)$ associée à (x,y),

$\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ la fibration de fibre $\mathbb{C}$, $\pi(x,t) = t$, et désignons par $(\mathbb{C},t)$ le germe en $t \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ de $\pi^{-1}(t)$.

Les conditions (α) et (β) sont vérifiées par $E^*(\omega)$ au voisinage de chaque point t_j du cône tangent C_ω. Par hypothèse de récurrence, il existe au voisinage de chacun de ces points une intégrale première multiforme g_j. Adoptons les notations introduites dans la démonstration du théorème de recollement ([2 ; II ; 2.3]) : V_j désigne un voisinage ouvert connexe de t_j, g_j est multiforme sur $V_j^* = V_j - \tilde{X}$ où $\tilde{X}$ est l'éclaté divisé de X, les $W_j = V_j \cap \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ sont connexes simplement connexes recouvrent $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ et possèdent un point commun t_o ; D_j' est l'ensemble des restrictions à $(\mathbb{C},t_o)$ des éléments de $D(g_j)_{t_o}$, et V_j' l'espace vectoriel qu'il engendre dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C},t_o}$. D'après le théorème de recollement il suffit de prouver que le groupe $H = H(g_1,\ldots g_p;t_o)$ engendré par les groupes d'invariance $H_j \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C};t_o)$ des g_j est linéarisable.

D'après la proposition [2 ; II ; 1.3.] , chaque H_j est linéarisable. Ses éléments sont définis dans un même voisinage ouvert $V_j(t_o)$ de t_o dans $(\mathbb{C},t_o)$. Ainsi, les difféomorphismes $h \in H_j$ qui engendrent H sont tous holomorphes sur un même ouvert :

$$V(t_o) = \bigcap_{j=1}^{n} V_j(t_o).$$

Considérons d'autre part les images réciproques $\tilde{U}_k = E^{-1}(U_k)$ par l'application d'éclatement E des ouverts saturés U_k donnés par la condition (β) et soit $\tilde{U} = E^{-1}(U)$. Il existe un indice k tel que la composante connexe U_k' de $U_k \cap \Pi^{-1}(t_o)$ qui contient t_o soit entièrement contenue dans $V(t_o)$. Donnons nous un élément g_j' de D_j' ; d'après la proposition 1.3. déjà citée c'est une coordonnée de $(\mathbb{C},t_o)$ qui linéarise H_j et, si g_j n'est pas une puissance réelle d'une fonction holomorphe, les cercles $C_j(\delta) = \{|g_j'| = \delta\}$ sont les adhérences des orbites de H_j ; ils coïncident avec l'adhérence de l'intersection de feuilles de $\mathcal{F}_\omega | V_j^*$ avec $(\mathbb{C},t_o)$, c.f. proposition 1.1. Puisque l'ouvert U_k est saturé pour le feuilletage $\mathcal{F}_\omega | U$, les cercles $C_j(\delta)$ sont contenus dans U_k' dès qu'ils coupent U_k'. Ainsi ce dernier est invariant par tout élément h de H_j : $h(U_k') = U_k'$.

Supposons maintenant que g_j soit une puissance d'une fonction holomorphe, soit $g_j^{s_j} = G_j$, G_j n'étant pas une puissance ; H_j est fini et ses orbites sont les intersections avec $(\mathbb{C},t_o)$ des surfaces de niveau de G_j qui sont alors connexes (c.f. [32] V, lemme 1). Elles sont dans une seule feuille de $\mathcal{F}_\omega | V_j^*$. Il en résulte que U_k' est encore invariant par tout élément de H_j.

Nous pouvons conclure que U_k' est un domaine invariant du groupe H :

$$\forall h \in H \quad , \quad h(U_k') = U_k' \ ;$$

Tout élément de H est donc linéarisable, et H est commutatif : en effet, un commutateur s'écrit $z \to z + \ldots$ et ne se linéarise que s'il est déjà égal à z. Si H est infini, il possède un élément d'ordre infini, $z \to \lambda z$, qui est une rotation d'angle irrationnel. Ce dernier ne commute qu'avec des difféomorphismes linéaires dans la coordonnée z ; H est donc, dans ce cas linéaire. Si h est fini, il est facile de voir que la coordonnée :

$$z = \sum_{h \in H} \frac{h(z)}{h'(0)}$$

est linéarisante. Ce qui achève la démonstration.

. CHAPITRE II .

LA NON EXISTENCE D'UN CRITÈRE TOPOLOGIQUE POUR L'EXISTENCE D'UNE INTÉGRALE PREMIÈRE MÉROMORPHE

Dans [46] et [47] M. SUZUKI donne l'exemple d'un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de forme holomorphe ω dont l'adhérence de chaque feuille est une courbe analytique passant par l'origine et qui ne possède pas d'intégrale première méromorphe. Il s'agit de :

$$\omega = (y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy.$$

Nous montrons ici que le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ est topologiquement conjugué au feuilletage $\mathcal{F}_\eta$ défini par la forme :

$$\eta = (2y^2+x^3)dx - 2xy\, dy,$$

qui possède l'intégrale première méromorphe :

$$g(x,y) = \frac{y^2-x^3}{x^2} .$$

Par conjugaison topologique nous entendons l'existence d'un homéomorphisme $h : U_1 \to U_2$, où les U_i sont des voisinages de $0 \in \mathbb{C}^2$, qui envoie les feuilles de $\mathcal{F}_\omega|U_1$ sur celles de $\mathcal{F}_\eta|U_2$. Nous en concluons que, contrairement au cas holomorphe [32] , il ne peut y avoir de critère topologique d'existence d'une intégrale première méromorphe.

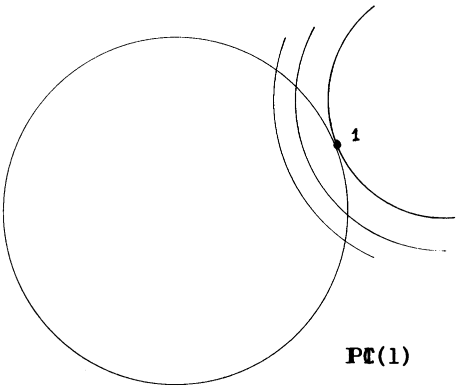
Dans un premier temps, en procèdant différemment que M. SUZUKI, nous montrons que ω ne possède pas d'intégrale première méromorphe. Eclatons 0 par $E : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$. Nous sommes en présence d'un cas dicritique et C_ω est réduit à la droite $t_1 = \{y=x\}$. En effet dans les coordonnées $(x,t = \frac{y}{x})$ de $\mathbb{C}^2$ nous avons :

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{E^*(\omega)}{x^3} = t^3dx + (t-1 + 2xt^2)dt,$$

et dans les coordonnées $(t' = \frac{x}{y} ,y)$,

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{E^*(\omega)}{y^3} = - t'\, dy + (y + 1 - t')dt'.$$

Ainsi $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ est non singulier et toutes ses feuilles coupent transversalement $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ sauf la feuille $\mathcal{L}$ qui passe par le point $t_1 = 1$.



Remarquons que ω possède "l'intégrale première trancendante" :

$$f(x,y) = \frac{x}{y} e^{\frac{y(y+1)}{x}} ,$$

et donc $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ admet f o E comme intégrale première transcendante ; dans les cartes (x,t) et (t',y) celle-ci s'écrit respectivement :

$$F_1(x,t) = \frac{1}{t} e^{t^2x+t}$$

et

$$F_2(x,t') = t' e^{\frac{y+1}{t'}} .$$

Désignons par U un voisinage ouvert étoilé de O dans $\mathbb{C}^2$, $\tilde{U} = E^{-1}(U)$, $\Pi : \tilde{U} \to \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ la fibration canonique de passage au quotient, O le point $t = 0$ et ∞ le point $t' = 0$; visiblement $\Pi^{-1}(\infty)$ est une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega|\tilde{U}$ et nous pouvons considérer $F = f \circ E$ comme une application holomorphe de $\tilde{U}' = \tilde{U} - \Pi^{-1}(\infty)$ à valeur dans $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$. Le point ∞ est alors une singularité essentielle de la restriction F_0 de F à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1) - \{\infty\}$:

$$F_o(t) = \frac{1}{t} e^t ,$$

$$F_o(t') = t' e^{\frac{1}{t'}} .$$

Au voisinage du "point double" $t_1 = 1$ les racines de l'équation

$$F_o(t) = \text{constante}$$

sont les classes d'équivalence de la relation : être sur la même feuille de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega | \tilde{U}$.

Ainsi si ω possèdait une intégrale première méromorphe H en O, la restriction à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ de H o E serait une fraction rationnelle R(t) qui se factoriserait au voisinage de t_1 à travers F_o :

$$R(t) - R(t_1) = \ell(F_o(t) - F_o(t_1)),$$

où $\ell \in \mathcal{O}_1$.

Nous allons voir que ceci est impossible. Remarquons d'abord que $F_o(t)$ prend toutes les valeurs sauf O ; en effet l'équation

$F_o(t) = \frac{1}{\rho_o} e^{-i\theta_o}$, $\theta_o \in [0, 2\pi]$ s'écrit, en posant $t = \rho e^{i\theta}$:

$$\begin{cases} \rho e^{-\cos\theta} = \rho_o , \\ \theta - \rho \sin\theta = \theta_o . \end{cases} \qquad \text{Soit encore :} \qquad \begin{cases} \dfrac{\theta-\theta_o}{\sin\theta} = \rho \\ \dfrac{\theta-\theta_o}{\sin\theta} . e^{(\theta_o-\theta)\operatorname{cotg}\theta} = \rho_o . \end{cases}$$

Sur l'intervalle $]2\pi, 3\pi[$ la fonction

$$\theta \to \frac{\theta-\theta_o}{\sin\theta} e^{(\theta_o-\theta)\operatorname{cotg}\theta}$$

est continue, tend vers O lorsque θ tend vers 2Π et vers $+\infty$ lorsque θ tend vers 3π ; elle prend donc toutes les valeurs positives.

D'autre part t_1 est le seul point critique de F_o. Donc toute factorisation ℓ se prolonge sans ambiguité par relèvement des chemins à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1) - \{O\}$. Nous aboutissons ainsi à la contradiction suivante :

- F_o possède une singularité essentielle à l'infini et donc $F_o^{-1}(z)$ est infini pour tout z : c'est le théorème de PICARD ;

- $R = \ell \circ F_o$ est une fraction rationnelle et $R^{-1}(z)$ est fini.

Nous allons maintenant conjuguer topologiquement ω et η . Pour cela nous construisons un homéomorphisme $\tilde{h}$ de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ au voisinage de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ qui conjugue $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ à $\tilde{\mathcal{F}}_\eta$ et laisse l'espace projectif globalement invariant. La conjugaison h recherchée sera définie sans ambiguité par la relation :

$$E \circ \tilde{h} = h \circ E.$$

L'éclaté $G = g \circ E$ de $g(x,y) = \frac{y^2-x^3}{x^2}$ s'écrit dans les deux cartes canoniques :

$$G_1(x,t) = t^2 - x \quad , \quad t = y/x$$

$$G_2(t',y) = \frac{1-t'^3y}{t'^2} \quad , \quad t' = x/y.$$

Au voisinage de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, G est une fonction méromorphe non singulière dont toutes les lignes de niveau sont transverses au projectif, sauf celle passant par le point $t_o = 0$:

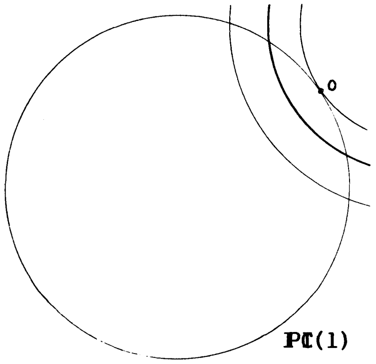


Fig. 1.

Exhibons tout d'abord une conjugaison explicite φ entre les germes $F,_{t_1}$ et $G,_{t_o}$, conjugaison qui laisse invariante le projectif, ie un homéomorphisme :

$$\varphi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, t_1) \to (\tilde{\mathbb{C}}^2, t_o),$$

tel que :

$$G_1 \circ \varphi = F_1 ,$$

et

$$\varphi(\mathbb{P}\mathbb{C}(1), t_1) = \mathbb{P}\mathbb{C}(1), t_o.$$

Pour cela faisons la translation $t = 1 + T$,

$$F'(x,T) = F_1(x,1-T) - F_1(0,1),$$

et posons :

$$\begin{cases} \varphi_1(x,T) = F'(0,T) - F'(x,T), \\ \varphi_2(x,T) = v(T), \end{cases}$$

où $v(T) = \sqrt{\frac{e}{2}} \cdot T + o(T)$ est une racine de $F'(0,T)$, i.e. :

$$(v(T))^2 = F'(0,T).$$

L'isomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ vérifie clairement la relation de conjugaison :

$$G_1 \circ \varphi = F_1.$$

Il laisse invariant le projectif puisque :

$$\varphi_1(x,T) = F'(0,T) - F'(x,T) = x\, u(x,T).$$

Il s'agit maintenant de prolonger la conjugaison φ à un voisinage de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ tout entier et pour cela nous allons décrire le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ au voisinage de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)-\{t_1\}$. Introduisons les variables $Y = y-x$ et $T' = \frac{1}{T}$; les couples (x,T) et (Y,T') forment un atlas de $\tilde{\mathbb{C}}^2$, avec le changement de carte :

$$\begin{aligned} Y &= T.x\ , \\ T' &= \frac{1}{T}\ . \end{aligned}$$

Soit $D_\sigma(t_1) \subset \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ un disque centré en t_1 de rayon σ tel que φ soit défini et holomorphe sur un voisinage W de $D_\sigma(t_1)$ dans $\tilde{\mathbb{C}}^2$,
$W = \{ (x,T)/T \in D_\sigma(t_1)\ ,\ |x| < \alpha \}$.
Sur un voisinage convenable W^o de $S = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - D_{\sigma'}(t_1)$, $0 < \sigma' < \sigma$, le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ est transverse à $L = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) \cap W^o$ et définit donc une fibration

$$\psi : W^o \to L$$

qui a un point a de W^o associe l'unique point d'intersection de L et de la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega | W^o$ passant par a.

Considérons le lacet $\gamma : [0,2\pi] \to \tilde{\mathbb{C}}^2$ défini par :

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \rho\, e^{-i\theta} \\ \\ T(\theta) = \varepsilon e^{i\theta} \end{cases}$$

où ρ et ε sont des réels positifs.

L'image $\bar{\gamma}$ de γ est le cercle d'équation :

$$\begin{cases} Y = \rho\varepsilon \\ |T'| = \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

Si σ' a été choisi suffisamment petit, alors pour ρ et ε assez petits, $\bar{\gamma}$ est contenu dans l'intersection $\bar{W} \cap W^{\rho}$ (diminuer ε oblige à diminuer σ' pour garder cette propriété). De plus le lacet $\theta \to \Gamma(\theta) = \psi \circ \gamma(\theta)$ est un lacet d'indice 1 autour du point $T = 0$ proche du cercle $|T| = \varepsilon$.

Dans les plans $|T| < \infty$ et $|T'| < \infty$ respectivement, l'image $\bar{\Gamma}$ de Γ borde des "disques" ouverts, disons D_ε et D'_ε , $D'_\varepsilon = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - \bar{D}_\varepsilon$, D'_ε étant proche du disque "standard" $|T| < \varepsilon$. Notons que $W^{\rho} \cap \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ qui est l'image de ψ contient le disque D'_ε. Pour $\alpha > 0$ notons enfin $D(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \;/ |z| < \alpha\} \subset \mathbb{C}$.
La restriction ψ' de ψ au compact $K = \psi^{-1}(\overline{D'_\varepsilon}) \cap \{|Y| \leqslant \rho\varepsilon\}$ est alors une fibration de fibre le disque fermé $\bar{D}(\rho\varepsilon)$ et de base $\bar{D}'_\varepsilon$; la base étant un disque, cette fibration est triviale. Si ρ est choisi assez petit une trivialisation est donnée par l'application $\Phi = (\psi', Y)$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & & \bar{D}'_\varepsilon \times \overline{D(\rho\varepsilon)} \arrow[dl, "pr_2"] \\ & \bar{D}'_\varepsilon & \end{tikzcd}$$

où pr_2 est la seconde projection.

Désignons par U le complémentaire de K dans $W \cap W^{\rho}$, $U \subset W$.
Pour le feuilletage $\mathcal{F}_\eta$ nous pouvons effectuer une décomposition analogue relativement au lacet $\gamma_1 = \varphi \circ \gamma$:

- $\psi_1 : W_1^{\rho} \to L_1$ est la fibration définie par $\tilde{\mathcal{F}}_\eta$ sur un voisinage W_1^{ρ} de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1) - D_{\sigma'_1}(t_o)$,

- l'image $\bar{\Gamma}_1$ de $\varphi_1 \circ \gamma_1$ borde des "disques" ouverts $D_{1,\varepsilon}$ et $D'_{1,\varepsilon}$ dans les plans $|t| < \infty$ et $|t'| < \infty$ respectivement, $\bar{\Gamma}_1 = \partial\overline{D_{1,\varepsilon}} = \partial\bar{D}'_{1,\varepsilon}$.

- U_1 est l'image par φ de l'ouvert U.

- $K_1 \subset W_1^{\rho}$ est un voisinage compact de $D'_{1,\varepsilon}$ tel que

$$K_1 \cap \psi_1^{-1}(\bar{\Gamma}_1) = \bar{U}_1 \cap \psi_1^{-1}(\bar{\Gamma}_1)$$

et tel que la restriction ψ'_1 de ψ_1 à K_1

$$\psi'_1 : K_1 \to \bar{D}'_{1,\varepsilon} ,$$

soit une fibration de fibre $\bar{D}(\rho\varepsilon)$.

Cette fibration, ici encore, est triviale pour ε, ρ, σ' assez petits ; une trivialisation est donnée par l'application $\Phi_1 = (\psi'_1, Y_1)$ où $Y_1 : K_1 \to \mathbb{C}$ est une application voisine de $Y \to \sqrt{2}\, e^{-3/2}.Y$; ceci résulte du fait que sur $K_1 \cap \bar{U}_1$ on a :

$$y \circ \varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \frac{e^{3/2}}{\sqrt{2}} .xT + \Theta_2 (\|(x,T)\|).$$

La restriction φ^o de φ à $\psi'^{-1}(\Gamma)$ est un morphisme de fibré, i.e. :

$$\begin{tikzcd} \psi'^{-1}(\bar{\Gamma}) \arrow[r, "\varphi^o", "\sim"'] \arrow[d] & \psi_1'^{-1}(\bar{\Gamma}_1) \arrow[d] \\ \bar{\Gamma} \arrow[r, "\varphi_2 = v(T)", "\sim"'] & \bar{\Gamma}_1 \end{tikzcd}$$

La conjugaison topologique sera assurée si l'on sait prolonger φ^o en un homéomorphisme $H : K \to K_1$ respectant les fibrations :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "H", "\sim"'] \arrow[d, "\psi'"'] & K_1 \arrow[d, "\psi'"] \\ \bar{D}'_\varepsilon \arrow[r, "V", "\sim"'] & \bar{D}'_{1,\varepsilon} \end{tikzcd}$$

avec $V = H|D'_\varepsilon$ et $H|(\psi')^{-1}(\bar{\Gamma}) = \varphi^o$.

Prolongeons d'abord V : puisque $\bar{D}'_\varepsilon$ et $\bar{D}'_{1,\varepsilon}$ sont homéomorphes au disque unité standard D

$$\begin{cases} \lambda : D'_\varepsilon \to D \\ \lambda_1 : D'_{1,\varepsilon} \to D \end{cases}$$

se donner un prolongement de v revient à se donner $\bar{V} = \lambda_1 \circ V \circ \lambda^{-1}$ sur le disque $\bar{D}$. Comme $\bar{\Gamma}$ est envoyé sur $\bar{\Gamma}_1$ par $v, \bar{v} = \lambda_1 \circ v \circ \lambda^{-1}$ est un homéomorphisme du cercle unité $\partial\bar{D}$; on construit V en prolongeant v radialement i.e. :

$$\bar{V}(r,\theta) = (r, \bar{v}(\theta))$$

dans les coordonnées polaires de $\bar{D}$.

Soient Δ et Δ_1 définies de la façon suivante :

$$\Delta = (\lambda, id) \circ \phi$$

$$\Delta_1 = (\lambda_1, id) \circ \phi_1$$

où id est l'identité de $\bar{D}(\rho\varepsilon)$. L'application $\bar{h} = \Delta_1 \circ \varphi^{o} \circ \Delta^{-1}$, bien définie sur $\partial\bar{D} \times \bar{D}(\rho\varepsilon)$, est alors un morphisme de fibré trivial au dessus de $\bar{v}$:

$$\begin{tikzcd} \partial\bar{D} \times \partial\bar{D}(\rho\varepsilon) \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "pr_1"'] & \partial\bar{D} \times \partial\bar{D}(\rho\varepsilon) \arrow[d, "pr_1"] \\ \partial\bar{D} \arrow[r, "\bar{v}"] & \partial\bar{D} \end{tikzcd}$$

qu'il suffit de prolonger en un morphisme $\bar{H}$ de fibré trivial au dessus de $\bar{V}$ respectant la section nulle :

$$\begin{tikzcd} \partial\bar{D} \times \bar{D}(\rho\varepsilon) \arrow[r, "\bar{H}"] \arrow[d, "pr_1"'] & \bar{D} \times \bar{D}(\rho\varepsilon) \arrow[d, "pr_1"] \\ \bar{D} \arrow[r, "\bar{V}"] & \bar{D} \end{tikzcd}$$

pour obtenir l'homéomorphisme souhaité :

$$\begin{cases} H = \Delta_1 \circ \bar{H} \circ \Delta^{-1} \text{ sur } K , \\ H = \varphi \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Montrons maintenant l'existence de $\bar{H}$.

Remarquons que $\bar{h}$ définit une famille continue $\bar{h}_\theta$ de difféomorphismes C^∞ du disque $\bar{D}_\rho$ paramètrée par le cercle unité $S^1 = \partial\bar{D}$:

$$\bar{h}_\theta : \bar{D}(\rho\varepsilon) \to \bar{D}(\rho\varepsilon) \quad , \quad \bar{h}_\theta = \bar{h}|(\theta \times \bar{D}(\rho\varepsilon))$$

les $\bar{h}_\theta$ fixant l'origine: $\bar{h}_\theta(o) = 0$.

Notons $\mathrm{Diff}_o(\bar{D}_\rho, 0)$ le groupe des homéomorphismes du disque $\bar{D}_\rho$ qui fixent

l'origine. Lorsque la classe d'homotopie $[\bar{h}_\theta]$ de la famille $[\bar{h}_\theta]$ dans $\pi_1(\mathrm{Diff}(\bar{D}(\rho\varepsilon),0))$ est nulle le prolongement de $\bar{V}$ en $\bar{H}$ est immédiat.
Si $\bar{h}_{\theta,s} : \bar{D}(\rho\varepsilon)\times[0,1]\to\bar{D}(\rho\varepsilon)$ est une homotopie joignant $(\bar{h}_\theta)$ à $(\bar{h}_0)_{,0}$ i.e. :

$$\bar{h}_{\theta,1} = \bar{h}_\theta \quad , \quad \bar{h}_{\theta,0} = \bar{h}_0 \quad , \quad \bar{h}_{\theta,s}(0) = 0,$$

alors $\bar{H}$ défini par :

$$\bar{H}((r,\theta),z) = (\bar{V}(r,\theta),\bar{h}_{\theta,r}(z))$$

convient.

Pour calculer la classe d'homotopie de $(\bar{h}_\theta)$, nous utilisons le lemme suivant dont la démonstration nous a été donnée par B. PERRON.

<u>Lemme</u> : Soit $\mathrm{Diff}_0^+(\bar{D},0)$ le groupe des homéomorphismes du disque unité $\bar{D}$ qui laissent fixe l'origine et conservent l'orientation, muni de la topologie C^0. L'application

$$\pi_1(\mathrm{Diff}_0(\bar{D},0)) \to \mathbb{Z}$$

qui a la classe $[h_\theta]$ d'une famille continue (h_θ), $\theta \in S^1$, fait correspondre le degré de l'application $\theta \to h_\theta(1)$ du cercle unité $S^1 = \partial\bar{D}$ dans lui-même, est un isomorphisme de groupe.

D'après ce lemme, il suffit de vérifier que la classe d'homotopie du lacet $y_1 \circ \varphi \circ \gamma$ dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ est nulle. Comme l'application y_1 est voisine de $\sqrt{2}\, e^{-3/2}.y$ pour ε et ρ petits la classe d'homotopie de ce lacet est la même que celle du lacet $\mu = y \circ \varphi \circ \gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}^*$.
Celle-ci est donnée par la valeur de l'intégrale :

$$I = \frac{1}{2i\pi}\int_{\varphi\circ\gamma} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1\varphi_2} .$$

La forme $\dfrac{d\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1\varphi_2}$ est fermée ; la valeur de I ne dépend que de la classe d'homologie de γ dans $U - \{\varphi_1\varphi_2 = 0\}$, U pouvant être pris contractile. Mais $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 0$ définissent précisément les axes des T et des x ; il en résulte que γ est homologue au lacet $\gamma^1 * \gamma^2$:

$$\begin{cases} \gamma^1(\theta) = (\rho,\ \varepsilon e^{i\theta}) \\ \gamma^2(\theta) = (\rho\, e^{-i\theta}, \varepsilon) , \qquad \theta \in [0,2\pi] . \end{cases}$$

Sur γ_1, $\phi_1\,\phi_2$ vaut $\dfrac{e^{3/2}}{\sqrt{2}}\rho\varepsilon\, e^{i\theta} + \ldots$, et :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^1} \frac{d\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1\varphi_2} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} i\theta\, d\theta = 1 \ ;$$

Sur γ_2, $\phi_1\,\phi_2$ vaut $\frac{e^{3/2}}{\sqrt{2}}\ \rho\varepsilon\ e^{-i\theta} + \ldots$, et :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^2} \frac{d\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1\varphi_2} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} -i\theta\, d\theta = -1 \ ;$$

ce qui confirme l'égalité $I = 0$.

<u>Démontrons maintenant le lemme</u> : Remarquons d'abord que l'injection :

$$\mathrm{Diff}_o(S^1) \to \mathrm{Diff}_o(\bar{D},0)$$

qui a un homéomorphisme g_o de $S^1 = \partial\bar{D}$ associe l'homéomorphisme du disque :

$$g : z \to |z|\ g_o(\tfrac{z}{|z|})$$

définit une homotopie équivalence.

En effet, tout homéomorphisme $g \in \mathrm{Diff}_o(\bar{D},0)$ est relié par le chemin g_s, $s \in [0,1]$:

$$g_s(z) = \begin{cases} |z|\, g(\frac{z}{|z|}), & \text{pour } s \leqslant |z|, \\ s\ g(\frac{z}{s}) \ , & \text{pour } s > |z|, \end{cases}$$

à l'homéomorphisme $z \to |z|\ g(\frac{z}{|z|})$.

Il en résulte que $\mathrm{Diff}_o(\bar{D},0)$ a deux composantes connexes notées $\mathrm{Diff}_o^+(\bar{D},0)$ et $\mathrm{Diff}_o^-(\bar{D},0)$ "induites" par les deux composantes connexes $\mathrm{Diff}_o^+(S^1)$ et $\mathrm{Diff}_o^-(S^1)$ de $\mathrm{Diff}_o(S^1)$ constituées respectivement des homéomorphismes qui conservent et de ceux qui renversent l'orientation.

Pour montrer le lemme il suffit de prouver que l'application, qui à une famille continue g_s d'homéomorphismes du cercle S^1 conservant l'orientation, associe le degré de l'application :

$$\begin{cases} S^1 \to S^1 \\ s \to g_s(1) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\pi_1(\mathrm{Diff}_o^+(S^1))$ dans $\mathbb{Z}$. Considérons alors l'application de restriction au point $\{1\}$:

$$\alpha \ : \ \mathrm{Diff}^+_o(S^1) \to C^o(\{1\},S^1) \simeq S^1 \ ,$$
$$g \to g(1)$$

α est une fibration de fibre l'espace contractile $\mathrm{Diff}^+_o(S^1,1)$ des homéomorphismes de S^1 qui fixent 1 et conservent l'orientation. Nous avons alors la suite exacte :

$$0 = \pi_1(\mathrm{Diff}^+_o(S^1,1)) \to \pi_1(\mathrm{Diff}^+_o(S^1)) \to \pi_1(C^o(\{1\},S^1)) \to \pi_o\mathrm{Diff}^+(S^1,1) = 0$$

qui conduit à $\pi_1(\mathrm{Diff}^+_o(S^1)) \simeq \pi_1(C^o(\{1\},S^1)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

q.e.d.

quatrième partie

généricité

. CHAPITRE I .

LA STRUCTURE DE L'ENSEMBLE ALGÉBRIQUE $\mathcal{J}_\nu$ DES FORMES INTÉGRABLES HOMOGÈNES DE DEGRÉ ν .

0. Préliminaires. Avant d'aborder l'étude de cette structure donnons-en quelques motivations :

(O.A) Lorsque l'on étudie des problèmes de stabilité ou de détermination finie pour des objets tels que fonctions numériques ou champs de vecteurs, il est utile et agréable de pouvoir joindre par un chemin deux objets que l'on veut comparer ; cette technique permettant de linéariser des problèmes qui ne l'étaient pas initialement.
Etant donné un germe de forme holomorphe intégrable dont le premier jet non nul est ω_ν :

$$\omega = \omega_\nu + \omega_{\nu+1} + \dots + \omega_i + \dots ,$$

chaque ω_i étant homogène de degré i, on remarque dans un premier temps que ω_ν est intégrable et dans un second temps que le chemin holomorphe

$$t \to \omega_t = \omega_\nu + t\omega_{\nu+1} + \dots + t^{i-\nu}\omega_i + \dots$$

est un chemin de formes intégrables joignant ω_ν à ω. D'autre part, étant donné un entier k, $j^k\omega$ n'est en général pas intégrable sauf pour $k = \nu$. L'objet ω_ν est donc le seul candidat raisonnable à la fonction de "modèle".
Une question, à laquelle nous répondrons par l'affirmative se pose alors: est-ce que génériquement une forme homogène ω_ν détermine, en un sens à préciser, la nature de ses "perturbations" $\omega = \omega_\nu + \dots$?

(O.B) Il semble que les formes homogènes vont jouer un rôle important dans l'étude des formes algèbriques intégrables sur $\mathbb{C}^n$ i.e. des formes intégrables polynomiales :

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 + \dots + \Omega_N ,$$

où chaque Ω_i est homogène de degré i. Nous remarquons ici que la forme homogène Ω_N qui représente la géométrie de Ω à l'infini, est intégrable. On se contentera, pour justifier notre propos, de donner les deux exemples suivants :

1) cette propriété est due à C. Camacho et A. Lins Neto dans [5]: on suppose que $N = n-1$ et :

$$\Omega_{n-1} = x_1 \dots x_n \Sigma \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \text{, avec } \lambda_i \neq \lambda_j \neq 0 \text{ ;}$$

Alors il existe un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\Omega = \phi_v^* \Omega_{n-1} \text{ ,}$$

où ϕ_v désigne la translation $x \to x+v$.

2) Cette seconde propriété, que nous laissons établir au lecteur, est la suivante :

si $\Omega_N = dP_{N+1}$ où P_{N+1} est un polynome homogène à singularité isolée, alors Ω est fermée (ceci en dimension $n \geqslant 3$).

1. <u>Stratification de $\mathcal{J}_\nu$</u> : Désignons par Λ_ν^1 l'espace vectoriel des 1-formes homogènes de degré ν sur $\mathbb{C}^n$:

$$\Lambda_\nu^1 = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx_i \text{ , } a_i(tx) = t^\nu a_i(x) \} \text{,}$$

et par $\mathcal{J}_\nu$ le sous ensemble algèbrique de Λ_ν^1 constitué des formes intégrables ; lorsque $n > 2$, $\mathcal{J}_\nu$ apparait comme une intersection de quadriques.

Toute l'étude que nous faisons ici étant triviale et ne présentant que peu d'intérêt en dimension deux, nous supposerons implicitement dans tout ce qui suit que la dimension ambiante n est au moins trois. Nous désignerons par $\mathcal{P}_\delta$ l'espace des polynômes homogènes de degré δ à n variables. Le produit intérieur par le champ radial $R = \Sigma \, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$i_R : \Lambda_\nu^1 \to \mathcal{P}_{\nu+1}$$

nous fait distinguer deux cas :

a) ce que nous appelons usuellement les formes dicritiques qui constituent un sous ensemble algèbrique de $\mathcal{J}_\nu$:

$$\mathcal{D}_\nu = \mathcal{J}_\nu \cap \operatorname{Ker} i_R$$

On sait peu de choses sur cet ensemble si ce n'est en dimension trois ;

dans ce cas $\mathcal{D}_\nu$ est précisément Ker i_R et donc est un espace vectoriel. Visiblement, ici $\mathcal{D}_\nu$ s'identifie aux équations de Pfaff de degré ν sur l'espace projectif $\mathbb{PC}(2)$ et c'est ce qui justifie la présence d'une littérature ancienne sur ce sujet. Considérons $U_\nu \subset \mathcal{J}_\nu$ l'ouvert de Zariski constitué des formes ω_ν telles que l'origine de $\mathbb{C}^3$ soit un zéro algèbriquement isolé de $d\omega_\nu$ (on suppose implicitement $\nu \geq 2$). L'hypothèse traduite sur l'espace projectif $\mathbb{PC}(2)$, signifie que le feuilletage (singulier) de $\mathbb{PC}(2)$ défini par un élément ω_ν de U_ν n'a que des singularités génériques : si ω est une équation locale de ω_ν sur $\mathbb{PC}(2)$ au voisinage d'un point m singulier on a $d\omega(m) \neq 0$.

Soit donc ω_ν un élément de U_ν et $\omega'_\nu \in \mathcal{J}_\nu$ un élément voisin de ω_ν ; alors O est aussi une singularité isolée de $d\omega'_\nu$ et le lemme de division de G. de Rham assure l'existence d'un champ linéaire A tel que :

$$\omega'_\nu = i_A \, d\omega'$$

On remarque alors que si ν est supérieur ou égal à trois, A est nécessairement colinéaire au champ radial R (ce calcul est établi dans [5] et donc ω'_ν est aussi dicritique.
Ainsi en dimension n=3, $\mathcal{D}_\nu$ <u>est une composante irréductible de</u> $\mathcal{J}_\nu$ (pour $\nu \geq 3$). Il y a donc lieu d'étudier ce type de formes. Cette étude a été menée partiellement par Gaston Darboux au siècle dernier ainsi que par de nombreux autres auteurs, et plus récemment généralisée par J.P. Jouanoulou dans [23] (où l'on trouvera d'ailleurs une bibliographie se rapportant à se sujet). En voici quelques résultats extraits de [23]:

<u>1.2.a</u> : Si ω_ν possède une infinité de feuilles fermées adhérentes à l'origine (i.e. une infinité de séparatrices algèbriques), ω_ν possède une intégrale première rationnelle, ie une fraction rationnelle r telle que :

$$\omega_\nu \wedge dr = 0.$$

On remarquera notamment que l'existence d'une telle intégrale se lit topologiquement (comparer avec le résultat de la 3ème partie).
Il est difficile de s'empêcher de présenter la démonstration de ce résultat qui, de par sa simplicité, est un bel exercice de style.

Soit donc $\mathcal{S}$ l'ensemble des séparatrices algèbriques irréductibles étrangères de ω_ν. $\mathcal{S}$ s'identifie à l'ensemble des polynômes homogènes P irréductibles pour lesquels il existe une deux-forme η_P à coefficients homogènes telle que :

$$\omega_\nu \wedge dP = P.\eta_P ,$$

quotienté par la relation $P \sim Q \Leftrightarrow P = \lambda Q,\ \lambda \in \mathbb{C}^*$. On remarquera que le degré des coefficients de η_P est précisément $\nu-1$ (à moins que η_P soit identiquement nul auquel cas le résultat est démontré). Désignons par $\Lambda^2_{\nu-1}$ l'ensemble des deux formes à coefficients des polynomes homogènes de degré $\nu-1$. Considérons maintenant l'application linéaire d'espaces vectoriels :

$$\varphi : \mathbb{C}^{(\mathcal{P})} \longrightarrow \Lambda^2_{\nu-1} ,$$

définie par :

$$\varphi((z_P)) = \omega_\nu \wedge \sum_P z_P \frac{dP}{P} = \sum z_P \eta_P .$$

Puisque $\mathcal{P}$ est infini , $\mathbb{C}^{(\mathcal{P})}$ est de dimension infinie et φ a un noyau de dimension au moins deux ! Ainsi il existe des polynômes homogènes $P_1,\dots,P_q$ étrangers et des q-uples $\mathbb{C}$-indépendants $(\alpha_1,\dots,\alpha_q)$ et $(\beta_1,\dots,\beta_q)$ tels que :

$$\omega \wedge \Sigma\, \alpha_i \frac{dP_i}{P_i} = \omega \wedge \Sigma\ \beta_i \frac{dP_i}{P_i} = 0.$$

De ceci on tire l'existence de deux fractions rationnelles r_1 et r_2 telles que :

$$\omega = r_1\ \Sigma\ \alpha_i \frac{dP_i}{P_i} = r_2\ \Sigma\ \beta_i \frac{dP_i}{P_i} .$$

La fraction $r = \dfrac{r_1}{r_2}$ est non constante et satisfait $\omega \wedge dr = 0$.

<u>1.2.b.</u> En fait et nous l'avons démontré, lorsque ω_ν a un nombre fini de séparatrices algèbriques, ce nombre est borné par $\frac{1}{2}\,\nu(\nu-1)\binom{\nu+n-2}{\nu-2}-2 = N_{\nu,n}$ (où n est la dimension de l'espace ambiant), l'égalité ayant lieu lorsque ω_ν possède une intégrale première multiforme $f_1^{\lambda_1}\dots f_{N_{\nu,n}}^{\lambda_{N_{\nu,n}}}$. Ceci étant encore une condition topologique.

<u>1.2.c.</u> En dimension n=3, c'est à dire pour des équations de Pfaff sur $\mathbb{P}\mathbb{C}(2)$, l'ensemble des formes dicritiques ω_ν de degré donné $\nu \geq 3$ et qui ne possèdent pas de séparatrice algèbrique est une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski ; on remarquera que ces formes ne peuvent, par le théorème de Chow, possèder non plus de séparatrices holomorphes.

(Nous avons déjà signalé dans la première partie que la forme

$$(x^n z-y^{n+1})dx + (y^n x-z^{n+1})dy + (z^n y-x^{n+1})dz.$$

ne possèdait pas de séparatrices [23] .

A notre connaissance, il y a actuellement peu de résultats concernant les équations de Pfaff intégrables sur $\mathbb{P}\mathbb{C}(n)$ lorsque $n \geq 3$. Notamment, l'ensemble $\mathcal{D}_\nu$ des formes dicritiques n'est plus ici un espace vectoriel ; il va possèder une décomposition en sous variétés irréductibles :

$$\mathcal{D}_\nu = \bigcup_i \mathcal{D}_\nu^i$$

et il est peut-être possible que les résultats 1.2.c. ne se généralisent pas au delà de $\mathbb{P}\mathbb{C}(2)$; il pourrait par exemple exister une composante $\mathcal{D}_\nu^i$ telle que l'on ait la propriété : "$\omega_\nu \in \mathcal{D}_\nu^i \Rightarrow \omega_\nu$ possède une séparatrice ou une intégrale première d'un certain type".
Pour mener cette étude, il serait utile d'examiner l'ensemble algèbrique $F^2_{\nu-1}$ constitué des deux formes fermées homogènes α de degré $\nu -1$ satisfaisant à :

$$\alpha \wedge \alpha = 0$$

En effet, l'image de $F^2_{\nu-1}$ par le produit intérieur i_R est précisément $\mathcal{D}_\nu$.
Signalons enfin qu'en dimension 3, les formes dicritiques $\omega_\nu \in U_\nu$ (ie $d\omega_\nu$ a un zéro algèbriquement isolé) sont de ν détermination finie ([5] et [8]).

b) les formes non dicritiques $\mathcal{J}_\nu - \mathcal{D}_\nu$ que nous nous proposons maintenant d'étudier. Rappelons que la décomposition en facteurs irréductibles du cône tangent $P_{\nu+1} = \omega_\nu(R)$ d'une forme non dicritique ω_ν :

$$P_{\nu+1} = P_1^{n_1} \ldots P_p^{n_p} ,$$

conduit à une écriture "canonique" de ω_ν :

$$\omega_\nu = P_1^{n_1} \ldots P_p^{n_p} \left(\Sigma\lambda_i \frac{dP_i}{P_i} + d\left(\frac{\alpha}{P_1^{n_1-1} \ldots P_p^{n_p-1}}\right)\right) \qquad (*)$$

où α est homogène de degré $\Sigma(n_i-1)\nu_i = \nu+1 - \Sigma\nu_i$, et où ν_i est le degré de P_i. En effet, comme nous l'avons déjà signalé $P_{\nu+1}$ est un facteur intégrant de ω_ν. Alors que les P_i ne sont définis qu'à des constantes multiplicatives s_i près satisfaisant à :

$$s_1^{n_1} \ldots s_p^{n_p} = 1,$$

les λ_i sont parfaitement définis puisqu'ils apparaissent comme <u>résidus</u> de $\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}$ autour des séparatrices ($P_i = 0$). De plus ils vérifient l'égalité :

$$\Sigma\lambda_i \,.\, \nu_i = 1.$$

Ceci se remarque en recalculant $P_{\nu+1}$ à partir de l'identité (*).

Définissons alors la strate $\Sigma^p_{n_1,\ldots,n_p;\nu_1\ldots\nu_p}$ comme suit :

ω_ν appartient à $\Sigma^p_{n_1\ldots n_p;\nu_1\ldots\nu_p}$ si le cône tangent $P_{\nu+1} = \omega_\nu(R)$ de ω_ν se décompose en :

$$P_{\nu+1} = P_1^{n_1} \ldots P_p^{n_p}$$

où les P_i sont des polynômes homogènes de degré ν_i, irréductibles et étrangers. Il va de soi que cette notation est à permutation simultanée près des couples (n_i, ν_i).

<u>Théorème 1.1.</u> a) les $\Sigma^p_{n_1,\ldots,n_p;\nu_1,\ldots,\nu_p}$ forment une partition de $\mathcal{J}_\nu - \mathcal{D}_\nu$ en sous variétés analytiques lisses et leurs adhérences sont des cônes algèbriques irréductibles de dimensions respectives $\delta_{\nu_1} + \ldots \delta_{\nu_p} + \delta_{\nu+1-\Sigma\nu_j}$ où $\delta_k = \binom{n+k-1}{k}$,

b) les adhérences $\overline{\Sigma^p_{1,\ldots,1\,;\,\nu_1,\ldots,\nu_p}}$ $(\Sigma\nu_j = \nu+1)$, $p=1,\ldots,\nu+1$, sont les composantes irréductibles de $\mathcal{J}'_\nu = \overline{\mathcal{J}_\nu - \mathcal{D}_\nu}$. Plus précisément, on a :

$$(\ast) \qquad \Sigma^p_{n_1,\ldots,n_p\,;\,\nu_1,\ldots,\nu_p} \subset \overline{\Sigma^{p+1}_{1,\ldots,1\,;\,\nu_1,\ldots,\nu_p\,,\,\nu+1-\Sigma\nu_j}}$$

c) soit $\omega \in \Sigma_{1,\ldots,1\,;\,\nu_1,\ldots,\nu_p}$, $\mathcal{J}_\nu$ est lisse en ω si et seulement si les résidus $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ de $\frac{\omega}{\omega(R)}$ sont deux à deux distincts.

<u>Démonstration</u> : a) Considérons une strate $\Sigma^p_{n_1,\ldots,n_p\,;\,\nu_1,\ldots,\nu_p}$ que nous noterons plus simplement Σ . L'application

$$\varphi : \mathcal{P}_{\nu_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{\nu_p} \longrightarrow \mathcal{P}_{\nu+1}$$
$$(P_1,\dots,P_p) \longrightarrow P_1^{n_1}\dots P_p^{n_p}$$

se factorise en une application $\bar\varphi$ du produit $\mathbb{P}\mathcal{P}_{\nu_1} \times\dots\times \mathbb{P}\mathcal{P}_{\nu_p}$ des espaces projectifs associés aux $\mathcal{P}_{\nu_j}$, dans $\mathbb{P}\mathcal{P}_{\nu+1}$. L'image $\mathbb{P}\,\bar S$ de $\bar\varphi$ est un sous ensemble algèbrique de $\mathbb{P}\mathcal{P}_{\nu+1}$ (Théorèmes de Grauert et de Chow). Un bref calcul de dérivée prouve que $\bar\varphi$ est une immersion sur l'ouvert $\mathbb{P}U_{\nu_1,\dots,\nu_p}$ où :

$$U_{\nu_1,\dots,\nu_p} = \mathcal{P}'_{\nu_1} \times \dots\times \mathcal{P}'_{\nu_p} - \Delta,$$

$\mathcal{P}'_k$ désigne l'ouvert dense des polynomes irréductibles $\neq 0$ et Δ l'union des "diagonales" $\Delta_{k,s} = \{(P_1,\dots,P_p) \ / \ \exists c \in \mathbb{C}, P_k = cP_s\}$, $k \neq s$. On en déduit que l'image $\bar S$ de $\bar\varphi$ est un cône algèbrique irréductible de dimension $\delta_1+\dots+\delta_p - p + 1$ et que $S = \varphi(U_{\nu_1,\dots,\nu_p})$ est lisse. L'adhérence $\bar\Sigma$ de Σ est l'intersection de $i_R^{-1}(S)$ avec $\mathcal{J}'_\nu$ et $\Sigma = i_R^{-1}(\bar S) \cap \mathcal{J}'_\nu$. Remarquons que Σ est par i_R un fibré affine de base $S = \varphi(U_{\nu_1,\dots,\nu_p})$ et de fibre type l'espace :

$$F = \mathcal{P}_{\nu+1-\Sigma\nu_j} \times H_{\nu_1,\dots,\nu_p} \quad ;$$

$H_{\nu_1,\dots,\nu_p}$ étant l'hyperplan de $\mathbb{C}^p$ d'équation $\Sigma\lambda_j\nu_j = 1$. En effet, soient $P = P_1^{n_1}\dots P_p^{n_p}$ un point de S, $x_o \in \mathbb{C}^n$ n'annulant pas $P_1,\dots,P_{p-1}$ et W un voisinage de $(P_1,\dots,P_p)$ dans $U_{\nu_1,\dots,\nu_p}$ tel que la restriction de $\bar\varphi$ au cône $\mathbb{P}W$ engendré par W soit un plongement. Visiblement la restriction de φ au sous espace W' de W constitué des polynômes $(Q_1,\dots,Q_p)$ qui vérifient les équations linéaires :

$$Q_1(x_o) = P_1(x_o),\dots,Q_{p-1}(x_o) = P_{p-1}(x_o) \quad ;$$

est un isomorphisme sur un voisinage ouvert U de P dans S. Soit $\psi : W' \times F \to \Lambda^1_\nu$ qui à $(Q_1,\dots,Q_p \ ; \ \alpha \ ; \ \lambda_1,\dots,\lambda_p)$ associe la forme :

$$Q_1^{n_1}\dots Q_1^{n_p}(\Sigma\,\lambda_j\,\frac{dQ_j}{Q_j} + d(\frac{\alpha}{Q_1^{n_1-1}\dots Q_p^{n_p-1}}))\ ;$$

sa restriction $\psi|(P_1,\dots,P_p)\times F$ est un plongement et $i_R \circ \psi = \varphi|W'$.
Il en résulte que ψ induit une trivialisation de $i_R^{-1}(U)\cap\Sigma$.

b) Il suffit de prouver les inclusions (✱). Soit ω d'écriture canonique

$$(✱✱)\qquad \omega = P_1^{n_1}\dots P_1^{n_p}\ (\Sigma\,\lambda_j\,\frac{dP_j}{P_j} + d(\frac{\alpha}{P_1^{n_1-1}\dots P_p^{n_p-1}})).$$

Puisque α et $P_1^{n_1-1}\dots P_p^{n_p-1}$ ont même degré, la forme

$$\omega_\varepsilon = (P_1\dots P_p)(P_1^{n_1-1}\dots P_p^{n_p-1} + \varepsilon\alpha)(\ \Sigma\lambda_j\,\frac{dP_j}{P_j} + \varepsilon\frac{d(P_1^{n_1-1}\dots P_p^{n_p-1}+\varepsilon\alpha)}{P_1^{n_1-1}\dots P_p^{n_p-1}+\varepsilon\alpha})$$
$$+\ P_1\dots P_p\ \alpha(\frac{d\alpha}{\alpha} - \Sigma(n_j-1)\,\frac{dP_j}{P_j}\ )$$

est homogène de degré ν et vaut ω pour $\varepsilon = 0$. En remarquant que :

$$\frac{\omega_\varepsilon}{P_1\dots P_p(P_1^{n_1-1}\dots P_p^{n_p-1} + \varepsilon\alpha)}$$

est fermée, on s'assure à la fois que ω_ε est intégrable et que $P_1\dots P_p(P_1^{n_1-1}\dots P_p^{n_p-1}+\varepsilon\alpha)$ est un facteur intégrant de ω_ε . Par le théorème de Bertini, génériquement sur α, $P_1^{n_1-1}\dots P_p^{n_p-1}+\varepsilon\alpha$ est irréductible pour $\varepsilon \neq 0$ petit ; d'où la conclusion.

c) Soit $\omega\in\Sigma = \Sigma^p_{1,\dots,1\ ;\ \nu_1,\dots,\nu_p}$ d'écriture canonique

$$\omega = P_1\dots P_p\ \Sigma\,\lambda_j\,\frac{dP_j}{P_j}$$

Raisonnons par l'absurde : si $\mathcal{J}_\nu$ n'est pas lisse en ω , il existe un chemin ω_ε, $\omega_o = \omega$, tel que ω_ε appartienne à une autre strate, pour $\varepsilon\neq 0$. Soit $D\subset\mathbb{C}^n$ une droite affine générique qui coupe le cône d'équation $\omega(R) = P_1\dots P_p = 0$ transversalement en $\nu+1$ points réguliers, $z_1,\dots,z_{\nu+1}$. Ce sont exactement les zéros de la restriction de $\omega(R)$ à D ; ils sont tous simples. Soit $I = \{I_1,\dots,I_p\}$ la partition de $\{1,\dots,\ \nu+1\}$ définie par :

$$k\in I_j \iff P_j(z_k) = 0.$$

La restriction de $\omega_\varepsilon(R)$ à D possède aussi $\nu+1$ zéros simples $z_1(\varepsilon),\ldots,z_{\nu+1}(\varepsilon)$ voisins de $z_1,\ldots,z_p$, pour ε assez petit, disons $|\varepsilon| < K$. De même la décomposition de $\omega_\varepsilon(R)$ en facteurs irréductibles définit, pour $\varepsilon \neq 0$, une partition I_ε de $\{1,\ldots,\nu+1\}$ distincte de I car $\omega_\varepsilon \notin \Sigma$. Comme le nombre de composantes irréductibles est semi-continu inférieurement, on a $\# I_\varepsilon \leq \# I$ et il existe deux indices i_1, i_2 qui appartiennent à un même élément de I_ε mais à deux éléments distincts de I, ceci pour ε fixé assez petit. Ainsi $z_{i_1}(\varepsilon)$ et $z_{i_2}(\varepsilon)$ sont sur la partie lisse d'une même composante de $\{\omega_\varepsilon(R) = 0\}$ et

$$(c1) \int_{\partial D_1} \frac{\omega_\varepsilon}{\omega_\varepsilon(R)} = \int_{\partial D_2} \frac{\omega_\varepsilon}{\omega_\varepsilon(R)} ,$$

où D_1 et D_2 sont deux disques de centre z_{i_1} et z_{i_2} dans D qui contiennent $z_{i_1}(\varepsilon')$ et $z_{i_2}(\varepsilon')$, respectivement pour tout $|\varepsilon'| < K$. Mais $\lambda_{i_2} \neq \lambda_{i_2}$, ce qui est contradictoire avec la continuité des intégrales (c.1) par rapport au paramètre ε, $|\varepsilon| < K$. D'où la conclusion.

Réciproquement, supposons $\lambda_1 = \lambda_2$, et donnons nous un chemin Q_ε dans $\mathcal{P}_{\nu_1+\nu_2}$, $Q_0 = P_1P_2$ et tel que pour $\varepsilon \neq 0$ assez petit Q_ε soit irréductible. La forme :

$$\omega_\varepsilon = Q_\varepsilon\, P_3 \ldots P_n \left(\lambda_1 \frac{dQ_\varepsilon}{Q_\varepsilon} + \lambda_3 \frac{dP_2}{P_2} + \ldots + \lambda_p \frac{dP_p}{P_p}\right)$$

n'est pas dans Σ pour $\varepsilon \neq 0$ et $\omega_0 = \omega$. Il en résulte que ω est un élément de l'intersection de deux composantes irréductibles de $\mathcal{J}'_\nu$.

QED

<u>Exercice</u> : Montrer que l'ensemble des <u>germes</u> de formes intégrables dicritiques est connexe par arc (analytiques par morceaux) et qu'en dimension 3, l'ensemble de tous les germes de formes intégrables non nulles est connexe par arc.

2. <u>Lieu singulier des formes homogènes intégrables.</u> Désignons par $S(\omega)$ le lieu singulier de :

$$\omega = P_1^{n_1} \ldots P_p^{n_p} \left(\Sigma \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} + d\left(\frac{\alpha}{P_1^{n_1-1} \ldots P_p^{n_p-1}}\right)\right).$$

Proposition 2.1. a) $S(\omega)$ est contenu dans $\{P_1 \ldots P_p = 0\}$;

b) si les λ_j sont tous non nuls et $\alpha \not\equiv 0$, alors $S(\omega)$ est de codimension $\geqslant 2$;

c) lorsque tous les n_i valent 1 et que les λ_j sont non nuls, on a

$$S(\omega) = \bigcup_{i \neq j} \{P_i = 0,\ P_j = 0\} \bigcup_j S(dP_j) \ ;$$

d) Lorsque les n_j ne sont pas tous égaux à 1,

$$S(\omega) = \bigcup_{i \neq j} \{P_i = 0, P_j = 0\} \bigcup_j S(dP_j) \bigcup_{j, n_j > 1} \{P_j = 0,\ \alpha = 0\}$$

e) cod $S(\omega) = 1$ si et seulement si :

. un λ_j est nul et $n_1 = \ldots = n_p = 1$,

. $|\lambda_j| + (n_j - 1) = 0$, ou $\alpha \equiv 0$, et les n_j ne valent pas tous 1.

Il en résulte que l'ensemble des formes homogènes telles que codim $S(\omega) = 1$ est algèbrique de codimension 1 dans $\mathfrak{J}'_\nu$.

Démonstration : Nous établissons a) et laissons b)..-..e) en exercice. Soit m un point de $S(\omega)$ et supposons que $P_1 \ldots P_p(m) \neq 0$. La droite $\gamma : t \to tm$ joignant O et m est alors contenue toute entière dans $S(\omega)$; de sorte que

$$\gamma^*(\omega) = 0$$

Puisque α et $P_1^{n_1 - 1} \ldots P_p^{n_p - 1}$ ont même degré nous avons

$$0 = \gamma^* \omega = (P_1^{n_1} \ldots P_p^{n_p} \circ \gamma) \Sigma\, \lambda_j \nu_j = P_1^{n_1} \ldots P_p^{n_p} \circ \gamma .$$

. CHAPITRE II .

UN CRITÈRE ALGÉBRIQUE GÉNÉRIQUE D'EXISTENCE D'INTÉGRALES PREMIÈRES MULTIFORMES DU TYPE $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, $n \geq 3$

Le but de ce chapitre est de déterminer une classe $\mathcal{A}_\nu$ de formes intégrables homogènes non dicritiques, contenant un ouvert semi-algèbrique (réel) dense de $\mathcal{J}_\nu - \mathcal{D}_\nu$ et qui possède la propriété remarquable suivante :

> tout germe en $0 \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, de forme holomorphe ω dont le jet d'ordre ν est un élément de $\mathcal{A}_\nu$ admet une intégrale première multiforme du type $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

Pour cela nous établirons un critère d'existence de telles intégrales premières qui ne portera que sur la topologie du cône tangent de ω et sur les résidus λ_j de ω_ν .

§1. <u>Formes domestiques et apprivoisées.</u> Soit $\omega_\nu \in \Sigma^p_{1,\ldots,1\,;\,\nu_1,\ldots,\nu_p}$ une forme homogène de degré ν sur $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$,

$$\omega_\nu = P_1 \ldots P_p \sum_j \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} \quad , \quad \sum \lambda_j \nu_j = 1.$$

Nous disons qu'un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de forme holomorphe intégrable de plus petit jet non nul ω_ν, $\omega = \omega_\nu + \ldots$, est <u>apprivoisé</u> si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) Si $p \geq 2$, les λ_j et $1/\lambda_j$ ne sont pas des entiers ≤ 0 et l'un d'eux est ou bien non réel > 0, ou bien est réel > 0 et vérifie les conditions de type petits dénominateurs de SIEGEL, [41] ;

b) le cône tangent de ω, $C_\omega \subset \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$, d'équation homogène réduite $P_1 \ldots P_p = 0$, est à croisements normaux ;

Nous dirons que $\omega = \omega_\nu + \ldots$ est <u>domestique</u> (cette notion ne sera utilisée que dans la partie 6) si ω est apprivoisée et vérifie la condition supplémentaire :

c) les composantes irréductibles de $C_\omega \subset \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$, d'équations homogènes réduites $P_1 = 0, \ldots, P_p = 0$, sont lisses.

Comme nous le verrons ultérieurement, les conditions b) et c) signifient que la fonction multiforme $P = P_1^{\lambda_1} \dots P_p^{\lambda_p}$, intégrale première de ω_ν, est de détermination finie faible, au sens de la partie 6 chapitre II.

Notons que la condition b) implique, d'après un théorème de Fulton [19], [11], que le premier groupe fondamental de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1) - C_\omega$ est abélien ; si de plus p=1, i.e. C_ω est irréductible, il est fini, plus précisément $\pi_1(\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1) - C_\omega) = \mathbb{Z}/(\nu+1)\mathbb{Z}$.

Désignons par $\mathcal{A}_\nu$ l'ensemble des formes homogènes ω_ν apprivoisées et introduisons la définition suivante.

<u>Définition 1.1.</u> : Une forme non dicritique $\omega_\nu \in \mathcal{J}_\nu - \mathcal{D}_\nu$ est abélienne si le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)-C_{\omega_\nu})$ du complémentaire de son cône tangent C_{ω_ν} est abélien. S'il est fini nous dirons que ω_ν est finie. Désignons par $\mathcal{A}b_\nu$ l'ensemble des formes homogènes abéliennes de degré ν, nous avons le :

<u>Théorème 1.2.</u> : a) $\mathcal{A}_\nu \subset \mathcal{A}b_\nu$,

b) $\mathcal{A}_\nu$ contient un ouvert semi-algèbrique (réel) dense de $\mathcal{J}_\nu - \mathcal{D}_\nu$.

<u>Démonstration</u> : a) résulte de [11]; b) est trivial d'après la description des strates $\Sigma^p_{1,\dots,1\,;\,\nu_1,\dots,\nu_p}$ effectuée au paragraphe précédent.

§2. <u>Le théorème principal</u>. Nous montrons ici la propriété fondamentale des formes apprivoisées annoncée au début de ce chapitre. En fait, nous prouverons les théorèmes 2.1. et 2.3. plus généraux suivants :

<u>Théorème 2.1.</u> : Soit $\omega = \omega_\nu + \dots$ un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$ de forme holomorphe intégrable dont le premier jet non nul ω_ν est abélien, et à cône tangent réduit (i.e. $\omega_\nu(R)$ est sans facteur multiple). Alors ω possède une intégrale première multiforme $f = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ dès que les conditions suivantes sont vérifiées :

a_1) les résidus λ_j de ω_ν et leurs inverses $1/\lambda_j$ ne sont pas des entiers ≤ 0 ;

a_2) l'un d'eux est ou bien non réel > 0, ou bien est irrationnel > 0 et vérifie les conditions de petits dénominateurs de Siegel.

<u>Remarque 2.2.</u> : Les formes apprivoisées dont le cône tangent n'est pas

irréductible, vérifient les hypothèses de ce théorème.

Théorème 2.3. : Soit $\omega = \omega_\nu + \ldots$ un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, de forme holomorphe intégrable dont le premier jet non nul ω_ν est fini, vérifie codim $S(\omega_\nu) \geq 2$ et est à cône tangent réduit (i.e. $\omega_\nu(R)$ est sans facteur multiple). Alors ω admet une intégrale première holomorphe.

Remarque 2.4. : Les formes apprivoisées dont le cône tangent est irréductible vérifient les hypothèses de ce théorème.

Démonstration des théorèmes : Nous allons déterminer une intégrale première du type $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ dans un deux plan sur lequel ω est à singularité isolée. La conclusion résulte alors du théorème d'extension des facteurs intégrants (1ère partie).

Puisque, d'après la proposition 2.1. du chapitre I, la codimension du lieu singulier de ω_ν - et à fortiori celle de $S(\omega)$, est ≥ 2, ω_ν et ω ont même cône tangent $C \subset \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$, donné par l'équation réduite

$$\omega_\nu(R) = P_1 \ldots P_p = 0,$$

les P_j étant irréductibles étrangers, $P_i \neq P_j$ si $i \neq j$, et R désignant encore le champ radial. Soit $i : (\mathbb{C}^2,0) \rightarrow (\mathbb{C}^n,0)$ un plongement linéaire générique. Le plongement induit par i, $I : \mathbb{P}\mathbb{C}(1) \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ évite le lieu singulier de C et coupe transversalement sa partie lisse. Ainsi $P'_j = P_j \circ i$ a même ordre ν_j en 0 que P_j et est réduit, $j = 1,\ldots,p$, (mais non nécessairement irréductible).

Soit $P = P_1^{\lambda_1} \ldots P_p^{\lambda_p}$ l'intégrale première de ω_ν, $\Sigma\, \lambda_j \nu_j = 1$. On a :

$$\omega_\nu = P_1 \ldots P_p \,\Sigma\, \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} \,. \tag{1}$$

Clairement, $P' = P'^{\lambda_1}_1 \ldots P'^{\lambda_p}_p$ est une intégrale première de $\omega'_\nu = i^*(\omega_\nu)$ qui admet une écriture (1)' analogue à celle de ω_ν dans (1). Par hypothèse les λ_j sont tous non nuls et d'après [4 ; I ; 2.1.] , ω'_ν - et à fortiori $\omega' = i^*(\omega)$, est à singularité isolée. Ainsi $C' = I^{-1}(C)$ est le cône tangent commun de ω'_ν et ω'.

Eclatons 0 dans $\mathbb{C}^2$, $E' : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $E'(x,t) = (x,tx)$, t désignant la coordonnée projective y/x. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées nous supposons que l'axe des y n'est pas un élément de C'.

En chaque point $t_j \in C'$, $j=1,\ldots,q$, l'éclaté divisé $\tilde{\omega}'$ de ω' admet pour 1-jet

$$j^1\tilde{\omega}',t_j = x(t-t_j)\left[\frac{dx}{x} + \lambda_{k(j)}\frac{d(t-t_j)}{t-t_j}\right]$$

où $k(j)$ est l'indice k tel que t_j appartienne au cône tangent de P'_k. Ceci permet de déterminer l'holonomie de $L_{\omega'} = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - C'$ qui est une feuille commune des feuilletages saturés $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'_\nu}$ définis par $E'^*(\omega')$ et $E'^*(\omega'_\nu)$. Notons $\mathcal{H}_{\omega'}$ et $\mathcal{H}_{\omega'_\nu}$: $\pi_1(L_{\omega'};t_o) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C},t_o)$ l'holonomie projective de ces deux feuilletages sur le facteur linéaire transverse $(\mathbb{C},t_o)$. Comme nous l'avons vu dans la première partie, la partie linéaire du groupe d'holonomie $H_{\omega'} = \mathrm{Im}\,\mathcal{H}_{\omega'}$ est précisément le groupe de difféomorphismes linéaires $H_{\omega'_\nu} = \mathrm{Im}\,\mathcal{H}_{\omega'_\nu}$. Mais, et ceci a encore été signalé dans la première partie, si γ_j est un chemin qui part de t_o, tourne autour du point t_j et revient sur ses pas jusqu'en t_o, alors $\mathcal{H}_{\omega'_\nu}(\gamma_j)$ est le difféomorphisme linéaire

$$x \to e^{2i\pi\lambda_{k(j)}}.x.$$

Eclatons maintenant l'origine de $\mathbb{C}^n$ par $E : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n$ et désignons par H_ω le groupe d'holonomie projectif de ω. Nous avons l'égalité :

$$H_\omega = H_{\omega'}$$

Puisque $H_\omega = \mathcal{H}_\omega(\pi_1(L_\omega;t_o))$ et que $\pi_1(L_\omega;t_o)$ est commutatif, il en résulte que $H_{\omega'}$ est commutatif ; nous allons en déduire qu'il est linéarisable.

Si ω_ν est finie, $H_{\nu'}$ est fini et il est facile de voir que la coordonnée

$$z = \sum_{h \in H_{\omega'}} \frac{h}{h'(0)}$$

linéarise $H_{\omega'}$. Envisageons donc la seconde éventualité.
Un des λ_j, disons $\lambda_{k(1)}$ est soit non réel, soit irrationnel et soumis à des conditions diophantiennes. Ainsi h_1 est linéarisable (c.f. [41]): il existe une coordonnée z' sur $(\mathbb{C},t_o)$ telle que

$$h_1(z') = e^{2i\pi\lambda_{k(1)}}\ z'.$$

En explicitant la relation de commutation de h_1 avec un difféomorphisme quelconque, on voit que dans la coordonnée z', tous les éléments de $H_{\omega'}$ sont linéaires. Pour obtenir une intégrale première multiforme de ω' nous déterminerons des intégrales premières locales $g_1,\ldots,g_q$ de

$E^{*}(\omega')$ au voisinage des t_j telles que le groupe d'invariance [2;II.2.2.1] $H(g_1,\ldots,g_q\ ;\ t_o)$ soit égal à $H_{\omega'}$; pour conclure il suffira alors d'appliquer le théorème de recollement.

Considérons le germe $\tilde{\omega}'_j$ qui définit $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega'}$, au voisinage de t_j. Si $\lambda_{k(j)}$ est non réel ou réel négatif, $\tilde{\omega}'_j$ est linéarisable d'après (2) et (3), car par hypothèse $-\lambda_{k(j)}$ ni $-1/\lambda_{k(j)}$ n'est pas entier positif. Supposons donc que $\lambda_{k(j)} \notin \mathbb{R}_-$ et considérons l'holonomie h_j du germe de variété invariante (L_ω,t_j). Par transport holonome, on peut voir h_j dans $H_{\omega'}$; h_j est donc linéarisable. D'après [32], (cf 1;I;5) on en déduit que le germe $\tilde{\omega}'_j$ est linéarisable.
Dans tous les cas, il existe donc un système de coordonnées holomorphes (X_j,T_j) en t_j , $X_j = x(1+\ldots)$, tel que

$$\tilde{\omega}'_j = X_j\, dT_j + \lambda_{k(j)}\, T_j\, dX_j$$

Visiblement $g_j = X_j\, T_j^{\lambda_{k(j)}}$ est une intégrale première de $\tilde{\omega}'_j$. Son groupe d'invariance H_j représenté sur un facteur transverse $\{T_j = \varepsilon_j\}$ est engendré par :

$$X_j \to e^{2i\pi\lambda_{k(j)}}\, X_j.$$

qui est le difféomorphisme d'holonomie relatif au lacet $s \to \varepsilon_j e^{2i\pi s}$, $s \in [0,1]$. On en déduit que sur le facteur transverse $(\mathbb{C},t_o)$ le groupe d'invariance $H(g_j;t_o)$ est engendré par h_j. Ainsi $H(g_1,\ldots,g_q\ ;\ t_o)$ est engendré par $h_1,\ldots,h_q$. Il est égal à $H_{\omega'}$.

cinquième partie

problèmes de convergences et structure algébrique de l'ensemble des intégrales premières

. CHAPITRE O .

HISTORIQUE ET RAPPEL DES RÉSULTATS CONNUS

C'est H. Dulac qui semble le premier s'être intéressé aux intégrales premières multiformes $f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, dans un cadre plus général que le cas linéaire, cas où l'on disposait, à l'époque d'une bibliographie abondante.
H. Dulac distingue en fait deux types de problèmes ; le premier consiste à décider si l'on peut calculer explicitement de telles intégrales et à exhiber les obstructions à ce calcul. Pour celà Dulac cherche ces intégrales sous la forme "semi-divergente". Ce n'est qu'ensuite qu'il s'intéresse aux problèmes de convergence. Il va sans dire que tout ceci se passe en dimension deux. Les résultats de Dulac ont été publiés et ce n'est que récemment que l'on s'est replongé dans ce type de problèmes, dans un contexte à priori plus général : celui des formes intégrables ; mais finalement dans un cas particulier : celui où les λ_i sont entiers positifs. Il y a en effet un à priori, puisque comme nous le signalerons plus loin, le problème de la convergence d'intégrales premières formelles pour une forme intégrable en dimension quelconque, est en fait un problème de la dimension deux. Par contre, il n'en est pas de même pour les critères d'existence : le critère de Malgrange cod $S(\omega)\geqslant 3$ est spécifique des dimensions plus grandes que deux. Au fur et à mesure que nous proposerons nos énoncés nous les restituerons par rapport à ceux de Dulac. Nous nous contenterons ici pour terminer ce court prologue ,de citer les résultats obtenus par B. Malgrange et ensuite R. Moussu et l'un de nous. Ces résultats n'ont trait qu'aux intégrales premières formelles (respt. holomorphes)usuelles; plus précisément ω étant un germe de forme holomorphe intégrable on s'intéresse aux séries formelles f (respt. convergentes) telles que $\omega\wedge df = 0$.

a) le critère de Malgrange est opérant pour les intégrales premières "fortes" : celles pour lesquelles cod $S(df) \geqslant 2$ (codimension signifiant dans le cas formel hauteur de l'idéal jacobien de f). Il dit que l'existence d'une intégrale première formelle (forte donc) implique celle d'une convergente, ceci étant assuré par exemple lorsque cod $S(\omega) \geqslant 3$.

b) Ce critère est généralisé dans [32] aux intégrales premières faibles (i.e. non nécessairement fortes...) et précise en fait qu'étant donné une intégrale première formelle f qui n'est pas une puissance, on peut toujours trouver une série formelle $\ell \in \hat{\mathcal{O}}_1$ telle que $\ell(f)$ converge. De plus, la convergence peut se lire sur un chemin transverse à ω, fait qui justifie l'à priori précédent.

Encore une fois nous utiliserons abondamment la déssingularisation en dimension deux. Pour les problèmes de convergence la remarque-clef est la suivante :

Remarque 0.1 : Une série formelle $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ converge dès qu'il existe un point t_o de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ où le germe $f \circ E_{,t_o}$ (de la composée de f avec le morphisme $E : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n$) est convergent.

Signalons enfin que tous les résultats de cette partie sont valables dans le domaine analytique réel. Il suffit pour s'en assurer de complexifier la situation.

. CHAPITRE 1 .

CONVERGENCE DES SÉPARATRICES

1. Convergence des séparatrices. Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ et $(f=0)$, $f \in \widehat{\mathcal{O}}_n$, une séparatrice formelle de ω :

$$\omega \wedge df = f.\eta$$

On dit que la séparatrice $(f=0)$ converge si $(f=0)$ définit une hypersurface analytique, ou ce qui revient au même s'il existe une unité formelle u telle que uf converge. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'établir un théorème de réduction à la dimension deux ; quant à la convergence ou non en dimension deux elle peut se lire en général sur les "arbres d'éclatements".

Théorème 1.1. : Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Une séparatrice formelle irréductible $S = (f = 0)$ de ω converge dès qu'il existe une courbe analytique $\gamma : \mathbb{C},0 \to \mathbb{C}^n,0$, non inclue dans $S(\omega)$ et vérifiant $f \circ \gamma \equiv 0$.

Démonstration : Remarquons que, d'après l'hypothèse, on a $\gamma^*\omega = 0$. On peut alors appliquer le théorème [1;II;4.1] : il existe une application $F : \mathbb{C}^{n-1},0 \to \mathbb{C}^n,0$ de rang générique maximum, qui "étend γ", et telle que $F^*\omega = 0$. Nous allons montrer que $f \circ F \equiv 0$; pour cela nous reprenons les notations de [1;II,4] et introduisons $\tilde{f} = f \circ \pi$ où π est la composition de tous les morphismes utilisés dans [1;II;4.2] pour se ramener à la forme $\tilde{\omega}$. Visiblement $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma} = 0$ et f est une séparatrice (formelle) de $\tilde{\omega}$. Envisageons maintenant les deux éventualités du théorème [1;II;4.2.] : $\tilde{\omega}$ est ou bien triviale au dessus d'un deux plan (si $\mathrm{cod}\, S(\tilde{\omega}) = 2$) ou bien possède une intégrale première holomorphe (si $\mathrm{cod}\, S(\tilde{\omega}) \geq 3$) ; dans le premier cas, $\tilde{\omega}$ possède deux séparatrices formelles "lisses" et deux seulement, $\tilde{f}=0$ étant alors l'une d'elles. D'une part, cette séparatrice converge puisque $\tilde{\gamma}$ converge, d'autre part F est obtenu par la factorisation $\pi \circ \tilde{F}$ où $\tilde{F}$ paramètre cette séparatrice : $\tilde{f} \circ \tilde{F} = 0$;ici donc $f \circ F = f \circ \pi \circ \tilde{F} = \tilde{f} \circ \tilde{F} = 0$. Dans le second cas, lorsque $\mathrm{cod}\, S(\tilde{\omega}) \geq 3$, $\tilde{\omega}$ possède une intégrale première forte g irréductible : il en résulte que $\tilde{\omega}$ ne possède qu'une séparatrice (tant formelle qu'holomorphe) et $\tilde{f} = U.g$ où U est une série formelle qui est nécessairement une unité. Ici encore $F = \pi \circ \tilde{F}$ où $\tilde{F}$ vérifie $g \circ \tilde{F} = 0$ et $f \circ F = 0$.

Invoquons maintenant le résultat suivant du à A.M Gabrielov dans [20] (théorèmes 4.8. et 5.2.) :

<u>Théorème</u> : Soit $F: \mathbb{C}^{n-1}, 0 \to \mathbb{C}^n, 0$ un germe d'application analytique de rang générique maximum et $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ une série formelle irréductible (non nulle) telle que $f \circ F \equiv 0$. Il existe un germe de fonction holomorphe $h \in \mathcal{O}_n$ irréductible tel que $h \circ F \equiv 0$.
En fait, Gabrielov établit un résultat plus fort : désignons par $\hat{F}^*$ (respt. F^*) les morphismes d'algèbres $\alpha \in \hat{\mathcal{O}}_n \to \alpha \circ F \in \hat{\mathcal{O}}_{n-1}$ (respt. $\alpha \in \mathcal{O}_n \to \alpha \circ F \in \mathcal{O}_{n-1}$) alors :

$$\operatorname{Ker} \hat{F}^* \simeq \operatorname{Ker} F^* \underset{\mathcal{O}_n}{\otimes} \hat{\mathcal{O}}_n.$$

Ce qui conduit précisément ici à l'égalité des idéaux premiers ([27]) :

$$\hat{\mathcal{O}}_n.(f) = \hat{\mathcal{O}}_n.(h).$$

D'où le résultat.

. CHAPITRE II .

CONVERGENCE DES INTÉGRALES PREMIÈRES MÉROMORPHES.

1. Enoncé des résultats et préliminaires. Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

Théorème 1.1. - Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable et $H = \frac{f}{g} \in \hat{\mathcal{M}}_n$ une intégrale première méromorphe formelle pure de ω, i.e. $\omega \wedge dH = 0$ et H, $1/H \notin \hat{\mathcal{O}}_n$. Alors H converge, c'est-à-dire $H \in \mathcal{M}_n$.

Nous prouverons ce théorème lorsque $n = 2$, dans le paragraphe 1. Nous en déduirons, au paragraphe 2, la preuve du théorème en dimension supérieure lorsque H est semi-divergent, c'est-à-dire peut s'écrire sous la forme :

$$H = u.h_1^{\lambda_1} \;\ldots\ldots\; h_p^{\lambda_p} ,$$

$$u \in \hat{\mathcal{O}}_n,\ u(0) \neq 0,\ h_j \in \mathcal{O}_n,\ \lambda_j \in \mathbb{Z}.$$

La démonstration dans le cas général résultera du lemme suivant :

Lemme 1.2 : Soit $H \in \hat{\mathcal{M}}_n$ une intégrale méromorphe formelle pure de ω. Alors H est semi-divergente.

Le cas semi-divergent en dimension 2, a été traité par H. DULAC. Nous indiquons brièvement au paragraphe 4 sa démonstration ([13] et [14]). Ainsi le lemme 1.2 permettrait d'obtenir le théorème pour $n = 2$ à partir des résultats de H. DULAC. Dans ce qui suit ω désigne un germe de forme holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Avant d'attaquer les démonstrations nous allons faire quelques considérations d'ordre général en présence d'intégrales premières méromorphes formelles pures ; notamment nous allons voir qu'alors $N(\omega)$ ne peut-être nul. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1.3 : Soit ω un germe de forme à singularité isolée en $0 \in \mathbb{C}^2$

admettant une intégrale première méromorphe formelle pure $H = \frac{f}{g}$ ($f,g \in \hat{\mathcal{O}}_2$ sans facteur commun). Soit $\gamma \in \hat{\mathcal{O}}_1^2$ une courbe formelle non triviale. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) γ est une courbe intégrale de ω, i.e $\gamma^*\omega = 0$

(b) il existe une constante $c \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ telle que $(f-cg) \circ \gamma \equiv 0$ (le cas $c = \infty$ signifiant que $g \circ \gamma \equiv 0$).

<u>Démonstration</u> : Supposons que $f \circ \gamma$ ne soit pas identiquement nulle. La 1-forme formelle $g\, df - f\, dg$ est divisible par ω et donc son image réciproque par γ est nulle. Dans un système de coordonnée formelle z où $f \circ \gamma = z^\nu$, on a l'identité

$$z.(g \circ \gamma)'(z) = \nu\, g \circ \gamma(z).$$

Ainsi $g \circ \gamma = cz^\nu$, $c \in \mathbb{C}$, d'où la conclusion. Réciproquement, supposons que $(f - cg) \circ \gamma \equiv 0$. Quitte à effectuer une transformation homographique sur H, c'est-à-dire un "changement de variable au but", on peut poser $c = 0$. Notons

$$f = f_1^{\alpha_1} f_2, \; f_1, f_2 \in \hat{\mathcal{O}}_2, \; f_1 \circ \gamma \equiv 0$$

f_1 étant irréductible et ne divisant par f_2. Ainsi on a :

$$(f_1 f_2\, dg - g(\alpha_1 f_2 df_1 + f_1\, df_2)) \wedge \omega = 0$$

et, puisque ω est à singularité isolée,

$$f_1 f_2\, dg - g(\alpha_1 f_2 df_1 + f_1\, df_2) = u\, \omega, \qquad u \in \hat{\mathcal{O}}_2.$$

Si $\gamma^*(\omega)$ n'est pas identiquement nul, $u \circ \gamma$ l'est. Ainsi f_1 divise $\alpha_1\, g\, df_2$, et donc df_2, ce qui implique :

$$\gamma^*(df_2) = d(f_2 \circ \gamma) \equiv 0,$$

et $f_2 \circ \gamma$ est identiquement nul. Mais ceci est impossible, car f_1 étant irréductible, on a l'égalité des idéaux premiers :

$$(f_1) = \{h / h \circ \gamma \equiv 0\}.$$

<u>Proposition 1.4</u> - Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe

admettant une intégrale première méromorphe formelle pure H. Alors $N(\omega) > 0$.

Démonstration. Montrons que lorsque le 1-jet de ω est du type (*) ou (**), ω ne possède pas d'intégrale première méromorphe pure formelle. Dans ce cas, ω possède deux courbes intégrales formelles et deux seules distrinctes. Or il est clair que la forme dH en possède une infinité. La conclusion résulte immédiatement du lemme précédent.

2. Démonstration du théorème 1.1 en dimension 2. Elle se fait par récurrence sur le nombre $N(\omega)$ d'éclatements nécessaire pour réduire ω. Le cas $N(\omega) = 0$ est trivial puisque les hypothèses du théorème ne sont jamais vérifiées. Faisons un éclatement ; deux cas peuvent se présenter, que nous examinerons successivement :

(α) ω est dicritique et $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ est transverse à $L_\omega = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - C_\omega$.

(β) L_ω est une feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$.

Cas (α) :

Remarquons que H o E peut être considérée comme une section globale du faisceau $\hat{\mathcal{M}}$, de base $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, des germes le long de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ de fonctions méromorphes transversalement formelles, c'est à dire du corps des fractions

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{E}})$$

du faisceau $\hat{\mathcal{E}}$ des germes le long de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ de fonctions holomorphes transversalement formelles défini dans [32]. En d'autres termes, si (x,t), $t = y/x$ est une carte de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ la fibre $\hat{\mathcal{M}}_{t_o}$ de $\hat{\mathcal{M}}$ en un point $t_o \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ s'identifie au corps des fractions de l'anneau des séries formelles en x à coefficients des séries convergentes de la variable $T = t - t_o$:

$$\hat{\mathcal{M}}_{t_o} = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}\{T\}[[x]]), \qquad T = t - t_o.$$

Il suffit de prouver que H o E est une section globale du sous faisceau $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$, restriction à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ du faisceau des fonctions méromorphes : H o E définit alors une fonction méromorphe $\bar{G}$ sur un voisinage

U de $P\mathbb{C}(1)$. Comme E est un isomorphisme en dehors de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, $\overline{G}$ se redescend en une fonction méromorphe G sur U - {0} qui s'étend en 0 en vertu du théorème de LEVY, (c.f. [35] par exemple) :

$$G = \frac{G_1}{G_2} \quad , \quad G_1, G_2 \in \mathcal{O}_2.$$

Comme G o E = H o E, considéré comme un élément de $\hat{\mathcal{M}}(\mathbb{P}\mathbb{C}(1))$, on a

$$G_1 \circ E.f_2 \circ E = G_2 \circ E.f_1 \circ E$$

Il en résulte que $G_1 f_2 = G_2 f_1$ et donc G = H.

Considérons le cas (α), et montrons qu'en tout point $t \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, $H \circ E,_t$ est un élément de $\mathcal{M}_t \subset \hat{\mathcal{M}}_t$. Si $H \circ E,_t$ est purement méromorphe formelle, la convergence résulte de l'hypothèse de récurrence. Si $H \circ E,_t$ ou son inverse est un élément de $\hat{\mathcal{O}}_{\tilde{\mathbb{C}}^2,t}$ sa restriction à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ est polynomiale et la convergence est assurée par le Théorème [32] que nous rappelons :

<u>Théorème 2.0</u> : Soit $H \in \hat{\mathcal{O}}_n$ une intégrale première formelle d'un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable, et $c : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^n,0)$ une courbe analytique transverse à ω, i.e. $c^*(\omega)$ n'est pas identiquement nulle. Alors H converge dès que H o c converge.

Examinons le cas β ; pour se raccrocher à la récurrence établissons le :

<u>Lemme 2.1</u> : Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe possédant une intégrale première méromorphe formelle pure H. Alors, si ω n'est pas dicritique il existe un point $t \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ où $E^*_{,t}(\omega)$ possède une intégrale première méromorphe formelle pure.

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 1.3, ω possède une infinité de courbes formelles intégrales distinctes. Il existe donc un point $t \in C_\omega$ où le germe $\tilde{\omega},_t$ possède une infinité de courbes intégrales distinctes. Toujours d'après le lemme 1.3, sur chacune de ces courbes $H \circ E,_t$ est constant. Il est clair que ce ne peut être le cas si $H \circ E,_t$ est une série formelle ou l'inverse d'une série formelle.

Désignons par $b_1,\dots,b_q$ les points t de C_ω où $H \circ E,_t$ est méromorphe formelle pure et notons $\{a_1,\dots,a_p\}$ son complément dans C_ω. Le lemme 1.5 nous assure que $q > 1$, et, par hypothèse de récurrence, $H \circ E,_{b_j}$ converge, $j = 1,\dots,q$. Remarquons aussi que, pour tout j, $H \circ E,_{b_j}$ se prolonge au voisinage de tout ouvert simplement connexe $U \subset L_\omega \cup \{b_j\}$, car $L_\omega = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - C_\omega$ est une feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$. De plus ce prolongement coïncide avec $H \circ E$, considéré comme une section de $\hat{\mathcal{M}}(U)$ ([32], [V,4], lemme 2'). Ainsi, en tout point t de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)-\{a_1,\dots,a_p\}$, $H \circ E,_t$ est convergente :

$$H \circ E \in \mathcal{M}(\mathbb{P}\mathbb{C}(1) - \{a_1,\dots,a_p\}).$$

Il reste à prouver la convergence de $H \circ E$ aux points a_j :

$$H \circ E,_{a_j} \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^2,a_j}.$$

Notons G_j une racine de $H \circ E,_{a_j}$:

$$H \circ E,_{a_j} = G_j^{m_j},$$

telle que G_j n'est pas une puissance. D'après un résultat de [32] il existe une série ℓ_j, $\ell_j'(0) \neq 0$, telle que $\overline{G}_j = \ell_j \circ G_j$ soit convergente. Soit $t \neq a_j$ un point de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ voisin de a_j où le germe en t de $\overline{G}_j$ converge encore :

$$\overline{G}_{j,t} = \ell \circ G_{j,t} \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^2,t}.$$

En ce point $H \circ E,_t = (\ell^{-1} \circ G_j)^{m_j}$ est convergente. Il en résulte que ℓ converge, donc aussi G_j, et par la même $H \circ E$, a_j.

3. <u>Démonstration dans le cas semi-divergent en dimension supérieure</u>. Soit $H \in \hat{\mathcal{M}}_n$ une intégrale première méromorphe pure, semi-divergente de ω :

$$H = u\, f_1^{\lambda_1}. \dots . f_p^{\lambda_p}, \quad \lambda_j \in \mathbb{Z},$$

$$u \in \hat{\mathcal{O}}_n, \ u(0) \neq 0, \quad f_j \in \mathcal{O}_n \text{ irréductible.}$$

Nous supposons (par induction) que le théorème est démontré jusqu'à la dimension n-1.

Il est clair que, $f_1,\dots,f_p$, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ étant fixés l'unité $u \in \hat{\mathcal{O}}_n$ est unique. Si ce n'était pas le cas, il existerait une autre intégrale première semi-convergente

$$H_1 = u_1\, f_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot f_p^{\lambda_p} \quad , \quad u_1 \in \hat{\mathcal{O}}_n.$$

Un calcul facile montre qu'alors la série u_1/u est une intégrale première de ω. Ce cas est à écarter : la restriction de ω à un 2-plan générique $i : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^n$, i.e. transverse aux parties lisses des $f_j^{-1}(0)$, possède une intégrale première méromorphe pure et, à fortiori, une infinité de courbes intégrales formelles distinctes.

Ainsi u converge en restriction à tout n-1 -plan générique d'après l'hypothèse de récurrence. Faisons un éclatement de 0, $E : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n$ et plaçons nous en un point t_o de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1) - C_\omega$. On peut écrire :

$$\begin{cases} H \circ E,_{t_o} = (u \circ E,_{t_o}) \,.\, v \,.\, x^\nu \;, & v \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^n, t_o} \\ \\ \nu = \nu(f_1)\,\lambda_1 + \ldots + \nu(f_p)\,\lambda_p \;, & \end{cases}$$

où $\nu(f_j)$ désigne l'ordre de f_j et $v(t_o) \neq 0$. Supposons ν positif ; $H \circ E,_{t_o}$ est une intégrale première de $\omega,_{t_o}$ qui converge sur tout (n-1) - plan générique ; d'après [2.0], $H \circ E,_{t_o}$ converge. On en déduit la convergence de $u \circ E,_{t_o}$ et donc de u en utilisant la remarque 0.1.

4. <u>La méthode de H. Dulac dans le cas semi-divergent, n=2</u>. Le cas semi-divergent en dimension deux a fait l'objet de différents travaux de H. DULAC [13] , [14] , [15]. Nous indiquons ici la démonstration donnée dans [15] pages 362-364 qui élimine les cas laissés dans l'ombre dans les articles précédents. H. DULAC prouve le théorème plus général suivant :

Théorème 4.1 (H. DULAC) : Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe admettant une intégrale première du type

$$H = u\, f_1^{\lambda_1} \ldots\ldots f_p^{\lambda_p}\ , \quad u(o) \neq o\ .\ f_j \in \mathcal{O}_2\ ,\ u \in \hat{\mathcal{O}}_2$$

les λ_j désignant des nombres complexes quelconques. Si ω possède une infinité de courbes intégrales analytiques, alors u converge.

Démonstration : Il résulte du théorème de réduction qu'il existe un espace projectif $D_o = \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ contenu dans le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ tel que le feuilletage saturé défini par $\pi^*(\omega)$ soit transverse à D_o, sauf en un nombre fini de point $t_1,\ldots,t_p$. En un point t_o de D_o le germe de π ,

$$\pi,_{t_o} : (M,t_o) \to (\mathbb{C}^2,0)\ ,$$

peut-être considéré comme une composition d'applications du type $(x,t) \to (x,tx)$ et de changements linéaires de variables. Ainsi u converge dès que $u \circ \pi,_{t_o}$ converge.

D'autre part explicitons $f_j \circ \pi,_{t_o}$ dans un système de coordonnées (x,t) où $x = 0$ est l'équation de D_o :

$$f_j \circ \pi,_{t_o} = x^{\mu_j}\, \tilde{f}_j\ ,$$

x ne divisant pas $\tilde{f}_j$. Nous pouvons écrire :

$$H \circ \pi,_{t_o} = u \circ \pi,_{t_o}\ .\ v\ .\ x^{\mu}\ ,$$

où $\mu = \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_p\mu_p$ et $v = \tilde{f}_1^{\lambda_1}\ldots\ldots\tilde{f}_p^{\lambda_p} \in \mathcal{O}_{M,t_o}$. Si nous choisissons le point $t_o \in D_o$ différent de $t_1,\ldots,t_p$ et en dehors de l'adhérence des courbes $\tilde{f}_j^{-1}(0)$, $j = 1,\ldots,p$, on aura :

$$v \in \mathcal{O}_{M,t_o}\ ,\ v(0) \neq 0\ .$$

Comme le feuilletage est transverse à D_o, μ est nul et $H \circ \pi,_{t_o}$ est une intégrale première formelle de $\pi^*,_{t_o}(\omega)$, polynomiale en restriction à D_o. On en déduit que $H \circ \pi,_t$ est convergente et donc $u \circ \pi,_t$ converge aussi.

5. <u>Démonstration du théorème 1.1 dans le cas général</u>. Il suffit d'établir le lemme 1.2 ; pour cela on remarque que si $H \in \hat{\mathcal{M}}_n$, $H = h_1^{\lambda_1} \dots h_p^{\lambda_p}$, est une intégrale première méromorphe formelle alors H converge dans tout deux plan transverse à ω. Mais les $(h_i = 0)$ sont des séparatrices formelles de ω qui convergent dans tout deux plan générique, donc convergent, d'après le critère établi dans le chapitre précédent (théorème 1.1). Ainsi H est semi-divergente et on applique 3.

. CHAPITRE III .

CONVERGENCE DES INTÉGRALES PREMIÈRES MULTIFORMES.

1. Préliminaires sur les intégrales premières formelles $F = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$

Désignant encore par ω un germe de forme de Pfaff holomorphe intégrable, dans ce chapitre nous considérons des intégrales premières formelles $F = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, où les f_i sont des séries formelles sans facteur commun. Par intégrale première on sous-entend, comme dans le cas holomorphe, vérifiée l'identité :

$$\omega \wedge f_1 \dots f_p \, \Sigma \, \lambda_i \frac{df_i}{f_i} = 0 .$$

Nous dirons que F converge s'il existe des unités formelles $u_j \in \hat{\mathcal{O}}_n$ telles que $u_1^{\lambda_1} \dots u_p^{\lambda_p} = 1$ et que chaque $u_j f_j$ soit convergent.

Considérons dans un premier temps le cas où la dimension ambiante est deux. Soit ω un germe en $o \in \mathbb{C}^2$ de forme holomorphe qui possède une intégrale première multiforme formelle $F = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$. Visiblement les facteurs irréductibles des f_j sont des séparatrices formelles de ω. On a de plus :

Proposition 1.1. Les séparatrices f_j convergent, i.e. il existe des unités formelles u_j telles que $u_j f_j \in \mathcal{O}_2$, $j = 1, \dots, p$.

Démonstration : Nous pouvons supposer les f_j irréductibles. Il suffit alors de prouver l'existence de courbes analytiques $\gamma_j : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ telles que $f_j \circ \gamma_j = 0$. Considérons l'application de réduction $\pi : M \to (\mathbb{C}^2,0)$ et notons a_j le point du diviseur exceptionnel $D = \pi^{-1}(0)$ où la série $f_j \circ \pi_{,a} \in \hat{\mathcal{O}}_{M,a}$ possède une branche distincte de D. Si a est un point non singulier de l'éclaté divisé $\tilde{\omega}_{,a}$ de ω, visiblement $\tilde{\omega}_{,a}$ ne possède qu'une seule séparatrice formelle $\tilde{\gamma}_j$ passant par a, qui de plus converge. On a donc

$f_j \circ \pi \circ \tilde{\gamma}_j \equiv 0$. Si a est un point singulier de $\tilde{\omega}'_a$, rappelons que dans un système de coordonnées adapté (X,Y), on a :

$$(*) \quad \tilde{\omega}'_a = Y\,dX + \lambda X\,dY + \ldots \quad \text{avec } \lambda \notin \mathbb{Q}_- \,, \quad \lambda \neq 0,$$

ou bien

$$(**) \quad \tilde{\omega}'_a = Y\,dX + \ldots \quad .$$

Il est bien connu que dans le cas (*) $\tilde{\omega}'_a$ possède deux séparatrices convergentes et ne possède pas d'autres séparatrices formelles, d'où la conclusion. Il suffit ainsi de prouver que l'existence de l'intégrale première multiforme $F\circ\pi_{,a} = F_1^{\mu_1} \ldots F_q^{\mu_q}$ exclu le cas (**). Supposant que l'on soit dans le cas (**) on ne peut avoir q=1,car une forme à singularité isolée de ce type ne possède pas d'intégrale première [32]. D'autre part $\tilde{\omega}'_a$ possède seulement deux séparatrices formelles qui sont lisses à croisements normaux. Ainsi, si l'on a pris les $F_j \in \hat{\mathcal{O}}_{M,a}$ irréductibles, on a q = 2 et (F_1,F_2) constitue un système de coordonnées formelles en a. Il résulte de l'égalité

$$\tilde{\omega}'_a \wedge (\mu_1 F_2\, dF_1 + \mu_2 F_1\, dF_2) = 0$$

que $\tilde{\omega}'_a$ est du type (*), ce qui est contradictoire.

Q.E.D.

On déduit immédiatement de cette proposition et du critère de convergence des séparatrices formelles le :

<u>Corollaire 1.2</u>. Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe admettant une intégrale première multiforme formelle $F = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$. Alors F est semi-divergente, i.e. s'écrit $F = u.\, g_1^{\lambda_1} \ldots g_p^{\lambda_p}$ où les g_i convergent et u est une unité formelle.

<u>Remarque</u> : Ce corollaire donne une autre démonstration du lemme [II ; 1.2].

Il résulte de la démonstration précédente que si $\gamma \in \hat{\mathcal{O}}_1^2$

est une séparatrice formelle de ω, telle que $F \circ \gamma \not\equiv 0$, alors γ se relève dans M en un point a du diviseur exceptionnel où $\tilde{\omega}_{,a}$ est non singulier. On en déduit le :

<u>Corollaire 1.3</u>. Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de forme holomorphe possédant une intégrale première multiforme formelle. Alors toute séparatrice formelle de ω converge.

Comme dans le cas méromorphe, ω peut aussi posséder une infinité de séparatrices :

<u>Proposition 1.4</u>. Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de forme holomorphe possédant une intégrale première multiforme formelle $F = f_1^{\lambda_1}.....f_p^{\lambda_p}$. Si ω possède une séparatrice qui n'est pas une branche de $f_1....f_p = 0$, alors ω possède une infinité de séparatrices analytiques. De plus il existe une relation non triviale à coefficients dans $\mathbb{N}$ entre les λ_j et F converge.

<u>Démonstration</u> : La convergence résulte du théorème 4.1 de Dulac (chap. II). Les autres conclusions s'établissent trivialement par récurrence sur $N(\omega)$.

Voici maintenant deux propositions qui seront utiles dans la suite.

<u>Proposition 1.5</u>. Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable admettant deux intégrales premières multiformes formelles $F = f_1^{\lambda_1}....f_p^{\lambda_p}$ et $G = g_1^{\mu_1}....g_q^{\mu_q}$, f_j, $g_j \in \hat{\mathcal{O}}_n$ irréductibles. Alors, ou bien ω admet une intégrale première méromorphe, ou bien $p = q$ et, à une permutation d'indice près, il existe des unités formelles u_j et deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\begin{cases} g_j = u_j\, f_j \quad , \; \mu_j = \alpha\, \lambda_j \; , \\ u_1^{\lambda_1}....u_p^{\lambda_p} = \beta \; , \end{cases}$$

ie $G = \beta\, F^{\alpha}$.

Démonstration. Supposons que codim $S(\omega) \geqslant 2$. Il existe des séries $H,K \in \mathcal{O}_n$ telles que

$$\begin{cases} f_1 \dots f_p \sum \lambda_j \dfrac{df_j}{f_j} = H\,\omega \\ g_1 \dots g_q \sum \mu_j \dfrac{dg_j}{g_j} = K\,\omega \end{cases}$$

Soient $F = f_1 \dots f_p$ et $G = g_1 \dots g_q$:

$$0 = d(\frac{H}{F}\,\omega) = (d(\frac{K}{G}\,\omega) \;.$$

De l'égalité ci-dessus, on déduit :

$$d\,\omega = \frac{F}{H}\,\omega \wedge d\,\frac{H}{F} = \frac{G}{K}\,\omega \wedge d\,\frac{K}{G} \;.$$

Il s'en suit que :

$$\omega \wedge d(\frac{HG}{KF}) = 0 \;.$$

Si ω ne possède pas d'intégrale première méromorphe, nous avons $\frac{HG}{KF} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Ainsi

$$\alpha \sum_{j=1}^{q} \mu_j \frac{dg_j}{g_j} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} \;.$$

Les deux membres de cette égalité sont des formes méromorphes qui possèdent clairement les mêmes pôles. On a ainsi $p = q$ et, à permutation d'indice près, il existe $u_j \in \mathcal{O}_n$, $u_j(0) \neq 0$, tels que $g_j = u_j\, f_j$. Il vient alors :

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} = \alpha(\sum_{j=1}^{p} \mu_j \frac{df_j}{f_j} + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \frac{du_j}{u_j}) \;,$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j - \alpha\mu_j) \frac{df_j}{f_j} = \alpha \sum_{j=1}^{p} \mu_j \frac{du_j}{u_j} \;.$$

Le membre de droite étant holomorphe, il s'en suit que

$$\lambda_j = \alpha\, \mu_j \;, \qquad j = 1,\dots,p \;,$$

et par suite :

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{du_j}{u_j} = 0.$$

Ainsi $u_1^{\lambda_1} \ldots\ldots u_p^{\lambda_p}$ est une constante β.

Proposition 1.6. Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe possédant une intégrale première multiforme formelle

$F = f_1^{\lambda_1} \ldots\ldots f_p^{\lambda_p}$, $f_j \in \hat{\mathcal{O}}_n$ irréductible. Si ω possède aussi une intégrale première holomorphe, alors il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda\lambda_j \in \mathbb{N}$ pour tout $j = 1,\ldots,p$.

Démonstration. Soit $h = h_1^{n_1} \ldots\ldots h_q^{n_q}$, $h_j \in \mathcal{O}_n$ irréductible une intégrale première holomorphe de ω. Les hypersurfaces $h_j = 0$ sont clairement les seules séparatrices de ω. Il en résulte que $p = q$ et l'existence d'unités formelles $u_j \in \hat{\mathcal{O}}_n$ vérifiant quitte à réordonner les indices :

$$f_j = u_j h_j .$$

Le quotient

$$\frac{F^{n_1}}{h^{\lambda_1}} = u_1^{n_1\lambda_1} \ldots\ldots u_p^{n_p\lambda_p} h_2^{n_1\lambda_2 - n_2\lambda_1} \ldots h_p^{n_1\lambda_p - n_p\lambda_1}$$

est aussi une intégrale première de ω. Comme la séparatrice $h_1 = 0$ ne figure pas parmi les facteurs, on déduit de la proposition 1.4 que cette expression est constante et donc :

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_1} = \frac{n_j}{n_1} .$$

On pose $\lambda = n_1 / \lambda_1$.

2. Critères de convergence. Dès qu'un germe de forme holomorphe en $0 \in \mathbb{C}^2$ possède un nombre assez grand de séparatrices ($> \nu(\omega) + 1$), toute intégrale première multiforme formelle $F = f_1^{\lambda_1} \ldots\ldots f_p^{\lambda_p}$ est convergente. Ce résultat dû à H. DULAC, a été énoncé dans la première partie dans le cadre semi-divergent mais en fait d'après le corollaire 1.2 précédent, c'est le cas général. Sous ces hypothèses, les λ_j vérifient une relation non triviale à coefficients entiers positifs. Ils ne peuvent donc être, à un facteur multiplicatif commun près, tous réels positifs. H. DULAC prouve, de manière partielle

dans [13] pages 101-106 puis complètement dans [14] page 25 et [15] pages 362-364, que cette dernière éventualité, $\lambda_j > 0$, est le seul cas douteux de convergence. Nous généralisons ici ce résultat en dimension quelconque sans trop de peine : nous montrons que l'intégrale première F converge dès qu'il existe une courbe analytique c telle que $c^*(\omega) \equiv 0$, sur laquelle F converge. Lorsque tous les λ_j sont positifs nous prouvons que "génériquement" F converge en énonçant une condition diophantienne suffisante.

Le théorème suivant est une généralisation immédiate du critère de convergence des intégrales premières formelles usuelles prouvé dans [32] :

<u>Théorème 2.1</u> : Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable possédant une intégrale première multiforme formelle $F = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$, et $c : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^n,0)$ un germe de courbe analytique <u>transverse à</u> ω, i.e. $c^*(\omega) \equiv 0$. Alors F est convergente dès que $F \circ c$ <u>converge</u> i.e. $F \circ c(z) = z^\lambda u(z)$, $u(0) \neq 0$, $u \in \mathcal{O}_1$.

<u>Démonstration</u>. Nous pouvons supposer F semi-divergente :

$$F = u\, f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}\ ,\ f_j \in \mathcal{O}_n\ ,\ u \in \hat{\mathcal{O}}_n\ ,\ u(0) \neq 0$$

Il suffit ainsi de montrer que u converge, ou encore que le composé $u \circ E,_{t_o}$ de u avec l'application d'éclatement de 0, $E : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n$ converge en un point t_o de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$. Ainsi par éclatements successifs nous nous ramenons au cas où c est une courbe lisse et la droite $t_o = [c'(0)]$ n'est pas un point du cône tangent de ω. En ce point $F \circ E$ s'écrit :

$$\begin{cases} F \circ E,_{t_o} = u \circ E,_{t_o} \cdot x^\sigma v & \sigma \in \mathbb{C} \\ v = \tilde{f}_1^{\lambda_1} \dots \tilde{f}_j^{\lambda_j} & \end{cases}$$

les $\tilde{f}_j$ désignant les éclatés divisés des f_j et x une équation de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$. Visiblement $\tilde{f}_j(t_o) \neq 0$ et donc $(F \circ E,_{t_o})^{\frac{1}{\sigma}}$ est une intégrale première formelle ordinaire de $E^*,_{t_o}(\omega)$. Comme $F \circ E$ converge en restriction au relevé $\tilde{c}$ de c dans $\mathbb{C}^n$, $F \circ E,_{t_o}$ converge [2.0]. On déduit de la semi divergence de F ($v \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^n, t_o}$) que $u \circ E_{,t_o}$ converge.

Théorème 2.2 : Soit ω un germe de 1-forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ possédant une intégrale première multiforme formelle $F = f_1^{\lambda_1} \ldots . f_p^{\lambda_p}$, $f_j(0) = 0$ et ne possédant pas d'intégrale première holomorphe. Alors F converge dans les cas (génériques) suivants :

(1) les exposants λ_j ne sont pas tous sur une même demi-droite passant par l'origine de $\mathbb{C}$.

(2) les λ_j sont tous sur une même demi-droite passant par l'origine de $\mathbb{C}$ et vérifient une condition diophantienne :

$$|i_1\lambda_1 + \ldots + i_p\lambda_p| \geqslant \frac{C}{(|i_1|+\ldots+|i_p|)^{\varepsilon}}$$

(où C et ε sont des constantes positives), pour tout p-uple d'entiers relatifs $(i_1,\ldots,i_p)$ tel que $i_1\lambda_1 +\ldots+ i_p\lambda_p \neq 0$.

Remarques : 1) Sous l'hypothèse : $\lambda_j > 0$ à un facteur multiplicatif commun près, ω n'a qu'un nombre fini de séparatrices analytiques, qui sont définies par $f_j = 0$, $j = 1,\ldots,p$. (Leur convergence est assurée par le corollaire 1.2 et le critère de convergence des séparatrices). Si le feuilletage singulier $\mathcal{F}_\omega$ possède un système fondamental de voisinages saturés , alors ici encore, d'après le théorème [3 ; I.1] converge.

2) Lorsque tous les λ_i/λ_j sont rationnels, F définit une intégrale première formelle usuelle ou bien une intégrale première méromorphe pure, cas déjà étudiés.

3) Dans le cas 2), il est raisonnable d'exiger une condition diophantienne, puisqu'il existe des formes du type $\omega = x\,dy + \lambda y\,dx + \ldots$ qui sont formellement linéarisables sans être linéarisables.

4) Toujours dans le cas 2), si une condition diophantienne est satisfaite pour un certain ε, elle l'est pour tout $\varepsilon > \varepsilon_o$. Lorsque les λ_j sont indépendants une telle condition n'est satisfaite que pour des $\varepsilon > p$. L'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}^p$ présentant une résonnance

sur $\mathbb{Z}$, $\sum_j i_j\lambda_j = 0$ étant maigre, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}^p$ qui satisfont une condition diophantienne est de mesure pleine.

Démonstration. D'après le théorème 2.1 il suffit de montrer que la restriction de F à un 2-plan est convergente, supposons donc n = 2.

Considérons simultanément les cas (1) et (2) et comme toujours procédons par récurrence sur $N(\omega)$.

Lorsque $N(\omega) = 0$, comme nous l'avons vu dans la démonstration de la proposition 1.1 , $p = 2$ et f_1, f_2 constituent un système de coordonnées formelles de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Ceci nous conduit à constater que dans des coordonnées analytiques x,y tangentes à f_1, f_2,

$$j^1\omega = y\,dx + \lambda\,x\,dy\ ,\quad \lambda = \lambda_2/\lambda_1 > o,$$

et ω est formellement linéarisable. Compte tenu des hypothèses (1) ou (2) du théorème, ou bien λ n'est pas réel positif (domaine de Poincaré), ou bien λ est un irrationnel positif satisfaisant des conditions diophantiennes puisque ω n'a pas d'intégrale première holomorphe. Dans les deux cas ω est linéarisable, i.e. il existe un système de coordonnées holomorphes (x,y) dans lequel ω s'écrit $\omega = x\,dy + \lambda\,y\,dx$. Comme les f_j sont les seules séparatrices de ω, on a nécessairement :

$$f_1 = u_1\,x\ ,\qquad f_2 = u_2\,y\ ,$$

$$u_1\ ,\ u_2 \in \hat{\mathcal{O}}_2\ ,\quad u_1(0) \neq 0,\ u_2(0) \neq 0.$$

Ainsi F s'écrit :

$$F = u\,x^{\lambda_1}\,y^{\lambda_2}\quad \text{avec } u = u_1^{\lambda_1}\,u_2^{\lambda_2} \in \hat{\mathcal{O}}_2.$$

En explicitant l'égalité

$$\omega \wedge f_1f_2\,(\lambda_1\,\frac{df_1}{f_1} + \lambda_2\,\frac{df_2}{f_2}) = 0,$$

on obtient :

$$\omega \wedge du = 0.$$

Comme λ est soit irrationnel soit dans le domaine de Poincaré, ω ne possède pas d'intégrale première formelle, u est donc une constante, ce qui achève la démonstration.

Supposons maintenant le théorème établi pour les formes ω' telles que $N(\omega') < N(\omega)$. A l'aide du corollaire 1.2, écrivons F sous forme semi-divergente :

$$F = u\, f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}, \quad f_j \in \mathcal{O}_2, \quad u \in \hat{\mathcal{O}}_2, \ u(0) \neq 0.$$

Soit $E : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'éclaté de $\mathbb{C}^2$; choisissons la coordonnée x telle que l'axe des y ne soit pas dans le cône tangent de $C_\omega = \{a_1, \dots, a_q\}$ de ω. Dans la carte $(x, t = y/x)$, on a :

$$F \circ E = x^\sigma \,.\, u \circ E \,.\, \tilde{f}_1^{\lambda_1} \dots \tilde{f}_p^{\lambda_p},$$

où

$$f_j \circ E = x^{\nu_j} \tilde{f}_j \text{ et } \sigma = \nu_1\lambda_1 + \dots + \nu_p\lambda_p,$$

ν_j désignant l'ordre de f_j. Dans le cas dicritique, ω possède une infinité de séparatrices et le résultat est démontré. Il en est de même si ω n'est pas dicritique mais $\sigma = 0$: en tout point, l'espace projectif est une séparatrice distincte des branches des $\tilde{f}_j$ et nous sommes donc sous les hypothèses de la proposition (1.4).

Examinons le cas $\sigma \neq 0$. Il suffit de montrer la convergence de $u \circ E_{,a_k} \in \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2, a_k}$ en un point a_k de C_ω. Ecrivons :

$$F \circ E_{,a_k} = v\, x^\sigma\, u\, \tilde{f}_{j_1^k}^{\lambda_{j_1}^k} \dots \tilde{f}_{j_{\alpha_k}^k}^{\lambda_{j_k}^k},$$

où les $f_{j_i^k}$ sont ceux parmi les f_j dont le cône tangent contient a_k. Visiblement $v \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^2, a_k}$ est une unité et au point a_k, $E^*(\omega)$ possède une intégrale première multiforme du type

$$x^\sigma \,.\, g_{j_1}^{\lambda_{j_1}} \dots g_{j_k}^{\lambda_{j_k}}, \quad g_{j_r}(a_j) = 0.$$

Nous affirmons qu'en un des points du cône tangent de ω l'hypothèse du théorème est de nouveau satisfaite.

Plaçons nous d'abord sous la première hypothèse : les exposants ne sont pas tous sur une même demi-droite ; supposons que cette condition ne soit vérifiée en aucun point $a_j \in C_\omega$. Alors tous les λ_j seraient clairement situés sur la demi-droite joignant 0 et σ; de plus en un point $a \in C_\omega$ où l'hypothèse est satisfaite, $E^*\omega,_a$ ne peut posséder d'intégrale première holomorphe (proposition 1.6).

Plaçons nous maintenant dans l'éventualité (2) ; d'après l'hypothèse ω n'a pas d'intégrale première holomorphe ; il existe donc un point, disons a_1, où les quotients des $(\sigma, \lambda_{j_1},\dots,\lambda_{j_{\alpha_1}}) = (\mu_o,\dots,\mu_{\alpha_1})$ ne sont pas tous entiers. D'après la proposition 1.6, $E^*(\omega)$ ne possède pas en ce point d'intégrale première holomorphe. Nous avons de plus les inégalités :

$$\Delta_\ell = |\ell_o\mu_o + \dots + \ell_{\alpha_1}\mu_{\alpha_1}| \geqslant \frac{C}{(|\ell_o(\nu_1+\dots+\nu_p)|+|\ell_1|+\dots+|\ell_{\alpha_1}|)^\varepsilon}$$

$$\geqslant \frac{C}{\nu^\varepsilon}\ \frac{1}{(|\ell_o|+\dots+|\ell_{\alpha_1}|)^\varepsilon}$$

où $\nu = \nu_1+\dots+\nu_p$, ceci pour tous les $\ell = (\ell_o,\dots, \ell_{\alpha_1})$ tels que $\Delta_\ell \neq 0$.

Dans les deux éventualités, l'hypothèse de récurrence est satisfaite en un point de C_ω et nous pouvons conclure.

Remarque : Ce théorème contient l'énoncé (II ; 1.1) assurant la convergence des intégrales méromorphes mais la technique de démonstration est un peu différente en ce sens que dans (II ; 1,1) il n'est pas nécessaire d'exhiber une écriture semi-divergente en dimension deux.

. CHAPITRE IV .

FACTEURS INTÉGRANTS ET FORMES NORMALES : LE PROBLÈME DE LA CONVERGENCE DES FORMES NORMALES.

1. Rappels sur les formes normales des champs holomorphes. Nous précisons des notions brièvement introduites dans la première partie : pour une lecture courte et complète sur ce sujet on consultera [30].

Lorsque l'on considère un germe de champ holomorphe X comme une dérivation agissant sur les séries formelles :

$$X : \hat{\mathcal{O}}_n \to \hat{\mathcal{O}}_n$$

on peut mettre X sous forme de Jordan :

$$X = X_S + X_N$$

où X_S et X_N sont deux champs formels commutants :

$$[X_S, X_N] = 0$$

tels que X_S (resp. X_N) soit, considéré comme dérivation, semi-simple (respectivement nilpotent). Comme tout champ semi-simple formel est conjugué à sa partie linéaire, il existe un difféomorphisme formel ϕ tel que :

$$\phi_* X = A_S + Z_N \ , \quad [A_S, Z_N] = 0 \ ,$$

où A_S est un champ linéaire semi-simple : $A_S = (j^1\phi)_*(j^1X)_S$ et Z_N un champ nilpotent ($= \phi_* X_N$). Nous dirons que $A_S + Z_N$ est une forme normale de X et que X possède une mise sous forme normale holomorphe s'il existe un difféomorphisme holomorphe ϕ de mise sous forme normale.

Notre propos n'est pas ici de faire une théorie des formes normales ; aussi nous allons simplement en donner la liste en dimension deux. Cette liste est "indicée" par la nature des valeurs propres λ_1 et λ_2 de la partie semi- simple A_S du champ X.

1. Le domaine de Poincaré : $\lambda_1 . \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 \notin \mathbb{R}\, \lambda_2$. Il y a ici linéarisation holomorphe, ie la forme normale est
$A_S = \lambda_1\, x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2\, y \frac{\partial}{\partial y}$ et la mise sous forme normale converge.

2. $\lambda_1 / \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et λ_1 et λ_2 sont sans résonnances entières ie si $\lambda_i = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2$ $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$ alors $(\alpha,\beta) = (1,0)$ ou $(0,1)$ suivant que $i = 1$ ou 2. La forme normale est encore A_S, mais la mise sous forme normale diverge en général si l'on n'impose pas de conditions arithmétiques sur les λ_i.

3. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$. Il y a linéarisation holomorphe et deux formes normales sont possibles :

$$\lambda_1 \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\lambda_1 \left((x + y) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

4. $0 \neq \lambda_2 = p\lambda_1$ où $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. La forme normale s'écrit :

$$\lambda_1 \left(x \frac{\partial}{\partial x} + (py + \mu x^p) \frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ avec } \mu = 0 \text{ ou } 1.$$

et la mise sous forme normale est convergente.

5. $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$ où p et q sont deux entiers positifs premiers entre eux ; une forme normale s'écrit :

$$\lambda_1 \left[x(1 + a(x^p y^q))\frac{\partial}{\partial x} - \frac{p}{q}\, y(1+b(x^p y^q)\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

où a et b sont des séries à une variable.

Les mises-sous formes normales divergent en général.

6. $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$. Une forme normale s'écrit :

$$x \frac{\partial}{\partial x} + \ell(y) \frac{\partial}{\partial y}$$

où ℓ est une série à une variable ; il y a dans ce cas encore en général divergence de la mise sous forme normale.

7. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; ici le champ X est sa propre forme normale puisque $A_S = 0$.

Cette liste de formes normales induit une liste de formes normales pour les germes de formes de Pfaff à l'origine de $\mathbb{C}^2$, en identifiant champs et formes via un volume ; cette "dualité" n'est a priori pas très bonne puisqu'un changement de variables ne la respecte qu'à une fonction multiplicative près. Sauf dans le cas où les valeurs propres sont égales, ceci n'a en fait aucune importance pour la raison suivante :

<u>Lemme 1.1</u> : Soit ω un germe de forme de Pfaff, holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ tel que $d\omega(0) \neq 0$. Si U est une unité (formelle resp. holomorphe) les formes ω et $U\omega$ sont conjuguées, ie

$$U.\omega = \psi^* \omega \ ,$$

par un difféomorphisme ψ (formel resp. holomorphe).

Le tableau suivant donne la liste des formes normales du point de vue des formes de Pfaff ; les nombres λ_i sont les valeurs propres du champ X relié à la forme de Pfaff ω par

$$\omega = i_X \, dx \wedge dy.$$

On entend par mise sous forme normale tout difféomorphisme ϕ qui envoie ω sur un élément ω_i de la liste : $\omega = \phi^* \omega_i$.

λ_i = Valeurs propres du jet d'ordre 1 de X où $i_X\, dx \wedge dy = \omega$.	Forme normale formelle	Convergence ou non de la mise sous forme normale.	facteur intégrant de la forme normale
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 \notin \mathbb{R}\, \lambda_2$ (domaine de Poincaré)	$\omega_1 = \lambda_2\, y\, dx - \lambda_1\, x\, dy$	convergence	$f_1 = xy$
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$; λ_1, λ_2 sans résonnance	$\omega_1 = \lambda_2\, y\, dx - \lambda_1\, x\, dy$		$f_1 = xy$
$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$	$\omega_1 = y\, dx - x\, dy$ ou $\omega_2 = (x+y)dx - x\, dy$	convergence convergence	$f_1 = xy$ $f_2 = x^2$
$0 \neq \lambda_2 = p\, \lambda_1$, p N, $p > 1$	$\tilde{\omega}_3 = (py + \mu x^p)dx - xdy$	convergence	$f_3 = x^{p+1}$ si $\mu = 1$ $f'_3 = xy$ si $\mu = 0$
$p\, \lambda_1 + q\, \lambda_2 = 0$, $p, q \in \mathbb{N}$ $(p,q) \neq (1,1)$ p et q premiers	$\omega_4 = py(1 + b(x^p y^q))\, dx + qx(1 + a(x^p y^q))\, dy$		$f_4 = xy(b-a)(x^p y^q)$ $f'_4 = xy$ si $b=a=0$
$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$	$\omega_5 = U.\, [y(1 + b(x\, y))\, dx + x(1 + a(x\, y\,))dy]$ où U est une unité formelle.		$f_5 = U\, xy(b-a)(x\, y)$ $f'_5 = Uxy$ si $b=a=0$
$\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$	$\omega_6 = x\, dy + \ell(y)\, dx$		$f_6 = x.\, \ell(y)$.

Le tableau précédent annonce le :

Théorème 1.2 : Tout germe de forme de Pfaff ω dont le 1-jet est non nul et différent de x dx possède un facteur intégrant formel.

Démonstration. Il suffit d'effectuer la vérification dans le cas 4 ; le cas 5 se traite de façon analogue et les autres cas sont triviaux. Ecrivons :

$$\omega_4 = y\, B(x^p y^q)dx + x\, A(x^p y^q)\, dy$$

où

$$A = q(1 + a(x^p y^q)$$

$$B = p(1 + b(x^p y^q)$$

Nous avons :

$$d\omega_4 = (A-B) + x^p y^q [p\, A' - q\, B']$$

où A' et B' sont les dérivées des fonctions A et B. Cherchons un facteur intégrant sous la forme :

$$f = xy\, g(x^p y^q)$$

Nous devons résoudre :

$$xy\, g(x^p y^q)\ [A-B + x^p y^q (pA' - qB')\ ] =$$
$$xy\ [\ g.(A-B) + x^p y^q g'(pA - qB)\ ]$$

soit :

$$\frac{g'}{g} = \frac{pA' - qB'}{pA - qB}$$

Donc :

$$g = pA - qB = pq(a-b)$$

convient.

Q.E.D.

En fait le facteur intégrant converge dans les trois cas suivants :

1) $\lambda_1 \notin \mathbb{R}\, \lambda_2$

3) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

4) $\lambda_2 = p\, \lambda_1$

puisque sous l'une de ces trois éventualités la mise sous forme normale converge.
Les situations intéressantes où il y a possibilité de divergence des formes normales sont donc les cas 2), 5), 6) et le lecteur remarquera que les 1 jets sont alors réduits.

Avant d'aborder les problèmes de convergence des formes normales on peut s'assurer qu'il s'agit bien là d'un problème de la dimension deux ; rappelons à cet effet le théorème [I, III, 4.2], énoncé dans la première partie sous une forme un peu affaiblie :

Soit ω un germe de 1-forme holomorphe et intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ dont le 1-jet est non nul et distinct de $x\,dx$. Alors ou bien ω est trivial au dessus d'un deux plan $\mathbb{C}^2$, ou bien ω possède une intégrale première holomorphe.

2. <u>Convergence des formes normales en présence de symétries dans le cas réduit</u>. Pour les raisons qui ont été précisées ci-dessus, nous ne nous intéresserons qu'aux cas réduits ; le problème de la convergence des formes normales a été abordé par A.D. Brujno dans [4] [cf. aussi [30]. En ce qui concerne la dimension deux, voici le résultat de Brujno :

<u>Théorème 2.1</u> : Soit $\omega = p\,y\,dx + q\,x\,dy + \dots$ où p et q sont des entiers positifs. Si ω possède une intégrale première formelle, ω possède une mise sous forme normale convergente ; en fait ω est linéarisable (à une fonction multiplicative près lorsque $(p,q) = (1,1)$). Il s'ensuit dans ce cas que ω possède un facteur intégrant holomorphe et nous pouvons donc considérer comme réglée cette éventualité. Pour une forme ω ne possédant pas d'intégrale première holomorphe, il y a unicité du facteur intégrant à une constante multiplicative près et on peut parler du facteur intégrant de ω. Notre but est d'établir le :

<u>Théorème 2.2</u> : Soit ω un germe de forme de Pfaff réduit à l'origine de $\mathbb{C}^2$ ne possédant pas d'intégrale première holomorphe. Il y a équivalence entre les propriétés :

1) ω possède une mise sous forme normale convergente

2) le facteur intégrant de ω converge

3) ω possède une symétrie holomorphe.

<u>Démonstration</u>. L'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) se déduit du théorème 1.2 ; l'équivalence 2) $\Longleftrightarrow$ 3) s'en déduit aussi puisque pour chaque modèle ω_i, le facteur intégrant f_i appartient à l'idéal des composantes de ω_i, ie $f_i = \omega_i(X_i)$. L'implication non triviale est donc 2) $\Longrightarrow$ 1).

a) <u>démonstration de 2) $\Longrightarrow$ 1) lorsque $j^1\omega = y\,dx + \lambda x\,dy$</u> avec λ irrationnel (positif). Donnons d'abord une preuve directe :

Soit F le facteur intégrant de ω, que l'on suppose donc holomorphe. Puisque ω est linéarisable formellement, il existe un système de coordonnées formelles U,V tel que

$$F = U.V$$

Il en résulte l'existence d'un système de coordonnées (X,Y) holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$,o tel que :

$$F = X.Y\ .$$

D'autre part, ω possède une intégrale première formelle multiforme qui s'écrit nécessairement

$$H = U\ X\ Y^{\lambda}$$

où U est une unité formelle : en effet X = 0 et Y = 0 sont les seules séparatrices de ω. Du lemme de division de de Rham, on déduit l'existence d'une série formelle h telle que :

$$U.\ XY\ \left(\frac{dX}{X} + \lambda\ \frac{dY}{Y} + \frac{dU}{U}\right) = h.\omega\ ,$$

ceci traduisant que H est intégrale première.

Comme $\frac{\omega}{XY}$ est fermée, on a :

$$d\ \frac{h}{U}\ \wedge\ \omega = 0,$$

égalité qui conduit à $\frac{h}{U}$ = constante, puisque λ est irrationnel. Il s'ensuit que $\frac{dU}{U}$, et donc U, converge. Pour achever la preuve on invoquera le lemme 1.1.

Une démonstration facile mais indirecte peut être obtenue à l'aide du théorème d'intégration en présence de facteurs intégrants ; nous la laissons en exercice.

b) démonstration de 2) $\Longrightarrow$ 1) lorsque $j^1\omega = x\, dy$.

Dans des coordonnées formelles (U,V) où ω est normale, le facteur intégrant s'écrit :

$F = U\ell(V) = U\, V'^m$ où $m \geq 2$ est l'ordre de ℓ et $V' = \sqrt[m]{\ell(V)}$. Il existe donc un système de coordonnées holomorphes (X,Y) tel que :

$F = X\, Y^m$

les (X,Y) et (U,V) s'échangeant par des unités (u,v)

$u.X = U$

$v.Y = V$

Ecrivons ω dans les coordonnées X,Y :

$$\omega = X\, A\, dY + Y\, B\, dX$$

avec $A(0) = 1$ et $B(0) = 0$.

Soit b le coefficient de B sur Y^{m-1} ; décomposons la forme fermée $\frac{\omega}{XY^m}$ de la façon suivante :

$$\frac{\omega}{XY^m} = b.\frac{dX}{X} + A(0,Y)\frac{dY}{Y^m} + \omega_1 .$$

Visiblement ω_1 est une forme méromorphe fermée ayant ses pôles le long des branches $X = 0$ et $Y = 0$; de plus ω_1 n'a pas de résidu sur ces branches. Comme dans [1 ; III, 2.1], il existe un germe de fonction holomorphe $\alpha(X,Y)$ tel que :

$$\omega_1 = d\left(\frac{\alpha}{Y^{m-1}}\right)$$

et la forme :

$$\omega = b.Y^m\, dX + X\, A(0,Y)\, dY + XY^m\, d\left(\frac{\alpha}{Y^{m-1}}\right)$$

est le pull-back par l'application :

$$L : (X,Y) \to (X,Y,\ \alpha(X,Y))$$

de la forme $\bar{\omega}$ définie et intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^3$:

$$\bar{\omega} = b\, Y^m\, dX + X\, A(0,Y)\, dY + XY^m\, d\left(\frac{Z}{Y^{m-1}}\right) .$$

Mais $\bar{\omega}$ qui satisfait à :

$$d\,\bar{\omega}(0) = dX \wedge dY$$

est un "phénomène de Kupka-Reeb" et est donc triviale au dessus du plan (X,Y).

Il existe donc des coordonnées X',Y',Z' de $\mathbb{C}^3$ telles que

$$\bar{\omega} = b\ Y'^m\ dX' + X'\ A(0,Y')dY' \ .$$

Désignons par (φ, ψ) l'application de $\mathbb{C}^2,o \to \mathbb{C}^2,o$ définie par

$$\varphi = X' \circ L$$
$$\psi = Y' \circ L$$

Il vient :

$$\omega = b\ \ \psi^m d\varphi + \varphi A(0,\psi)d\psi \ .$$

En utilisant le lemme 1.1., ω est conjuguée à

$$\varphi\, d\ \psi + \frac{b\ \ \psi^m}{A(0,\psi)}\ \ d\varphi$$

qui est bien de la forme $xdy + \ell(y)\ dx$; on peut d'ailleurs raffiner puisque l'équation est à variable séparée, et trouver un changement de coordonnée $\psi \to \psi'$ qui rende ℓ polynomiale.

c) <u>Démonstration de 2) $\Longrightarrow$ 1 lorsque $j^1\ \omega = pydx + qxdy$ avec $p,q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux, $(p,q) \neq (1,1)$</u>.
Dans des coordonnées formelles (U,V) où ω est normale, le facteur intégrant F s'écrit :

$$F = U\ V\ (b-a)\ \ (U^p\ V^q)$$

où a et b sont des séries à une variable. Si m désigne l'ordre de (b-a) il existe un système de coordonnées holomorphes (X,Y) tel que

$$F = X.Y.(X^p\ Y^q)^m \ .$$

Ecrivons ω dans les coordonnées (X,Y) :

$$\omega = Y.\alpha\ dX + X\ \beta\ dY$$

où α et β sont des unités holomorphes, $\alpha(0) = p$; $\beta(0) = q$. Nous avons :

$$\frac{\omega}{F} = \frac{\alpha}{(X^pY^q)^m}\ \ \frac{dX}{X} + \frac{\beta}{(X^pY^q)^m}\ \ \frac{dY}{Y} \ .$$

Si $h = \Sigma\, h_{ij}\, X^i\, Y^j$ est une série convergente nous décomposons h en la somme de deux séries convergentes :

$$h = h_1 + h_2$$

où h_1 est la projection de h sur les puissances de $X^p\, Y^q$:

$$h_1 = h_o + \Sigma\, h_{pk,qk}\, (X^pY^q)^k$$

et $h_2 = h - h_1$.

Ceci induit une décomposition en somme directe de l'espace $\mathcal{O}_2$:

$$\mathcal{O}_2 = E_1 \oplus E_2 \qquad (1)$$

et l'on constate de suite les inclusions :

$$\left.\begin{array}{l} E_1 . E_1 \subset E_1 \\ \\ E_1 . E_2 \subset E_2 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Appliquons cette décomposition à $\frac{\omega}{F}$:

$$\frac{\omega}{XY(X^pY^q)^m} = \left(\frac{\alpha_1(X^pY^q)}{(X^pY^q)^m}\frac{dX}{X} + \frac{\beta_1(X^pY^q)}{(X^pY^q)^m}\frac{dY}{Y}\right) + \left(\frac{\alpha_2}{(X^pY^q)^m}\frac{dX}{X} + \frac{\beta_2}{(X^pY^q)^m}\frac{dY}{Y}\right) =$$

$$= \frac{\omega_1}{F} + \frac{\omega_2}{F} .$$

En tenant compte de (1) et (2) on établit par un simple calcul que les formes méromorphes $\frac{\omega_1}{F}$ et $\frac{\omega_2}{F}$ sont fermées.

Comme $\frac{\omega_2}{F}$ n'a pas de résidu sur les branches $X = 0$ et $y = 0$, il existe une fonction holomorphe H telle que :

$$\frac{\omega_2}{XY(X^pY^q)^m} = d\left(\frac{H}{(X^pY^q)^m}\right) .$$

Dans l'espace $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ muni des coordonnées (X,Y,Z) introduisons la forme Ω :

$$\Omega = \omega_1 + XY(X^pY^q)^m\, d\left(\frac{Z}{(X^pY^q)^m}\right)$$

définie et intégrable au voisinage de l'origine. Visiblement ω est le pull-back de Ω par l'application $(X,Y) \to (X,Y,H)$. De plus, la restriction de Ω à $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$ est précisément ω_1. Mais puisque p et q sont différents de 1, la différentielle de Ω est non nulle à l'origine de $\mathbb{C}^3$, de sorte que Ω est triviale au dessus de ω_1. On conclut alors comme dans b.

d) <u>démonstration lorsque $j^1\omega = x\,dy + y\,dx$</u>
On procède comme dans c) avec les mêmes notations jusqu'à l'obtention de l'écriture :

$$\Omega = \omega_1 + XY(XY)^m \, d \frac{Z}{(XY)^m}$$

On ne peut plus ici invoquer le phénomène de Kupka - Reeb puisque $d\Omega(0) = d\omega(0) = 0$; mais le théorème 4.2 de la 1ère partie (chap. II) nous assure encore que Ω est triviale au dessus de ω_1 puisque ω_1 n'a pas d'intégrale première holomorphe.

<u>Exercice</u> : Justifier la phrase "puisque ω_1 n'a pas d'intégrale première holomorphe".

3. <u>Quelques remarques lorsque la partie homogène est générique</u>. Soit $\omega_\nu = a_\nu\, dx + b_\nu\, dy$ une forme homogène de degrés $\nu \geq 2$ dans le plan $\mathbb{C}^2$, $P_{\nu+1}$ son cône tangent :

$$P_{\nu+1} = x\, a_\nu + y\, b_\nu = \omega_\nu\, (R).$$

<u>Définition</u> : nous disons que ω_ν est <u>générique</u> si :

1) ω_ν est à singularité isolée

2) les racines t_j de $P_{\nu+1}(1,t)$ sont simples, ie $P_{\nu+1}$ est réduit.

3) ω_ν ne possède pas d'intégrale première holomorphe ou méromorphe.

Nous avons à ce moment $P_{\nu+1} = \prod_{i=1}^{\nu+1} (y - t_j\, x)$ et

$$\omega_\nu = \prod_{i=1}^{\nu+1} (y - t_j x) \; \Sigma\, \lambda_i \frac{d(y - t_i x)}{y - t_i x} .$$

La condition 3) dit que les λ_i / λ_j ne sont pas tous rationnels. Les formes génériques ont la propriété suivante :

Proposition 3.1. Soit F un facteur intégrant méromorphe de la forme $\omega' = \omega_\nu + \dots$. Si ω_ν est générique, alors F est holomorphe.

Démonstration : écrivons $F = \frac{f}{g}$ où f et g n'ont pas de branches communes et soient f_δ et g_μ les premiers jets non nuls de f et g. De l'égalité :

$$fg\, d\omega = (g\, df - f\, dg) \wedge \omega$$

on déduit :

$$f_\delta\, g_\mu\, d\omega_\nu = (g_\delta\, df_\mu - f_\mu\, dg_\delta) \wedge \omega_\nu$$

qui indique que f_δ/g_μ est un facteur intégrant de ω_ν ; ainsi

$$f_\delta/g_\mu = c.P_{\nu+1}$$

et :

$$\delta - \mu = \nu + 1.$$

Si $E : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2,o$ est l'éclatement de l'origine, il vient dans la carte $(x, t = Y/x)$:

$$F \circ E = \frac{f}{g} \circ E = \frac{x^\delta\, \tilde{f}}{x^\mu\, \tilde{g}} = x^{\nu+1}\, \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = x^{\nu+1}\, .\, \tilde{F}\, .$$

De sorte que $x\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = x\tilde{F}$ est un facteur intégrant de $\tilde{\omega} = \frac{E^*\omega}{x^\nu}$. Après avoir remarqué que les pôles de F , ie les zéros de g, sont des séparatrices de ω, on aboutit à une impossibilité si μ est différent de 0, puisqu'en chaque point singulier t_j de $\tilde{\omega}$, un facteur intégrant ne peut-être qu'holomorphe.

Q.E.D.

On peut d'ailleurs généraliser la proposition précédente de la façon suivante ; introduisons la définition :

Définition : Soit $\Pi : M \to \mathbb{C}^2,o$ la réduction d'une forme de Pfaff holomorphe ω. Nous dirons que ω est non-rationnelle si :

1) ω n'a qu'un nombre fini de séparatrices, ie dans M il n'y a pas de projectifs dicritiques.

2) En un point m singulier du feuilletage $\mathcal{F}_{\Pi^*\omega}$ où les valeurs propres (λ_1,λ_2) de l'éclaté divisé de ω sont non nulles, le quotient λ_1/λ_2 n'est pas entier positif ni inverse d'entier positif.

Nous dirons que ω est non réelle si ω est non rationnelle et s'il existe un point m où les valeurs propres (λ_1,λ_2) vérifient $\lambda_1.\lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 / \lambda_2 \notin \mathbb{R}$.

On établit alors par récurrence sur le nombre d'éclatements $N(\omega)$ nécessaires à la réduction de ω la :

<u>Proposition 3.2</u>. Soit ω une forme de Pfaff holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$, ω non-rationnelle.

a) tout facteur intégrant méromorphe de ω est en fait holomorphe.

b) si ω possède un facteur intégrant holomorphe, ω possède une symétrie holomorphe.

c) si ω est non réelle tout facteur intégrant formel de ω converge.

<u>Démonstration</u> : exercice.

. CHAPITRE V .

STRUCTURE ALGÉBRIQUE DE L'ENSEMBLE DES INTÉGRALES PREMIÈRES.

0. Rappel de la structure des intégrales premières formelles et holomorphes usuelles. Visiblement l'ensemble des intégrales premières holomorphes (formelles) constitue un anneau. La structure de cet anneau est précisée dans le théorème suivant.

Théorème 0.1 [32] : soit ω un germe de forme holomorphe intégrable possédant une intégrale première formelle (ou, ce qui est équivalent, holomorphe). L'ensemble des intégrales premières formelles (resp. holomorphes) est muni d'une structure de $\hat{\mathcal{O}}_1$ module (resp. $\mathcal{O}_1$). Plus précisément soit f une intégrale première de ω qui ne soit pas une puissance. Alors l'ensemble des intégrales premières formelles (resp. holomorphes) est égal à $\hat{\mathcal{O}}_1\{f\}$ (resp. $\mathcal{O}_1[[f]]$).

Comme nous allons le voir dans les cas méromorphe et multiforme la situation est plus rigide.

1. Intégrales premières méromorphes minimales. Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable ne possédant pas d'intégrale première holomorphe. L'ensemble des intégrales premières méromorphes de ω constituent clairement un sous corps de $\mathcal{M}_n$ (peut être $\mathbb{C}$). Nous allons montrer :

Théorème 1.1 : Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable possédant une intégrale première méromorphe pure. Alors il existe un germe de fonction méromorphe $H_o \in \mathcal{M}_n$, unique à composition à gauche par une transformation homographique inversible près, telle que le corps des intégrales premières méromorphes de ω soit :

$$\mathbb{C}(H_o) = \{R \circ H_o \;/\; R \text{ fraction rationnelle d'une variable}\}.$$

Un tel H_o sera dit minimal.

La démonstration repose sur le théorème classique de géométrie algébrique suivant, (c.f. [50] par exemple) :

<u>Théorème de LUROTH</u> : Soit $K \subset \mathbb{C}(z)$ un sous-corps du corps des fractions rationnelles d'une variable. Si $K \neq \mathbb{C}$, il existe une fraction rationnelle $R_o \in K$, non constante, telle que $K = \mathbb{C}(R_o)$.

Signalons que H. DULAC donne dans [15] pages 368-374, une démonstration (assez longue) du théorème 1.1 en dimension 2, n'utilisant qu'une forme faible du théorème de LUROTH.

2. <u>Démonstration en dimension 2</u>. La preuve se fait par récurrence sur le nombre d'éclatements $N(\omega)$ nécessaire à la réduction de ω. Le cas $N(\omega) = 0$ est trivial puisque les hypothèses du théorème ne sont jamais satisfaites. Supposons donc le théorème établi pour les formes ω' telles que $N(\omega') < N(\omega)$. Comme nous l'avons déjà fait, nous examinons séparément les cas dicritiques et non dicritiques.

<u>Cas dicritique</u>. Considérons l'éclatement $E : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$. Le feuilletage $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ est transverse à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, sauf peut être en un nombre fini de points. Soit K le sous-corps des fractions rationnelles

$$R : \mathbb{P}\mathbb{C}(1) \to \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$$

qui sont les restrictions à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ d'intégrales premières méromorphes $\tilde{H}$ de $E^*(\omega)$,

$$\tilde{H} = H \circ E \text{ , avec } H \in \mathcal{M}_2 \text{ , } \omega \wedge dH = 0.$$

D'après l'hypothèse, K n'est pas réduit aux constantes, ce qui permet de déduire du théorème de LUROTH l'existence de $R_o \in K$ tel que $K = \mathbb{C}(R_o)$. Donnons nous une intégrale première $H_o \in \mathcal{M}_2$ telle que

$$H_o \circ E \mid \mathbb{P}\mathbb{C}(1) = R_o \text{ .}$$

Si $G \in \mathcal{M}_2$ est aussi une intégrale première de ω, on aura l'égalité

$$G \circ E \mid \mathbb{P}\mathbb{C}(1) = R \circ H_o \circ E \mid \mathbb{P}\mathbb{C}(1) \text{ , } R \in \mathbb{C}(z).$$

Comme $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ est presque partout transverse au feuilletage $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$, $G \circ E$ et $R \circ H_o \circ E$ coïncident sur un ouvert, et donc sur un voisinage de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$. Il en résulte clairement l'égalité $G = R \circ H_o$.

Cas non dicritique. Soit t_o un point du cône tangent C_ω de ω où l'éclaté divisé $\tilde{\omega}, t_o$ possède une intégrale première méromorphe pure. L'existence d'un tel point est assurée par le lemme 2.1.du chapitre II. Par hypothèse de récurrence, le corps des intégrales premières de $\tilde{\omega}, t_o$ s'écrit $\mathbb{C}(G_o)$, $G_o \in \mathcal{M}_{t_o}$, $G_o \not\equiv 0$. L'ensemble

$$K = \{H \circ E, t_o \;/\; H \in \mathcal{M}_2 \;,\; \omega \wedge dH = 0\}$$

des germes en t_o d'éclatés d'intégrales premières de ω, est un sous corps de $\mathbb{C}(G_o)$ qui ne se réduit pas aux constantes. Le théorème de LUROTH garantit l'existence d'une fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$ telle que

$$K = \mathbb{C}(R(G_o)).$$

Si $R \circ G_o$ s'écrit $H_o \circ E, t$, alors le corps des intégrales premières premières de ω est $\mathbb{C}(H_o)$.

3. Démonstration du théorème 1.1.en dimension supérieure. Donnons nous un plongement $i : (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C}^n,0)$, transverse à ω ; de sorte que $i^*(\omega)$ possède une intégrale première méromorphe pure. D'après ce qui précède le corps des intégrales premières méromorphes de $i^*(\omega)$ s'écrit $\mathbb{C}(G_o)$, $G_o \in \mathcal{M}_2$. L'ensemble des restrictions à $(\mathbb{C}^2,0)$ des intégrales premières méromorphes de ω ,

$$K = \{F \circ i \;/\; F \in \mathcal{M}_n, \; \omega \wedge dF = 0\}$$

est un sous corps de $\mathbb{C}(G_o)$ et d'après le théorème de LUROTH il existe une fraction rationnelle R_o telle que

$$K = \mathbb{C}(R_o \circ G_o).$$

Par construction, $R_o \circ G_o$ s'écrit $H_o \circ i$, H_o étant une intégrale première méromorphe de ω.

Considérons maintenant une autre intégrale première $F \in \mathcal{M}_n$ de ω. Puisque $K = \mathbb{C}(H_o \circ i)$, il existe une fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$ vérifiant :

$$F \circ i = R \circ H_o \circ i.$$

Comme, d'autre part, le feuilletage $\mathfrak{F}_\omega$ est transverse à $i(\mathbb{C}^2)$, sauf en 0, F et R o H_o coïncident sur un voisinage ouvert de $i(\mathbb{C}^2) - 0$. Elles sont identiques.

Q.E.D.

4. <u>Description de l'ensemble des facteurs intégrants et des structures transverses</u>. En général, une forme intégrable qui possède un facteur intégrant n'en possède qu'un à un coefficient multiplicatif près pour la raison suivante :

<u>Proposition 4.1</u>. Soient f_1 et f_2 deux facteurs intégrants de la forme intégrable ω ; alors le quotient $\frac{f_1}{f_2}$ est une intégrale première (méromorphe) de ω, et est donc constant dès que ω ne possède pas d'intégrale première méromorphe.

<u>Preuve</u> : des égalités :

$$d\omega = \frac{df_1}{f_1} \wedge \omega$$

$$d\omega = \frac{df_2}{f_2} \wedge \omega$$

on tire clairement $d \frac{f_1}{f_2} \wedge \omega = 0$.

De cette proposition se déduit le :

<u>Corollaire 4.2</u>. Si ω possède deux intégrales premières F et G du type :

$$e^{\frac{\alpha}{f_1^{m_1-1} \cdots f_p^{m_p-1}}} \; f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$$

et ne possède pas d'intégrale première méromorphe, il existe deux constantes a et b telles que

$$G = a.F^b$$

<u>Démonstration</u> : Soient $G = e^{\frac{\overline{\alpha}}{\overline{f}_1^{n_1-1}\cdots\overline{f}_q^{n_q-1}}}\ \overline{f}_1^{\mu_1}\cdots\overline{f}_q^{\mu_q}$ une seconde intégrale de ω, g et $\overline{g}$ tels que :

$$\frac{g}{f_1^{m_1}\cdots f_p^{m_p}}\ \omega = \Sigma\ \lambda_i\ \frac{df_i}{f_i} + d\ \frac{\alpha}{f_1^{m_1-1}\cdots f_p^{m_p-1}}\ ,$$

$$\frac{\overline{g}}{\overline{f}_1^{n_1}\cdots\overline{f}_q^{n_q}}\ \omega = \Sigma\ \mu_j\ \frac{d\overline{f}_j}{\overline{f}_j} + d\ \frac{\overline{\alpha}}{\overline{f}_1^{n_1-1}\cdots\overline{f}_q^{n_q-1}}$$

L'unicité du facteur intégrant à un coefficient multiplicatif près conduit après un changement éventuel des indices à :

$$\begin{cases} b.\ \dfrac{g}{f_1^{m_1}\cdots f_p^{m_p}} = \dfrac{\overline{g}}{\overline{f}_1^{n_1}\cdots\overline{f}_q^{n_q}}\ , \text{ où } b \in \mathbb{C}, \\[2ex] q = p \quad \text{et } n_i = m_i\ , \\[1ex] \overline{f}_i = U_i\ f_i \quad \text{où } U_i \text{ est une unité.} \end{cases}$$

De sorte que :

$$b(\Sigma\ \lambda_i\ \frac{df_i}{f_i} + d\ \frac{\alpha}{f_1^{m_1-1}\cdots f_p^{m_p-1}}) = \Sigma\ \mu_i\ \frac{df_i}{f_i} + \Sigma\ \mu_i\ \frac{dU_i}{U_i} + d\ \frac{\alpha}{f_1^{m_1-1}..f_p^{m_p-1}\ U_1^{m_1-1}..U_p^{m_p-1}}$$

Visiblement :

$$b\ \lambda_i = \mu_i$$

et

$$b\ \frac{\alpha}{f_1^{m_1-1}\cdots f_p^{m_p-1}} = \frac{\alpha}{f_1^{m_1-1}\cdots f_p^{m_p-1}\ U_1^{m_1-1}\cdots U_p^{m_p-1}} + \Sigma\ \lambda_i\ \text{Log}\ U_i + (\text{cste}=\log a)$$

Q.E.D.

Par contre, il y a beaucoup de symétries puisque si X est une telle symétrie et Y un champ annulé par ω, X + Y est encore une symétrie de ω. Pour décrire ces symétries introduisons les notations suivantes :

$$T_\chi \omega = \{Y \in \chi,\ L_Y \omega \wedge \omega = 0\}$$

et

$$D_\chi \omega = \{X \in \chi,\ \omega(X) = 0\}$$

où χ désigne l'un des deux espaces :

$\chi_{\mathcal{H}}$ l'espace des germes de champs de vecteurs holomorphes à l'origine.

$\chi_{\mathcal{M}}$ l'espace des germes de champs de vecteurs méromorphes à l'origine.

Visiblement $D_\chi\, \omega$ est un sous module de χ stable par crochet de Lie ; en fait :

<u>Proposition 4.3</u>. Le crochet de Lie munit $T_\chi\, \omega$ d'une structure d'algèbre de Lie ; de plus $D_\chi\, \omega$ en est un idéal ie $[D_\chi \omega\ ,\ T_\chi \omega] \subset D_\chi \omega$.

<u>Démonstration</u> : Soient X_1 et X_2 deux éléments de $T_\chi \omega$; des conditions de symétrie :

$$L_{X_i} \omega \wedge \omega = 0$$

et du lemme de division de K. Saïto on tire :

$$L_{X_i}\ \omega = h_i\ \omega\ ,\quad h_i \in \mathcal{M}_n.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} L_{[X_1,X_2]} \omega &= L_{X_1} L_{X_2}\ \omega - L_{X_2} L_{X_1}\ \omega = L_{X_1}\ h_1 \omega - L_{X_2}\ h_2 \omega \\ &= i_{X_1}(dh_1 \wedge \omega + h_1\ d\omega) + \omega(X_1) dh_1 + h_1 d(\omega(X_1)) \\ &\quad - i_{X_2}(dh_2 \wedge \omega + h_2\ d\omega) - \omega(X_2) dh_2 - h_2\ d\omega(X_2) \\ &= h_1\ L_{X_1}\ \omega - h_2\ L_{X_2} \omega \end{aligned}$$

ce qui prouve la première affirmation ; pour la seconde supposons que $\omega(X_2) = 0$:

$$i_{[X_1,X_2]}\omega = L_{X_1}\, i_{X_2}\omega - i_{X_2}\, L_{X_1}\omega = - i_{X_2}\, h_1\, \omega = 0$$

Q.E.D.

Voici maintenant une suite de propositions simples qui précisent la structure de $T_\chi\omega$ suivant que ω possède ou non des intégrales premières méromorphes.

<u>Proposition 4.4</u>. Soit ω une forme intégrable holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ ne possédant pas d'intégrale première méromorphe.

- ou bien ω ne possède pas de symétrie et $T_\chi\omega = D_\chi\omega$
- ou bien ω possède une symétrie $X_o \in \chi$ et

$$T_\chi\omega = \mathbb{C}\, X_o \oplus D_\chi\omega$$

la somme directe étant une somme d'algèbre d'après 4.3.

<u>Démonstration</u> : Si X est une symétrie de ω le quotient $\frac{\omega(X)}{\omega(X_o)}$ est une intégrale première méromorphe de ω et donc constant égal à $c \in \mathbb{C}$. Le champ $X - cX_o$ est clairement dans $D_\chi\omega$.

Attachons nous maintenant à décrire $T_\chi\omega$ lorsque ω possède une intégrale première holomorphe ou méromorphe.

4) a) <u>cas où ω possède une intégrale première holomorphe</u>.

Suivant [32] l'ensemble des intégrales premières holomorphes de ω est le $\mathbb{C}\{t\}$ module $\mathbb{C}\{f_o\}$ où f_o est une intégrale première minimale (en d'autres termes f_o n'est pas une puissance). Soient X_o et X deux structures transverses (il en existe au moins dans le méromorphe). Le quotient $\frac{\omega(X)}{\omega(X_o)} = h$(qui est une intégrale première méromorphe de ω) ou bien son inverse $1/h$ est holomorphe. De sorte qu'il existe une fonction méromorphe $\ell(z)$ telle que $\frac{\omega(X)}{\omega(X_o)} = \ell(f_o)$; ainsi le champ $X - \ell(f_o)\, X_o$ annule ω. Nous venons de prouver la

<u>Proposition 4.5</u>. Si ω possède une intégrale première holomorphe alors

$$T_{\chi_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}_1(f_o).X_o \oplus D_{\chi_{\mathcal{M}}}\, \omega$$

où f_o est une intégrale première minimale de ω et X_o une symétrie.

La description des symétries holomorphes en présence d'intégrales premières holomorphes demande un tout petit peu plus d'attention. Soit encore f_o une intégrale première minimale de ω et $g \in \mathcal{O}_n$ tel que :

$$g . \omega = df_o .$$

Si m est le plus petit entier s tel que f_o^s appartienne à son idéal jacobien, il existe alors un champ holomorphe X_o tel que :

$$df_o(X_o) = f_o^m .$$

On a $\omega(X_o) = \frac{f_o^m}{g}$; mais puisque $\frac{f_o^m}{g}$ est un facteur intégrant de ω, X_o est une symétrie.

Si maintenant X est une autre structure transverse holomorphe, comme précédemment $\frac{\omega(X)}{\omega(X_o)}$ s'exprime en fonction de f_o :

$$\omega(X) = \ell(f_o) . X_o$$

où ℓ est a priori méromorphe. En fait ℓ est holomorphe : si tel n'était pas le cas, l'entier m ne serait pas minimal. Disons que le champ X_o précédent est une symétrie minimale. Nous avons établi la :

Proposition 4.6. Si ω possède une intégrale première holomorphe, ω possède des symétries holomorphes et

$$T_{X_{\mathcal{H}}} = \mathbb{C}\{f_o\} . X_o + D_{X_{\mathcal{H}}} \omega$$

où f_o et X_o sont respectivement des intégrales premières et des symétries minimales.

4) b) Cas où ω possède une intégrale première méromorphe pure.

Nous avons prouvé dans la première partie de ce travail que lorsque ω possède une intégrale première méromorphe pure, l'ensemble des intégrales premières méromorphes est égal à $\mathbb{C}(f_o)$ où f_o est minimale. En procédant comme précédemment on établit la :

<u>Proposition 4.7</u>. Si ω possède une intégrale première méromorphe pure alors :

$$T_{\chi_{\mathcal{M}}}\ \omega = \mathbb{C}(f_o).\ \chi_o \oplus D_{\chi_{\mathcal{M}}}\ \omega$$

où f_o est une intégrale première méromorphe minimale et χ_o une symétrie méromorphe.

sixième partie

quelques propriétés des diverses intégrales premières

détermination finie et singularités quasi-homogènes

. CHAPITRE I .

DÉTERMINATION FINIE DES GERMES DE FONCTIONS MÉROMORPHES, EN DIMENSION 2.

Dans ce chapitre nous montrons que les théorèmes classiques de détermination finie de fonctions holomorphes s'étendent sans peine au cas méromorphe (en dimension 2). Les techniques utilisées sont essentiellement les mêmes : la méthode du chemin et une utilisation appropriée du lemme de NAKAYAMA.

Nous prouverons le :

Théorème 1. : Soit $H = \frac{f}{g}$ un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de fonction méromorphe. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) H est à singularité isolée, i.e. $S(f\,dg - g\,df) = \{0\}$, f et g étant pris sans facteur commun,

(b) H est de détermination finie.

La notion de détermination finie que nous étudions ici porte sur les fibres $H^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, de H : il s'agit en effet de la détermination finie simultanée de la famille $H = c$; soit k un entier positif, nous dirons que H est de k détermination finie si pour tout couple $f_1, g_1 \in \mathcal{O}_2$ sans facteur commun vérifiant

$$j^k f_1 = j^k f \quad \text{et} \quad j^k g_1 = j^k g,$$

il existe un germe de difféomorphisme holomorphe φ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $H = \frac{f_1}{g_1} \circ \varphi$. De plus cette propriété est "générique" :

Théorème 2 : La propriété "être à singularité isolée" est générique pour les germes de fonctions méromorphes de deux variables. Plus explicitement, étant donné $H = f/g \in \mathcal{M}_2$ et un entier positif r, il existe $H_1 = f_1/g_1 \in \mathcal{M}_2$ à singularité isolée tel que :

$$j^r f_1 = j^r f \text{ et } j^r g_1 = f^r g.$$

1. Ensemble critique d'une fonction méromorphe. Soient f et g deux germes en $O \in \mathbb{C}^2$ de fonctions holomorphes sans facteur commun et $H = \frac{f}{g}$. Nous appelons ensemble critique de H et notons C_H le germe en O de l'ensemble singulier de la forme f dg - g df. Un bref calcul montre que cette notion ne dépend pas du choix de la représentation irréductible f/g de H. De plus, si R est une transformation homographique, l'égalité suivante est vérifiée :

$$C_H = C_{RoH} \ .$$

En fait, $C_H - \{O\}$ est l'ensemble critique du germe de l'application holomorphe

$$H : (\mathbb{C}^2 - \{O\}, O) \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$$

que définit H. On a donc, comme dans le cas holomorphe la propriété suivante :

Proposition 1.1. : L'ensemble critique d'une fonction méromorphe $H \in \mathcal{M}_2$ est contenu dans ses surfaces de niveau, i.e. pour toute composante irréductible C de C_H il existe une constante $c \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ telle que $C \subset H^{-1}(c)$.

Démonstration : Soit f/g une représentation irréductible de H et U un voisinage ouvert de $O \in \mathbb{C}^2$ sur lequel f et g sont holomorphes. Supposons que C ne soit pas contenue dans $g^{-1}(O)$. Visiblement la différentielle de la restriction de H à la courbe C est nulle. Par continuité, H prend la même valeur (finie) en tout point de $C - \{O\}$, ce qui achève la démonstration.

Le théorème 2 est une conséquence immédiate du théorème suivant, qui est une version légèrement plus forte d'un théorème de transversalité montré dans [32] , p.507. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la démonstration de [32] s'adapte ici sans peine.

Théorème de transversalité : Soit ω un germe en $O \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe et $f : \mathbb{C}^p, O \to \mathbb{C}^n, O$ un germe d'application holomorphe. Quelque soit l'entier positif k, il existe $f_1 : \mathbb{C}^p, O \to \mathbb{C}^n, O$ holomorphe ayant même k-jet que f en O tel que :

(a) $S(f_1^*(\omega)) = f_1^{-1}(S(\omega))$,

(b) $\operatorname{codim} S(f_1^*(\omega)) = \inf (\operatorname{codim} S(\omega), p)$.

Pour obtenir le théorème 2 il suffit de poser $n = p = 2$ et $\omega = y\,dx - x\,dy$.

Remarque 1.2. : On notera que $H = f/g$ peut-être minimale sans que $fdg - gdf$ soit à singularité isolée ; par exemple $H = x^2/y$.

2. Détermination finie.

La démonstration du théorème 1 repose sur le lemme ci-dessous qui s'interprète comme un résultat de détermination finie. Auparavant précisons les notations : $x = (x_1,\dots,x_n)$ désigne les coordonnées de $(\mathbb{C}^n,0)$ et $t = (t_1,\dots,t_p)$ celles de $(\mathbb{C}^p,0)$.
Si $g_1,\dots,g_k \in \mathcal{O}_{n+p}$ nous notons $(g_1,\dots,g_k)$ l'idéal de $\mathcal{O}_{n+p}$ engendré par ces fonctions. Lorsque $g_1,\dots,g_p$ ne dépendent que de la variable x, nous désignons par $(g_1,\dots,g_p)_0$ l'idéal qu'elles engendrent dans $\mathcal{O}_n$. Enfin, nous écrirons :

$$(x) = (x_1,\dots,x_n) \subset \mathcal{O}_{n+p}$$

Lemme 2.1. : Soit ω_0 un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme intégrable holomorphe à singularité isolée. Il existe un entier positif r ayant la propriété suivante : pour tout germe de 1-forme ω intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^{n+p}$ coïncidant avec ω_0 sur $\mathbb{C}^n \times 0$ et avec ω_0 modulo $(x)^r$, il existe un germe de difféomorphisme holomorphe $\phi = (\varphi,t)$ de $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p,0)$ tel que :

$$\phi^*(\omega) = g\omega_0 \ , \ g \in \mathcal{O}_{n+p} \ , \ g(0) \neq 0.$$

Démonstration : Soit $\omega_0 = a_1\,dx_1 + \dots + a_n\,dx_n$ à singularité isolée et :

$$\omega = A_1\,dx_1 + \dots + A_n\,dx_n + B_1\,dt_1 + \dots + B_p\,dt_p$$

vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} A_j(x,0) = a_j, \\ A_j - a_j = \sum_r t_r\, P_{j,r} \in (x)^k, \\ B_i \in (x)^k. \end{cases}$$

Il suffit de prouver que, pour k assez grand, on peut déterminer p champs de vecteurs du type :

$$Z_j = u_{j,1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + u_{j,n}\frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial t_j},$$

où $u_{k,j} \in \mathcal{O}_{n+p}$, $j=1,\dots,p$, qui annulent ω . Par intégration successive (c.f. [7] page 266) on détermine sans peine un difféomorphisme analytique de $\mathbb{C}^{n+p}$, $\phi = (\varphi,t)$ tel que $\phi^*(\omega) \wedge \omega_0 = 0$. Le théorème de division de DE RHAM nous assure l'existence d'une fonction $g \in \mathcal{O}_{n+p}$, $g(0) \neq 0$, telle que $\phi^*(\omega) = g\omega_0$.
Pour obtenir le champ Z_j , il suffit de montrer que B_p est un élément de l'idéal $I = (A_1,\dots,A_n)$ ou encore, de prouver l'inclusion

$$(x)^k \subset I.$$

Comme $P_{j,n} \in (x)^k$ on a les inclusions :

$$I \subset (a_1,\dots,a_n) \subset I + (t)\ (a_1,\dots,a_n),$$

dès que $(x)^k$ est contenu dans $(a_1,\dots,a_n)$ ou encore, ce qui est équivalent, dès que $(x)_0^k \subset (a_1,\dots,a_n)_0$. On déduit alors du lemme de NAKAYAMA l'égalité des idéaux :

$$(A_1,\dots,A_n) = (a_1,\dots,a_n).$$

Comme ω_0 est à singularité isolée, d'après le Nullstellensatz, $(a_1,\dots,a_n)_0$ contient une puissance de l'idéal maximal $(x)_0$. L'entier

$$r = \inf\{k/(x)^k \subset (a_1,\dots,a_n)_0\}$$

vérifie la proposition.

Démonstration du théorème 1. Soit H un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de fonction méromorphe d'écriture irréductible f/g, à singularité isolée et $f_1, g_1 \in \mathcal{O}_2$ vérifiant :

$$j^k f_1 = j^k f \quad \text{et} \quad j^k g_1 = j^k g,$$

Soit H la fonction méromorphe

$$\frac{f+t(f_1-f)}{g+t(g_1-g)} = \frac{F}{G},$$

définie au voisinage du disque unité D de l'axe des t, $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}$.
Notons ω la 1-forme :

$$F\,dG - G\,dF = a\,dx + b\,dy + c\,dt,$$

et pour tout $t \in D$, notons ω_t le germe en O de la restriction de ω à $\mathbb{C}^2 \times t$:

$$\omega_t = a_t dx + b_t\, dy.$$

Un bref calcul montre que pour tout t on a :

$$\omega_t = \omega_o \text{ modulo } (x,y)^{k'} \text{ et } \omega_t = \omega_t \text{ modulo } (x,y)^{k'}.\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,(0,t)}$$

avec $k' = k$ ou bien, si H est méromorphe pure, $k' = k+1$. Ainsi en chaque point $t \in D$ les hypothèses du lemme précédent sont vérifiées : $(x,y)^{k'} \subset (a_o,b_o) \subset \mathcal{O}_2$. En effet :

$$c = (f + t(f_1-f))(g_1-g) - (g+t(g_1-g))(f_1-f)$$

appartient en tout point $t \in D$ à l'idéal $(x,y)^{k'}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,t}$. On déduit du lemme l'existence d'un voisinage U_t de t dans $\bar{D}$ tel que pour tout $t',t'' \in U_t$ il existe un difféomorphisme holomorphe $\varphi_{t',t''}$ de $(\mathbb{C}^2,0)$ qui trivialise $\omega_{t''}$ au-dessus de $\omega_{t'}$; de la compacité du disque unité $\bar{D}$ résulte l'existence d'un difféomorphisme $\Phi_t = (\bar{\varphi}_t, t)$ trivialisant $\omega(x,y,t)$ au dessus de ω_o. Le feuilletage $\mathcal{F}_{\bar{\varphi}_t^*(\omega)}$ est trivial au dessus de $\mathbb{C}^2$ et admet l'intégrale première $H \circ \bar{\varphi}_t$; il en résulte que $H_1 \circ \bar{\varphi}_1 = H_o$, ce que l'on voulait obtenir.

Nous établissons un lien entre les conditions "être à singularité isolée" et "être minimale".

<u>Proposition 2.2.</u> : Soit H un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de fonction méromorphe d'écriture irréductible $\frac{f}{g}$, à singularité isolée ; alors H est minimale. (Comme nous l'avons signalé l'inverse est faux).

<u>Démonstration</u> : Comme nous l'avons vu précédemment, le lieu critique C_H de H est l'ensemble critique de l'application :

$$H : \mathbb{C}^2 - \{0\} \to \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$$

définie par H. Si $H = R(H_o)$, $R \in \mathbb{C}(Z)$, et c est une valeur critique de l'application

$$R : \mathbb{P}\mathbb{C}(1) \to \mathbb{P}\mathbb{C}(1),$$

la fibre $H_o^{-1}(c)$ est une branche de C_H, ce qui permet de conclure.

Remarques et commentaires : Soient $H = f/g$ à singularité isolée, I l'idéal engendré par les composantes de $f\,dg - g\,df$ et :

$$k = \inf\{\ell \;/ (x,y)^{\ell} \subset I\}.$$

Alors H est de k-détermination finie si $f(0) = g(0) = 0$; sinon H est de k+1 détermination finie.

La démonstration du théorème 1 ne se laisse pas généraliser aux dimensions supérieures à deux : en effet, on utilise de façon essentielle le fait que $\omega = fdg-gdf$ est à singularité isolée pour pouvoir invoquer Nakayama. En dimension supérieure à deux $\omega = fdg - gdf$ s'annule au moins sur l'intersection des zéros de f et de g.

La notion de détermination finie qui précède est la généralisation naïve de celle des fonctions holomorphes usuelles. Elle n'est pas très satisfaisante en ce sens qu'il est désagréable qu'elle ne s'applique pas à des fonctions méromorphes aussi simples que x^2/y et qu'elle ne soit opérante qu'en dimension deux. C'est pour pallier à ces defauts que nous présentons une notion plus souple. Par contre, les ordres de déterminations seront certainement plus élevés. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

. CHAPITRE II .

DÉTERMINATION FINIE FAIBLE DES FONCTIONS MULTIFORMES DU TYPE $f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$.

La notion de détermination finie que nous allons définir est différente de celle introduite dans le premier chapitre pour les fonctions méromorphes $\frac{f}{g}$. On s'intéressait aux perturbations portant sur numérateur et dénominateur, c'est-à-dire aux perturbations du pinceau de courbes $f - tg = 0$, $t \in \mathbb{PC}$ (1). Ici nous considérons des perturbations branche par branche i.e. sur chaque composante irréductible, ce qui va permettre d'obtenir un spectre d'application un peu plus large.

1. L'ensemble critique d'un germe de fonction multiforme. Soit $f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$ un germe de fonction multiforme, où les f_j sont des germes de fonctions holomorphes irréductibles, les λ_j des nombres complexes non nuls.

Nous dirons qu'un point $a \in \mathbb{C}^n$ voisin de 0 est régulier pour f si l'on est dans l'une des deux éventualités suivantes :

α) le point a appartient à l'hypersurface $X = \{f_1\dots f_p = 0\}$, les $f_{j,a}$ sont ou bien des unités ou bien irréductibles et X,a est à croisements normaux i.e. il existe des coordonnées $z_1,\dots,z_n$ centrées en a telles que $f_1\dots f_{p,a} = z_1\dots z_q$, $q \leq p$.

β) le point a n'appartient pas à $X \cup S(\omega)$ où $S(\omega)$ est le lieu singulier de $\omega = f_1\dots f_p \Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i}$.

Lorsque les f_i sont des coordonnées il est immédiat que tout point est régulier.
En général, la condition β de régularité peut être réduite à "$a \notin X$" comme l'assure la :

Proposition 1.1. : Soient $\omega = f_1\dots f_p \Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ et $X = (f_1\dots f_p = 0)$. On suppose que l'hypersurface X satisfait la condition α de régularité ie que les $(f_i = 0)$ sont à singularité isolée et n'ont que des croisements ordinaires. Si les λ_i sont <u>$\mathbb{N}$-indépendants</u> on a l'égalité :

$$S(\omega) = \bigcup_{i \neq j} (f_i = 0) \cap (f_j = 0)$$

<u>Démonstration</u> : Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors un chemin $t \to \gamma(t)$ non contenu dans X et contenu dans $S(\omega)$. Notamment, $\gamma^* \omega = 0$ et à fortiori :

$$\gamma^*\left(\Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i}\right) = 0. \qquad (1)$$

Ecrivons :

$$f_i \circ \gamma(t) = t^{p_i} U_i \text{ , avec } p_i > 0 \text{ et } U_i \text{ unité.}$$

En explicitant (1) on constate sans peine l'identité :

$$0 = \Sigma \lambda_i p_i$$

Ce qui est exclu par l'hypothèse.

Pour $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ appelons <u>ensemble critique strict</u> de f le germe en 0 de l'ensemble $C'(f)$ des points non réguliers de f. Comme l'assure la proposition suivante, l'ensemble critique strict $C'(f)$ est un germe d'ensemble analytique :

<u>Proposition 1.2.</u> : L'ensemble critique strict de $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ est le support du $\mathcal{O}_n$-module cohérent $M(f) = \frac{I(f)}{J(f)}$ où $I(f)$ est l'idéal de $\mathcal{O}_n$ engendré par les $\frac{f_1 \ldots f_p}{f_j}$ et $J(f)$ l'idéal des composantes de la forme $\omega = f_1 \ldots f_p \Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i}$.

<u>Démonstration</u> : Soit a un point régulier de f et q le nombre de composantes du germe X_a de X en a. Si $q = 0$, puisque $J(f)$ est l'idéal des composantes de ω , il est clair que la fibre $J_a(f)$ de $J(f)$ en a est précisément $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,a}$; de sorte que $I_a(f) = J_a(f)$.

Si maintenant q est non nul, on peut trouver des coordonnées z_i en a telles que (quitte à réindicer) :

$$f_1 = z_1, \ldots, f_q = z_q,$$
$$f_j(a) \neq 0 \text{ pour } j > q,$$

Visiblement :

$$I_a(f) = J_a(f) = \frac{z_1 \dots z_q}{z_i} ;$$

Ce qui assure l'inclusion :

$$\operatorname{supp} M(f) \subset C'(f).$$

Attachons nous à prouver l'inclusion inverse ; on se place en un point a tel que $I_a(f) = J_a(f)$ et l'on veut prouver que a est régulier. Si a n'appartient pas à $X = \{f_1 \dots f_p = 0\}$ le résultat est évident.
Supposons donc qu'au point a nous ayons :

$$f_1(a) = \dots = f_q(a) = 0$$

et

$$f_j(a) \neq 0 \text{ pour } j > q.$$

Au point a la forme ω s'écrit à unité multiplicative près :

$$\omega = f_1 \dots f_q (\Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i} + \frac{dU}{U}),$$

avec $U = f_{q+1}^{\lambda_{q+1}} \dots f_p^{\lambda_p}$.

Puisque $\frac{dU}{U}$ est holomorphe, on peut supposer que $U = 1$ et on se ramène à :

$$I_a(f) = \left(\frac{f_1 \dots f_q}{f_i}\right)$$

et

$$\omega = f_1 \dots f_q \, \Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i} .$$

Il est clair que $\frac{f_1 \dots f_{q,a}}{f_i}$ constitue un système minimal de générateurs de $I_a(f)$. D'autre part l'égalité $I_a(f) = J_a(f)$ conduit à deux choses :

- d'abord $q \leq n$ puisque $J_a(f)$ a au plus n générateurs minimaux.
- ensuite une relation matricielle :

$$\left(\frac{f_1 \dots f_q}{f_i} , a\right) = A\left(\frac{f_1 \dots f_q}{f_i} , a\right)$$

De ce qui précède, il résulte que A est inversible; ce qui signifie précisément que l'application $(f_1, \dots, f_q)_{,a} : \mathbb{C}^n, a \to \mathbb{C}^q$ est une submersion (il suffit pour cela d'écrire explicitement A). q.e.d.

<u>Remarques importantes</u> :

a) D'après la proposition 1.1. lorsque les λ_i sont $\mathbb{N}$-indépendants $C'(f_1^{\lambda_1}\ldots f_p^{\lambda_p})$ est indépendant de $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ et ne dépend donc que de l'hypersurface $X = (f_1\ldots f_p = 0)$.

b) Le mot "strict" est justifié par le fait que, lorsque les λ_i sont des entiers positifs n_i , $C'(f_1^{n_1}\ldots f_p^{n_p})$ ne coïncide pas avec l'ensemble critique $C(f_1^{n_1}\ldots f_p^{n_p})$ usuel ; par exemple dans $\mathbb{C}^2$, $C'(x^2y)=\{0\}$ alors que $C(x^2y) = (x=0)$.

La propriété $C'(f) = 0$ est générique dans le sens suivant :

<u>Proposition 1.3.</u> : Soient $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{O}_n$, $f_j(0) = 0$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ des nombres complexes. Pour tout entier k, il existe $g_1,\ldots,g_p \in \mathcal{O}_n$ tels que $j^kf_j = j^kg_j$ et tels que l'ensemble critique $C'(g)$ de $g = g_1^{\lambda_1}\ldots g_p^{\lambda_p}$ soit réduit à 0.

Nous allons voir maintenant que la condition $C'(f) = \{0\}$ entraine la détermination de la famille de germes d'hypersurfaces $\{X_1,\ldots,X_p\}$ où $X_j = f_j^{-1}(0)$ (ce qui est en quelque sorte naturel d'après la remarque).

2. <u>Détermination finie d'hypersurfaces</u>.

<u>Définition</u> : La famille $(X_j)_{j=1\ldots p}$ de germes en 0 d'hypersurfaces d'équations réduites $f_j = 0$ est de <u>k-détermination finie</u> si pour tout $g_j \in \mathcal{O}_n$ tel que $j^kg_j = j^kk_j$, il existe un difféomorphisme ϕ : $(\mathbb{C}^n,0)\circlearrowleft$ et des unités $u_j \in \mathcal{O}_n$, $u_j(0) = 1$, tels que :

$$g_j \circ \phi = u_j \cdot f_j \qquad\qquad j = 2\ldots p$$

Cette notion peut s'exprimer comme la $\mathcal{K}$ détermination finie, au sens de Mather pour le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C},0 \arrow[dd, dash, dotted] \\ \mathbb{C}^n,0 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_p"'] & \\ & \mathbb{C},0 \end{tikzcd}$$

Nous utiliserons donc les mêmes techniques : définir les déformations $\mathcal{K}$-triviales puis montrer l'équivalence de la détermination finie et de la $\mathcal{K}$-codimension finie.

Soit U un voisinage de O dans $\mathbb{C}^n$ et $\bar{f} : U \to \mathbb{C}^p$ l'application $(f_1,\dots,f_p)$; l'espace $\mathbb{C}^p$ étant muni de ses coordonnées canoniques $y_1,\dots,y_p$ notons $\chi(\bar{f})$ le $\mathcal{O}_U$-module des sections du fibré $\bar{f}^*(T\mathbb{C}^p)$, c'est à dire des champs X du type :

$X = \Sigma\, a_j(x) \dfrac{\partial}{\partial y_j}$, $a_j \in \mathcal{O}_U$, qui font commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & T\mathbb{C}^p \arrow[d] \\ U \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "\bar{f}"'] & \mathbb{C}^p \end{tikzcd}$$

Ainsi $\chi(\bar{f})$ s'identifie à $\mathcal{O}_U^p$

On note alors $N(\bar{f})$ le sous module de $\chi(\bar{f})$ constitué des champs Y du type suivant :

$Y = T\bar{f}.X'$

où X' est un champ sur U :

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "T\bar{f}"] \arrow[d] & T\mathbb{C}^p \arrow[d] \\ U \arrow[u, bend left, "X'"] \arrow[ur, "Y"] \arrow[r, "\bar{f}"'] & \mathbb{C}^p \end{tikzcd}$$

Considérons maintenant le sous-module $Q(\bar{f})$ des champs $\Sigma\, a_j \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ tels que a_j soit nul sur X_j, $\forall\, j$. Nous avons :

$$Q(\bar{f}) = \sum_{j=1}^{p} f_j \cdot \mathcal{O}_U \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Pour un choix $(x_1,\dots,x_n)$ de coordonnées de U, nous avons :

$$N(\bar{f}) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}_U \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}$$

où $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}$ désigne la ligne $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_j} \right)$.

Soit enfin $R(\bar{f})$ le quotient de $\chi(\bar{f})$ par $S(\bar{f}) = N(\bar{f}) + Q(\bar{f})$.
Voici le lien entre le lieu critique $C'(f)$ d'une fonction multiforme défini dans le chapitre précédent et $R(\bar{f})$:

Lemme 2.1. : Soit $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$; on a l'inclusion : $\operatorname{supp} R(\bar{f}) \subset C'(f)$.

Démonstration : Soit a un point régulier de f situé sur X, et $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées en a telles que (à un renumérotage près des f_i) on ait:

$$f_1 = z_1; \ldots; f_q = z_q$$

$$f_j(a) \neq 0 \text{ pour } j > q.$$

En calculant explicitement $N(\bar{f})$ on constate sans problème que la fibre $R(\bar{f})_a$ est réduite à 0. Lorsque a n'est pas sur X, $Q(\bar{f})$ est alors égal à $\sum \mathcal{O}_U \frac{\partial}{\partial y_j}$ et on a le même résultat.

Compte tenu du lemme 2.1. l'outil principal utilisé dans la détermination finie des fonctions multiformes sera la :

Proposition 2.2. : La famille X_j est de détermination finie si et seulement si le support de $R(\bar{f})$ est réduit à 0 (ou vide).

Démonstration : Nous prouverons seulement l'implication "$\operatorname{supp} R(\bar{f}) = 0$ $\Longrightarrow$ détermination finie .

Nous laissons au lecteur le soin de montrer l'implication réciproque en interprétant dans les espaces de jets $J^k(n,p)$, (d'une façon analogue à Mather III), l'espace $R(\bar{f})$ comme un espace transverse à l'orbite de $j^k \bar{f}$ suivant l'action du groupe des k-jets du produit :

$$D(p) \times \mathrm{Diff}(n)$$

où $D(p)$ est l'espace des matrices diagonales inversibles à coefficients dans $\mathcal{O}_n$ et $\mathrm{Diff}(n)$ le groupe des difféomorphismes de $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Etant donné $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_p)$ tel que $j^k\bar{g} = j^k\bar{f}$ introduisons le chemin défini au voisinage de $\mathbb{C}^n, 0 \times \mathbb{C}$:

$$\bar{F}(x,t) = \bar{f}(x) + t(\bar{g}(x) - \bar{f}(x))$$

et cherchons un difféomorphisme $\Phi(x,t) = (\phi(x,t),t)$ de $\mathbb{C}^n,0 \times \mathbb{C}$ et une matrice diagonale $M(x,t)$ à coefficients dans l'anneau A_{n+1} des germes de fonctions holomorphes le long de $0 \times D(0,1) \subset 0 \times \mathbb{C}$ tels que :

(1) $M.\bar{F} \circ \Phi = \bar{f}$

(2) $\phi(0,t) = (0,t) ; \phi(x,0) = (x,0) ; M(x,0) = M(0,t) = \mathrm{id}.$

Le système (1) ayant pour $t = 0$ la solution triviale $\phi = x$, $M = \mathrm{id}$, il suffit de résoudre l'équation (1)' obtenue par dérivation de (1) par rapport à t :

$$(1)' \quad \frac{\partial M}{\partial t} .\bar{F} \circ \Phi + M\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \circ \Phi \,.\, \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \circ \phi\right) = 0$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial M^{-1}}{\partial t} .M + M^{-1}\frac{\partial M}{\partial t} = 0$$

on obtient après composition par Φ^{-1} et multiplication par M^{-1} :

$$(1)'' \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \left[\frac{\partial M^{-1}}{\partial t} .M\right] .\bar{F} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} .\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \circ \phi^{-1}\right)$$

Introduisons comme il est d'usage le champ de vecteurs :

$$Z = \frac{\partial \phi}{\partial t} \circ \phi^{-1}$$

et la matrice :

$$A = \frac{\partial M^{-1}}{\partial t} .M$$

Visiblement la résolution de l'équation :

$$(3) \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = A.\bar{F} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} .Z$$

conduit à celle de (1) via l'intégration du champ Z et de l'équation linéaire $\frac{\partial M^{-1}}{\partial t} = A.M^{-1}$.

Les conditions (2) seront satisfaites si l'on exige :

(4) $Z(0,t) = 0$ et $A(0,t) = 0$

Désignons par $\mathcal{N}$ l'idéal de A_{n+1} des fonctions nulles sur l'axe des t et soit $S'(\bar{F})$ la somme du module $N'(\bar{F})$ engendré par $\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_n}$ et du module $Q(\bar{F})$ engendré par $(F_1,0,\ldots,0)\ldots(0,\ldots,0,F_p)$.

Les conditions (3) et (4) s'expriment par :

(5) $\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \subset \mathcal{N}.S'(\bar{F})$,

(5) étant elle-même satisfaite dès qu'il existe un entier ℓ tel que :

$$(6)_\ell \qquad \mathcal{N}^{\ell}.\ A^p_{n+1} \subset S'(\bar{F})$$

Ces considérations d'ordre général étant faites revenons au cas où le support de $R(\bar{f})$ est réduit à O (lorsque supp $R(\bar{f}) = \emptyset$, il est clair que les f_i sont des coordonnées).

D'après le Nulstellensatz, il existe un entier s tel que :

$$(7)_s \qquad \mathfrak{M}^s.\ \mathcal{O}^p_n \subset S(\bar{f})$$

où $\mathfrak{M}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$.
Nous avons :

$$S(\bar{f}) \subset S'(\bar{F}) + (t)\mathcal{N}^k.\ A^p_{n+1}$$

et comme $\mathfrak{M}.\ A_{n+1} = \mathcal{N}$, d'après $(7)_s$ il vient :

$$\mathcal{N}^s.\ A^p_{n+1} \subset S'(\bar{F}) + (t)\mathcal{N}.\mathcal{N}^s\ A^p_{n+1} \qquad \text{pour } k \geq s+1$$

et d'après Nakayama $(6)_s$ est satisfaite.

<u>Corollaire 2.3.</u> : Soient $f_1,\dots,f_p$ p germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^n$, <u>tous</u> à singularité isolée ; on suppose que l'hypersurface $X = (f_1\dots f_p = 0)$ n'a , en dehors de O, que des croisements ordinaires. Alors X est conjuguée à un ensemble algèbrique. Il en de même pour les ensembles $X_I = \bigcap_{i\in I}(f_i = 0)$ où I est une partie de $\{1,2,\dots,p\}$.

3. <u>Détermination finie faible.</u> Reprenons les notations précédentes : $f = f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$ où les f_j sont irréductibles et $\lambda_j \in \mathbb{C} - \{0\}$. Nous disons que f est de <u>détermination finie faible d'ordre k</u> si pour tout $g_1,\dots,g_p$ tels que :

$$j^k g_j = j^k f_j$$

il existe un difféomorphisme φ de $\mathbb{C}^n$ tel que $f \circ \varphi = g_1^{\lambda_1}\dots g_p^{\lambda_p}$. Cette dernière égalité signifie qu'il existe des unités U_i telles que :

$$f_j \circ \varphi = U_j.g_j \qquad j = 1\dots p$$

et

$$U_1^{\lambda_1} \ldots U_p^{\lambda_p} = 1.$$

Théorème 3.1. : Le germe de fonction multiforme $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ est de détermination finie si et seulement si son ensemble critique $C'(f)$ est soit vide, soit réduit à O.

Démonstration : D'après la proposition 1.3. la condition $C'(f) = \{O\}$ est nécessaire. Montrons la suffisance.

Soient $\omega = f_1 \ldots f_p \, \Sigma \, \lambda_i \dfrac{df_i}{f_i}$, $g_j \in \mathcal{O}_n$ tels que $j^k g_j = j^k f_j$ et $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_p)$. D'après le lemme 2.1. le support de $R(\bar{f})$ est réduit à O. Ainsi la famille d' hypersurfaces $X_j = f_j^{-1}(O)$ est de détermination finie. Soit s_1 son ordre de détermination et $k \geq s_1$. Nous pouvons supposer que $g_j = u_j . f_j$ où les u_j sont des unités telles que :

$$u_j(O) = 1$$

et

$$j^\delta u_j = 1 \text{ avec } \delta = k - s_1.$$

Considérons les germes de fonctions F, définis le long de $O \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ par :

$$F_j = f_j + t(g_j - f_j).$$

Désignons encore par A_{n+1} l'anneau des germes de fonctions holomorphes le long de $O \times \mathbb{C}$.

Nous avons :

$$(1) \begin{cases} F_j = V_j . f_j = [1 + t(u_j - 1)] . f_j \\ V_j - 1 \in (t) \mathcal{N}^{\delta+1} \end{cases}$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'idéal de A_{n+1} engendré par $x_1, \ldots, x_n$.

Montrons que pour δ assez grand, les conditions (1) impliquent que la forme :

$$\Omega = F_1 \ldots F_p \, \Sigma \, \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}$$

se trivialise le long de l'axe des t au dessus de ω. Il suffit pour cela de déterminer un champ de vecteur X du type :

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma A_i(x,t) . \frac{\partial}{\partial x_i}$$

qui annule Ω :

$$\Omega(X) = 0 \; ,$$

où les $A_i(x,t)$ sont des germes le long de $0 \times \mathbb{C}$.
Notons $J'(F)$ l'idéal engendré par les composantes de $\Omega = \Omega - \Omega(\frac{\partial}{\partial t})dt$ et $I'(F)$ l'idéal $(\frac{F_1 \ldots F_p}{F_j})$. D'après (1) nous avons :

$$\Omega(\frac{\partial}{\partial t}) = f_1 \ldots f_p \, V_1 \ldots V_p \Sigma \lambda_i \, \frac{(u_i - 1)}{V_i} \in \mathcal{N}^{\delta+1} I'(F) \quad .$$

Pour déterminer X il suffit de montrer l'inclusion

(4) $\qquad \mathcal{N}^{\delta} I'(F) \subset J'(F) \quad .$

Notons tout d'abord les égalités :

(5) $\qquad I'(F) = A_{n+1} . I(f) = A_{n+1} . (\frac{f_1 \ldots f_p}{f_i}) \quad ,$

(6) $\qquad dF_j = df_j$ modulo $\{(t) . \mathcal{N}^{\delta}, dt\}$.

En combinant (5) et (6) il vient :

(7) $\qquad A_{n+1} . J(f) \subset J'(F) + (t)\mathcal{N}^{\delta} \; I'(F)$

Puisque $C'(f)$ est réduit à 0, il en est de même du support de $M(f) = \frac{I(f)}{J(f)}$ et il existe un entier s_2 tel que :

$$\mathfrak{m}^{s_2} I(f) \subset J(f)$$

où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de O_n.
Puisque $\mathcal{N} = \mathfrak{m} . A_{n+1}$ on obtient pour $\delta \geq s_2 + 1$, d'après (5) et (7) :

$$\mathcal{N}^{\delta} . I'(F) \subset \mathcal{N}^{s_2} I'(F) \subset J'(F) + (t)\mathcal{N}^{\delta} I'(F) \subset J'(F) + (t)\mathcal{N}^{s_2+1} I'(F)$$

Par Nakayama (4) est satisfaite.

4. Remarques et conséquences.

Rappelons que nous avons établi dans §2 :

$$\text{supp } R(\bar{f}) \subset C'(f) = \text{supp } M(f).$$

On peut préciser l'inclusion précédente comme suit :

Proposition 4.1. : $C'(f) = \operatorname{supp} R(\bar{f}) \cup (S(\omega) - X)$; lorsque les λ_i sont $\mathbb{N}$-indépendants $C'(f) = \operatorname{supp} R(\bar{f})$.

Démonstration : Soit en effet un point a non contenu dans $S(\omega) - X$ et tel que $R(\bar{f})_a = 0$; nous allons montrer que a est régulier. Rappelons que $R(\bar{f})_U$ s'identifie à :

$$\frac{\mathcal{O}_U^p}{\Sigma\ \mathcal{O}_U(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_j}) + (\mathcal{O}_U f_1, \ldots, \mathcal{O}_U f_p)} .$$

Si aucun des f_i ne s'annule en a, a est régulier. Supposons donc que $f_1(a) = \ldots = f_q(a) = 0$ et $f_j \neq 0$ pour $j > q$. Si $R(\bar{f})_a = 0$, il est clair que la matrice :

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right)_{\substack{k=1\ldots q,\\ j=1\ldots n.}}$$

est nécessairement de rang maximum.

On en déduit le :

Théorème 4.2. : Les conditions suivantes sont équivalentes

(1) $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ est de détermination finie

(2) $C'(f)$ est soit vide, soit réduit à 0.

Lorsque les λ_i sont $\mathbb{N}$-indépendants (1) et (2) sont équivalents à :

(3) la famille d'hypersurfaces $X_j = f_j^{-1}(0)$ est de détermination finie.

Remarques 4.3 :

a) les ordres de déterminations de la famille des $(f_j = 0)$ et de f ne sont pas égaux en général.

b) si $n = 2$ la condition (3) est toujours vérifiée.

Notamment :

Théorème 4.4. : Toute fonction holomorphe à deux variables est conjuguée à un polynôme.

. CHAPITRE III .

SINGULARITÉS QUASI-HOMOGÈNES DES FONCTIONS MULTIFORMES $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$.

1. Rappels - définitions et premières propriétés. Avant d'aborder la notion de quasi-homogénéité pour une fonction multiforme, rappelons de quoi il s'agit dans le cas usuel d'une fonction uniforme :

Définition 1.1. :

1) une hypersurface X d'équation réduite $(f = 0)$ est quasi-homogène si $f \in \mathfrak{m}.J(f)$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$ et $J(f)$ l'idéal Jacobien de f ; cette définition ne dépend pas de l'équation réduite de X et nous dirons indifféremment que X ou bien f est quasi-homogène.

2) Un polynôme $P = \sum_{|I| \leq N} P_I x^I$ à n variables $(x_1,\dots,x_n)=x$ est quasi-homogène s'il existe $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n) \in \mathbb{Q}^n$ tel que :

$$P_I = 0 \text{ dès que } \langle\mu,I\rangle \neq 1$$

où $\langle\mu,I\rangle$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)$ et $I = (I_1,\dots,I_n)$.

Une fonction f quasi-homogène possède les deux propriétés suivantes :

Théorème 1.2. : a) f est entièrement déterminée par l'hypersurface (f=0), en ce sens :

si U est une unité holomorphe, $U(0) = 1$, les deux germes de fonctions holomorphes f et U.f sont conjuguées par un difféomorphisme φ :

$$Uf = f \circ \varphi \ .$$

(Nous établirons ce résultat dans un cadre plus général par la suite).

b) (établi par K. Saïto [38]) un germe de fonction holomorphe f quasi-homogène et à singularité isolée est conjugué à un polynôme P quasi-homogène.

On remarquera à ce moment que la forme dP possède une symétrie linéaire à valeurs propres rationnelles.

On généralise la notion de quasi-homogénéité aux fonctions multiformes de la façon suivante :

Soient $f_1,\dots,f_p$ des germes de fonctions holomorphes irréductibles étrangers, nuls en O, et $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ des nombres complexes non nuls ; le germe de fonction multiforme $F = f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$ est quasi-homogène s'il existe un germe de champ holomorphe X, nul à l'origine, tel que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}(X) = 1.$$

Ce qui signifie heuristiquement que $F \in \mathfrak{M}.J(F)$, et, lorsque les λ_i valent un, on retrouve la notion usuelle.
On remarquera que la définition ne dépend que de F ; en effet, si $g_1^{\mu_1}\dots g_s^{\mu_s}$ est une autre écriture de F, on a, à un renumérotage éventuel près :

$$s = p$$

$$\mu_i = \lambda_i$$

$$g_i = U_i.f_i \quad \text{avec } \Sigma\lambda_i \frac{dU_i}{U_i} = 1.$$

<u>Proposition 1.3.</u> : Soit $F = f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$ un germe de fonction multiforme quasi homogène et $U \in \mathcal{O}_n$ une unité. Alors U.F est aussi quasi-homogène.

<u>Démonstration</u> : Soit X un champ holomorphe tel que :

$$\Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i}(X) = 1.$$

Le champ de vecteurs Y :

$$Y = \frac{X}{1+ \frac{dU}{U}(X)}$$

est holomorphe, nul à l'origine et satisfait à :

$$\Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i}(Y) + \frac{dU}{U}(Y) = 1$$

Q.E.D.

<u>Théorème 1.4.</u> : Soit $F = f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$ un germe de fonction multiforme et ω la forme de Pfaff :

$$\omega = f_1 \dots f_p \Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$$

a) Si F est quasi-homogène la forme ω (et plus généralement $V.\omega$ où $V(0) \neq 0$) possède une symétrie holomorphe.

b) Si ω n'a pas d'intégrale première holomorphe ou méromorphe F est quasi-homogène dès que ω (ou $V.\omega$ pour $V(0) \neq 0$) possède une symétrie holomorphe.

Démonstration : Supposons F quasi-homogène et soit X tel que :

$$\Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}(X) = 1$$

Ainsi $V.f_1 \dots f_p = V.\omega(X)$ est un facteur intégrant de $V.\omega$. D'où a). Assurons nous maintenant de b). Soit X une symétrie de $V.\omega$; alors $V.\omega(X)$ est un facteur intégrant de $V.\omega$ et d'après l'hypothèse, il existe une constante $C \neq 0$ telle que $C.f_1 \dots f_p = \omega(X)$.

Q.E.D.

Remarque : L'assertion b) est fausse si l'on ne fait pas l'hypothèse restrictive "ω n'a pas d'intégrale première holomorphe ou méromorphe" (par exemple si F est holomorphe et non quasi-homogène).

L'hypersurface $f_1 \dots f_p = 0$ joue un rôle particulier pour la fonction multiforme $F = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$; il est donc naturel d'essayer de généraliser la partie a) du théorème 1.2. :

Théorème 1.5. : Soient $F = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ un germe de fonction multiforme quasi-homogène et $G = g_1^{\lambda_1} \dots g_p^{\lambda_p}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un germe de difféomorphisme $\varphi : \mathbb{C}^n, 0 \circlearrowleft$ et une constante c tels que :

$$G = c.F \circ \varphi \quad ,$$

(ii) il existe un germe de difféomorphisme de $\mathbb{C}^n, 0$ qui transforme l'hypersurface $f_1 \dots f_p = 0$ en l'hypersurface $g_1 \dots g_p = 0$.

Démonstration : L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est claire, prouvons la réciproque. Il suffit de considérer le cas où $g_i = u_i . f_i$, $i=1 \dots p$, avec $u_i(0) = 1$. Soient $u = u_1^{\lambda_1} \dots u_p^{\lambda_p}$, $v = u-1$ et H la fonction multiforme définie au voisinage de la droite $\{0\} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ par :

$$H(x,t) = (1 + tv)\, f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}.$$

Nous avons $H(x,0) = F$ et $H(x,1) = G$. Nous allons montrer qu'il existe un champ de vecteur de type :

$$Z = \sum_{i=1}^{p} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t},$$

tangent aux surfaces de niveau de H,c'est à dire annulant la forme :

$$\Omega = (1+tv)\, f_1 \dots f_p \left(\Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + \frac{d(tv)}{1+tv}\right).$$

Ainsi les fonctions multiformes $H_t = H/\mathbb{C}^n \times \{t\}$ seront conjuguées pour t voisin de O. D'après la proposition 1.3. on peut raisonner de même sur F_{t_o} en chaque point t_o de $0 \times \mathbb{C}$. De la compacité du disque unité découlera le résultat.

Explicitons la forme Ω :

$$\Omega = (1+tv) f_1 \dots f_p \left(\Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}\right) + t\, f_1 \dots f_p dv + f_1 \dots f_p\, v\, dt.$$

Il suffit de prouver que $f_1 \dots f_p v$ appartient à l'idéal I de $\mathcal{O}_{n+1}$ engendré par les composantes de la forme

$$\Omega' = (1+tv) f_1 \dots f_p \Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + t\, f_1 \dots f_p\, dv.$$

F étant quasi-homogène, soit X un champ de vecteurs tel que :

$$\Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}(X) = 1.$$

Nous avons :

$$\Omega'(X) = (1+tv)\, f_1 \dots f_p + t\, f_1 \dots f_p\, dv,$$

de sorte que l'idéal J de $\mathcal{O}_{n+1}$ engendré par $f_1 \dots f_p$ satisfait à :

$$J \subset I + (t).J.$$

D'après le lemme de Nakayama on a $J \subset I$, ce qui assure le résultat

Q.E.D.

2. Critères suffisants de quasi-homogénéité. On se propose de montrer que modulo des hypothèses d'indépendance sur les λ_i, $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ est quasi-homogène dès que ses séparatrices le sont. Donnons nous, comme précédemment des germes de fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_p$ irréducti-

bles, étrangers et $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ des nombres complexes non nuls. Si $F = f_1^{\lambda_1}\ldots f_p^{\lambda_p}$ est quasi-homogène il en sera de même de $G = f_1^{\mu_1}\ldots f_p^{\mu_p}$ pour presque tout $\mu_1,\ldots,\mu_p$. En effet soit X un champ de vecteur holomorphe tel que :

$$\Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i}(X) = 1.$$

Puisque les f_i sont étrangers les germes de fonctions, $u_i = \frac{df_i}{f_i}(X)$ sont holomorphes et l'on a :

$$\Sigma\lambda_i u_i = 1.$$

Notamment les $u_i(0)$ sont non tous nuls et donc certaines composantes f_i sont elles-mêmes quasi-homogènes. Si $\mu_1,\ldots,\mu_p$ sont des nombres complexes tels que :

$$\Sigma\lambda_i u_i(0) \neq 0$$

il est clair que $f_1^{\mu_1} \ldots f_p^{\mu_p}$ est quasi-homogène puisque :

$$\Sigma \mu_i \frac{df_i}{f_i} \left(\frac{X}{\Sigma \mu_j u_j}\right) = 1$$

Nous allons préciser cette remarque :

<u>Théorème 2.1.</u> : Si $F = f_1^{\lambda_1}\ldots f_p^{\lambda_p}$ est quasi-homogène, il existe des entiers relatifs $q_1,\ldots,q_p$ tels que $f_1^{\mu_1}\ldots f_p^{\mu_p}$ soit quasi-homogène dès que $\Sigma q_j\mu_j \neq 0$ (Notamment il existe des entiers n_i tels que $f_1^{n_1}\ldots f_p^{n_p}$ soit quasi-homogène, mais ces entiers ne sont peut-être pas égaux à un.)

<u>Démonstration</u> : Soient X et $u_i \in \mathcal{O}_n$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{df_i}{f_i}(X) = u_i \\ \Sigma \lambda_i u_i = 1 \end{cases}$$

le p.uple $(u_1(0),\ldots,u_p(0))$ ne peut-être une relation pour tout élément de $(\mathbb{N} - \{0\})^p$ que si les $u_i(0)$ sont tous nuls. Soient donc $n_1,\ldots,n_p$ des entiers non nuls tels que $f_1^{n_1}\ldots f_p^{n_p}$ soit quasi-homogène. Montrons dans un premier temps le lemme suivant (que Saïto a établi dans le cas d'une singularité isolée) :

Lemme 2.2. : Soit $g \in \mathcal{O}_n$ quasi-homogène i.e. $g \in \mathfrak{M}.J(g)$. Il existe un champ holomorphe X_1, $X_1(0) = 0$, vérifiant :

a) $X_1(g) = g$

b) le jet d'ordre un de X_1 est non nul, diagonalisable et ses valeurs propres sont rationnelles.

Démonstration du lemme : Soit X_o un champ holomorphe nul à l'origine tel que $X_o(g) = g$.
Considérons sa décomposation de Jordan formelle :

$$X_o = X_S + X_N$$

où X_S est un champ semi-simple et X_N un champ nilpotent (cf [30]). Comme g apparait comme vecteur propre de X_o, il est clair que :

$$X_S(g) = g$$

Le champ X_S étant semi-simple, il existe des coordonnées formelles (x_j) dans lesquelles X_S est linéaire diagonal :

$$X_S = \Sigma\, \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ecrivons g dans ces coordonnées :

$$g = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} g_I\, x^I$$

L'égalité $X_S(g) = g$ signifie que le produit scalaire $< \alpha, I >$ vaut un lorsque g_I est non nul, où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Ainsi le sous ensemble $E(g) = \{ I \in \mathbb{N}^n / g_I \neq 0\}$ engendre dans $\mathbb{C}^n$ un sous espace affine de codimension $k \geq 1$ contenu dans $\{<\alpha, z> = 1\}$. Le $\mathbb{Q}$-sous espace affine engendré par E(g) dans $\mathbb{Q}^n$ est aussi de codimension k. Soit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ un n-uple de nombres rationnels tels que $<\beta, I> = 1$ pour tout I dans E(g). Le champ formel:

$$X = \Sigma\, \beta_j\, x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

vérifie encore $X(g) = g$; parce que le complété formel des solutions analytiques d'un système d'équations linéaires à coefficients analytiques est l'ensemble des solutions formelles, on trouve un champ holomorphe X_1 tel que :

$$j^1X_1 = j^1X,$$

$$X_1(g) = g.$$

Revenons à la preuve de 2.1. et appliquons le lemme à $f_1^{n_1}\dots f_p^{n_p}$; soit $X_1, X_1(0) = 0$, vérifiant a) et b) ; nous avons :

$$\Sigma\, n_i \frac{df_i}{f_i}(X_1) = 1$$

et :

$$df_i(X_1) = u_i f_i \text{ où les } u_i \in \mathcal{O}_n \text{ et sont non tous nuls.}$$

En remarquant que les premiers jets non nuls des f_i sont des vecteurs propres pour l'opérateur de dérivation j^1X_1, on constate que les $u_i(0)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des valeurs propres de j^1X_1 : les $u_i(0)$ sont donc rationnels et non tous nuls. Soit m un entier tel que les $m.u_i(0) \in \mathbb{Z}$; les nombres $q_i = m.u_i(0)$ vérifient 2.1.

Voici maintenant un critère de quasi-homogénéité ne faisant appel qu'à la nature de l'hypersurface canonique $(f_1\dots f_p = 0)$; rappelons que les seules "surfaces de niveau" analytiques de $F = f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$ sont les $(f_i = 0)$ dès que les λ_i sont $\mathbb{N}$-indépendants.

<u>Corollaire 2.3.</u> Soit $F = f_1^{\mu_1}\dots f_p^{\mu_p}$ un germe de fonction multiforme ; on suppose les μ_i $\mathbb{Z}$-indépendants. Alors F est quasi-homogène dès que l'hypersurface $(f_1\dots f_p = 0)$ est quasi-homogène.
(On peut déduire ce corollaire soit du lemme 2.2. soit du théorème 2.1)

Nous avons un résultat plus précis en ajoutant une hypothèse supplémentaire sur l'une des branches $f_i = 0$.

<u>Théorème 2.4.</u> : Soit $F = f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$ un germe de fonction multiforme quasi-homogène et supposons que l'une des branches f_i est à singularité isolée et d'ordre au moins trois. Alors il existe des entiers positifs $q_1,\dots,q_p$ tels que $f_1^{\mu_1}\dots f_p^{\mu_p}$ soit quasi-homogène dès que $q_1\mu_1 + \dots + q_p\mu_p \neq 0$.

Il en découle visiblement le :

<u>Corollaire 2.5.</u> : Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ des nombres complexes $\mathbb{N}$-indépendants et $f_1,\dots f_p \in \mathcal{O}_n$ des germes irréductibles étrangers. Si l'un des f_i est à singularité isolée et d'ordre ≥ 3, les conditions suivantes sont

équivalentes :

(i) $F = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ est quasi-homogène,

(ii) $f = f_1 \dots f_p$ est quasi-homogène.

Démonstration de 2.4. :Nous reprenons les méthodes de démonstration du théorème 2.1. et du lemme 2.2.. Aussi bien dans la situation (i) que (ii) il existe des entiers positifs $n_1,\dots,n_p$ tels que $h = f_1^{n_1} \dots f_p^{n_p}$ soit quasi-homogène.

Soit $X_S = \Sigma \mu_j \, x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ un champ formel à valeurs propres rationnelles tel que $X_S(h) = h$. On a alors :

$$X_S(f_i) = u_i . f_i \quad , \quad u_i \in \hat{\mathcal{O}}_n.$$

La conclusion va résulter du lemme suivant :

Lemme 2.6. : Soit $g \in \hat{\mathcal{O}}_n$ une série formelle à singularité isolée, d'ordre au moins trois et $X_S = \Sigma \, \mu_i \, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ linéaire diagonal à valeurs propres μ_i rationnelles tel que $X_S(g) = ug$ où $u \in \hat{\mathcal{O}}_n$. Alors les μ_i sont de même signe et u est une unité.

Admettons provisoirement ce lemme et supposons f_1 à singularité isolée et d'ordre au moins trois. D'après le lemme 2.6. les valeurs propres μ_j de X_S sont de même signe, mais puisque $X_S(h) = h$, elles sont positives. On en déduit l'existence d'un champ holomorphe X_1 dont le 1-jet a pour valeurs propres les μ_j et qui vérifie $X_1(h) = h$. En particulier $X_1(f_j) = v_j . f_j$ où $v_j \in \mathcal{O}_n$, et les $v_j(0)$ sont des nombres rationnels positifs. Soit m un entier tel que les $q_j = m \, v_j(0)$ soient entiers. Alors $(q_1,\dots,q_p)$ convient.

Démonstration du lemme 1.6 : Nous allons utiliser un procédé déjà rencontré.

Nous décomposons l'idéal maximal $\hat{\mathcal{M}}$ de $\hat{\mathcal{O}}_n$ en la somme directe :

$$\hat{\mathcal{M}} = E_1 \oplus E_2$$

où $\quad E_1 = \{ \sum_{|I| \geq 1} h_I \, x^I , \ \langle \mu, I \rangle \neq 0 \} \quad , \quad \mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)$

et $\quad E_2 = \{ \sum_{|I| \geq 1} h_I \, x^I \ \ \langle \mu, I \rangle = 0 \}$.

On vérifie facilement les égalités et inclusions :

$$(*)\quad \begin{cases} X_S(E_1) = E_1 \\ X_S(E_2) = 0 \\ E_1 . E_2 \subset E_1 \\ E_2 . E_2 \subset E_2 \end{cases}$$

Ecrivons u sous la forme suivante :

$$u = u(0) + u_1 + u_2 \qquad \text{avec } u_i \in E_i$$

Soit v_1 une série formelle telle que :

$$X_S(v_1) + u_1 = 0$$

et $G = e^{v_1} g$.

On a :

$$X_S(G) = (X_S(v_1) + u_1 + u_2 + u(0))\, e^{v_1} g = (u(0) + u_2).G.$$

Ecrivant maintenant G sous la forme :

$$G = G_1 + G_2$$

il vient :

$$X_S(G) = X_S(G_1) = (u(0) + u_2).G_1 + (u(0) + u_2).G_2$$

D'après les propriétés (*) , on a :

$$(u(0) + u_2).G_2 = 0.$$

Si $u(0) + u_2 \equiv 0$, on a à ce moment $X_S(G) = 0$; ceci est impossible parce que G , qui est à singularité isolée d'ordre au moins 3, ne peut être annulée par un champ linéaire : les relations entre les dérivées $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ sont en éffet engendrées par les relations triviales.

Donc G_2 est nul et $G = G_1$:

$$X_S(G_1) = (u(0) + u_2).G_1$$

Comme X_S respecte sur E_1 le degré des monômes, il en résulte visiblement que u(0) est non nul, et donc u est une unité.

On considère alors le champ $Y = \frac{X_S}{u}$; Y a pour 1-jet $\frac{X_S}{u(0)}$ et vérifie $Y(g) = g$; ce qui signifie que g est une singularité isolée quasi-homogène.

On sait alors depuis Saïto que les valeurs propres de $j^1Y = \frac{X_S}{u(0)}$ sont, parce que ν est supérieur à trois, comprise entre 0 et 1/2. D'où le résultat.

Q.E.D.

Note : Les auteurs remercient C.A. Roche pour avoir décelé une erreur dans la démonstration initiale.

3. Formes normales des singularités quasi-homogènes.

Nous nous proposons d'établir le :

Théorème 3.1. : Soit $F = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ un germe de fonction multiforme quasi-homogène. On suppose que l'un des f_i est à singularité isolée et d'ordre au moins trois. Alors F est conjuguée à une fonction multiforme $P = P_1^{\lambda_1} \dots P_p^{\lambda_p}$ "polynomiale quasi-homogène" ; plus précisément il existe des nombres rationnels $\mu_1, \dots, \mu_n$, $0 < \mu_i < \frac{1}{2}$ et $s_1, \dots, s_p > 0$, tels que : $\Sigma s_i = 1$ et chaque P_i est un polynôme quasi-homogène de poids $s_i.(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Démonstration : D'après le théorème 2.4., $f=f_1 \dots f_p$ est quasi-homogène: il existe un champ holomorphe X tel que :

$$X(f) = f.$$

En vertu du lemme 2.2. on peut supposer que les valeurs propres de X sont rationnelles. D'après le lemme 2.6., en raisonnant sur la partie semi-simple de X, on établit que les valeurs propres μ_i du champ j^1X

sont des nombres rationnels positifs. D'après le théorème de normalisation de Poincaré, le champ X est holomorphiquement conjugué à un champ polynomial Jordanisé :

$$Z = \Sigma \mu_i \, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + X_N = X_S + X_N ,$$

où X_N est un champ nilpotent polynomial.

Puisque $X_S(f) = X(f) = f$ et que les μ_i sont positifs il est clair que dans les coordonnées (x_i), f s'écrit sous la forme d'un polynôme quasi-homogène :

$$f = \sum_{\langle \mu, I \rangle = 1} f_I x^I .$$

L'ensemble des $I \in \mathbb{N}^n$ tels que $\langle \mu, I \rangle = 1$ est en effet fini.

Compte tenu du théorème 1.5., il suffit d'établir le

<u>Lemme 3.2.</u> : Soit $P = f_1 \ldots f_p$ un polynome quasi-homogène, où les f_i sont holomorphes irréductibles. On suppose que les poids $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ de P sont des rationnels positifs (ce qui est le cas si l'un des f_i est à singularité isolée et d'ordre au moins trois). Alors P possède une décomposition :

$$P = P_1 \ldots P_p \quad , \quad P_i = V_i . f_i \quad , \quad V_i \in \mathcal{O}_n, \; V_i(0) = 1$$

où les P_i sont des polynômes quasi-homogènes de poids $s_i(\mu_1, \ldots, \mu_n)$; les s_i sont des combinaisons linéaires entières des μ_i vérifiant $\Sigma s_i = 1$.

Ce lemme signifie notamment que pour un polynôme quasi-homogène, les décompositions en facteurs irréductibles holomorphes et algébriques coïncident.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit A le champ de vecteurs linéaire :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Nous avons :

$$A(P) = P$$

et

$$A(f_i) = U_i . f_i$$

où les U_i sont des unités telles que $\Sigma U_i = 1$; les $U_i(0)$ sont en effet des combinaisons linéaires entières des μ_j.

Nous cherchons les P_i sous la forme annoncée :

$$P_i = V_i . f_i \quad , \quad V_i(0) = 1 + \ldots$$

de façon telle que :

$$A(P_i) = U_i(0).P_i$$

Nous sommes amenés à résoudre le système d'équations :

$$(\ast) \begin{cases} V_1 \ldots V_p = 1 \quad , \\ A(V_i) + V_i.(U_i - U_i(0)) = 0 \quad . \end{cases}$$

Posons $W_i = \text{Log } V_i$, où $W_i \in \mathfrak{M}$; le système ($\ast$) s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \Sigma W_i = 0 \quad , \\ A(W_i) = U_i - U_i(0) \quad . \end{cases}$$

Après avoir remarqué que la condition $\Sigma W_i = 0$ est équivalente à la condition $\Sigma A(W_i) = 0$, on établit que ($\ast$) a une solution puisque :

$$\Sigma U_i - U_i(0) = 0$$

Les égalités :

$$A(P_i) = U_i(0).P_i$$

obligent les P_i à être des polynômes quasi-homogènes. Les s_i sont bien entendu les $U_i(0)^{-1}$.

Q.E.D.

Terminons enfin en signalant une propriété caractéristique des fonctions (multiformes) quasihomogènes, qui est, en quelque sorte la réciproque du théorème 1.5 :

<u>Théorème 3.3</u> : Soit $f = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ vérifiant la propriété suivante :

"Pour toute unité u, il existe un germe de difféomorphisme φ de $\mathbb{C}^n, 0$, tel que

$$uf = f \circ \varphi \quad ."$$

Alors f est quasihomogène.

<u>Démonstration</u> : Exercice.

. CHAPITRE IV .

PROBLÈMES D'HOMOGÉNISATION

Dans ce chapitre, on étudie sous quelles conditions une forme $\omega = \omega_\nu + \ldots$ est conjuguée à son premier jet non nul ω_ν.

1. Homogénisation en dimension deux.

En général la présence d'une symétrie holomorphe conduit à l'homogénisation (rappelons que l'existence d'un facteur intégrant holomorphe n'implique pas l'existence d'une symétrie holomorphe).

Théorème 1.1. : Soit $\omega = \omega_\nu + \ldots$ une forme de Pfaff holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ dont la partie homogène de plus bas degré ω_ν est à singularité isolée. On suppose $\nu \geqslant 2$ et que ω_ν ne possède pas d'intégrale première holomorphe ou méromorphe. Si ω possède une structure transverse holomorphe, ω est holomorphiquement conjuguée à sa partie homogène ω_ν (à un facteur multiplicatif près).

Démonstration : Soit f_μ le premier jet non nul du facteur intégrant $f = \omega(X)$. Visiblement f_μ est un facteur intégrant de ω_ν. Nous affirmons qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que :

$$c.f_\mu = \omega_\nu(R) = \omega_\nu\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) = P_{\nu+1}$$

En effet puisque ω_ν est à singularité isolée et que ν est supérieur à 2, $P_{\nu+1}$ est non nul, et donc est un facteur intégrant de ω_ν ; l'affirmation est conséquence du fait que ω_ν n'a pas d'intégrale première méromorphe.

Il en résulte que $\mu = \nu + 1$ et que le jet d'ordre 1, X_1 de X est non nul et que : $f_{\nu+1} = \omega_\nu(X_1)$.

Le champ $cX_1 - R$ annule la forme ω_ν ; les deux hypothèses "$\nu \geqslant 2$ et ω_ν à singularité isolée" impliquent alors l'égalité :

$$cX_1 = R\ .$$

Quitte à changer X en c.X on peut supposer que :

$$X_1 = j^1 X_1 = R.$$

En vertu du théorème de Poincaré le champ X dans de bonnes coordonnées est linéaire, i.e. X=R et dans ces coordonnées :

$L_R \omega = h.\omega$, où h est une série convergente.

Ecrivons :

$$\omega = \sum_{i \geq \nu} \omega_i ,$$

où les ω_i sont des formes homogènes de degré i et :

$h = \sum_{j \geq 0} h_j$, h_j homogène de degré j .

Nous avons :

$$\sum_{i \geq \nu} L_R \omega_i = \sum_{i \geq \nu} (i+1)\omega_i = h.\omega \ .$$

Visiblement :

$$h_o = \nu + 1 ,$$

de sorte que :

$$(\nu+2)\omega_{\nu+1} = h_1 \omega_\nu + (\nu+1)\omega_{\nu+1} ,$$

et $\omega_{\nu+1} = h_1 \omega_\nu$.

On prouve ainsi par induction que chaque ω_i est colinéaire à ω_ν . Ce que l'on se proposait d'établir.

On notera le corollaire évident suivant :

Corollaire 1.2. : Sous les hypothèses du théorème 1.1. si X_1 et X_2 sont deux symétries holomorphes de ω alors X_1 et X_2 sont faiblement conjuguées : il existe une constante c et un germe de difféomorphisme ϕ tel que :

$$c\, X_1 = \phi_* X_2 \ .$$

Ce corollaire soulève une question que nous ne savons pas résoudre: étant données deux structures transverses X_1 et X_2 d'une même forme ω , les champs X_1 et X_2 sont-ils faiblement conjugués ? (La constante multiplicative pouvant devenir une fonction multiplicative).

On rapprochera le théorème 1.1. de l'exercice suivant :

Exercice : Soit $f : \mathbb{C}^n,0 \to \mathbb{C},0$ un germe de fonction holomorphe quasi-homogène ie $f \in J(f)$. On suppose que le premier jet non nul f_ν de f est à singularité isolée et que $\nu \geq 3$. Montrer que f et f_ν sont conjugués.

Etudions des problèmes analogues en dimension supérieure.

2. Symétries holomorphes des perturbations des formes domestiques.

Soit ω_ν une forme domestique :

$$\omega_\nu = P_1 \dots P_p \Sigma \lambda_i \frac{dP_i}{P_i} \quad , \quad \Sigma\lambda_i \nu_i = 1$$

où les ν_i sont les degrés des P_i et soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ ayant ω_ν pour jet d'ordre ν. D'après la partie 4, ω s'écrit :

$$(*) \quad \omega = f_1 \dots f_p \Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i} \; , \; j^{\nu_i} f_i = P_i \quad .$$

L'étude des perturbations des formes domestiques est donc contenue dans celle des formes du type (*).

Introduisons une notion un peu plus générale que la domesticité :

Définition 2.1. : Soit $\omega_\nu = P_1 \dots P_p \Sigma \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}$ une forme de la strate $\Sigma^p_{1\dots1;\nu_1\dots\nu_p}$, $\Sigma\lambda_i\nu_i = 1$; nous dirons que ω_ν est générique lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- les P_i sont à singularité isolée.
- les intersections des $P_i = 0$ sont ordinaires.
- les λ_i sont non nuls et ω_ν n'a pas d'intégrale première holomorphe ni méromorphe, ie les $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ ne sont pas tous rationnels.

Notamment, une forme homogène générique possède un seul facteur intégrant $P_{\nu+1} = \omega_\nu(R)$ à une constante multiplicative près.

Soit $\omega = f_1 \dots f_p \Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ une forme à partie homogène ω_ν générique. Puisque ω_ν n'a pas d'intégrale première holomorphe ou méromorphe $f_1 \ldots f_p$ en est le seul facteur intégrant (à constante multiplicative près). Supposons maintenant que ω possède une symétrie X ; quitte à multiplier X par une constante non nulle on a nécessairement :

$$\omega(X) = f_1 \ldots f_p \Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}(X) = f_1 \ldots f_p$$

ce qui, en d'autres termes signifie que $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$ est quasi-homogène.

Désignons par X_1 le jet d'ordre un du champ X ; visiblement :

$$\omega_\nu(X_1) = P_1 \ldots P_p = \omega_\nu(R)$$

où R désigne toujours le champ radial $\Sigma x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Ecrivons le champ X_1 sous la forme suivante :

$$X_1 = R + A$$

où A est un jet d'ordre un de champ annulant ω_ν :

$$\omega_\nu(A) = 0 .$$

<u>1er cas</u> : <u>Le champ A est non nul à l'origine</u>.

A ce moment ω_ν qui annule clairement le champ constant A(O) est trivial au-dessus d'un n-1-plan. Il en est donc de même de ses séparatrices ($P_i = 0$) ; comme celles-ci sont supposées être à singularité isolée, elles n'ont en fait pas de singularités. La forme ω_ν est donc du type suivant :

$$x_1 \ldots x_p \Sigma \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \quad \text{où } (x_1, \ldots, x_n)$$

est un système de coordonnées et ω est visiblement conjuguée à ω_ν .

<u>2ème cas</u> : <u>Le champ A est linéaire</u>.

Remarquons ici que les hypersurfaces ($P_i = 0$) sont invariantes par le champ A ; ceci se lit aisément sur l'égalité :

$$P_1 \ldots P_p \Sigma \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}(A) = 0$$

Puisque les P_i sont homogènes, il existe des constantes $c_i \in \mathbb{C}$ telles que :

$$A(P_i) = dP_i(A) = c_i . P_i$$

et les P_i apparaissent comme vecteurs propres de l'opérateur linéaire $Q \to A(Q)$.

Soit :

$$A = A_S + A_N \quad , \quad [A_S, A_N] = 0$$

la décomposition de Jordan du champ A.

Nous avons le :

Lemme 2.2. : 1) $A_S(P_i) = c_i . P_i$

2) $A_N(P_i) = 0$

3) $\omega_\nu(A_N) = \omega_\nu(A_S) = 0$

Rappelons le lemme bien connu suivant :

Lemme 2.3. : Soit Q un polynôme homogène à singularité isolée de degré $d \geq 3$ à l'origine de $\mathbb{C}^n$.

1) Q n'est annulé par aucun champ linéaire

2) si $(\mu_1, \dots, \mu_n; c) \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifie

$$\Sigma \mu_i \, x_i \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = c.Q$$

alors $(\mu_1 \dots \mu_n;\ c) = \frac{c}{d}(1, \dots, 1; d)$

Preuve : 1) est trivial parce que le module des relations entre les $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ est engendré par les relations triviales.

2) résulte de l'identité d'Euler et de 1).

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le :

Théorème 2.4. : Si la forme $\omega = f_1 \dots f_p \Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ à partie homogène générique $\omega_\nu = P_1 \dots P_p \Sigma \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}$ possède une symétrie X (ou ce qui est équivalent, si $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ est quasi-homogène), alors ω est conjuguée à ω_ν dès que l'un des P_i est de degré au moins trois.

Démonstration : Soit X une symétrie de $\omega = \omega_\nu + \dots$ et, avec les notations précédentes, $X_1 = R + A$ le 1-jet de X ; A est nécessairement linéaire, et d'après les lemmes 2.2. et 2.3., A est semi-simple. En utilisant encore le lemme 2.3. on remarque qu'en fait A est colinéaire au champ radial :

$A = \lambda . R$

Comme $\omega_\nu (A) = 0$ et $\omega_\nu (R) \neq 0$, λ est nul et $X_1 = R$.

On conclut aisément via le théorème de linéarisation de Poincaré.

<u>Remarque</u> : On peut en fait modérer les hypothèses du théorème ; si $\omega_\nu = P_1 \ldots P_p \Sigma \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}$, il est suffisant de supposer que l'un (et non tous) des P_i est à singularité isolée et d'ordre au moins trois. L'hypothèse sur les croisements n'est pas intervenue et la supprimer conduit au même résultat ; par contre elle apparaitra dans la suite.

Voici maintenant un exemple explicite de forme $\omega = \omega_\nu + \ldots$ à partie homogène domestique, mais ne possèdant pas de symétrie holomorphe.

On se donne les trois polynômes P_1, P_2 et f :

$$P_1 = \frac{1}{3} (X^3 + Y^3 + Z^3)$$

P_2 = une forme linéaire transverse à P_1

$$f = P_1 + XYZ^2.$$

Les formes :

$$\omega_3 = P_1 . P_2 (\lambda_1 \frac{dP_1}{P_1} + \lambda_2 \frac{dP_2}{P_2})$$

et

$$\omega = f . P_2 (\lambda_1 \frac{df}{f} + \lambda_2 \frac{dP_2}{P_2}) = \omega_3 + \ldots$$

ne sont jamais conjuguées pour la raison suivante : les hypersurfaces $f^{-1}(0)$ et $P_1^{-1}(0)$ ne sont pas conjuguées ; en effet, au niveau des idéaux jacobiens $J(f)$ et $J(P_1)$, nous avons l'égalité $J(f) = J(P_1) + \mathbb{C}.X.Y.Z$.

3. <u>Homogénisation des formes</u> $\omega = f_1 \ldots f_p \Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ <u>à partie homogène générique en présence de symétrie en dimension n = 3.</u>

Compte tenu du théorème 2.4. et du fait que le résultat est immédiat lorsque tous les P_i sont de degré un, il suffit de mener l'étude pour les formes génériques :

$$\omega_\nu = P_1 \ldots P_p \Sigma \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}$$

où tous les P_i sont de degré plus petit que deux, l'un d'entre eux au moins étant de degré deux.

Tout d'abord voici un lemme général :

Lemme 3.1. : Soit ω une forme de Pfaff holomorphe intégrable, cod $S(\omega) \geq 2$, et X un champ tangent à ω : $\omega(X) = 0$. Soit $m \in S(\omega)$ un point du lieu singulier de ω ; le champ X est tangent à $S(\omega)$ en m.

Preuve : Si X(m) est nul, le lemme est démontré, si ce n'est pas le cas on peut écrire :

$$X,m = \frac{\partial}{\partial t}, \quad t(m) = 0 \text{ où } t \text{ est une coordonnée en } m.$$

La forme ω,m annulant $\frac{\partial}{\partial t}$ est triviale au dessus du (n-1) plan t=0 ; il en est donc de même de son lieu singulier.

Q.E.D.

Du lemme 3.1., on déduit facilement un second lemme :

Lemme 3.2. : Soit $\omega_\nu = P_1 \ldots P_p \Sigma \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}$ une forme générique à l'origine de $\mathbb{C}^3$, l'un au moins des P_i étant de degré deux. Alors ω_ν n'annule pas de champ nilpotent.

Démonstration : Puisque les croisements des P_i sont ordinaires d'après Bezout, le lieu singulier de ω_ν est constitué de q droites avec $q \geq 2$; si A_N est un champ nilpotent annulé par ω_ν, d'après le lemme 2.1., ces deux droites sont propres pour A_N, i.e font partie du noyau de A_N. Alors A_N est ou bien nul, ou bien du type suivant :

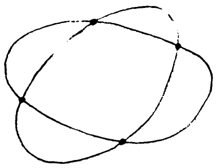
$$A_N = y \frac{\partial}{\partial z}$$

lorsque q = 2.
Mais si ω_ν annule A_N, elle annule $\frac{\partial}{\partial z}$ donc est triviale au dessus du plan z = 0 et ne peut possèder de séparatrice quadratique à singularité isolée.

Nous allons maintenant effectuer une liste d'exercices pour examiner les différents cas pouvant se présenter.

Proposition 3.3. : Soit $\omega_\nu = P_1 \ldots P_p \Sigma \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}$, $\Sigma \lambda_i \nu_i = 1$, une forme générique telle que d° $P_i \leq 2$. On suppose qu'au moins deux des P_i sont de degré deux. Soit $\omega = f_1 \dots f_p \Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i} = \omega_\nu + \dots$ une perturbation de ω possèdant une symétrie holomorphe. Alors ω est conjuguée à ω_ν.

<u>Démonstration</u> : Supposons que P_1 et P_2 soient de degré deux ; les deux coniques $P_i = 0$ se coupent suivant quatre droites, qui ont la propriété évidente que trois quelconques d'entre elles forment une base de $\mathbb{C}^3$:



Soit $A = A_S + A_N$ un champ linéaire annulé par ω_ν ; alors d'après 2.2. et 3.2. A_N est nul ; compte tenu du lemme 3.1. et de la remarque précédente, le champ A_S possède quatre directions propres trois à trois indépendantes. Il est donc nécessairement colinéaire au champ radial! On conclut comme dans 2.4.

<u>Proposition 3.4</u> : Soit $\omega_\nu = P_1 \dots P_p \ \Sigma\lambda_i \frac{dP_i}{P_i}$ une forme générique à l'origine de $\mathbb{C}^3$, $d^\circ P_i \leqslant 2$. On suppose $p \geqslant 3$ et qu'un seul des P_i est de degré 2.
Soit $\omega = f_1 \dots f_p \ \Sigma\lambda_i \frac{df_i}{f_i} = \omega_\nu + \dots$ une forme possédant une symétrie.
Alors ω est conjuguée à ω_ν .

<u>Démonstration</u> : Réordonnons les P_i de sorte que $d^\circ P_1 = d^\circ P_2 = 1$, $d^\circ P_3 = 2$, les $(P_i = 0)$, $i=1,2,3$, se coupent deux à deux suivant cinq droites dont quatre d'entre elles ont la propriété ici encore d'être trois à trois indépendantes. On conclut comme dans 3.3.

D'après les propositions 3.3., 3.4. et le théorème 2.4., on s'aperçoit qu'un seul cas nous a échappé, c'est le suivant à isomorphisme linéaire près :

$$\omega_2 = x_1 Q(\lambda_1 \frac{dx_1}{x_i} + \lambda_2 \frac{dQ}{Q}) \quad , \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1$$

où Q est une forme quadratique transverse à x_1. Ce cas particulier est intéressant en lui-même car il jouit de la propriété suivante (énoncée en dimension $n \geqslant 3$ quelconque) :

Théorème 3.5. : ω_2 est de deux détermination finie dès que λ_1 est non réel ou bien réel Siegelien : si ω est un germe de forme intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ tel que $j^2\omega = \omega_2$ alors ω et ω_1 sont conjuguées (faiblement i.e. à unité multiplicative près).

Démonstration : Soit ω un germe de forme intégrable tel que $j^2\omega = \omega_2$; d'après la partie 4, et quitte à faire agir un germe de difféomorphisme à l'origine de $\mathbb{C}^n$, on peut supposer que :

$$\omega = x_1.f\ (\lambda_1 \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{df}{f})$$

où $f = Q+\ldots$ est un germe de Morse transverse à x_1. Considérons le diaramme :

$$(x_1,f)\ :\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

Suivant J.P. Dufour [12] ce diagramme est, tout du moins d'un point de vue formel, équivalent au diagramme :

$$(x_1,Q)\ :\ \mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}\ ,\ \mathbb{C})$$

dans le sens suivant :

il existe des difféomorphismes (peut-être formels) φ, ℓ et L à la source et au but :

$$\varphi : \mathbb{C}^n,0 \circlearrowleft$$
$$\ell\ :\ \mathbb{C},0 \circlearrowleft$$
$$L\ :\ \mathbb{C},0 \circlearrowleft$$

tels que $(x_1,f) \circ \varphi = (\ell(x_1)\ ,\ L(Q))$

De sorte que ω est formellement équivalente à :

$$\omega' = \ell(x_1).L(Q)\ (\lambda_1 \frac{\ell'(x_1)}{\ell(x_1)} dx_1 + \lambda_2 \frac{L'(Q)}{L(Q)} .dQ\ )$$

Comme nous sommes intéressés seulement par la détermination finie faible, on se ramène donc à :

$$\omega'' = x_1\ Q(\lambda_1 U(x_1).V(Q)\ \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{dQ}{Q})$$

où $U(x_1) = 1+\ldots$, $V(Q) = 1+\ldots$ sont des unités.

Nous allons comparer les idéaux des composantes de ω_2 et ω'' ; nous avons:

$$\mathcal{J}(\omega_2) = \{\lambda_1 Q+\lambda_2 x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1}\ ,\ldots, x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1}\ \}$$

et :

$$\mathcal{J}(\omega'') = \{\lambda_1 U(x_1)\ V(Q).Q + \lambda_2 x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \ldots, x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \ldots\}$$

Lemme 3.6. : $\mathcal{J}(\omega_2) = \mathcal{J}(\omega'')$ (dans l'anneau des séries formelles).

Démonstration : Puisque $j^2\omega'' = \omega_2$, il est suffisant de s'assurer de l'inclusion :

$$\mathcal{J}(\omega'') \subset \mathcal{J}(\omega_2)$$

et pour cela nous allons montrer que l'élément $\lambda_1 U(x_1)\ V(Q).Q = \lambda_2 x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ appartient à $\mathcal{J}(\omega_2)$.
Ecrivons :

$$\lambda_1 U(x_1)V(Q).Q + \lambda_2 x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \lambda_1 Q + \lambda_2 x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} + Q^2 a(Q) + x_1 Q W(x_1, Q)$$

où a (resp. W) sont des séries à une (resp. deux) variable, et montrons que Q^2 et $x_1 Q$ sont dans $\mathcal{J}(\omega_2)$.

Comme $\omega_2(R) = x_1 Q$, $x_1 Q$ est effectivement dans $\mathcal{J}(\omega_2)$; considérons :

$$\alpha = \lambda_1 Q + \lambda_2 x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1}$$

α, et donc $x_1\ \alpha$, appartient à $\mathcal{J}(\omega_2)$; il en résulte que $x_1^2 \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ appartient à $\mathcal{J}(\omega_2)$. Pour montrer que Q^2 appartient à $\mathcal{J}(\omega_2)$ écrivons :

$$\alpha^2 = \lambda_1^2 Q^2 + 2\lambda_2 x_1 Q . \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \lambda_2^2 x_1^2 \frac{\partial Q}{\partial x_1} . \frac{\partial Q}{\partial x_1}$$

D'après ce qui précède, on conclut facilement.

Q.E.D.

Lemme 3.7. : ω possède une symétrie holomorphe.

Démonstration : pour des raisons de platitude, on peut se contenter de montrer que ω'' possède une symétrie formelle. Remarquons que le facteur intégrant de ω'' s'écrit :

$$g = H.x_1.Q$$

où H est une série formelle. Comme $x_1 Q \in \mathcal{J}(\omega_2) = \mathcal{J}(\omega'')$, ω'' possède effectivement une telle symétrie.

Q.E.D.

Fin de la démonstration de 3.5. :

Soit X une symétrie holomorphe de la forme ω . Ecrivons le jet d'ordre un de X sous la forme :

$$X_1 = R + A$$

où A est un champ linéaire annulé par ω_2. D'après le lemme 3.6., et le théorème d'Artin, on peut trouver un champ de vecteur holomorphe Z tel que :

$$j^1 Z = A$$
$$\omega(Z) = 0$$

Le champ Y = X - Z est une symétrie de ω ayant pour 1-jet le champ radial. On conclut de façon habituelle.

La réunion des propositions 3.3., 3.4. et des théorèmes 3.5. et 2.4. nous conduit à énoncer le :

Théorème 3.8. : Soit ω_ν une forme domestique à l'origine de $\mathbb{C}^3$ et $\omega = \omega_\nu + \ldots$ une perturbation de ω_ν ; ω est conjuguée à ω_ν si et seulement si ω possède une symétrie holomorphe. Cet énoncé se généralise au cas où ω_ν est générique et $\omega = \omega_\nu + \ldots$ est du type :

$$\omega = f_1 \ldots f_p \Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i} .$$

QUELQUES PROBLÈMES OUVERTS

1. Les intégrales premières multiformes des systèmes intégrables.

Actuellement peu de résultats sont connus ; pour les systèmes "intersections complètes" (ceux définis par q équations de Pfaff et qui en même temps définissent un feuilletage singulier de codimension q) il y a le Frobenius 2 de B. Malgrange [29] concernant les intégrales premières holomorphes fortes usuelles et un article de F. Maghous [26] qui traite des intégrales premières faibles dans le cas non dégénéré. La raison de ce manque tient probablement au fait qu'on ne sache pas désingulariser les champs de vecteurs en dimension supérieure à deux.

Notamment, à notre connaissance, on ne sait même pas étudier les systèmes homogènes intégrables : ceux engendrés par des formes homogènes de même degré. Question : sont-ils engendrés par des formes intégrables (une à une). Exemple (et exercice) : dans un système engendré par deux formes homogènes ω_1 et ω_2 en dimension 3, on peut toujours trouver une forme intégrable.

2. Quelques problèmes topologiques : classifier topologiquement les formes homogènes domestiques.

- Etudier la topologie des surfaces de niveau d'une fonction multiforme $f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}$.

- Etudier les feuilletages singuliers dont toutes les feuilles sont fermées et adhèrent à l'origine.

3. Montrer qu'une forme intégrable dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, n'ayant qu'un nombre fini de séparatrices dans tout deux plan générique, possède une séparatrice.

4. Désingulariser (bonne chance) les formes intégrables en dimension supérieure à deux (ce qui donnerait probablement 3).

5. Décrire l'ensemble $\mathcal{D}_\nu$ des formes dicritiques en dimension supérieure à 3 (il est réductible car l'adhérence des formes triviales au dessus d'un trois plan est d'intérieur non vide dans $\mathcal{I}_\nu$ ([5],[8])).

6. Etudier les déformations intégrables d'une forme à 2 variables du type $\omega_2+\dots$ où ω_2 est homogène générique. (Dans cet ordre d'idée, dans une thèse de 3ème cycle en cours Mr. Kabyla (Dijon) traite le problème de "μ-constant" pour les formes intégrables).

7. Etablir un théorème d'extension pour les facteurs intégrants méromorphes (ou un contre-exemple...)

8. Etudier les formes intégrables dont les feuilles sont les orbites de l'action d'un groupe de Lie ([5],[8],[10]).

[1] M. ARTIN : On the solutions of analytic equations. Inventions Maths. 5 p.277-291 (1968).

[2] I. BENDIXSON : Sur les points singuliers d'une équation différentielle linéaire, Ofv. Kongl. Ventenskaps Akademiens Forhandlinger (1895) n° 148,81-89.

[3] BRIOT-BOUQUET : Recherches sur les fonctions définies par des équations différentielles, Journal de l'Ecole Polytechnique, XXI, (1856) 134-198.

[4] A.D. BRUJNO : Analytic form of differentiable equations, Trans. Moscou, Math. Soc. 25 (1971) 131-282.

[5] C. CAMACHO & A. Lins NETO : The topology of integrable form near a singularity Pub. Math. I.H.E.S., n° 55 (p.5-36)

[6] C. CAMACHO & P. SAD : Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. of. Math., 115 (1982), 579-595.

[7] D. CERVEAU : Distributions involutives singulières, Annales de l'Institut Fourier, XXIX, 3, (1979)

[8] D. CERVEAU : Contributions à l'étude des formes intégrables singulières, Thèse - Dijon - 1981.

[9] D. CERVEAU & R. MOUSSU : Extension de facteurs intégrants et applications, C.R. Acad. Sc. t. 294 (4 Janvier 1982) Série I p. 17-19.

[10] D. CERVEAU & A. LINS NETO : Formes intégrables tangentes à des actions commutatives, C.R. Acad. Sc., t. 291 (8 décembre 1980) Série A p. 647-649.

[11] P. DELIGNE : Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien. Séminaire Bourbaki vol. 79/90 nov. 79.

[12] J.P. DUFOUR : Thèse Montpellier.

[13] H. DULAC : Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, Journal de l'Ecole Polytechnique, 2, 9, (1904) , 1-125.

[14] H. DULAC : Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point singulier , Annales de l'Université de Grenoble, XVII, (1905) 1-51.

[15] H. DULAC : Sur les points singuliers d'une équation différentielle, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3° série, 1 , (1909) , 42-379.

[16] H. DULAC : Points singuliers des équations différentielles, Mémorial des Sciences Mathématiques, n° 61, Gauthier-Villars, (1935).

[17] F. DUMORTIER : Singularities of vector fields on the plane, Journal of differential equations , 23 ,1 (1977).

[18] J. ECALLE : Thèse Orsay (1974)

[19] W. FULTON : On the fundamental group of the complement of a node curve, preprint.

[20] A.M. GABRIELOV : Formal relations between analytic functions , Math USSR Izvestia Vol.7, (1973) N° 5 p. 1056-1088.

[21] H. HIRONAKA : Introduction to the theory of infinitely near singular points. Mem. Mat. del Instituto "Jeorge Juan",28,Madrid,1977

[22] HAMM & LE DUNG TRANG : Un théorème de Zariski du type Lepschetz , Ann. Sc.Ec. Norm. Sup. 6 (1973) 317-366.

[23] J.P. JOUANOULOU : Equations de Pfaff algébriques. Lect. Notes in math. N° 708, Springer Verlag.

[24] B. KLARES : Thèse Strasbourg.

[25] I. KUPKA : Singularities of integrable Pfaffian forms, Proc. Nat. Acad. Sciences, 52 (1964).

[26] F. MAGHOUS : Intégrales premières et formes normales, Thèse 3ème cycle Dijon (1979).

[27] B. MALGRANGE : Ideals of differentiable fonctions, Oxford University Press, (1968).

[28] B. MALGRANGE : Frobenius avec singularité I : codimension 1 , Publ. Math. I.H.E.S. , 46 (1976) p. 163-173.

[29] B. MALGRANGE : Frobenius avec singularité II : le cas général , Inventiones Math. 39 , 1, (1977)

[30] J. MARTINET : Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Brujno). Séminaire Bourbaki Nov. 80

[31] J. MARTINET & J.P. RAMIS : Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre , I.H.E.S. Pub. Math. N° 55

[32] J.F. MATTEI & R. MOUSSU : Holonomie et intégrales premières , Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 13 (1980) p. 469-523.

[33] R. MOUSSU : Sur les feuilletages de codimension un. Thèse Orsay (1971).

[34] R. MOUSSU : Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, Ann. Inst. Fourier 26 - 2, (1976) p. 171-220.

[35] NARASIMHAN : Introduction to the theory to analytic spaces, Lect. Notes in Math. n° 25, Springer-Verlag.

[36] G. REEB : Sur certaines propriétés des variétés feuilletées, Act. Sc. et Ind., Herman, Paris (1952).

[37] K. SAITO : On a generalisation of de Rham Lem ,Ann. Inst. Fourier, 2, 26, (1976) 165-170.

[38] K. SAITO : Quasi homogene isolierte singularitäten von Hyperflächen. Invent. Math. 14, p. 123-142 (1971).

[39] A. SEIDENBERG : Réduction of singularities of the differentiable equation AdY = BdX , Amer. J. of Math. (1968) 248-269.

[40] SHIOTA : Equivalence of differentiable mappings and analytic mappings.Pub.Math.IHES N° 54 (37-122)

[41] C.L. SIEGEL : Uber dier Normal form analytischen differentialgleichungen in der Nähe einer gleichgewitsislösung. Gottinger Nachrichten der Akademie des Wissenschaftent (1952), p. 21-30.

[42] T. SUWA : Singularities of complex analytic foliations , preprint.

[43] T. SUWA : Unfoldings of complex analytic foliations, preprint.

[44] T. SUWA : A theorem of versality for unfolding of complex analytic forliation singularities, preprint.

[45] T. SUWA : Kupka-Reeb phenomena and universal unfoldings of certain foliation singularities, preprint.

[46] M. SUZUKI : Sur les relations d'équivalence ouvertes dans les espaces analytiques, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4 , (1974) 531-542.

[47] M. SUZUKI : Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes, Lect. Notes in Math. , 670, Springer-Verlag, p.53-58.

[48] D. TISCHLER : On fibering certain foliated manifolds, Topology, 9, 2, (1970).

[49] A. VEN DEN ESSEN : Reduction of singularities of the differentiable equation Adx + B dy.Lect.Notes in math. N°712 (p.44-59) Springer Verlag.

[50] R.J. WALKER : Algebraic curves, Dover Publications, Inc. New York.

[51] H. WHITNEY : Complex Analytic Varieties , Reading Addison Wesley , 1972.

[52] O. ZARISKI : On the Poincaré group of a projective hypersurface, Ann. Math. 38 , n° 1, (1937) p. 131-141.

[53] O. ZARISKI : On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve , Amer. Jour. of Math. 51 (1929), p. 305-328.

Dominique CERVEAU
Laboratoire de Topologie
E.R.A. N° 07 945
Université de Dijon
DIJON - France.

Jean-François MATTEI
Université des Sciences
Sociales de Toulouse
Place Anatole France
TOULOUSE - France

ABSTRACT

The aim of this paper is the study of multiform first integrals of integrable Pfaffian forms. After some generalities about singular 1-forms (Separatrix, Blowing-up, Holonomy, Integrating Factor and so on...) topological, algebrical and computable testes are given to obtain these integrals. Finally, finite determination and quasi-homogeneous singularities of multiform first integrals are studied.