C. S. SESHADRI
J. M. DREZET (réd.)

Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques

Astérisque, tome 96 (1982)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__96__1_0>

These notes are essentially an expanded version of a few talks given at the Ecole Normale Supérieure (Verdier Seminar) in the spring of 1980 by the undersigned as well as one talk by M.S Narasimhan. Some unpublished material figures in the notes :

i) the moduli of vector bundles on singular (not necessarily irreducible) curves. Here one finds a complete generalisation of D'Souza's thesis [5] as well as a partial generalization of Oda-Seshadri [30] (it would be interesting to carry out a more detailed generalization of Oda-Seshadri). It would also be interesting to make a detailed study of the relation between this moduli space and the one on the normalization of the curve. Some work has been done by Gieseker in this connection (lectures of TIFR in 1979-80) ; in fact this work of Gieseker served as the catalyst for this investigation.

ii) the non-existence of certain Poincaré families. This proof is due to M. Nori.

iii) the moduli space of vector bundles with level structures. This is related to the work of Drinfeld. We follow the definition of D. Mumford in an unpublished manuscript. D. Mumford defines this concept only for vector bundles (i.e only for torsion free sheaves). It would be interesting to investigate the connection between these varieties and those on singular curves.

These notes have been written by J.M Drezet who has done a tremendous job. He has carried out many improvements and most often he had only to rely on sketches of proofs.

It is great pleasure to thank J.L Verdier and the audience for the interest shown by them.

C.S SESHADRI

INTRODUCTION

One is interested here in vector bundles on a projective curve over k, an algebraically closed field, and more generally in coherent sheaves (possibly with some extra structures). One tries to classify such objects. For example one wants to build an algebraic variety whose geometric points are isomorphism classes of vector bundles. This variety should satisfy some "universal property", that is, represent some "natural" functor from the category of noetherian k-schemes to the category of sets.

This construction is possible only for a kind fo vector bundles (or sheaves ...), which are said to be *stable*. To get complete varieties, one needs to consider also *semi-stable* bundles.

First are given the definition and elementary properties of (semi-)stable vector bundles (or sheaves...). Then existence theorems of moduli varieties are obtained. Next we study these moduli varieties (are they reduced, have they singular points ...).

The demonstrations of the existences theorems are very similar, so the calculations are given only in the cases of level structures and coherent sheaves on a reduced curve, which are not treated in the litterature. The "theoretical" part is detailed only in the cases of vector bundles, and vector bundles with parabolic structures.

In the first part we are interested in (semi-)stable vector bundles on a smooth projective curve over k. We give some results of theories (Grothendieck schemes, Mumford's geometric invariant theory) which are used in the other parts.

The second part deals with the deformation of the moduli varieties obtained in the first part, and follows a talk of M.S Narasimhan.

In the third part we study (semi-)stable vector bundles with parabolic structures. Langton's work (adapted to bundles with parabolic structures) is exposed only here to shorten the first part. The results of this part follow a paper of Mehta and Seshadri.

The fourth part treats of level structures. They appear in the study of (semi-)stable sheaves on a reduced projective curve.

In the fifth part we build a "natural" desingularisation of the moduli varieties of semi-stable vector bundles.

The sixth part gives a partial demonstration of a result of S. Ramanan about the inexistence of Poincaré bundles on a non empty open set of some moduli varieties. The way to prove this is different from this of Ramanan, and is due to M. Nori.

The seventh part deals with coherent (semi-)stable sheaves on a reduced projective curve over k . It is a generalization of the first part.

In the eighth part we study some properties of the moduli of coherent semi-stable sheaves built in the seventh part, when the singular points of the curve are ordinary double points.

The results of the fourth, fifth, seventh and eighth part are due to C.S Seshadri.

On s'intéresse ici à des fibrés vectoriels sur une courbe projective sur k , corps commutatif algébriquement clos, et plus généralement à des faisceaux cohérents (munis ou non de certaines structures). On cherche à classifier de tels objets. Par exemple on cherchera à construire une variété algébrique dont l'ensemble des points géométriques soit un ensemble de classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels. Cette variété devra vérifier une propriété universelle ayant un rapport avec le type de fibrés vectoriels considéré, par exemple représenter un foncteur naturel de la catégorie des k-schémas noetheriens dans celle des ensembles.

Ce genre de travail n'est possible qu'avec un type particulier de fibrés vectoriels (ou de faisceaux...), ceux qui sont dits *stables*. Pour obtenir des variétés complètes, il faut considérer des fibrés vectoriels *semi-stables*.

On commencera par donner la définition et les propriétés élémentaires des fibrés vectoriels (ou des faisceaux...) (semi-)stables. Puis on obtiendra des théorèmes d'existence des variétés de modules. On étudiera ensuite ces variétés de modules (sont-elles réduites, quels sont leurs points singuliers, etc...).

Pour les théorèmes d'existence, la méthode utilisée est sensiblement la même pour toutes les sortes d'objets étudiés. La partie "calculatoire" de la démonstration n'est donnée que pour les structures de niveau et les faisceaux cohérents sur une courbe réduite, cas non traités dans la littérature. La partie "théorique" n'est détaillée que dans le cas des fibrés vectoriels et des fibrés vectoriels avec structure parabolique.

Dans la première partie on s'intéresse aux fibrés vectoriels (semi-)stables sur une courbe projective lisse sur k . On donne des résultats de théories (schémas de Grothendieck, géométrie invariante de Mumford) qui seront aussi utilisées dans les autres parties.

La deuxième partie traite de la déformation des variétés de modules de fibrés stables étudiées dans la première partie, et s'inspire d'un exposé de M.S Narasimhan.

La troisième partie traite des fibrés vectoriels avec structures paraboliques (semi-)stables. Les travaux de Langton (adaptés aux fibrés avec structure parabolique) sont exposés seulement ici, afin d'alléger la première partie. Les résultats de cette partie sont dus à Mehta et Seshadri.

La quatrième partie traite des structures de niveau. Il semble qu'on les retrouve dans l'étude des faisceaux (semi-)stables sur une courbe réduite.

Le but de la cinquième partie est d'obtenir une désingularisation "naturelle" des variétés de modules de fibrés semi-stables.

La sixième partie donne une démonstration partielle d'un théorème de S. Ramanan sur l'inexistence de fibrés de Poincaré sur des ouverts non vides de certaines variétés de modules. La méthode employée est différente de celle de S. Ramanan, et est due à M. Nori.

La septième partie traite des faisceaux cohérents (semi-)stables sur une courbe projective résuite sur k . C'est une généralisation de la première partie.

La huitième partie traite des propriétés des variétés de modules de faisceaux cohérents semi-stables construites dans la septième partie, lorsque les singularités de la courbe sont des points doubles ordinaires.

Les résultats des quatrième, cinquième, septième et huitième parties sont dûs à C.S Seshadri.

k : corps commutatif, algébriquement clos sauf dans le chapitre III de la troisième partie.

X : courbe projective. Elle est lisse, sauf dans les deux dernières parties, où elle est réduite. Son genre est g, $g \geqq 2$.
On note J le jacobien de X , et pour tout entier d , $J^{(d)}$ le jacobien des fibrés en droites sur X de degré d .

k-Sch : catégorie des k-schémas noetheriens.

Ens : catégorie des ensembles.

Si S est un k-schéma, T, R des S-schémas, t un point de T , $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $R \times_S T$, on pose :

$$R_t = R \times_S \operatorname{Spec}(k(t)) \ ,$$
$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}|_{R_t} \ .$$

Si x est un point de X , on note L_x^{-1} , ou $\underline{m}_x$ le noyau du morphisme canonique :

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow k_x \ ,$$

k_x désignant le faisceau concentré en x , de fibre k en x .

Soit $f : Y \longrightarrow Y'$ un morphisme de k-schémas. On pose :

$$f^{\#} = (f \times I_X)^* \ .$$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X de rang non nul. On pose :

$$\mu(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F})/\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \ .$$

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE : FIBRÉS VECTORIELS (SEMI-)STABLES

INTRODUCTION

Soit X une courbe projective irréductible lisse sur un corps commutatif algébriquement clos k .

On dit qu'un fibré vectoriel E sur X est semi-stable (resp. stable) si pour tout sous-fibré vectoriel propre F de E on a

$$\deg(F)/\mathrm{rg}(F) \leqq \deg(E)/\mathrm{rg}(E) \quad (\text{resp.} <) \quad .$$

Les fibrés (semi-)stables sont intéressants du fait que pour des entiers r , d donnés , avec $r \geqq 2$, il existe une variété algébrique $U_s(r,d)$ dont l'ensemble des points fermés soit l'ensemble $S'(r,d)$ des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels stables de rang r et de degré d . Les points fermés d'une complétion naturelle $U(r,d)$ de cette variété peuvent être vus comme des classes d'équivalence de fibrés semi-stables. Les variétés précédentes sont définies à isomorphisme près par des propriétés universelles. Lorsque r et d sont premiers entre eux, tout fibré vectoriel semi-stable est stable, et dans ce cas il existe sur $U(r,d) \times X$ un "fibré de Poincaré", c'est à dire un fibré vectoriel V tel que pour tout point fermé z de $U(r,d)$, le fibré vectoriel V sur X soit dans la classe d'isomorphisme z (élément de $S'(r,d)$) .

Autre justification des définitions précédentes : pour toute famille $\mathfrak{F}$ de fibrés vectoriels sur X paramétrée par un k-schéma noetherien T , l'ensemble des points t de T tels que $\mathfrak{F}_t$ soit (semi-)stable est un ouvert de T .

Pour définir une variété algébrique dont l'ensemble des points fermés soit $S'(r,d)$, on construit d'abord une famille $\mathfrak{F}$ de fibrés vectoriels de rang r , de degré d , "contenant" tous les fibrés semi-stables de rang r , de degré d , paramétrée par un k-schéma noetherien R . On utilise pour cela les schémas de Grothendieck (ou "schémas Quot"). En fait R est un ouvert de

$$Q = \mathrm{Quot}^{P}_{\mathcal{O}\otimes k^{p}/X/k}$$

(P étant polynôme de Hilbert d'un fibré vectoriel de rang r , de degré d , un fibré en droites ample sur X étant choisi).

Sur R agit le groupe réductif $PGL(p)$, et le quotient $R/PGL(p)$, comme ensemble, est l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de la famille $\mathfrak{F}$.

On est donc ramené à "quotienter" R par $PGL(p)$. Ceci ne peut se faire que sur un ouvert de R , constitué des points dits "semi-stables" pour l'action de PGL(p) . Bien entendu on peut montrer qu'un point q de R est (semi-) stable si et seulement si $\mathcal{F}_q$ l'est, ce qui justifie encore les définitions précédentes.

Malheureusement l'étude de l'action de PGL(p) sur Q est malaisée, et on est conduit à utiliser une variété Y mieux connue sur laquelle SL(p) agit, avec un SL(p)-morphisme

$$\tau : R \longrightarrow Y \ .$$

On peut ensuite comparer les points q de R tels que $\mathcal{F}_q$ soit (semi-) stable, et les points (semi-)stables de Y sous l'action de SL(p) : il se trouve que les uns sont les images par τ des autres, et que τ est injecrif. On peut en déduire la construction des variétés voulues. On appelle la variété U(r,d) (resp. $U_s(r,d)$) la *variété de modules* des fibrés semi-stables (resp. stables) de rang r et de degré d .

Dans le chapitre I, on donne les principales définitions et les propriétés élémentaires des fibrés vectoriels (semi-)stables.

Dans le chapitre II, on précise les propriétés requises d'une variété de modules de fibrés vectoriels (semi-)stables.

Dans le chapitre III, on effectue la construction des variétés de modules. Des résultats de la Théorie de Mumford sont énoncés sans démonstration.

Dans le chapitre IV on traite le cas où k est le corps des nombres complexes. On peut alors établir une relation entre les fibrés vectoriels semi-stables sur X et les représentations unitaires du groupe fondamental de X .

Dans le chapitre V on détermine les points singuliers des variétés de modules.

Dans le chapitre VI on donne des résultats sans démonstration, concernant : la variété de Picard des variétés de modules, l'existence de fibrés de Poincaré, la rationalité des variétés de modules, leurs propriétés topologiques dans le cas où k est le corps des nombres complexes.

I.- FIBRÉS STABLES, FIBRÉS SEMI-STABLES. QUELQUES PROPRIÉTÉS

Définition 1 : Un fibré vectoriel E sur X est dit *semi-stable* (resp. *stable)* si pour tout sous-fibré propre F de E , on a :

$$\mu(F) \leq \mu(E) \quad (\text{resp. } \mu(F) < \mu(E) \ .$$

Définitions équivalentes : le fibré E est semi-stable (resp. stable) si et seulement si l'une des trois propriétés suivantes est vérifiée :

(i) Pour tout fibré quotient propre F de E, on a

$$\mu(F) \geqq \mu(E) \quad (\text{resp. } \mu(F) > \mu(E)) .$$

(ii) Pour tout sous-faisceau propre F de E, on a

$$\mu(F) \leqq \mu(E) \quad (\text{resp. } \mu(F) < \mu(E)) .$$

(iii) Pour tout faisceau quotient propre F de E, on a

$$\mu(F) \geqq \mu(E) \quad (\text{resp. } \mu(F) > \mu(E)) .$$

Remarques : tout fibré en droites sur X est stable.

Si $rg(E)$ et $deg(E)$ sont premiers entre eux, le fibré E est semi-stable si et seulement si il est stable.

Le fibré E est semi-stable (resp. stable) si et seulement son dual l'est.

Soit L un fibré en droites sur X. Alors E est semi-stable (resp. stable) si et seulement si $E \otimes L$ l'est.

Soient r et d deux entiers tels que $r \geqq 2$. On note $S(r,d)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés semi-stables sur X, de rang r et de degré d. On note $S'(r,d)$ le sous-ensemble de $S(r,d)$ constitué des classes d'isomorphisme de fibrés stables.

D'après ce qui précède, pour tout entier k, le choix d'un fibré en droites de degré k sur permet de définir une bijection

$$S(r,d) \longrightarrow S(r,d+k.r)$$

induisant une bijection $S'(r,d) \longrightarrow S'(r,d+k.r)$

D'autre part, si r et d sont premiers entre eux, on a

$$S(r,d) = S'(r,d) .$$

A.- La filtration de Harder-Narasimhan

C'est une première justification des définitions précédentes.

Soit E un fibré vectoriel sur X.

PROPOSITION 2 : *Il existe un unique sous-fibré* E_1 *de* E *tel que pour tout sous-fibré* F *de* E, *on ait*

$$\mu(F) \leqq \mu(E_1)$$

et $rg(F) \leqq rg(E_1)$ *si* $\mu(F) = \mu(E_1)$.

Ce sous-fibré est semi-stable, on l'appelle le sous-fibré semi-stable maximal de E .

LEMME 3 : *Il existe un entier* n_0 *tel que pour tout sous-fibré* F *de* E, *on ait*

$$\mu(F) \leqq n_0$$

Soit $\mathcal{O}(1)$ un fibré très ample sur X. Alors il existe un entier p tel que pour tout entier n supérieur à p, on ait :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(n)\ , E) = \{0\}\ .$$

D'autre part, puisqu'un fibré en droites de degré supérieur à g à des sections globales non nulles, pour tout fibré en droites L sur X de degré supérieur à $p.\deg(\mathcal{O}(1)) + g$, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(p)\ , L) \neq \{0\},$$

et donc $\qquad \mathrm{Hom}(L, E) = \{0\}\ .$

En appliquant ce qui précède aux fibrés $\Lambda^r E$, avec $1 \leqq r \leqq \mathrm{rg}(E)-1$ il est aisé d'achever la démonstration du Lemme 3.

L'existence d'un sous-fibré E_1 de E satisfaisant aux conditions de la Proposition 2 en découle. Il est immédiat que E_1 est semi-stable. Il reste à prouver son unicité. Supposons que E_1' vérifie les mêmes propriétés que E_1, et que $E_1' \neq E_1$.

Soit $\pi : E \longrightarrow E/E_1'$ la projection. On a $\pi(E_1) \neq 0$.
Soit G le sous-fibré de E/E_1' engendré par $\pi(E_1)$. Alors E_1 étant semi-stable, on a $\mu(G) \geqq \mu(E_1)$.

On a une suite exacte de fibrés vectoriels sur X :

$$0 \longrightarrow E_1' \longrightarrow \pi^{-1}(G) \longrightarrow G \longrightarrow 0\ .$$

D'après les propriétés de E_1', on a :

$$\mu(\pi^{-1}(G)) < \mu(E_1')\ , \text{ car } \mathrm{rg}(\pi^{-1}(G) > \mathrm{rg}(E_1')$$

c'est à dire

$$\frac{\deg(G) + \deg(E_1')}{\mathrm{rg}(G) + \mathrm{rg}(E_1')} < \frac{\deg(E_1')}{\mathrm{rg}(E_1')}\ ,$$

d'où on tire

$$\mu(G) < \mu(E_1') = \mu(E_1)\ ,$$

ce qui est absurde. Ceci prouve l'unicité de E_1 et achève la démonstration de la proposition 2.

On en déduit immédiatement le

THÉORÈME 4 (Harder-Narasimhan) : *Il existe une filtration de* E *par des sous-fibrés vectoriels, et une seule ,*

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \quad \ldots \subset E_{s-1} \subset E_s = E\ ,$$

telle que pour $1 \leqq i \leqq s-1$, E_i/E_{i-1} soit le sous-fibré semi-stable maximal de E/E_{i-1}. *On l'appelle la filtration de Harder-Narasimhan de* E.

On peut en déduire la classification des fibrés vectoriels non semi-stables indécomposables de rang 2 sur X. Soit Z_0 l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels fibrés. En utilisant la Proposition 3 de l'Appendice II et le théorème précédent, on peut démontrer le

COROLLAIRE 5 : *Soit* $f : Z_0 \longrightarrow J \times J$ *l'application définie par* $f(E) = (\det(E), L)$ L *étant le sous-fibré semi-stable maximal de* E . *L'image de* f *est constituée des couples* (L_1, L_2) *de fibrés en droite tels que*

(i) $2.\deg(L_1) > \deg(L_2)$

(ii) $h^1(X, L_2^2 \otimes L_1^{-1}) \neq 0$.

De plus, la fibre de f *au-dessus d'un point* (L_1, L_2) *de son image peut être identifiée à l'espace projectif*

$$P(H^1(X, L_2^2 \otimes L_1^{-1}))$$.

B.- Morphismes de fibrés (semi-)stables. Théorème de Jordan-Hölder

PROPOSITION 6 : *Soient* E *et* F *des fibrés semi-stables sur* X . *Alors*

a) *Si* $\mu(F) < \mu(E)$, on a $\mathrm{Hom}(E,F) = \{0\}$.

b) *Si* E *et* F *sont stables, et* $\mu(F) = \mu(E)$, *on a* $\mathrm{Hom}(E,F) = 0$ *ou bien* $E \simeq F$.

c) *Si* E *est stable,* E *est simple, c'est à dire que ses seuls endomorphismes sont les homothéties.*

a) Soit $f : E \longrightarrow F$ un morphisme non nul. Alors on a

$$\mu(\mathrm{Im}(f)) \leq \mu(F) < \mu(E)$$

car F est semi-stable. Donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et $\mu(\mathrm{Ker}(f)) > \mu(E)$, ce qui contredit la semi stabilité de E .

Ceci prouve a) .

b) Avec les mêmes notations que dans a), on a partout des inégalités larges, et puisque f est non nul et E stable, on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, et $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à E . Puisque $\mu(E) = \mu(F)$ et que F est stable, on $\mathrm{Im}(f) = F$, et f est un isomorphisme.

Ceci prouve b) .

c) Soit $f : E \longrightarrow E$ un morphisme non nul. Comme dans b, on montre que c'est un isomorphisme. Soit x un point de X . Si λ est une valeur propre de f_x , $f - \lambda.I_X$ n'est pas un isomorphisme, et donc $f - \lambda.I_X = 0$, et f est une homothétie.

Ceci prouve c et achève la démonstration de la Proposition 6.

COROLLAIRE 7 : *Soient* E_1 *et* E_2 *des fibrés vectoriels semi-stables sur* X *tels que* $\mu(E_1) = \mu(E_2) = \mu$, *et* E *une extension de* E_2 *par* E_1 .

Alors E *est semi-stable.*

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$,

donc $\mu(E) = \mu$. Montrons que E est semi-stable.

Soit F un sous-fibré propre de E , F' sont sous-fibré semi-stable maximal. Supposons que $\mu(F) > \mu$, alors $\mu(F') > \mu$, et d'après la partie a de la Proposition précédente, on a $\mathrm{Hom}(F', E_2) = \{0\}$, d'où on déduit que F' est un sous-fibré de E_1 . Mais ceci est absurde car E_1 est semi-stable.

Ceci prouve le Corollaire 7 .

Soit μ un nombre rationnel, et C_μ la catégorie dont les objets sont les fibrés vectoriels semi-stables E sur X tels que $\mu(E) = \mu$, et les morphismes de fibrés vectoriels entre ces fibrés.

D'après le Corollaire 7 , on peut définir de manière évidente la somme directe de deux objets (ou deux morphismes) de la catégorie C_μ .

PROPOSITION 8 : *Soient* E *et* F *des fibrés vectoriels semi-stables sur* X *tels que* $\mu(E) = \mu(F)$, *et* $f : E \longrightarrow F$ *un morphisme de fibrés vectoriels* .

Alors f *est de rang constant* , $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Coker}(f)$ *sont des fibrés semi-stables et*

$$\mu(\mathrm{Ker}(f)) = \mu(\mathrm{Coker}(f)) = \mu(E) \quad .$$

Le morphisme f est de rang constant si et seulement si $\mathrm{Coker}(f)$ est sans torsion. Soit T le sous-faisceau de torsion de $\mathrm{Coker}(f)$

$F' = \mathrm{Ker}(F \longrightarrow \mathrm{Coker}(f)/T)$. Puisque E est semi-stable, on a

$$\mu(\mathrm{Im}(f)) \geqq \mu(E) \quad ,$$

et puisque F l'est aussi, $\mu(F') \leqq \mu(F)$.

Donc $F' = \mathrm{Im}(f)$ et $\mu(\mathrm{Im}(f)) = \mu(E)$.

On en déduit immédiatement

$$\mu(E) = \mu(\mathrm{Ker}(f)) = \mu(\mathrm{Coker}(f)) \quad .$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 8 .

De ce qui précède découle la

PROPOSITION 9 : *La catégorie* C_μ *est abélienne, artinienne et noetherienne.*

On peut donc appliquer à C_μ le théorème de Jordan-Hölder, ce qui donne le

THÉORÈME 10 : *Soit* E *un fibré vectoriel semi-stable sur* X . *Il existe une filtration de* E *par des sous-fibrés vectoriels*

$$0 = E_{p+1} \subset E_p \quad \ldots . \subset E_1 \subset E_0 = E$$

telle que pour $0 \leqq i \leqq p$;

E_i/E_{i+1} *soit stable et* $\mu(E_i/E_{i+1}) = \mu(E)$.

De plus, la classe d'isomorphisme du fibré $\bigoplus_{i=o}^{p} E_i/E_{i+1}$ *ne dépend que de celle de* E .

On note cette classe d'isomorphisme $\mathrm{Gr}(E)$.

La proposition suivante est à mettre en relation avec la Proposition 32.

PROPOSITION 11 : *Soit* E *un objet de* C_μ . *Le fibré* E *est stable si et seulement si pour tout objet* E' *de* C_μ *tel que* Gr(E') = Gr(E) , *on a* $E \simeq E'$.

Supposons E non stable, et vérifiant les hypothèses de la Proposition. On peut écrire $Gr(E) = F_1 \oplus F_2$, F_1 étant stable et F_2 somme directe de fibrés stables. On en déduit aisément avec la partie b de la Proposition 7 que toute suite exacte

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_1 \oplus F_2 \longrightarrow F_2 \longrightarrow 0$$

$$(\text{resp.}\quad 0 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \oplus F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow 0) \quad \text{est scindée.}$$

Il suffit donc de montrer que $h^1(X, F_2^* \otimes F_1) \neq 0$ ou $h^1(X, F_1^* \otimes F_2) \neq \{0\}$.

Toujours d'après la partie b de la Proposition 6, on a

$$h^0(X, F_1^* \otimes F_2) = h^0(X, F_2^* \otimes F_1) \quad .$$

On en déduit avec le Théorème de Riemann-Roch, que

$$h^1(X, F_2^* \otimes F_1) - h^1(X, F_1^* \otimes F_2) = 2.(rg(F_1) - rg(F_2)) . \mu .$$

Si ce terme est non nul, un des entiers $h^1(X, F_2^* \otimes F_1)$ et $h^1(X, F_1^* \otimes F_2)$ est non nul. S'il l'est,

$$\chi(X, F_2^* \otimes F_1) = rg(F_1).rg(F_2).(1-g) < 0 \quad ,$$

donc $h^1(X, F_2^* \otimes F_1)$ est non nul.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 11.

II.- BONS ESPACES DE MODULES - ESPACES DE MODULES GROSSIERS

Dans cette partie, on pose le problème de la classification des fibrés (semi-) stables.

Soit Z un ensemble de classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels sur X , qu'on supposera tous de même rang.

Définition 12 : On appelle *famille d'éléments de* Z *paramétrée par un* k-*schéma noetherien* Y un faisceau localement libre $\mathfrak{F}$ sur $Y \times_k X$, tel que pour tout point fermé y de Y , la classe d'isomorphisme de $\mathfrak{F}_y$ soit un élément de Z .

Deux familles $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ d'élements de Z paramétrées par Y sont dites *isomorphes* s'il existe un faisceau inversible L sur Y tel que

$$\mathfrak{F}_2 \simeq \mathfrak{F}_1 \otimes p_Y^*(L) \quad ,$$

p_Y désignant la projection $X \times_k Y \longrightarrow Y$.

On écrit dans ce cas $\mathfrak{F}_1 \sim \mathfrak{F}_2$.

Définition 13 : Un *bon espace de modules pour* Z est la donnée d'un k-schéma noetherien Y_0, d'une famille $\mathcal{F}_0$ d'éléments de Z paramétrée par Y_0 tels que pour toute famille $\mathcal{F}$ d'éléments de Z paramétrée par un k-schéma de type fini Y, il existe un unique morphisme

$$\rho_{\mathcal{F}} : Y \longrightarrow Y_0$$

tel que

$$\rho_{\mathcal{F}}^{*}(\mathcal{F}_0) \sim \mathcal{F}$$

Remarque : Interprétation fonctorielle

Soit

$$F : \text{k-Sch} \longrightarrow \text{Ens}$$

le foncteur associant à Y l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles d'éléments de Z paramétrées par Y.

Alors un bon espace de modules pour Z est simplement la donnée d'un k-schéma noetherien représentant F.

Soit $\rho : Z \longrightarrow Y_0(k)$ l'application associant à tout élément z de Z, représenté par un fibré E sur $X = X \times \{pt\}$ l'élément $\rho_E(pt)$ de $Y_0(k)$.
Alors on voit aisément que ρ *est une bijection.*

D'autre part, il est aussi immédiat que $(Y_0, \mathcal{F}_0)$ est unique à isomorphisme près.

On appelle $\mathcal{F}_0$ un *fibré de Poincaré.*

Définition 14 : Un *espace de modules grossier* pour Z est un morphisme de foncteurs k-Sch$\longrightarrow$Ens

$$\Psi : F \longrightarrow \text{Mor}(\ , Y_0) ,$$

Y_0 étant un k-schéma noetherien, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\Psi(*) : F(*) \longrightarrow Y_0(k)$ est une bijection
(avec $* = \text{Spec}(k)$, donc $F(*) = Z$).

ii) Pour tout morphisme de foncteurs
$\Psi_1 : F \longrightarrow \text{Mor}(\ , Y_1)$,
Y_1 étant un k-schéma noetherien, il existe un unique morphisme
$f : Y_0 \longrightarrow Y_1$
tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \text{Mor}(\ , Y_0) \arrow[d, "\text{Mor}(\ , f)"] \\ F \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[dr, "\Psi_1"'] & \\ & \text{Mor}(\ , Y_1) \end{tikzcd}$$

Un bon espace de modules pour Z définit de manière évidente un espace de modules grossier pour Z.

Il est immédiat qu'un espace de modules grossier pour Z est unique (à isomorphisme près).

Dans ce qui suit, on admettra le résultat suivant : pour tout couple d'entiers (r,d) tel que $r \geq 2$, l'ensemble $S'(r,d)$ des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels stables sur X de rang r et de degré d est non vide.

Ceci sera prouvé dans la troisième partie.

Rappelons que $S(r,d)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels semi-stables sur X, de rang r et de degré d. On a alors la

PROPOSITION 15 : *Il n'existe pas d'espace de modules grossier pour* $S(r,d)$, *si* r *et* d *ne sont pas premiers entre eux.*
(Voir le Théorème 48 qui complète ce résultat).

Puisque r et d ne sont pas premiers entre eux, il existe deux couples (r_1,d_1) et (r_2,d_2) d'entiers tels que $r_1 \geq 1$ et $r_2 \geq 1$,

$$r_1 + r_2 = r,\ d_1 + d_2 = d,\ \frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2} = \frac{d}{r} .$$

Soient E_1 un fibré stable de rang r_1 et de degré d_1, E_2 un fibré stable de rang r_2 et de degré d_2 sur X. D'après la Proposition 11, il existe un fibré semi-stable sur X de rang r, de degré d, tel que $Gr(E) = E_1 \oplus E_2$ et non isomorphe à $E_1 \oplus E_2$. On a le

LEMME 16 : *Il existe un fibré* E_0 *sur* $\mathbb{A}^1 \times X$, *tel que*

$$F_o|_{\{0\}\times X} \simeq E_1 \oplus E_2 \quad \textit{et} \quad F_o|_{\{t\}\times X} \simeq E \quad \textit{si} \quad t \neq 0 \quad \textit{est un élément}$$

de k.

On peut supposer qu'on a une suite exacte de fibrés vectoriels sur X :

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0 .$$

On considère l'élément u de $H^1(\mathbb{A}^1 \times X,\ p_X^*(E_2^* \otimes E_1))$, où p_X désigne la projection $\mathbb{A}^1 \times X \longrightarrow X$, image de l'élément $s \otimes u_0$ de $H^0(\mathbb{A}^1,\mathcal{O}) \otimes H^1(X,E_2^* \otimes E_1)$, s étant la section de $\mathcal{O}$ associée à I_k et u_0 correspondant à la suite exacte précédente. Il est aisé de voir que l'extension F_o de $p_X^*(E_2)$ par $p_X^*(E_1)$ définie par u vérifie les hypothèses du Lemme 16.

Démontrons maintenant la Proposition 15.

Reprenons les notations de la définition 14.

Supposons qu'il existe un espace de modules grossier Y_0 pour $S(r,d)$.

Le fibré F_o du lemme 16 est une famille d'éléments de $S(r,d)$ paramétrée par $\mathbb{A}^1$. On a alors

$$\alpha_{F_o}(0) = \rho(E_1 \oplus E_2) \quad \text{et} \quad \alpha_{F_o}(t) = \rho(E) \quad \text{si} \quad t \neq 0 ,$$

mais puisque α_{F_o} est induite par un morphisme $\mathbb{A}^1 \longrightarrow Y_0$, on a $\alpha_{F_o}(0) = \rho(E)$, par continuité, ce qui est absurde.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 15.

Remarque : Changement du corps de base .

Soit K un corps commutatif algébriquement clos extension de k , $X_K = X \times_k \mathrm{Spec}(K)$, E un fibré vectoriel sur X , et $E_K = p^*(E)$, p désignant la projection $X_K \longrightarrow X$. Alors on peut montrer que E_K *est semi-stable si et seulement si* E *l'est* (voir la troisième partie).

On pourrait définir une famille de fibrés semi-stables paramétrée par un k-schéma noetherien Y de la façon suivante : c'est un faisceau localement libre E sur $Y \times_k X$ tel que pour tout point y de Y , le fibré vectoriel $(E_y)_{\overline{k(y)}}$ sur $X_{\overline{k(y)}}$ ($\overline{k(y)}$ désignant la clôture algébrique de $k(y)$) , soit semi-stable.

En fait ces deux définitions d'une famille de fibrés semi-stables sont équivalentes (voir Théorème 19').

III.- LES ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS (SEMI-)STABLES

Dans ce chapitre on esquisse les démonstrations des résultats suivants :

THÉORÈME 17 : *Soit* (r,d) *un couple d'entiers tel que* $r \geq 2$. *Il existe un espace de modules grossier pour* $S'(r,d)$ *dont le* k-*schéma sous-jacent est une variété quasi-projective lisse, notée* $U_s(r,d)$.

Cette variété possède une compactification naturelle notée $U(r,d)$. *L'ensemble des points de* $U(r,d)$ *à valeurs dans* k *est isomorphe au quotient de* $S(r,d)$ *par la relation d'équivalence suivante : pour tout couple* (E,F) *de fibrés semi-stables sur* X *de rang* r *et de degré* d , E *et* F *sont équivalents si et seulement si* $\mathrm{Gr}(E) = \mathrm{Gr}(F)$. *La variété* $U(r,d)$ *est normale.*

Dans le cas où r et d sont premiers entre eux, on a $U(r,d) = U_s(r,d)$.

THÉORÈME 18 : *Soit* (r,d) *un couple d'entiers premiers entre eux, avec* $r \geq 2$. *Alors il existe un bon espace de modules pour* $S(r,d)$.

Evidemment le k-schéma sous-jacent est $U(r,d)$. D'après le Théorème 18, il existe un fibré de Poincaré sur $U(r,d)$. On verra dans VI qu'il existe un fibré de Poincaré "naturel".

On a déjà admis que $U_s(r,d) \neq \emptyset$. On peut en déduire que

$$\dim(U(r,d)) = r^2.(g-1) + 1 .$$

Pour finir on montre que la semi-stabilité (resp. la stabilité) est une propriété "ouverte".

THÉORÈME 19 : *Soit* Y *un* k-*schéma noetherien,* W *un fibré vectoriel sur* $Y \times X$. *Alors l'ensemble des points* y *de* $Y(k)$ *tels que* W_y *soit semi-stable (resp.stable) est un ouvert de* Y .

Remarque : En fait on peut montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 19' : *Soit* Y *un* k-*schéma noetherien,* W *un faisceau localement libre sur* $Y \times_k X$. *Alors l'ensemble des points* y *de* Y *tels que* $(W_y)_{\overline{k(y)}}$ *soit semi-stable (resp.stable) sur* $X_{\overline{k(y)}}$ *est un ouvert de* Y .

(Voir la remarque à la fin de II et la troisième partie).

Remarque : La variété $U(r,d)$ possède elle aussi une "propriété universelle" : pour toute famille E de fibrés vectoriels semi-stables de rang r, de degré d paramétrée par un k-schéma noetherien T , il existe un unique morphisme $f : T \longrightarrow U(r,d)$, tel que pour tout point t de $T(k)$, le point $f(t)$ de $U(r,d)$ soit associé à $Gr(E_t)$.

La première étape dans la construction des espaces de modules est la recherche d'une famille d'éléments de $S(r,d)$ "contenant" tous les éléments de $S(r,d)$. On y parvient en utilisant les schémas de Grothendieck.

A.- Schémas de Grothendieck

On voit aisément que pour étudier $S(r,d)$, on peut supposer l'entier d aussi grand que l'on veut. Ceci justifie le

LEMME 20 : *Soit* (r,d) *un couple d'entiers tel que* $r \geq 2$ *et* $d > r.(2g-1)$. *Alors si* E *est un fibré vectoriel semi-stable sur* X , *de rang* r *et de degré* d, *on a :*

(i) *le fibré* E *est engendré par ses sections globales*

(ii) $h^1(X,E) = 0$.

On a alors, d'après le Théorème de Riemann-Roch

$$h^0(X,E) = d + r.(1-g) \quad .$$

Pour prouver (ii), supposons que $h^1(X,E) \neq 0$. Par dualité de Serre, on a $Hom(E,K) \neq \{0\}$, K désignant le fibré canonique sur X . Comme E est semi-stable, ceci entraine que

$$r.(2g-2) = r.\deg(K) \geq d \quad ,$$

mais ceci est faux par hypothèse, on a donc bien $h^1(X,E) = 0$.

Pour prouver (i), il faut montrer que pour tout point x de X , le morphisme canonique

$$r_x : H^0(X,E) \longrightarrow E_x \quad \text{est surjectif.}$$

Si L_x désigne le fibré en droites sur X associé au diviseur x , on a une suite exacte de morphismes de faisceaux sur X

$$0 \longrightarrow E \otimes L_x^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow E_x \longrightarrow 0 \quad ,$$

E_x désignant cette fois le faisceau sur X concentré en x et de germe E_x en ce point. La suite exacte longue associée à la suite exacte précédente donne

$$H^0(X,E) \xrightarrow{r_x} E_x \longrightarrow H^1(X, E \otimes L_x^{-1})$$

Il suffit donc de montrer que $h^1(X, E \otimes L_x^{-1}) = 0$, ce qui résulte du fait que

$$\deg(E \otimes L_x^{-1}) = \deg(E) - r > r.(2g-2) \quad ,$$

et de la démonstration de (ii) .

Ceci achève la démonstration du Lemme 20.

Gardons les notations du Lemme 20 et posons $p = d + r.(1-g)$.
Il découle du Lemme 20 que le fibré E est isomorphe à un quotient de $\mathcal{O} \otimes k^p$.
De plus, le polynôme de Hilbert de E est

$$P(T) = p + r.\deg(\mathcal{O}(1)).T \quad .$$

En particulier, il ne dépend pas de la classe de E dans S(r,d) .

On définit maintenant les *schémas de Grothendieck*. (Voir [7].)

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, P_o un élément de $k[T]$ de degré ≤ 1 .

On appelle famille plate de quotients de $\mathcal{F}$ avec polynôme de Hilbert P_o paramétrée par un k-schéma noetherien Y la donnée d'un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur $Y \times_k X$, plat sur Y , et d'un morphisme surjectif

$$p_X^*(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{G}$$

(p_X désignant la projection $Y \times_k X \longrightarrow X$) tels que pour tout point y de Y le polynôme de Hilbert de $\mathcal{G}_y$ sur X_y soit P_o .

Deux telles familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme

$$g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}' \quad ,$$

tel que le carré

$$\begin{tikzcd} p_X^*(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{G} \arrow[d, "g"] \\ p_X^*(\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathcal{G}' \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

D'autre part, si $f : Y \longrightarrow Y'$ est un morphisme de k-schémas noetheriens et $\mathcal{G}'$ une telle famille sur Y' , on définit de manière évidente la famille $f^*(\mathcal{G}')$.

On peut montrer que le foncteur

$$\mathrm{Sch} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

associant à Y l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles plates de quotients de $\mathcal{F}$ paramétrées par Y est représentable par un k-schéma algébrique projectif.
On note ce k-schéma $\mathrm{Quot}^{P_0}_{\mathcal{F}/X/k}$.

On pose

$$Q = \mathrm{Quot}^{P}_{\mathcal{O}\otimes k^p/X/k} .$$

Il découle de la propriété universelle de Q qu'il existe sur $Q\times X$ une famille plate $\mathcal{U}$ de quotients de $\mathcal{O}\otimes k^p$, qui est "universelle".

Soit

$$\rho : p_X^*(\mathcal{O}\otimes k^p) \longrightarrow \mathcal{U}$$

le morphisme canonique.

Il existe un ouvert R de Q caractérisé par la propriété suivante : pour tout point q de R , le faisceau $\mathcal{U}_q$ est localement libre et l'application canonique :

$$H^0(X_q, \mathcal{O}\otimes k^p) \longrightarrow H^0(X_q, \mathcal{U}_q)$$

est un isomorphisme. La restriction $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ à R est un faisceau localement libre de rang r . Muni de $\mathcal{V}$, R possède la propriété universelle locale suivante :

<u>PROPOSITION 21</u> : *Etant donné un* k-*schéma noetherien* Y *et un faisceau localement libre* F *de rang* r *sur* $Y\times_k X$, *tel que pour tout point* y de Y , *on ait*

(i) F_y *est de degré*

(ii) F_y *est engendré par ses sections globales*

(iii) $h^1(X,F_y) = 0$,

pour tout point Y_0 *de* Y , *il existe un voisinage* Y_0 *de* y_0 *et un morphisme* $f : Y_0 \longrightarrow R$ *tel que*

$$F\big|_{Y_0\times X} \simeq f^{\#}(\mathcal{V}) .$$

On prend pour Y_0 un voisinage affine de y_0 . On voit aisément que le faisceau $p_{Y*}(F)$ est localement libre de rang p sur Y (p_Y désigne la projection $Y\times_k X \longrightarrow Y$) . Sur Y_0 il est par conséquent isomorphe à $\mathcal{O}_{Y_0}\otimes k^p$. D'après (ii), le morphisme canonique

$$p_Y^*(p_{Y*}(F)) \longrightarrow F$$

est surjectif. Au-dessus de Y_0 , $p_Y^*(p_{Y*}(F))$ est isomorphe à $p_X^*(\mathcal{O}\otimes k^p)$, on a donc un morphisme surjectif

$$p_X^*(\mathcal{O}\otimes k^p) \longrightarrow F .$$

Il existe donc un morphisme $f : Y_0 \longrightarrow Q$ tel que $F\big|_{Y_0\times X} \simeq f^{\#}(\mathcal{U})$.
Mais il est immédiat que f est à valeurs dans R .

Ceci achève la démonstration de la Proposition 21.

Le groupe $GL(p) = Aut(\mathcal{O} \otimes k^p)$ agit sur le faisceau $\mathfrak{U}$. Contentons nous d'expliciter cette action : soit $\rho : p_X^*(\mathcal{O} \otimes k^p) \longrightarrow \mathfrak{U}$ le morphisme canonique, et A un élément de $GL(p)$. On peut construire une famille plate ... paramétrée par Q de la façon suivante : le faisceau sous-jacent est $\mathfrak{U}$ mais le morphisme surjectif est $\rho \circ p_X^*(A^{-1})$.

Cette famille définit un automorphisme σ_A de Q et un isomorphisme $\tau_A : \mathfrak{U} \longrightarrow \sigma_A^*(\mathfrak{U})$. Pour tout point z de $Q \times_k X$ et tout élément u de $\mathfrak{U}_z$, on a

$$A.u = \tau_A(u) \quad .$$

L'automorphisme de Q sous-jacent est σ_A .

Remarquons que l'action du sous-groupe $k^*.I$ de $GL(p)$ sur Q est triviale, et par conséquent l'action de $GL(p)$ sur Q en induit une de $PGL(p)$. Cependant l'action de $k^*.I$ sur $\mathfrak{U}$ est celle de k^* par homothétie, et n'est donc pas triviale.

On peut préciser l'action de $PGL(p)$ sur R :

<u>PROPOSITION 22</u> : (i) *L'ouvert* R *est* $PGL(p)$ - *invariant.*

(ii) *Pour tout couple* (q_1,q_2) *de points fermés de* R *les fibrés vectoriels sur* X $\mathfrak{U}_{q_1}$ *et* $\mathfrak{U}_{q_2}$ *sont isomorphes si et seulement si* q_1 *et* q_2 *sont dans la même orbite de l'action de* $PGL(p)$ *sur* R .

(iii) *Pour tout point* q de R , *le stabilisateur de* q *sous l'action de* $PGL(p)$ *est isomorphe au quotient* $Aut(\mathfrak{U}_q)/k^*.I$.

(Voir Seshadri [36] Prop.6 du chap.II, et Newstead [29] Thm5.3 p.138 où il est démontré aussi que R est ouvert.

<u>PROPOSITION 23</u> : *Le schéma* R *est une variété quasi-projective irréductible et lisse.*

D'après Grothendieck, Q est un schéma projectif sur k .Il suffit donc de prouver que R est connexe et lisse.

Pour tout point fermé q_0 de R , on a un morphisme

$$\begin{aligned} PGL(p) &\longrightarrow R(k) \\ A &\longmapsto A.q \end{aligned}$$

dont l'image est constituée des points fermés q de R tels que les fibrés vectoriels $\mathfrak{U}_q$ et $\mathfrak{U}_{q_0}$ sur X soient isomorphes.

Pour montrer que R est connexe, il suffit donc de montrer que pour tout couple (q_1,q_2) de points fermés de R , il existe un point fermé q_0 de R, et une partie connexe R_1(resp. R_2) de R rencontrant les orbites de q_1 et q_0 (resp. q_2 et q_0) .

On utilise le lemme suivant, dû à Serre :

LEMME 24 : *Soit* F *un fibré vectoriel sur* X *engendré par ses sections globales. Alors il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes k^{rg(F)-1} \longrightarrow F \longrightarrow \det(F) \longrightarrow 0 \ .$$

Pour tout point x de X , le morphisme canonique $H^0(X,F) \longrightarrow F_x$ est surjectif, l'ensemble des sections de E qui s'annulent en au moins un point de X est une sous-variété Y de $H^0(X,F)$ de dimension inférieure ou égale à $h^0(X,F) - rg(F) + 1$.

Il existe donc un sous-espace vectoriel M de $H^0(X,F)$ de rang $rg(F)-1$, ne rencontrant pas Y . Le morphisme canonique de fibrés vectoriels sur X

$$\mathcal{O} \otimes M \longrightarrow F$$

est injectif. Son conoyau est de rang 1, donc isomorphe à det(F) .

Ceci achève la démonstration du Lemme 24.

On considère maintenant le jacobien $J^{(d)}$ et un fibré de Poincaré $\mathcal{L}$ sur $J^{(d)} \times X$, on note E le fibré trivial sur $J^{(d)} \times X$, de fibre k^{r-1} .
Le faisceau $R^1 p_{J*}(\mathrm{Hom}(\mathcal{L},E))$ sur $J^{(d)}$ est localement libre de rang $(r-1).(g+d-1)$, p_J désignant la projection $J^{(d)} \times X \longrightarrow J^{(d)}$.
On note W ce fibré et $\pi : W \longrightarrow J^{(d)}$ la projection canonique.
En chaque point L de $J^{(d)}$, la fibre W_L est $H^1(X,\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_L, \mathcal{O} \otimes k^p))$.

Il existe un fibré F sur $W \times X$, et une suite exacte $0 \longrightarrow \pi^*(E) \longrightarrow F \longrightarrow \pi(\mathcal{L}) \longrightarrow 0$ tels que pour tout point w de W , la restriction de la suite exacte précédente à $w \times X$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes k^p \longrightarrow F_w \longrightarrow \mathcal{L}_{\pi(w)} \longrightarrow 0$$

soit associée à l'élément w de $H^1(X,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{L}_{\pi(w)}, \mathcal{O} \otimes k^p))$.
Ceci découle de la Remarque 2 suivant la Proposition 2 de l'Appendice II et du fait que pour tout point L de $J^{(d)}$, on a $h^0(X,\mathcal{L}_L^*) = 0$.
Les points w de W correspondant aux fibrés possédant les propriétés du Lemme 20 constituent un ouvert W' de W .

D'après le Lemme 24, il existe un point w_1(resp.w_2) de W' , tel que F_{w_1} soit isomorphe à $\mathcal{U}_{q_1}$ (resp. F_{w_2}...) .

D'après la Proposition 21, il existe un ouvert W_1(resp. W_2) de W' et un morphisme $f_1 : W_1 \longrightarrow R$ (resp.f_2...) tel que $F|_{W_1 \times X} \simeq f_1^*(\mathcal{V})$ (resp....) .

Mais W étant irréductible, W_1 et W_2 ont une intersection non vide et sont connexes. Ceci suffit à prouver notre assertion et prouve la connexité de R .

Pour la lissité, il faut utiliser les propriétés défférentielles de Q . Si q est un point fermé de R , on a une suite exacte de morphismes de fibrés vectoriels sur X :

$$0 \longrightarrow C_q \longrightarrow \mathcal{O} \otimes k^p \longrightarrow \mathcal{U}_q \longrightarrow 0 \quad ,$$

C_q désignant le fibré noyau de $\rho|_{\{q\} \times X}$.

D'après Grothendieck, R est lisse en q si et seulement si on a $h^1(X, \underline{Hom}(C_q, \mathcal{U}_q)) = 0$, ce qui découle immédiatement de la suite exacte précédente et du fait que, par définition de R , on a $h^1(X, \mathcal{U}_q) = 0$.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 23 .

Remarque : L'espace tangent à R en q s'identifie à $\mathrm{Hom}(C_q, \mathcal{U}_q)$. Ceci permet de calculer la dimension de R en utilisant la suite exacte précédente. On trouve

$$\dim(R) = p^2 + r^2.(g-1) \quad .$$

De la suite exacte précédente, on déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{U}_q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O} \otimes k^p), \mathcal{U}_q) \xrightarrow{a} \mathrm{Hom}(C_q, \mathcal{U}_q) = T_{R,q}$$

L'espace $\mathrm{Hom}(\mathcal{O} \otimes k^p, \mathcal{U}_q)$ s'identifie à M(p) , espace des matrices pXp , qui est aussi $T_{PGL(p),k.I}$.

L'application a n'est autre que l'application tangente

$$T_{PGL(p),k.I} \longrightarrow T_{R,q}$$

provenant du morphisme

$$\begin{aligned} PGL(p) &\longrightarrow R \\ A &\longmapsto A.q \quad . \end{aligned}$$

B.- Construction des espaces de modules

Avec les notations de A , on ne fera plus de distinction entre R et R(k) . Soit R^{ss} (resp. R^s) l'ensemble des points q de R tels que le fibré vectoriel $\mathcal{U}_q$ sur X soit semi-stable (resp. stable) . Il est clair d'après la Proposition 22 que ce sont des sous-ensembles PGL(p)-invariants. On sait d'après le Lemme 20 que pour tout fibré vectoriel E sur X dont la classe d'isomorphisme appartient à S(r,d) , il existe un élément q de R^{ss} tel que $\mathcal{U}_q$ soit isomorphe à E . On peut donc dire que R^{ss} (resp. R^s) "contient" tous les fibrés semi-stables (resp.stables) de rang r et de degré d sur X .

En fait, d'après la Proposition 22, on a

$$S(r,d) = R^{ss}/PGL(p) \quad \text{et} \quad S'(r,d) = R^s/PGL(p) \quad .$$

Pour obtenir un quotient "algébrique" il faut utiliser la théorie de Mumford (voir Mumford [16] et Newstead [29] pour une introduction) . On ne peut obtenir un quotient que d'un ouvert PGL(p)-invariant de R , constitué des points dits "semi-stables" de R sous l'action de PGL(p) (pour les définitions voir plus loin) . Evidemment les points semi-stables de R correspondent aux fibrés semi-stables. Malheureusement ceci semble difficile à prouver directement, et on a recours à un stratagème :

On construit une variété projective Z sur laquelle agit $PGL(p)$, plus facile à manier que R . En particulier on pourra calculer les points semi-stables de Z . Puis on définit un $PGL(p)$-morphisme injectif

$$R \longrightarrow Z$$

possédant suffisamment de propriétés pour que les informations connues sur Z se transportent sur R .

On donne ci-dessous un aperçu de quelques résultats de la Théorie de Mumford.

Quelques résultats de la Théorie de Mumford

Les résultats qui suivent ne sont valables que pour des groupes algébriques géométriquement réductifs :

Un groupe algébrique G est dit *géométriquement réductif* si pour toute représentation

$$G \longrightarrow GL(n)$$

et tout point v de k^n , différent de 0, il existe un polynôme homogène non constant à n variables f , G-invariant pour l'action de G sur k^n induite par la représentation précédente, tel que $f(v) \neq 0$.

Le fait qu'en caractéristique non nulle un groupe tel que $PGL(p)$ soit géométriquement réductif n'a été démontré que récemment par Haboush ([10]) .

Soit G un groupe algébrique géométriquement réductif opérant sur une variété algébrique Y .

Un *bon quotient* de Y par G est un couple (M,f), où $f : Y \longrightarrow M$ est un morphisme de variétés algébriques tel que :

(i) f est affine, G-invariant, surjectif .

(ii) Si U est un ouvert de M ,

$$f : H^0(U,\mathcal{O}_M) \longrightarrow H^0(f^{-1}(U),\mathcal{O}_Y)$$

induit un isomorphisme de $H^0(U,\mathcal{O}_M)$ sur l'espace des sections de $\mathcal{O}_Y$ sur $f^{-1}(U)$ qui sont G-invariantes.

(iii) Si W est une sous-variété fermée G-invariante de Y , $f(W)$ est une sous-variété fermée de M .

(iv) Si W_1 et W_2 sont deux sous-variétés fermées G-invariantes disjointes de Y , les sous-variétés $f(W_1)$ et $f(W_2)$ de M sont aussi disjointes.

Un bon quotient (M,f) de Y par G possède la propriété universelle suivante : si M' est un k-schéma de type fini et $f' : Y \longrightarrow M'$ un morphisme

G-invariant, il existe un unique morphisme $g : M \longrightarrow M'$ tel que $f' = g \circ f$.

Un bon quotient (M,f) de Y par G, s'il existe, est unique à isomorphisme près.

Un bon quotient (M,f) de Y par G est appelé *quotient géométrique* si c'est un espace d'orbites, autrement dit si l'application $Y/G \longrightarrow M$ induite par f est bijective.

En général, il n'existe pas de bon quotient de Y par G. Pour cela, il faut d'abord qu'il y ait une *linéarisation* de l'action de G sur Y, c'est à dire qu'il existe un fibré en droites L sur Y et une action linéaire de G sur L, induisant celle sur Y. On ne peut alors envisager l'existence d'un bon quotient que sur certains ouverts G-invariants de Y.

Un point y de Y (non nécessairement fermé) est dit

semi-stable s'il existe un entier positif n et une section G-invariante s de L^n telle que $s(y) \neq 0$, et que l'ensemble Y_s des points de Y où s ne s'annule pas soit un ouvert affine de Y.

stable si $\dim(G.y) = \dim(G)$ et s'il existe une section s comme précédemment et qu'en plus l'action de G sur Y_s soit fermée, c'est à dire que les orbites des points fermés soient des sous-variétés fermées de Y_s.

On note $Y^{ss}(L)$ l'ensemble des points semi-stables de Y, et $Y^s(L)$ l'ensemble des points stables. Si le fibré L est fixé, on emploiera les notations plus simples Y^{ss} et Y^s.

Les sous-ensembles $Y^s(L)$ et $Y^{ss}(L)$ sont des ouverts de Y, qui peuvent être vides.

Un cas particulier important : Y est une sous-variété fermée de $\mathbb{P}_n$ et l'action de G se prolonge en une action de G sur k^{n+1} qui soit linéaire, c'est à dire provenant d'une représentation $G \longrightarrow GL(n+1)$, et la linéarisation provenant de l'action évidente de $GL(n+1)$ sur le fibré en droites $\mathcal{O}(1)$.

Le résultat le plus important est le

<u>THÉORÈME 25</u> : *Soit* Y *une variété quasi-projective sur laquelle opère un groupe algébrique géométriquement réductif* G. *On suppose donnée une linéarisation de l'action de* G *sur* Y.

(i) *Il existe un bon quotient* (M,f) *de* Y^{ss} *par* G, *et* M *est une variété quasi-projective.*

(ii) *Si* Y *est une sous-variété fermée de* $\mathbb{P}_n$ *et si l'action de* G *sur* Y *provient d'une action linéaire de* G *sur* k^{n+1}, *la linéarisation étant l'action évidente de* G *sur* $\mathcal{O}(1)$, M *est une variété projective.*

(iii) *Il existe un ouvert* M^s *de* M *tel* $f^{-1}(M^s) = Y^s$ *et* $(M^s, f|_{Y^s})$ *est* *un quotient géométrique de* Y^s *par* G .

(iv) *Si* y_1 *et* y_2 *sont des points fermés de* Y^{ss} , *on a* $f(y_1) = f(y_2)$ *si et seulement si*

$$\overline{G.y_1} \cap \overline{G.y_2} \cap Y^{ss} \neq \emptyset .$$

(v) *Si* Y *est un élément de* Y^{ss} , y *est stable si et seulement si* ($\dim(G.y) = \dim(G)$ *et si* $G.y$ *est fermé dans* Y^{ss} .

On utilisera le résultat suivant, dû à Ramanathan [32] :

PROPOSITION 26 : *Soit* G *un groupe algébrique géométriquement réductif agissant sur des variétés* Y , Y' *et* $f : Y \longrightarrow Y'$ *un* G-*morphisme affine. Alors si* Y' *possède un bon quotient il en est de même de* Y .

Pour appliquer le Théorème 25 dans des cas concrets, on a un critère numérique utile pour déterminer les points (semi-)stables de Y , sous-variété fermée de $\mathbb{P}_n$, telle que l'action de G sur Y provienne d'une action linéaire de G sur k^{n+1} , la linéarisation étant l'action évidente de G sur $\mathcal{O}(1)$. On pose $L = \mathcal{O}(1)_Y$.

On appelle *sous-groupe à un paramètre de* G un morphisme de groupes non trivial

$$c : k^* \longrightarrow G .$$

On peut montrer qu'il existe une base $(e_0, \dots, e_n)$ de k^{n+1} et des entiers $r_0, \dots, r_n$ tels que pour tout élément t de k^* , on ait

$$c(t).e_i = t^{r_i}.e_i \quad , \quad 0 \leqq i \leqq n .$$

Soit y un point de Y et $y_0, \dots, y_n$ les composantes dans la base $(e_0, \dots, e_n)$ d'un point $\hat{y}$ de k^{n+1} au-dessus de y . On pose

$$\mu(y,c) = \mathrm{Max}(\{-r_i, \ y_u \neq 0\}) .$$

On peut donner une définition intrinsèque de $\mu(y,c)$: c'est le plus petit entier μ tel que le morphisme

$$\begin{aligned} k^* &\longrightarrow \hat{Y} \\ t &\longrightarrow t^{\mu}.c(t).\hat{y} \end{aligned}$$

soit prolongeable en un morphisme $k \longrightarrow \hat{Y}$, $\hat{Y}$ désignant le cône de Y .

Le Théorème suivant permet de ramener à des calculs la recherche des points (semi-)stables de Y :

THÉORÈME 27 : *Un point* y *de* Y *est semi-stable (resp.stable) si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre* c *de* G *on a*

$$\mu(y,c) \geqq 0 \quad (\textit{resp.} > 0) .$$

Pour tout entier $m>0$, il existe une linéarisation canonique de l'action de G sur Y dont le fibré en droites associé est L^m : pour cela il suffit de considérer le plongement de Veronese de Y dans $\mathbb{P}_{C^n_{n+m}-1}$.

Soit

$$c = k^* \longrightarrow G$$

un sous-groupe à un paramètre. Pour tout point y de Y on note $\mu_m(y,c)$ la quantité $\mu(y,c)$ correspondant à la linéarisation de l'action de G sur Y définie par L^m . Il est aisé de voir que

$$\mu_m(y,c) = m.\mu'(y,c) \quad .$$

Soit q un entier > 0 , et pour $1 \leq i \leq q$, Y_i une sous-variété fermée de $\mathbb{P}_{n_i}$ sur laquelle agit G , comme précédemment. Soit L_i le fibré en droites $\mathcal{O}(1)|_{Y_i}$. Chaque suite $(m_1,\ldots,m_q)$ d'entiers strictement positifs définit une linéarisation de l'action de G sur $\prod_{i=1}^{q} Y_i$, dont le fibré en droites associé sur $\prod_{i=1}^{q} Y_i$ est

$$p_1^*(L_1)^{m_1} \otimes \ldots\ldots \otimes p_q^*(L_q)^{m_q} \quad ,$$

(en notant p_j la projection $\prod_{i=1}^{q} Y_i \longrightarrow Y_j$) . Pour voir cela on utilise un plongement de Segre.

Soit $(y_1,\ldots Y_q)$ un point de $\prod_{i=1}^{q} Y_i$. Alors on voit aisément que

$$\mu((y_1,\ldots\ldots y_q),c = \sum_{i=1}^{q} m_i.\mu(y_i,c) \quad .$$

On en déduit immédiatement la

<u>PROPOSITION 28</u> : *Un point* $(y_1\ldots\ldots y_q)$ *de* $\prod_{i=1}^{q} Y_i$ *est semi-stable (resp.stable) si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre* c *de* G *, on a*

$$\sum_{i=1}^{q} m_i.\mu(y_i,c) \geq 0 \quad (\textit{resp.} > 0) \quad .$$

On voit aisément que pour tout entier $p > 0$, les points semi-stables (resp.stables) de $\prod_{i=1}^{q} Y_i$, muni de (m_i) sont les mêmes que ceux de $\prod_{i=1}^{q} Y_i$, muni de $(p.m_i)$.

Par conséquent toute suite $(h_1,\ldots h_q)$ de nombre rationnels strictement positifs définit une famille de linéarisations de l'action de G sur $\prod_{i=1}^{q} Y_i$ qui donnent les mêmes points (semi-)stables.

La suite $(h_1,\ldots,h_q)$ s'appelle une polarisation de l'action de G sur

$\prod_{i=1}^{q} Y_i$.

Soit maintenant p un entier tel que $p \geq 2$, q un entier tel que $1 \leq q \leq p-1$. On note $Gr(p,q)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de k^p de dimension q , sur laquelle agit de façon évidente $SL(p)$. La variété $Gr(p,q)$ se plonge dans $P(\Lambda^q k^p)$, et l'action de $SL(p)$ provient de la représentation

$$SL(p) \longrightarrow GL(\Lambda^q k^p)$$
$$A \longmapsto A \ \Lambda \ldots . \Lambda \ A \quad .$$

Soit c un sous-groupe à un paramètre de $SL(p)$, défini par une base $(e_1, \ldots . e_p)$ de k^p , et des entiers $r_1, \ldots . r_p$ non tous nuls, tels que

$$r_1 \geq \ldots \geq r_p \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} r_i = 0 \quad .$$

Pour $1 \leq i \leq p$ on a

$$c(t)(e_i) = t^{r_i} . e_i \quad .$$

On note M_i le sous-espace vectoriel de k^p engendré par $e_1, \ldots . e_i$. Alors on peut montrer qu'on a, pour tout sous-espace vectoriel E de k^p de dimension q ,

$$\mu(E,c) = -q.r_p + \sum_{i=1}^{p-1} \dim(E \cap M_i).(r_{i+1} - r_i) \quad .$$

Soit N un entier strictement positif. En appliquant ce qui précède à $Gr(p,q)^N$, muni de la polarisation $(1, \ldots .. 1)$, on obtient le

<u>THÉORÈME 29</u> : *Un élément* $(E_1, \ldots . E_N)$ *de* $Gr(p,q)^N$ *est semi-stable (resp. stable) si et seulement si, pour tout sous espace vectoriel* E *propre de* k^p *on a*

$$p. \sum_{i=1}^{n} \dim(E_j \cap E) \leq N.q.\dim(E)$$

(resp. $<$ *)* .

Soit r un entier tel que $1 \leq r \leq p-1$.

Soit $H_{p,r}$ la grassmannienne des k-espaces vectoriels de dimension r quotients de k^p , et N un entier strictement positif. On pose

$$Z = H_{p,r}^N \quad .$$

Sur Z , $SL(p)$ agit de façon évidente. Compte tenu du fait que $H_{p,r}$ s'identifie à $Gr(p,p-r)$, on déduit du Théorème précédent le

<u>THÉORÈME 30</u> : *Soient* $E_1, \ldots . E_N$ *des sous-espaces vectoriels de dimension* $p-r$ *de* k^p . *Pour tout sous-espace vectoriel* F *de* k^p *on note* F_j *l'image*

de F *dans* k^p/E_j .

Le point $(k^p/E_1,\dots,k^p/E_N)$ *de* Z *est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout sous-espace vectoriel propre* F *de* k^p *on a*

$$\frac{r}{p} \leq \frac{1}{N.\dim(F)} \cdot \sum_{j=1}^{N} \dim(F_j) \quad (\text{resp.} <) \ .$$

Applications de ces résultats à la construction des espaces de modules

Soit q un point de R et x un point de X . Le fibré $\mathcal{U}_q$ sur X est un quotient de $\mathcal{O} \otimes k^p$, donc la fibre $(\mathcal{U}_q)_x$ de $\mathcal{U}_q$ est un k-espace vectoriel de dimension r quotient de k^p .

Soient N un entier strictement positif et $x_1,\dots,x_N$ des points distincts de X . On peut donc définir une application

$$\tau : R \longrightarrow H^N_{p,r} = Z \ ,$$

par

$$\tau(q) = ((\mathcal{U}_q)_{x_1}, \dots, (\mathcal{U}_q)_{x_N}) \ ,$$

pour tout point q de R .

Il est aisé de voir que τ est un PGL(p)-morphisme.

Le principal outil pour prouver les Théorèmes 17 et 18 est le

THÉORÈME 31 : *Si les entiers* d *et* N *sont assez grands, il est possible de choisir les points* $x_1,\dots,x_N$ *de telle sorte qu'on ait les propriétés suivantes :*

(i) τ *est injective.*

(ii) $R^{ss} = \tau^{-1}(Z^{ss})$

(iii) $R^s = \tau^{-1}(Z^s)$

(iv) $\tau : R^{ss} \longrightarrow Z^{ss}$ *est propre.*

Pour une démonstration de ce Théorème, voir Seshadri ([36], p. 232) ou Newstead ([29], p. 151). On utilise évidemment le Théorème 30. Pour une généralisation (démontrée) de ce Théorème, voir la septième partie.

Choisissons les points $x_1,\dots,x_N$ comme dans le Théorème précédent.

Le morphisme τ est propre et injectif, donc il est affine. Il existe un bon quotient (Y,ϕ) de Z^{ss} , d'après le Théorème 25 , donc d'après la Proposition 26 il existe un bon quotient $(U(r,d),f)$ de R^{ss} . Le morphisme τ étant propre et injectif, il en est de même du morphisme induit

$$U(r,d) \longrightarrow Y \ ,$$

comme on le voit aisément en utilisant les propriétés des bons quotients. Par conséquent U(r,d) est une variété projective, Y en étant une.

Soit $U_s(r,d) = f(R^s)$. D'après le Théorème précédent, R^s est un ouvert de R , donc $U_s(r,d)$ est un ouvert de $U(r,d)$.
Soit $Y^s = \phi(Z^s)$. Puisque $(Y^s, \phi|_{Z^s})$ est un quotient géométrique, il en est de même de $(U_s(r,d), f|_{R^s})$.

On a une application surjective évidente
$g : S(r,d) \longrightarrow U(r,d)(k)$, on a $S'(r,d) = g^{-1}(U_s(r,d)(k))$ et g induit une bijection

$$\theta : S'(r,d) \longrightarrow U_s(r,d)(k) \quad .$$

Remarquons que du fait que R^s et R^{ss} sont des ouverts de R , ils ont des propriétés universelles locales évidentes.

Démonstration du Théorème 17

La condition (i) vient d'être démontrée. Quant à la condition (ii) elle découle immédiatement de la propriété universelle de $(U_s(r,d), f)$.

Le couple $(U(r,d), g)$ n'est pas un espace de modules grossier pour $S(r,d)$, car g n'est pas bijective. En fait, on a la

PROPOSITION 32 : *Soient* E *et* E' *des fibrés vectoriels sur* X *dont les classes d'isomorphisme sont des éléments* e *et* e' *de* $S(r,d)$. *Alors on a* $g(e')$ *si et seulement si on a* $Gr(E) = Gr(E')$.

Ce résultat est à mettre en relation avec la Proposition 11.

Supposons que $g(e) = g(e')$. D'après la définition d'un bon quotient, cela entraine que dans R^{ss}, on a, si les points q et q' de R^{ss} sont au-dessus de e et e' respectivement :

$$\overline{PGL(p).q} \cap \overline{PGL(p).q'} \neq \emptyset \quad .$$

On a alors : pour tout point z de $\overline{PGL(p).q}$, $Gr(\mathcal{U}_z) = Gr(E)$, et pour au moins un point z' de $PGL(p).q$, $Gr(\mathcal{U}_{z'}) = Gr(E')$.

On est donc ramené à prouver le

LEMME 33 : *Soit* Y *une variété algébrique affine irréductible, et* V *une famille d'éléments de* $S(r,d)$ *paramétrée par* Y *telle que pour tout point* y *de* Y_0 *ouvert non vide de* Y , *on ait*

$$Gr(V_y) = Gr(E) \quad .$$

Alors ceci est vrai pour tout point y *de* Y .

Posons $Gr(E) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, les fibrés vectoriels E_i sur X étant stables. On raisonnera par récurrence sur n .

Supposons que $n = 1$. Soit Y_1 l'ensemble des points y de Y tels que $Hom(E_1, V_Y) \neq \{0\}$. D'après le Théorème de semi-continuité, Y_1 est un fermé de Y . Mais Y_1 contient l'ouvert non vide Y_0 et comme Y est irréductible, on a $Y_1 = Y$.

Si y est un point de Y , on a $\mathrm{Hom}(E_1,V_y) \neq \{0\}$, donc $E_1 \simeq V_y$ d'après la proposition 6 . En particulier, on a $Gr(V_y) = Gr(E)$.

Supposons que le Lemme 33 soit vrai pour n , et $Gr(E) = E_1 \oplus \ldots . \oplus E_{n+1}$. Pour $1 \leq i \leq n+1$, on note Y_i l'ensemble des points y de Y tels que $\mathrm{Hom}(E_i,V_y) \neq \{0\}$. C'est un fermé de Y , et on a

$$Y = (Y/Y_0) \cup Y_1 \quad \ldots . \cup Y_{n+1} \quad .$$

La variété Y étant irréductible, il existe un i tel que $Y = Y_i$.

Le faisceau quasi-cohérent

$$\mathcal{F} = p_{Y}{*}\ (\underline{\mathrm{Hom}}(p_X^*\ (E_i),\ V)\ )$$

(p_Y et p_X désignant les projections $Y \times X \longrightarrow X$ et $Y \times X \longrightarrow X$)

est non nul en chaque point de Y . Soit z un point de Y/Y_0 , et s une section de $\mathcal{F}$ ne s'annulant pas en z (une telle section existe car Y est affine). Soit Y' le voisinage de z constitué des points de Y où s ne s'annule pas.

L'ouvert Y' est aussi affine et $s|_{Y'}$ définit un morphisme de fibrés vectoriels sur $Y' \times X$

$$p_X^*(E_i) \longrightarrow V|_{Y' \times X} \quad ,$$

qui est injectif d'après la Proposition 8. On note W le conoyau de ce morphisme. C'est aussi une famille de fibrés semi-stables paramétrée par Y' , et on voit aisément que pour tout point y de l'ouvert $Y' \cap Y_0$ on a

$$Gr(W_y) = \bigoplus_{j \neq i} E_j \quad .$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à W , et on obtient $Gr(W_z) = \bigoplus_{j \neq i} E_j$, d'où on déduit sans peine $Gr(V_z) = Gr(E)$.

Ceci achève la démonstration du Lemme 33.

Supposons que $Gr(E) = Gr(E')$.

L'égalité $g(e) = g(e')$ se prouve aisément en utilisant la Proposition 21, un analogue du Lemme 16 pour les fibrés semi-stables, et en faisant un raisonnement par récurrence.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 32.

La lissité et l'irréductibilité de $U_s(r,d)$ découlent aisément de la Proposition 23 et de la remarque qui la suit.

Démonstration du Théorème 18

Maintenant r et d sont premiers entre eux.

Il faut d'abord construire un fibré de Poincaré sur $U(r,d)$. Pour cela partons du fibré $\mathcal{V}$ sur R^s . Il faudrait le "quotienter" par $PGL(p)$. Malheureusement, on a vu que l'action du sous-groupe $k^*.I$ de $GL(p)$ étant celle de k^* par homothétie, l'action de $GL(p)$ sur V n'en induit pas une de $PGL(p)$. On résout ce problème en considérant à la place de $\mathcal{V}$ le fibré

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \otimes p_R^*(L^{-1}) \quad ,$$

p_R désignant la projection $R^s \times X \longrightarrow R^s$, L désignant un fibré en droites sur R^s sur qui agit $GL(p)$ linéairement, l'action de $k^*.I$ étant celle de k^* par homothétie. Le groupe $PGL(p)$ agit alors de manière évidente sur $\mathcal{V}'$.

Il reste à construire le fibré L . Soit H un fibré en droites de degré 1 sur X . On note p_X la projection $R^s \times X \longrightarrow X$. Les faisceaux

$$p_{R*}(\mathcal{V}) \quad \text{et} \quad p_{R*}(\mathcal{V} \otimes p_X^*(H))$$

sont localement libres de rangs respectifs $d + r.(1-g)$ et $d + r.(2-g)$. Le groupe $GL(p)$ agit de façon évidente sur chacun d'eux, l'action de $k^*.I$ étant celle de k^* par homothétie.

Les entiers a et b étant choisis tels que

$$a.(d + r.(1-g)) + b.(d + r.(2-g)) = 1 \quad ,$$

il suffit de prendre

$$L = \det(p_{R*}(\mathcal{V}))^a \otimes \det(p_{R*}(\mathcal{V} \otimes p_X^*(H)))^b \quad .$$

Ceci dit, le morphisme $g \times I_X : R^s \times X \longrightarrow U(r,d) \times X$ est plat car les variétés R^s et $U(r,d)$ sont lisses et les fibres de g ont toutes la même dimension. On peut donc appliquer la "Théorie de la descente par morphismes fidèlement plats" de Grothendieck [5] , qui permettra de montrer l'existence d'un fibré $\mathcal{W}$ sur $U(r,d)$ tel que

$$g^*(\mathcal{W}) \simeq \mathcal{V}' \quad .$$

Pour cela, remarquons que le morphisme canonique

$$R^s \times PGL(p) \longrightarrow R^s \times R^s$$

est une immersion fermée : il est propre d'après Mumford ([16] 1.13) et on peut montrer que c'est une immersion en utilisant la remarque suivant la Proposition 23 (étude différentielle de R^s) .

Il en découle que R^s est un fibré principal sur Y avec groupe $PGL(p)$ (Mumford 0.9) . Ceci entraine qu'on peut identifier $R^s \times_{U(r,d)} R^s$ et $R^s \times PGL(p)$, et que l'action de $PGL(p)$ définit une donnée de descente sur $\mathcal{V}'$.

L'existence du fibré $\mathcal{W}$ est alors une conséquence du Théorème 1 de [6] .

Montrons maintenant que la donnée du fibré $\mathcal{W}$ sur $U(r,d)$ définit un bon espace de modules pour $S(r,d)$.

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de $S(r,d)$ paramétrée par un k-schéma noetherien Y . Puisque $U(r,d) = U_s(r,d)$ muni de bijection $\mathcal{X}$ est un espace de modules grossier, il existe un morphisme

$$f : Y \longrightarrow U(r,d)$$

tel que pour tout point géométrique y de Y , le fibré $\mathcal{F}_y$ soit isomorphe au fibré $\mathcal{W}_{f(y)}$.

Un fibré stable étant simple, on en déduit, si p_Y désigne la projection $Y \times X \longrightarrow Y$, que le faisceau

$$p_{Y*}(\mathrm{Hom}(f^*(\mathcal{W}), \mathcal{F})) = L$$

est inversible. On a alors

$$\mathcal{F} \simeq f^*(\mathcal{W}) \otimes p_Y^*(L) \quad , \text{ donc } \mathcal{F} \sim f^*(\mathcal{W}) \quad .$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 18 .

Le calcul de la dimension de $U(r,d)$ est immédiat.

C.- La (semi-)stabilité est une propriété ouverte

Soit Y un k-schéma noetherien, W un fibré vectoriel sur $Y \times X$. On veut prouver le Théorème 19, c'est à dire que l'ensemble des points y de Y tels que W_y soit semi-stable (resp.stable) est un ouvert de Y .

Soit y_0 un point de Y tel que W_{y_0} soit semi-stable (resp. stable) . Il faut montrer qu'il existe un voisinage Y_0 de y_0 tel que pour tout point y de Y_0 , W_y soit semi-stable (resp. stable) .

On peut supposer qu'on a

$$\deg(W_{y_0}) > \mathrm{rg}(W_{y_0}).(2g - 1) \quad .$$

On a alors

$$h^1(X, W_{y_0}) = 0 \quad \text{et} \quad h^1(X, W_{y_0} \otimes L_x^{-1}) = 0 \quad \text{pour tout point } x$$

de X . On montre aisément que cette propriété est vérifiée pour tous les points d'un voisinage de y_0 (en utilisant le Théorème de semi-continuité et le fait que X est une variété projective).

Le Théorème 19 découle alors immédiatement de la Proposition 21 et du fait que R^{ss} (resp. R^s) est ouvert dans R (R, R^{ss}, R^s étant définis relativement à $\mathrm{rg}(W_{y_0})$ et $\deg(W_{y_0})$) .

Pour obtenir la généralisation du Théorème 19 mentionnée dans l'introduction de III, il faut redéfinir R^{ss} (resp. R^s) : c'est l'ensemble des points (non nécessairement fermés) q tels que la restriction de $\mathcal{U}$ à X_q soit semi-stable (resp. stable).

IV.- LE CAS COMPLEXE

Dans cette partie, on supposera que $k = \mathbb{C}$. On peut dans ce cas donner une description des fibrés (semi-)stables sur X faisant intervenir des représentations linéaires du groupe fondamental $\pi_1(X)$ de X .

On ne fera de démonstrations que pour les fibrés de degré 0 , pour le cas général, le lecteur se reportera aux travaux de Seshadri [36] .

Soit $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement simplement connexe de X . Le groupe $\pi_1(X)$ opère librement sur $\tilde{X}$ et $X = \tilde{X}/\pi_1(X)$, π étant l'application quotient.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie r et

$$\rho : \pi_1(X) \longrightarrow GL(E)$$

une représentation linéaire de $\pi_1(X)$.

Cette représentation induit une action de $\pi_1(X)$ sur le fibré $\tilde{X} \times E$, qui est évidemment linéaire, par

$$\alpha.(\tilde{x},e) = (\alpha.\tilde{x}, \rho(\alpha).e) \quad ,$$

pour tous éléments α , $\tilde{x}$ et e de $\pi_1(X)$, $\tilde{X}$ et E respectivement.

On note V_ρ le fibré vectoriel holomorphe sur X $(\tilde{X} \times E)/\pi_1(X)$.

Le faisceau analytique $\underline{V\rho}$ sous-jacent est le suivant :

pour tout ouvert X_o de X , $\underline{V\rho}(X_o)$ est l'ensemble des sections holomorphes $\pi_1(X)$-invariantes de $(\tilde{X} \times E)\Big|_{\pi^{-1}(X_o)}$.

PROPOSITION 34 : *(Compatibilité avec les opérations algébriques).*
Soient ρ *et* ρ' *des représentations linéaires de* $\pi_1(X)$, *alors on a :*

$$V_{\rho \oplus \rho'} \simeq V_\rho \oplus V_{\rho'} \quad .$$
$$V_{\rho \otimes \rho'} \simeq V_\rho \otimes V_{\rho'}$$
$$\Lambda^n V_\rho \simeq V_{\Lambda^n \rho} \quad \text{pour tout } n > 0$$
$$S^n V_\rho \simeq V_{S^n \rho} \quad \text{pour tout } n > 0$$
$$V_\rho^* \simeq V_{{}^t\rho^{-1}} \quad , \quad \text{et } \rho \simeq \rho' \Longrightarrow V_\rho \simeq V_{\rho'} \quad .$$

PROPOSITION 35 : *On a* $\deg(V_\rho) = 0$.

On a $\deg(V_\rho) = \deg(\Lambda^n V_\rho) = \deg(V_{\Lambda^n \rho})$. On peut donc supposer que $r = 1$, c'est à dire que ρ est une représentation de $\pi_1(X)$ dans k^* . Soit f une section méromorphe non nulle de V_ρ . Elle provient d'une fonction méromorphe F sur $\tilde{X}$ telle que pour tout point z de $\tilde{X}$ et tout élément α de $\pi_1(X)$, on ait

$$F(\alpha.z) = \rho(\alpha) . F(z) \quad .$$

Alors $\frac{dF}{F} = g$ est une différentielle méromorphe sur $\tilde{X}$ invariante par $\pi_1(X)$, donc provenant d'une différentielle méromorphe sur X , g' .

On a alors :

$$\sum_{x \in X} \operatorname{res}_x(g') = 0 \quad \text{(Théorème des résidus).}$$

Mais en un point x de X , $\operatorname{res}_x(g') = \operatorname{ord}_x(f)$,

donc

$$\sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x(f) = \deg(V_\rho) = 0 \quad .$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 35 .

Ce résultat a une réciproque :

PROPOSITION 36 (Weil) : *Tout fibré vectoriel holomorphe de degré* 0 , *de rang* r *et indécomposable sur* X *provient d'une représentation linéaire de* $\pi_1(X)$ *dans* E .

(Pour une démonstration, voir Weil [41]) .

On considère maintenant des représentations unitaires, l'espace vectoriel E étant muni d'un produit hermitien. On notera $\mathbb{U}(E)$ le sous-groupe de $GL(E)$ constitué des automorphismes unitaires.

Une *représentation unitaire* de $\pi_1(X)$ dans E est simplement une représentation linéaire de $\pi_1(X)$ dans E à valeurs dans le sous-groupe $\mathbb{U}(E)$ de $GL(E)$.

Ce sont ces représentations qui interviendront dans l'étude des fibrés vectoriels stables de degré 0 sur X .

Soit ρ une représentation linéaire de $\pi_1(X)$ dans E . On note E_ρ le sous-espace vectoriel de E constitué des éléments de E qui sont $\pi_1(X)$-invariants. On a une injection évidente

$$E_\rho \longrightarrow H^0(X, V_\rho) \quad .$$

PROPOSITION 37 : *Si* ρ *est une représentation unitaire, l'injection*

$$E_\rho \longrightarrow H^0(X, V_\rho)$$

est un isomorphisme.

On note $\| \ \|$ la métrique hermitienne sur E . Une section globale de V provient d'une application holomorphe

$$F : \tilde{X} \longrightarrow E$$

telle que pour tout point z de $\tilde{X}$ et tout élément α de $\pi_1(X)$, on ait

$$F(\alpha.z) = \rho(\alpha).F(z) \quad .$$

Il faut montrer que F est constante.

L'application $\| F \| : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\pi_1(X)$-invariante, donc est bornée et même atteint ses extremas (on peut le voir en remarquant que $\|F\|$ induit une application $X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue et en utilisant le fait que X est compact.

D'autre part, $\|F\|$ est une somme de carrés de modules de fonctions holomorphes sur $\tilde{X}$, donc est plurisousharmonique. Du fait qu'elle atteint ses extrémas, elle est constante.

Posons

$$c = \|F\| = \sum_{i=1}^{r} |F_i|^2 ,$$

les F_i étant des fonctions holomorphes sur $\tilde{X}$. Il faut montrer que ces fonctions sont constantes. Pour cela, il suffit de montrer qu'elles le sont au voisinage d'un point z de $\tilde{X}$. Soit D un disque fermé de centre z. On a, puisque les F_i^2 sont harmoniques

$$F_i^2(z) = \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \cdot \int_D F_i^2 , \text{ et}$$

$$c = \sum_{i=1}^{r} |F_i^2| \leq \sum_{i=1}^{r} \left| \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \cdot \int_D F_i^2 \right| \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \cdot \int_D \sum_{i=1}^{r} |F_i^2| = c$$

d'où, pour tout i, $\left| \int_D F_i^2 \right| = \int_D F_i^2$, d'où on déduit aisément que l'argument de F_i^2 est constant, ce qui prouve que F_i est constant.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 37.

<u>COROLLAIRE 38</u> : *Soient* ρ, ρ' *deux représentations unitaires de* $\pi_1(X)$. *Alors on a* $\mathrm{Hom}(V_\rho, V_{\rho'}) \simeq \mathrm{Hom}(\rho, \rho')$. *En particulier* V_ρ *et* $V_{\rho'}$ *sont isomorphes si et seulement si* ρ *et* ρ' *le sont.*

Il suffit d'appliquer la Proposition précédente à la représentation unitaire $\bar{\rho} \otimes \rho'$.

Le résultat le plus important de cette partie est le

<u>THÉORÈME 39</u> : *Un fibré vectoriel de degré* 0 *sur* X *est stable si et seulement s'il provient d'une représentation unitaire irréductible de* $\pi_1(X)$.

On utilisera le résultat suivant (de la théorie de la déformation des fibrés vectoriels) :

<u>PROPOSITION 40</u> : *(Existence d'un espace de modules local pour les fibrés simples). Soit* F *un fibré vectoriel simple sur* X. *Alors il existe une variété analytique* Y, *un fibré vectoriel* E *sur* $Y \times X$, *tels que il existe un point* y_0 *de* Y *tel que* $E_{y_0} \simeq F$, *que si* y *et* y' *sont deux points distincts de* Y, *les fibrés* E_y *et* $E_{y'}$ *ne soient pas isomorphes, et*

qu'enfin la propriété universelle suivante soit vérifiée :

Pour tout espace analytique Z *, tout fibré vectoriel* W *sur* $Z \times X$ *et tout point* z_0 *de* Z *tel que* $W_{z_0} \simeq F$ *, il existe un voisinage* Z' *de* Y *, tel que*

$$f^{*}(E) \simeq W\big|_{Z' \times X} .$$

On a $\dim(Y) = h^1(X, F^* \otimes F) = \mathrm{rg}(F)^2.(1-g) + 1$.

Il est clair qu'on peut supposer $\deg(F)$ aussi grand que l'on veut. En utilisant le Lemme 3 pour prouver un résultat analogue au Lemme 20, on se ramène au cas où

(i) F est engendré par ses sections globales,

(ii) $h^1(F) = 0$.

On peut alors utiliser la variété lisse R construite dans III, correspondant à $r = \mathrm{rg}(F)$ et $d = \deg(F)$. L'ensemble S des points q de R tels que le fibré $\mathcal{U}_q$ soit simple est un ouvert de Zariski de R qui est invariant par $PGL(p)$ (d'après le Théorème de semi-continuité).

Soit q_0 un point de S tel que $\mathcal{U}_{q_0} \simeq F$, on va construire un quotient par $PGL(p)$ d'un voisinage $PGL(p)$-invariant M de $PGL(p).q_0$.

Soit $g : S \times PGL(p) \longrightarrow S \times S$

$(q,A) \longmapsto (q, A.q)$,

c'est un morphisme injectif de variétés algébriques, donc son image est constructible, c'est à dire qu'il existe un ouvert P de $S \times S$ dont $\mathrm{Im}(g)$ soit une sous-variété fermée. On peut supposer que P est invariant par $PGL(p) \times PGL(p)$. Il existe un ouvert S' de S , contenant q_0 , et tel que P contienne $S' \times S'$. On peut supposer que S' est invariant par $PGL(p)$, alors S' contient $PGL(p).q_0$.

Maintenant S' est un $PGL(p)$-fibré principal : en effet, il résulte de la remarque suivant la Proposition 23 que $T(g|_{S' \times S})$ est injective, et $\mathrm{Im}(g|_{S' \times S'})$ est une sous-variété fermée de $S' \times S'$.

Soit T le sous-fibré vectoriel de T_S , constitué des vecteurs tangents aux orbites. Il existe un voisinage ouvert N de q_0 et une sous-variété fermée M de N qui soit transverse à T et de dimension égale à $\dim(R) - \dim(PGL(p))$.

Alors il existe un voisinage ouvert Y de q_0 dans M tel que deux points distincts de Y ne soient pas dans la même orbite :

Supposons le contraire, il existe alors une suite $(q_n)_{n \geq 1}$ de points de M convergeant vers q , une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de points de $PGL(p)$ distincts de I , telles que $(A_n.q_n)_{n \geq 1}$ soit une suite de points de M

convergeant vers q_0 ; S' étant un fibré principal, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ converge vers I . On en déduit aisément que $(T_M)_{q_0}$ contient un vecteur non nul de T_{q_0} , ce qui est absurde. Ceci prouve notre assertion.

L'ensemble S'' réunion des orbites des points de Y est un ouvert de R invariant par $PGL(p)$ et l'application ρ qui à tout point q de S'' associe l'unique point de Y dans la même orbite que q est holomorphe et fait de (Y,ρ) un quotient de S'' par $PGL(p)$ (ceci découle immédiatement du fait que

$$\begin{aligned} Y \times PGL(p) &\longrightarrow S'' \\ (q,A) &\longmapsto A.q \end{aligned}$$ est une immersion ouverte.

On note E la restriction de V à Y .

Soit Z un espace analytique, z_0 un point de Z et W un fibré vectoriel analytique sur $Z \times X$ tel que $W_{z_0} \simeq F$.

D'après le Théorème de semi-continuité, il existe un ouvert Z'' de Z contenant z_0 tel que pour tout point z de Z'' , on ait :

(i) $\deg(W_{z_0}) = \deg(F)$ et $rg(W_{z_0}) = rg(F)$,

(ii) W_{z_0} est engendré par ses sections globales,

(iii) $h^1(X,W_{z_0}) = 0$.

On applique un analogue analytique de la Proposition 21, qui se prouve en remarquant que la propriété universelle du schéma Q est valable pour une famille analytique de fibrés vectoriels adéquats. Alors il existe un voisinage Z' de z_0 et un morphisme $f' : Z' \longrightarrow S''$ tel que $f'^{\#}(V) \simeq W\big|_{Z'\times X}$.

En posant $f = \rho \circ f' : Z' \longrightarrow Y$, on montre aisément que

$$f^{\#}(E) \sim W\big|_{Z'\times X} ,$$

et quitte à prendre Z' plus petit , on peut supposer que

$$f^{\#}(E) \simeq W\big|_{Z'\times X} .$$

Le reste de la Proposition 40 est immédiat.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 40.

Démontrons maintenant le Théorème 39.

Soit $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{U}(E)$ une représentation unitaire. Alors le fibré V_ρ est semi-stable :

Supposons le contraire. On pose $r = \dim(E)$. Il existe un entier n tel que $1 \leqq n \leqq r-1$ et que V_ρ ait un sous-fibré W de rang n de degré strictement positif. Le fibré en droites de degré strictement positif $\Lambda^n W$ est donc un sous-fibré de $V_{\Lambda^n \rho}$. La représentation $\Lambda^n \rho$ étant unitaire (pour un produit hermitien évident sur $\Lambda^n E$), on peut supposer que $k = 1$.

De même, en considérant la représentation unitaire ρ^m de $\pi_1(X)$ dans

$E \otimes \ldots \otimes E$, pour un entier m assez grand, on se ramène au cas où W possède une section globale non nulle. Cette section s'annule en au moins un point de X, car W n'est pas le fibré trivial. Mais d'après la Proposition 34, une section globale non nulle de V_ρ ne s'annule pas. Cette contradiction montre que V_ρ est semi-stable.

On suppose maintenant que la représentation ρ est irréductible. Alors le fibré vectoriel V_ρ est stable :

Supposons le contraire : en utilisant le fait connu que tout fibré en droites sur X de degré 0 provient d'une représentation unitaire à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut supposer qu'il existe un entier n tel que $1 \leqq n \leqq r-1$ et un sous-fibré W de V_ρ de rang n de déterminant trivial. Alors le fibré $\Lambda^n V_\rho$ possède une section provenant d'un élément décomposable $e_1 \Lambda \ldots \Lambda e_n$ de $\Lambda^n E$ qui est non nul. Le sous-espace vectoriel propre F de E engendré par $e_1, \ldots, e_n$ est stable par $\pi_1(X)$, ce qui contredit l'irréductibilité de ρ. Par conséquent, V_ρ est stable.

On a donc prouvé la première partie du Théorème 39.

Il reste à prouver que tout fibré stable de degré 0 sur X provient d'une représentation unitaire de $\pi_1(X)$.

Soit ρ une représentation unitaire irréductible de $\pi_1(X)$. Soient Z une variété analytique, z_0 un point de Z et W un fibré vectoriel sur $Z \times X$ tel que $W_{z_0} \simeq V_\rho$ et que pour tout point z de Z, W_z soit stable et de degré 0. On prouvera successivement :

(i) L'ensemble des points z de Z tels que le fibré W_z provienne d'une représentation unitaire irréductible de $\pi_1(X)$ est un ouvert de Z.

(ii) L'ensemble des points z de Z tels que le fibré W_z provienne d'une représentation unitaire irréductible de $\pi_1(X)$ est un fermé de Z.

Ceci entraine la deuxième partie du Théorème :

Soit r un entier tel que $r \geqq 2$. En utilisant le schéma Q construit dans III pour r et un multiple assez grand de r, on montre aisément qu'il existe une famille de fibrés stables de degré 0 paramétrée par une variété analytique irréductible Z contenant tous les fibrés stables de degré 0 et de rang r. Il existe des représentations unitaires irréductibles de $\pi_1(X)$ dans k^r, donc en utilisant (i) et (ii) on en déduit immédiatement que tout fibré stable de degré 0 de rang r provient d'une représentation unitaire irréductible de $\pi_1(X)$ dans k^r.

Démonstration de (i) : (esquisse)

Il suffit de montrer que cet ensemble est localement ouvert. D'après la Proposition 40, il est suffisant de prouver (i) pour Y, y_0 et E, avec $F = V_\rho$.

Soit r le rang de V_ρ, H l'espace vectoriel de dimension r sous-jacent à ρ. Soit S l'espace analytique des représentations linéaires de $\pi_1(X)$ dans H, et S_0 l'ouvert de S constitué des représentations irréductibles. Il existe une famille V' de fibrés vectoriels sur X paramétrée par S telle que pour tout point s de S on ait $V'_s \simeq V_s$ (on rappelle que V_s est le fibré associé à la représentation s).

D'après la Proposition 37, il existe un morphisme $f : N \longrightarrow Y$ d'un voisinage de ρ dans S tel que $V'|_N \simeq f^*(E)$.

Soit U_o le sous-ensemble de S_0 constitué des représentations unitaires. C'est une sous-variété analytique réelle de S_0. Soit $M = N \cap U_o$. Le groupe $\mathbb{U}(H)$ agit sur S_0 (par conjugaison). On note M' le saturé de M, c'est un ouvert de S_0. Il existe un quotient $M'/\mathbb{U}(H)$ qui est une variété analytique réelle de dimension égale à celle de Y. Le morphisme f induit une application continue $\bar{f} : M'/\mathbb{U}(H) \longrightarrow Y$ qui est injective d'après le Corollaire 38. D'après le Théorème de Brouwer, cette application est ouverte. On en déduit immédiatement (i).

Démonstration de (ii) :

Soit U_o le sous-ensemble de S constitué des représentations unitaires. C'est un espace compact. Soit K le sous-ensemble de $S \times Z$ constitué des couples (s,z) tels que $\mathrm{Hom}(V'_s, W_z) \neq \{0\}$. D'après le Théorème de semi-continuité c'est une partie fermée de $S \times Z$.

Soit p_Z la projection $S \times Z \longrightarrow Z$. Puisque U_o est compact, $p_Z(K \cap (U_o \times Z))$ est une partie fermée de Z. Mais d'après la Proposition 6, c'est juste l'ensemble des points z de Z tels que W_z provienne d'une représentation unitaire irréductible de $\pi_1(X)$.

Ceci prouve (ii) et achève la démonstration du Théorème 39.

Le cas des fibrés de degré quelconque

Soit r un entier tel que $r \geqq 2$. Soit x_0 un point de X.

Il existe une surface de Riemann simplement connexe X' et un groupe π d'automorphismes analytiques de X' tels que :

(i) Pour tout point x' de X', si $\pi_{x'}$ désigne le groupe d'isotropie au point x', il existe un voisinage ouvert $\pi_{x'}$-invariant $U_{x'}$ de X' tel que pour tout point α de π n'appartenant pas à $\pi_{x'}$, on ait

$$\alpha.U_{x'} \cap U_{x'} = \emptyset \quad .$$

(ii) X est isomorphe à X'/π . On note p la projection $X' \longrightarrow X$.

(iii) Pour tout point x' de X' tel que $p(x') \neq x_0$, le groupe $\pi_{x'}$ est trivial.

(iv) Si x'_0 est un point de X' au-dessus de x_0 , le groupe π_{x_0} est fini de rang r , et il existe un système de coordonnées locales au point x_0 et un générateur α_0 de π_{x_0} tels que pour tout point w de W , on ait :

$$\alpha_0.w = e^{\frac{2i\pi}{r}}.w \quad .$$

Le groupe $\pi_1(X)$ est engendré par $2g$ éléments $A_1,\ldots\ldots A_g,B_1,\ldots\ldots,B_g$ avec la relation

$$A_1.B_1.A_1^{-1}.B_1^{-1} \ldots\ldots A_g.B_g.A_g^{-1}.B_g^{-1} = e \quad .$$

Le groupe π est engendré par $2g+1$ éléments $A_1,\ldots,A_g,B_1,\ldots,B_g,C$ avec les relations

$$A_1.B_1.A_1^{-1}.B_1^{-1}\ldots\ldots A_g.B_g.A_g^{-1}.B_g^{-1}.C = e \quad ,$$

$$C^r = e \quad .$$

Soit $\rho : \pi \longrightarrow GL(r)$ une représentation linéaire. Soit d un entier tel que $0 \leqq d \leqq r-1$. On dit que ρ est *de type* d si on a

$$\rho(C) = e^{\frac{2i\pi.d}{r}}.I \quad .$$

(Il faut bien entendu que C soit un élément α_0 comme dans (iv).) .

Cette représentation permet de définir une action de π sur le fibré $X' \times k^r$. Le quotient $V_\rho = (X' \times k^r)/\pi$ est un fibré vectoriel holomorphe sur X , de rang r .

En analogie avec la Proposition 33, on a la

PROPOSITION 41 : *Soit* ρ *une représentation linéaire de type* d *de* π *dans* k^r . *Alors on a* $\deg(V\rho) = d$.

Ce résultat a une réciproque :

PROPOSITION 42 (Weil) : *Tout fibré vectoriel holomorphe de rang* r *de degré* d *indécomposable sur* X *provient d'une représentation linéaire de type* d *de* π *dans* k^r .

On se restreint maintenant aux représentations unitaires de π dans k^r . On montre alors :

PROPOSITION 43 : *Soient* ρ , ρ' *deux représentations unitaires de* π .

Alors on a $\mathrm{Hom}(V_\rho,V_{\rho'}) \simeq \mathrm{Hom}(\rho,\rho)$. *En particulier* V_ρ *et* $V_{\rho'}$ *sont isomorphes si et seulement si* ρ *et* ρ' *le sont* .

Le résultat le plus important est le

THEOREME 44 : *Un fibré vectoriel de rang* r *de degré* d *sur* X *est stable si et seulement s'il provient d'une représentation unitaire irréductible de type* d *de* π *dans* k^r .

On note $W(r,d)$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de type d de π dans k^r , qui s'identifie au sous-ensemble de $\mathbb{U}(r)^{2g}$ constitué des éléments $(A_1,\ldots,A_g,B_1,\ldots,B_g)$ tels que

(i) on ait

$$A_1.B_1.A_1^{-1}.B_1^{-1}\ \ldots\ldots A_g.B_g.A_g^{-1}.B_g^{-1} = e^{-\frac{2i\pi d}{r}} . I ,$$

(ii) il n'existe pas de sous-espace vectoriel propre de k^r stable par

$$A_1,\ldots,A_g,B_1,\ldots,B_g .$$

Cet ensemble est muni d'une structure naturelle de variété analytique réelle, on peut montrer qu'il est non vide. Le groupe $\mathbb{U}(r)$ opère par conjugaison sur $W(r,d)$ et induit une action libre de $P\mathbb{U}(r)$. Le quotient $R(r,d) = W(r,d)/P\mathbb{U}(r)$ est muni d'une structure naturelle de variété analytique réelle, de dimension $2.(r^2.(g-1) + 1)$.

D'après le Théorème 39, on a une bijection

$$U_s(r,d) \longrightarrow R(r,d) ,$$

induisant un homéomorphisme entre les espaces topologiques sous-jacents.

Ainsi, la classe d'homéomorphisme de $U_s(r,d)$ ne dépend que de g . Cependant on verra plus loin que la *variété algébrique* $U_s(r,d)$ dépend fortement de la courbe X , et en fait la détermine.

Notons que la description précédente de l'espace topologique sous-jacent à $U_s(r,d)$ permet d'étudier les propriétés topologiques de cet espace.

V.- LES POINTS SINGULIERS DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FIBRÉS SEMI-STABLES

On revient au cas général où k est un corps commutatif algébriquement clos quelconque.

Soient r et d des entiers tels que $r \geq 2$. On sait que la variété algébrique $U_s(r,d)$ est lisse et on s'intéresse aux points singuliers de $U(r,d)$. On montrera le

THÉORÈME 45 : ([20]) *Sauf dans le cas où* $g = 2$, $r = 2$ *et* d *est pair, l'ensemble des points singuliers de* $U(r,d)$ *est* $U(r,d)\setminus U_s(r,d)$.

En utilisant le fait qu'une courbe de genre 2 est hyperelliptique, on verra dans le cas où la caractéristique de k est différente de 2 que si $g = 2$, la variété $U(2,0)$ est lisse.

On utilisera des résultats de l'Appendice II ("Extensions", Propositions 1 et 3).

A.- Calcul de la dimension de $U(r,d) \setminus U_s(r,d)$

Soient r, d des entiers tels que $r \geqq 2$ et $d > r.(2g-1)$. On les suppose non premiers entre eux. Soit a leur PGCD, alors $a \geqq 2$.

On pose

$$r = a.r_0 \quad , \quad d = a.d_0 \quad , \quad p_0 = d_0 + r_0.(1-g) \quad .$$

Soit c un élément de $\left\{1, \ldots\ldots, \left[\frac{a}{2}\right]\right\}$. Alors on a

$$c.d_0 > c.r_0.(2g-1) \quad \text{et} \quad (a-c).d_0 > (a-c).r_0.(2g-1) \quad .$$

Si E (resp. E') est un fibré vectoriel sur X dont la classe d'isomorphisme est un élément de $U(c.r_0,c.d_0)$ (resp. $U((a-c).r_0,(a-c).d_0)$) la classe d'isomorphisme de $E \oplus E'$ appartient à $U(r,d)$. Ceci définit une application

$$\rho_c : U(c.r_0,c.d_0) \times U((a-c).r_0,(a-c).d_0) \longrightarrow U(r,d) \quad .$$

Il est clair que les fibres de ρ_c sont finies, on a donc

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(\rho_c)) &= \dim(U(c.r_0,c.d_0)) + \dim(U((a-c).r._0,(a-c).d_0)) \\ &= r_0^2.(c^2 + (a-c)^2).(g-1) + 2 \quad . \end{aligned}$$

On a

$$U(r,d) \setminus U_s(r,d) = \bigcup_{c=1}^{\frac{a}{2}} \mathrm{Im}(\rho_c) \quad ,$$

donc $$\begin{aligned} \dim(U(r,d)\setminus U_s(r,d)) &= \mathrm{Max}\left(\left\{\dim(\mathrm{Im}(\rho_c), \ 1 \geqq c \leqq \left[\frac{a}{2}\right]\right\}\right) \\ &= \frac{r^2}{2}.(g-1) + 2 \quad \text{si } a \text{ est pair} \quad , \\ &= \frac{r^2 + r_0^2}{2}.(g-1) + 2 \quad \text{si } a \text{ est impair} \quad . \end{aligned}$$

B.- Démonstration du Théorème 45

On note Δ_c l'ensemble des points (α,β) de $U(c.r_0,c.d_0) \times U((a-c).r_0,(a-c).d_0)$ tels que $\alpha = \beta$. Cet ensemble est donc vide si $2c \neq a$.

On pose

$$N = \bigcup_{c=1}^{\frac{a}{2}} \rho_c((U_s(c.r_0,c.d_0) \times U_s((a-c).r_0,(a-c).d_0)) \setminus \Delta_c) \quad ,$$

c'est un ouvert de $U(r,d)\setminus U_s(r,d)$: en effet, on voit aisément que son complémentaire est une réunion finie d'images de morphismes de variétés projectives. Donc $N \cup U_s(r,d)$ est un ouvert de $U(r,d)$, qui est dense.

On veut montrer que tout point de $U(r,d)\setminus U_s(r,d)$ est singulier. Pour cela, il suffit de montrer qu'il en est ainsi de tout point de N . Soit Z l'ouvert de $U(r,d)$ constitué des points réguliers de $N \cup U_s(r,d)$. Il faut montrer que $Z = U_s(r,d)$.

Supposons le contraire.

Soit S' l'image réciproque de Z dans R^{ss} . Soit S le sous-ensemble de S' constitué des points q tels que $\mathcal{U}_q$ soit indécomposable. Pour tout point q de S , le fibré $\mathcal{U}_q$ est simple : il existe des fibrés stables E_1 et E_2 sur X non isomorphes et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \mathcal{U}_q \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0 \quad .$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_q^* \otimes E_1 \longrightarrow \mathcal{U}_q^* \otimes \mathcal{U}_q \longrightarrow \mathcal{U}_q^* \otimes E_2 \longrightarrow 0 \quad .$$

On a $h^0(X,\mathcal{U}_q^* \otimes E_1) = 0$, car sinon, E_1 étant simple et E_2 non isomorphe à E_1 , on voit aisément que la suite exacte

$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \mathcal{U}_q \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$ serait scindée. On a donc $h^0(X,\mathcal{U}_q^* \otimes \mathcal{U}_q) \leq h^0(X,\mathcal{U}_q^* \otimes E_2)$. Puisque $h^0(X,E_1^* \otimes E_2) = 0$, tout morphisme de $\mathcal{U}_q$ dans E_2 provient d'un endomorphisme de E_2 . On en déduit, E_2 étant simple, que $h^0(X,\mathcal{U}_q^* \otimes E_2) = 1$. Donc $h^0(X,\mathcal{U}_q^* \otimes \mathcal{U}_q) = 1$, et $\mathcal{U}_q$ est simple.

Par conséquent, d'après le Théorème de semi-continuité, S est un ouvert de S' , et d'après la Proposition 32, l'image de S dans $U(r,d)$ est Z . Remarquons que $PGL(p)$ agit librement sur S .

On note T_S le fibré tangent de S, C le noyau du morphisme canonique

$$p_X^*(\mathcal{O} \otimes k^p) \longrightarrow \mathcal{U}|_S = \mathcal{U}' \quad ,$$

p_S la projection $S \times X \longrightarrow X$. On a alors

$$T_S = p_{S*}(\underline{Hom}(C,\mathcal{U}')) \quad .$$

Soit T le fibré des vecteurs tangents aux orbites de l'action de $PGL(p)$ sur S , c'est un fibré trivial sur S, de fibre $M(p)/k.I$.

Soit $g : S \longrightarrow Z$ le morphisme canonique. Le morphisme $T(g) : T_S \longrightarrow g^*(T_Z)$ s'annule sur T et induit donc un morphisme

$$f : T_S/T \longrightarrow T_Z \quad ,$$

qui est un isomorphisme au-dessus de R^s .

Examinons maintenant la situation au-dessus d'un point q de $S\setminus R^s$. On pose $z = g(q)$. Il existe des fibrés stables E_1 et E_2 sur X tels que la classe d'isomorphisme de $E_1 \oplus E_2$ soit z . De plus, E_1 et E_2 ne sont pas isomorphes.

On a donc d'après le Théorème de Riemann-Roch,

$$h^1(X,\underline{Hom}(E_2,E_1)) = rg(E_1).rg(E_2).(g-1) > 0 \quad .$$

On pose $H = H^1(X,\underline{Hom}(E_2,E_1))$ =Soit

$$0 \longrightarrow p_X^*(E_1) \longrightarrow E \longrightarrow p_X^*(E_2) \longrightarrow 0$$

la suite exacte de morphismes de fibrés vectoriels sur $H \times X$ définie par l'Appendice II . On a une suite exacte de morphismes de faisceaux sur H :

$$0 \longrightarrow p_{H^*}(p_X^*(E_1)) \longrightarrow p_{H^*}(E) \longrightarrow p_{H^*}(p_X^*(E_2)) \longrightarrow R^1 p_{H^*}(p_X^*(E_1)) \quad .$$

Puisque $h^1(X,E_1) = 0$, on a $R^1 p_{H^*}(p_X^*(E_1)) = 0$, et cette suite exacte est

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(X,E_1) \longrightarrow p_{H^*}(E) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(X,E_2) \longrightarrow 0 \quad .$$

On a donc un isomorphisme

$$p_{H^*}(E) \simeq \mathcal{O} \otimes k^p \quad ,$$

ce qui prouve qu'on a un morphisme surjectif de fibrés vectoriels sur $H \times X$:

$$p_X^*(\mathcal{O} \otimes k^p) \longrightarrow E \quad .$$

D'après la propriété universelle de Q , ceci définit un morphisme $H \longrightarrow Q$, induisant un morphisme

$$\Psi : H \backslash \{0\} \longrightarrow S \quad .$$

Soit $\chi : H\backslash\{0\} \times PGL(p) \longrightarrow S$

$$(h,A) \longrightarrow A.\Psi(h) \quad .$$

Alors les fibres génériques de χ sont de dimension 1 : en effet, d'après l'Appendice II, pour tout point h de $H\backslash\{0\}$, on a

$$\chi^{-1}(PGL(p).\Psi(h)) = k.h \times PGL(p) \quad .$$

(On peut même montrer que toutes les fibres de χ sont de dimension 1).

Ceci entraine que

$$\dim(Im(\chi)) = p^2-2 + rg(E_1).rg(E_2).(g-1) \quad .$$

La variété $g^{-1}(z) = Im(\chi)$ est irréductible, de dimension strictement supérieure à $p^2-1 = \dim(PGL(p))$, sauf évidemment si $g = 2$, $r = 2$ et d est pair, donc $T(g)$ ne peut pas être surjectif en q .

On en déduit la caractérisation suivante de $Y = S\backslash g^{-1}(Z\backslash U_s(r,d))$: c'est l'ensemble des points q de S tels que f_q ne soit pas bijective. Donc Y est de codimension 1 dans S .

On va calculer codim(Y) par une autre méthode pour obtenir une contradiction.

Les fibres de $g|Y : Y \longrightarrow Z\backslash U_s(r,d)$ sont de dimension inférieure à

$$p^2 - 2 + \frac{r^2}{4}.(g-1) \quad \text{si } a \text{ est pair} \quad ,$$

$$p^2 - 2 + \frac{r^2 - r_0^2}{4} \cdot (g-1) \quad \text{si} \quad a \quad \text{est impair} \quad ,$$

d'après ce qui précède. Donc dim(Y) est de dimension inférieure à

$$p^2 + \frac{3}{4} \cdot r^2(g-1) \quad ,$$

et $\operatorname{codim}(Y) \geqq \frac{r^2}{4} \cdot (g-1) > 1$ sauf si $g = 2$, $r = 2$ et d est pair.

Cette contradiction achève la démonstration du Théorème 45 .

VI.- AUTRES RÉSULTATS

A.- Variétés de Picard. Fibrés de Poincaré des variétés de modules de fibrés (semi-)stables.

Soient r et d des entiers tels que $r \geqq 2$.

On définit une application

$$\det : U(r,d) \longrightarrow J^{(d)}$$

en associant à la classe d'isomorphisme d'un fibré E celle de $\det(E)$. Cette application est un morphisme : il suffit d'appliquer la propriété universelle du Jacobien à R^s muni du déterminant du fibré canonique (bien sûr il faut prendre d assez grand) .

Pour tout fibré en droites L de degré d sur X , on note $U(r,L)$ l'image réciproque par det de la classe d'isomorphisme de L . C'est une sous-variété fermée de $U(r,d)$.

La variété $U(r,L)$ est irréductible : la démonstration est analogue à celle de la Proposition 23.

On note $U_s(r,L)$ l'ouvert de $U(r,L)$ correspondant aux fibrés stables. On admettra que $U_s(r,L)$ est non vide (voir le chapître V de la troisième partie).

Il est immédiat que si r et d sont premiers entre eux, $U(r,L)$ est un bon espace de modules pour les fibrés stables de rang r et de déterminant isomorphe à L . Dans le cas général $U_s(r,L)$ est un espace de modules grossier.

Si E est un fibré vectoriel sur une variété algébrique Y , on note $\underline{Ad}(E)$ le noyau du morphisme surjectif de fibrés vectoriels

$$\operatorname{Tr} : \underline{\operatorname{End}}(E) \longrightarrow \mathcal{O}$$

qui en tout point y de Y associe à un élément f de $\operatorname{End}(E_Y)$ l'élément $\operatorname{Tr}(f)$ de k . C'est un fibré vectoriel sur Y . On note évidemment $\operatorname{Ad}(E)$ l'espace vectoriel des sections globales de $\underline{Ad}(E)$.

Si r et d sont premiers entre eux, soit W un fibré de Poincaré pour $U(r,L)$. On note p_U la projection $U(r,L) \times X \longrightarrow U(r,L)$. On peut montrer que $U(r,L)$ est lisse, et que $T_{U(r,L)}$ est isomorphe à $\operatorname{Ker}(R^1 p_{U*}(\operatorname{Tr}))$,

$R^1 p_U*(Tr) : R^1 p_U*(\underline{End}(W)) \longrightarrow R^1 p_U*(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \otimes H^1(X,\mathcal{O})$.
Dans le cas où r n'est pas un multiple de car(k) , $T_{U(r,L)}$ est donc isomorphe à $R^1 p_U*(\underline{Ad}(W))$.

Le lecteur pourra essayer de prouver ce résultat après avoir lu l'appendice III, consacré à l'application de déformation infinitésimale.

Dans le cas général, on appelle *fibré de Poincaré* pour un ouvert non vide S de $U(r,L)$ un fibré vectoriel W sur X tel que pour tout point s de S , la classe d'isomorphisme du fibré W_s soit s .

Les résultats qui suivent sont démontrés dans [31] .

THÉORÈME 46 : *Si* r *et* d *sont premiers entre eux, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Pic}(U(r,L)) \simeq \mathbb{Z} .$$

On notera u un fibré en droites ample sur $U(r,L)$ dont la classe d'isomorphisme est un générateur de $\mathrm{Pic}(U(r,L))$. Alors on a le

THÉORÈME 47 : *Si* r *et* d *sont premiers entre eux, on a*

$$\det(T_{U(r,L)}) \simeq u^2 .$$

Sous les mêmes hypothèses, on a le résultat suivant :

Soit l l'unique entier tel que $0 \leq l \leq r$ et $l.d \equiv 1 \pmod{r}$. Alors il existe un fibré de Poincaré W sur $U(r,L)$, unique à isomorphisme près, tel que pour tout point x de X on ait

$$\det(W|_{U(r,L) \times \{x\}}) \simeq u^l .$$

THÉORÈME 48 : *Si* r *et* d *ne sont pas premiers entre eux, si* S *est un ouvert non vide de* $U(r,L)$ *il n'existe pas de fibré de Poincaré pour* S .

En particulier, il n'existe pas de fibré de Poincaré pour un ouvert non vide de $U_s(r,d)$. On prouvera ce résultat, dans certains cas et par une autre méthode que dans [31] , dans la sixième partie.

Question ouverte : On suppose que r et d sont premiers entre eux. Soit u un fibré en droites ample sur $U(r,L)$ dont la classe d'isomorphisme engendre $\mathrm{Pic}(U(r,L))$. Le fibré u est-il très ample ?

La réponse est oui si X est une courbe hyperelliptique et $r = 2$. Voir [4] , p. 177, (II) .

B.- Rationalité des variétés de modules

(Voir [27]) .

THÉORÈME 49 : *Soient* r, d *des entiers premiers entre eux, avec* $r \geq 2$, L *un fibré en droites sur* X *de degré* d . *La variété* $U(r,L)$ *est ra-*

tionnelle dans les trois cas suivants :

(i) $d \equiv \pm 1 \pmod r$

(ii) g *est une puissance d'un nombre premier*

(iii) g *n'est pas une puissance d'un nombre premier, et la somme des deux plus petits facteurs premiers distincts de* g *est strictement supérieure à* r .

En particulier, si deg(L) est impair, U(2,L) est rationnelle.
La méthode utilisée dans [27] montre en fait que U(r,L) est rationnelle dans d'autres cas que ceux du Théorème 49. On procède de la façon suivante : on construit une famille de fibrés vectoriels stables de rang r et de déterminant isomorphe à L , paramétrée par un ouvert U d'un espace projectif de même dimension que U(r,L) . D'après la propriété universelle de U(r,L) , on en déduit un morphisme

$$U \longrightarrow U(r,L) .$$

On peut trouver une telle famille telle que ce morphisme soit injectif.
En caractéristique différente de 0 il n'est pas immédiat que ce soit un isomorphisme birationnel. Pour le montrer on utilise la théorie de la déformation des fibrés vectoriels, telle qu'elle est exposée dans l'Appendice III.

Dans le cas général, on peut montrer que U(r,L) est une variété unirationnelle.

On dit qu'une variété algébrique Y est *unirationnelle* s'il existe un espace projectif de même dimension que Y et une application rationnelle

$$f : P \longrightarrow Y$$

dont l'image contient un ouvert de Y .

On voit aisément que dans cette définition il est inutile de supposer que Y et P ont même dimension. Pour montrer que U(r,L) est unirationnelle il suffit donc de construire une famille de fibrés vectoriels stables de rang r , de déterminant isomorphe à L , "contenant" tous les fibrés vectoriels stables de rang r et de déterminant isomorphe à L , et paramétrée par un ouvert d'un espace projectif. Cela est aisé (voir la démonstration de la Proposition 23).

Dans le cas où $k = \mathbb{C}$, on peut en déduire aisément que

$$h^i(U(r,L),\mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour } i \neq 0 .$$

C.- Fibrés vectoriels sur les courbes hyperelliptiques

Définition 50 : On dit que X est *hyperelliptique* s'il existe un morphisme fini de degré 2

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}_1 \quad .$$

On peut alors montrer qu'il existe une unique involution non triviale i de X , et f est l'application quotient pour l'action du groupe $\{I_X, i\}$ sur X . Les points de X invariants par i , qui sont les points de ramification de f , sont en nombre $2g + 2$, et sont appelés les *points de Weierstrass* de X . On peut voir ces points comme des scalaires $w_1, \ldots\ldots w_{2g+2}$ (en utilisant f et une base convenable de k^2) .

Soit Q_1 (resp. Q_2) la quadrique de $\mathbb{P}_{2g+1}$ d'équation

$$\sum_{i=1}^{2g+2} x_i^2 = 0 \quad (\text{resp. } \sum_{i=1}^{2g+2} w_i . x_i^2 = 0) \quad .$$

Les résultats qui suivent sont prouvés dans [4] .

THÉORÈME 51 : *Le Jacobien* $J^{(g)}$ *de* X *est isomorphe à la variété des sous-espaces projectifs de* $\mathbb{P}_{2g+2}$ *de dimension* $g-1$ *qui sont contenus dans* Q_1 *et* Q_2 .

THÉORÈME 52 : *Soit* L *un fibré en droites de degré impair sur* X . *La variété* $U(2,L)$ *est isomorphe à la variété des sous-espaces projectifs de* $\mathbb{P}_{2g+2}$ *de dimension* $g-2$ *qui sont contenus dans* Q_1 *et* Q_2 .

D.- Propriétés topologiques des variétés de modules

(Voir [24], [26]) .

On suppose ici que $k = \mathbb{C}$.

Les résultats ci-dessous sont démontrés en utilisant la description des variétés de modules en terme de représentations unitaires donnée dans IV.

THÉORÈME 53 : a) *Soit* L *un fibré en droites de degré* 1 *sur* X . *Alors* $U(2,L)$ *est simplement connexe.*

b) *Le groupe fondamental de* $U(2,1)$ *est abélien libre à* $2g$ *générateurs.*

Soit W un fibré de Poincaré sur $U(2,L) \times X$. On peut écrire

$$c_1(v) = \phi + f \quad ,$$
$$c_2(v) = \chi + \Psi + \omega \otimes f \quad ,$$

où f est le générateur positif de $H^2(X)$, ϕ , ω sont des éléments de $H^2(U(2,L))$, χ de $H^4(U(2,L))$, Ψ de $H^3(U(2,L)) \otimes H^1(X)$.

Si $(a_1, \ldots\ldots, a_{2g})$ est une base de $H^1(X)$, on peut écrire

$$\Psi = \sum_{i=1}^{2g} \Psi_i \otimes a_i \quad ,$$

avec Ψ_i dans $H^3(U(2,L))$.

Il existe une infinité de fibrés de Poincaré, puisque $\mathrm{Pic}(U(2,L))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, donc ϕ , χ, Ψ, ω dépendent de V . Cependant

$$c(\mathrm{End}(V)) = 1 - \beta + 4.\Psi + 2.\alpha \boxtimes f$$

avec

$$\beta = \phi^2 - 4.\chi \quad , \quad \alpha = 2.\omega - \phi ,$$

est indépendant de V . Il en est donc de même de α, β, Ψ.

<u>THÉORÈME 54</u> : *L'anneau* $H(U(2,L), \mathbb{Q})$ *est engendré par*

$$\alpha, \beta, \Psi_1, \ldots\ldots, \Psi_{2g} .$$

DEUXIÈME PARTIE : DÉFORMATION DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FIBRÉS STABLES

INTRODUCTION

Dans ce qui suit on supposera que k est le corps des nombres complexes.

On peut se poser le problème suivant : comment "varie" la variété $U(r,L)$ quand la courbe X "varie" ?

On peut montrer par exemple que les variétés de modules $U(r,L)$ correspondant à des courbes X, X' non isomorphes ne sont pas isomorphes. (Voir [17], [21]) .

Pour étudier la déformation des variétés de modules il est essentiel de calculer

$$h^i(U(r,L),T_{U(r,L)}) \quad \text{pour } i \geq 0 ,$$

qui mesure, si $i = 1$, la "dimension de l'espace des déformations infinitésimales de $U(r,L)$" . En fait on va montrer que

$$h^1(U(r,L),T_{U(r,L)}) = h^1(X,T_X) = 3g - 3 ,$$

ce qui suggère le résultat précédemment énoncé.

On utilisera des résultats de l'Appendice III ("Morphisme de déformation infinitésimale").

On supposera que $g \geq 5$. Soit L un fibrés en droites sur X de degré 1, W un fibré de Poincaré sur $U(2,L) \times X$.

On démontrera le

THÉORÈME 1 : *On a*

$$R^i p_{X*}(\underline{Ad}(W)) = 0 \quad \textit{pour } i = 0,2,$$

et le morphisme de déformation infinitésimale

$$\eta : T_X \longrightarrow R^1 p_{X*}(\underline{Ad}(W))$$

est un isomorphisme.

(On désigne par p_X la projection $U(2,L) \times X \longrightarrow X$) .

On prouvera ensuite le

THÉORÈME 2 : *On a*

$$h^i(U(2,L),T_{U(2,L)}) = 0 \quad \textit{si } i \neq 1 ,$$

et

$$h^1(U(2,L),T_{U(2,L)}) = 3g - 3 .$$

En fait ces résultats sont vrais pour tous les rangs et même si $g < 5$, voir [21] .

Dans le chapitre I on expose des préliminaires nécessaires à la démonstration de l'injectivité de η .

Dans le chapitre II sont données les démonstrations des Théorèmes 1 et 2 .

I.- FAMILLES DE FIBRÉS VECTORIELS

Soit T une variété algébrique lisse.

Soit E un fibré vectoriel sur $T \times X$.

Soit x_0 un point de X . On pose

$$Q(E) = P(E_{x_0}^{*}) ,$$

et on note π_E la projection $Q(E) \longrightarrow T$.

Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré tautologique du fibré en espaces projectifs $P(E^{*}_{x_0})$, $\mathbb{C}_{x_0}$ le faisceau sur X concentré en x_0 , de fibre $\mathbb{C}$ en x_0 , p_X et $p_{Q(E)}$ les projections $Q(E) \times X \longrightarrow X$ et $Q(E) \times X \longrightarrow Q(E)$, i l'inclusion $Q(E) \times \{x_0\} \longrightarrow Q(E) \times X$.

On a alors

$$p_X^{*}(\mathbb{C}_{x_0}) = i_{*}(\mathcal{O}_{Q(E) \times \{x_0\}}) .$$

On a donc

$$\mathrm{Hom}(\pi_E^{\#}(E)|_{Q(E) \times \{x_0\}} , \mathcal{O}(1)) = \mathrm{Hom}(\pi_E^{\#}(E), p^{*}_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \otimes p_X^{*}(\mathbb{C}_{x_0})) .$$

En considérant le morphisme canonique

$$\pi_E^{\#}(E)|_{Q(E) \times \{x_0\}} \longrightarrow \mathcal{O}(1)$$

on obtient le morphisme surjectif

$$\beta_E : \pi_E^{\#}(E) \longrightarrow p^{*}_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \otimes p_X^{*}(\mathbb{C}x_0) .$$

Plus précisément, pour tout point t de T , tout élément non nul f de $E^{*}_{t\,x_0}$, et tout élément z de E_{tx_0} , on a

$$\beta_{Ek.f}(z) = z|_{k.f} ,$$

(c'est un élément de $\mathcal{O}(1)_{k.f}$) .

On pose

$$K(E) = \mathrm{Ker}(\beta_E)^{*} .$$

On a, pour tout point z de $Q(E) \times X$

$$\mathrm{Tor}_2^{\mathcal{O}_{Q(E) \times X}}(p_{Q^{*}(E)}(\mathcal{O}(1)) \otimes p_X^{*}(\mathbb{C}_{x_0}) , \mathbb{C}_z) = 0 ,$$

à cause de la suite exacte

$$0 \longrightarrow L^{-1}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}_{x_0} \longrightarrow 0 .$$

Par conséquent $\ker(\beta_E)$ et $K(E)$ sont des faisceaux localement libres.

On note $A(E)$ la suite exacte

$$0 \longrightarrow K(E)^{*} \longrightarrow \pi_E(E) \longrightarrow p_X^{*}(\mathbb{C}x_0) \otimes p^{*}_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow 0$$

sur $Q(E) \times X$.

Propriétés fonctorielles des constructions précédentes

Soit S une variété algébrique lisse et $f : S \longrightarrow T$ un morphisme. Ce morphisme induit $Q(f) : Q(f^{\#}(E)) \longrightarrow Q(E)$, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Q(f^{\#}(E)) \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "\pi_{f^{\#}(E)}"] & Q(E) \arrow[d, "\pi_E"] \\ S \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

Il est aisé de voir qu'il existe un isomorphisme canonique

$$Q(f)^{\#}(A(E)) \simeq A(f^{\#}(E)) \quad ,$$

et en particulier on a diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi^{\#}_{f^{\#}(E)}(f^{\#}(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{f^{\#}(E)}"] & Q(f)^{\#}(\pi^{\#}_E(E)) \arrow[d, "Q(f)^{\#}(\beta_E)"] \\ p_X^*(\mathbb{C}_{x_0}) \boxtimes p^*_{Q(f^{\#}(E))}(\mathcal{O}(1)) \arrow[r] & Q(f)^{\#}(p_X^*(\mathbb{C}_{x_0}) \boxtimes p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1))) \end{tikzcd}$$

Donnons une description plus explicite de $K(E)$:

Soit t un point de T , z un élément non nul de $E^*_{tx_0}$, alors $\mathrm{Ker}(\beta_E) \big| \{k.z\} \times X$ est le noyau du morphisme $E_t \longrightarrow \mathbb{C}_{x_0}$ défini par z .

Morphismes de déformation infinitésimale

PROPOSITION 3 : *Le morphisme de déformation infinitésimale en* x_0 *de* $K(E)$ *considéré comme une famille de fibrés vectoriels sur* $Q(E)$ *paramétrée par* X *est injectif.*

D'après les propriétés fonctorielles des constructions précédentes et du morphisme de déformation infinitésimale, on peut se ramener au cas où T est réduit à un point, c'est à dire que E est un fibré vectoriel sur X . Soit U un voisinage de x_0 tel que $E\big|_U$ et $L_{x_0}\big|_U$ soient triviaux. Soit $E\big|_U \simeq \mathcal{O}_U \boxtimes E_{x_0}$ un isomorphisme.

On a alors un morphisme canonique

$$\pi_E^{\#}(E) \longrightarrow p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \quad ,$$

qui envoie le sous-faisceau $K(E)$ de $\pi_E^{\#}(E)$ sur

$$p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \boxtimes p_X^*(L_{x_0}^{-1}) \subset p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \quad .$$

On a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes sur $Q(E) \times U$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \otimes p^*_X(L^{-1}_{x_0}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \otimes p^*_X(L^{-1}_{x_0}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K(E)^* \arrow[r] & (p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \otimes p^*_X(L^{-1}_{x_0})) \oplus \pi^*_E(E) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K(E)^* \arrow[r] & \pi^*_E(E) \arrow[r] \arrow[d] & p^*_X(\mathbb{C}_{x_0}) \otimes p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Remarquons que

$$p^*_X(L^{-1}_{x_0})\big|_{Q(E)\times U} \simeq \mathcal{O} \qquad \text{et} \qquad \pi^*_E(E) \simeq p^*_{Q(E)}(\mathcal{O} \otimes E_{x_0}) \quad .$$

On peut donc appliquer la Proposition 1 de l'Appendice III à la restriction à $Q(E) \times U$ de la suite exacte

$$0 \longrightarrow K(E) \longrightarrow (p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \otimes p^*_X(L^{-1}_{x_0})) \oplus \pi^*_E(E) \xrightarrow{\ \eta\ } p^*_{Q(E)}(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow 0$$

sur $Q(E) \times X$.

On peut voir η comme un morphisme

$$\begin{aligned} \eta : U &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(1) \oplus (\mathcal{O} \otimes E_{x_0}), \mathcal{O}(1)) \\ &= \mathrm{End}(\mathcal{O}(1)) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{O} \otimes E_{x_0}, \mathcal{O}(1)) \quad . \end{aligned}$$

La deuxième composante de ce morphisme est constante, tandis que la première est le morphisme $U \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{O}(1))$ défini par le morphisme canonique $L_{x_0}\big|_U \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathcal{O}(1)\big|_U)$ (défini par l'inclusion $L^{-1}_{x_0} \subset \mathcal{O}$ et la trivialisation de $L_{x_0}\big|_U$) .

Par conséquent

$$\begin{aligned} T_{\eta x_0} : T_{X x_0} = (L^{-1}_{x_0})_{x_0} &\longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{O}(1)) \\ t &\longmapsto t.I \quad . \end{aligned}$$

On a

$$K(E)^*_{x_0} = \mathcal{O}(1) \otimes ((L^{-1}_{x_0})_{x_0} \oplus T^*_{Q(E)}) ,$$

d'où on déduit aisément que le morphisme déduit de $T_{\eta\, x_0}$

$$f : T_{X\, x_0} \longrightarrow \mathrm{Hom}(K(E)^*_{x_0}, \mathcal{O}(1))$$

est injectif, et que

$$\partial : \mathrm{Hom}(K(E)^*_{x_0}, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow H^1(Q(E), \underline{\mathrm{End}}(K(E)^*_{x_0}))$$

est injective.

Mais d'après la Proposition 1 de l'Appendice III, on a

$$\eta_{x_0} = -\,\partial \circ f$$

ce qui démontre la Proposition 3 .

II.- DÉMONSTRATION DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

On applique les résultats du Chapitre I au fibré de Poincaré W sur $U(2,L) \times X$.

On considère $Q(W) = P(W^*_{x_0})$. On note π la projection

$$Q(W) \longrightarrow U(2,L) .$$

On a une suite exacte canonique sur $Q(W) \times X$

$$0 \longrightarrow K(W)^* \longrightarrow \pi^*(W) \longrightarrow p_X^*(\mathbb{C}_{x_0}) \otimes p^*_{Q(W)}(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow 0$$

(p_X, $p_{Q(W)}$ désignant les projections $Q(W) \times X \longrightarrow X$, $Q(W) \times X \longrightarrow Q(W)$) , $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites tautologique sur le fibré en espaces projectifs $Q(W)$, $\mathbb{C}_{x_0}$ le faisceau sur X concentré en x_0 de fibre $\mathbb{C}$) .

Au-dessus d'un point $\mathbb{C}.\rho$ de $Q(W)$ (si $\pi(\mathbb{C}.\rho) = z$, ρ est un élément non nul de $W^*_{x_0}$) cette suite exacte est

$$0 \longrightarrow K(W)^*_{\mathbb{C}.\rho} \longrightarrow W_z \xrightarrow{\Psi} (\mathbb{C}.\rho)^* \otimes \mathbb{C}_{x_0} \longrightarrow 0 ,$$

le morphisme Ψ étant déterminé par ρ .

<u>LEMME 4</u> : *Soit* F *un fibré vectoriel stable sur* X *, de rang 2 et de degré 1,*

$$\lambda : F \longrightarrow \mathbb{C}_{x_0}$$

un morphisme non nul.

Alors $\mathrm{Ker}(\lambda)$ *est un fibré vectoriel semi-stable de rang 2 et de déterminant isomorphe à* $\det(F) \otimes L^{-1}_{x_0}$.

Immédiat.

Donc $K(W)_{\mathbb{C}.\rho}$ est un fibré vectoriel semi-stable, de rang 2 et de déterminant isomorphe à $L^{-1} \otimes L_{x_0}$.

(Remarque : ne pas confondre le fibré en droites L_{x_0} , noyau du morphisme canonique $\mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}_{x_0}$, et la fibre de L en x_0) .

D'après la propriété universelle de $U(2,L^{-1} \otimes L_{x_0})$, on en déduit un morphisme

$$q : Q(W) \longrightarrow U(2,L^{-1} \otimes L_{x_0}).$$

Soit w un point de $U(2,L^{-1} \otimes L_{x_0})$, correspondant à un fibré vectoriel E . On va étudier la fibre $q^{-1}(w)$.

<u>LEMME 5</u> : *On a* $\dim(q^{-1}(w)) \leq 1$.

Si $\mathbb{C}.\rho$ est un point de $q^{-1}(w)$, avec $\pi(\mathbb{C}.\rho) = z$, on a une suite exacte

(I) $0 \longrightarrow E^* \longrightarrow W_z \xrightarrow{g} \mathbb{C}_{x_0} \longrightarrow 0$,

g étant donné par

$$\rho : W_{z\,x_0} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

On en déduit la suite exacte

(II) $0 \longrightarrow W_z^* \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{C}_{x_0} \longrightarrow 0$,

ce qui définit une application

$$q^{-1}(w) \longrightarrow P(E^*_{x_0})$$

qui est un morphisme

(c'est l'application

$$\mathbb{C}.\rho \longrightarrow \mathrm{Ker}(E^*_{x_0} \longrightarrow W_{z\,x_0}))\quad .$$

Ce morphisme est injectif, car la suite exacte (I) est la transposée de (II), et est donc déterminée par (II).

Ceci prouve le Lemme 5.

<u>LEMME 6</u> : *Soit* F *un fibré vectoriel stable de rang 2, de degré 0 sur* X , *et*

$$\Gamma : F \longrightarrow \mathbb{C}_{x_0}$$

un morphisme non nul.

Alors $\mathrm{Ker}(\Gamma)$ *est un fibré vectoriel semi-stable de rang 2 et de déterminant isomorphe à* $\det(F) \otimes L^{-1}_{x_0}$.

Immédiat.

On a donc, avec les notations précédentes, $q^{-1}(w) \simeq P(E^*_{x_0})$, si E est stable.

On en déduit le

<u>COROLLAIRE 7</u> : *Le morphisme*

$$q : Y = q^{-1}(U_s(2,L^{-1} \otimes L_{x_0})) \longrightarrow U_s(2,L^{-1} \otimes L_{x_0})$$

fait de U *un fibré en droites projectives sur* $U_s(2, L^{-1} \otimes L_{x_0})$.

On pose

$$K = U(2, L^{-1} \otimes L_{x_0}) \setminus U_s(2, L^{-1} \otimes L_{x_0}) \quad .$$

On a $\dim(K) = 2g - 2$ (voir le chapitre V de la première partie). Donc d'après les lemmes 5 et 6, on a

$$\dim(q^{-1}(K)) \geq 2g - 1 \quad ,$$
$$\operatorname{codim}(q^{-1}(K)) \geq g - 1 \quad .$$

<u>Démonstration du Théorème 1</u>

Montrons d'abord que le morphisme de déformation infinitésimale est injectif .

On considère la suite exacte canonique sur $Q(K(W)) \times X$:

$$0 \longrightarrow K(K(W))^* \longrightarrow \pi'^{\#}(K(W)) \longrightarrow p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes p_X^*(\mathbb{C}_{x_0}) \longrightarrow 0$$

(p_X et p désignant les projections $Q(K(W)) \times X \longrightarrow X$ et $Q(K(W)) \times X \longrightarrow Q(K(W))$, π' la projection $Q(K(W)) \longrightarrow Q(W)$) .

Soit z un point de $Q(K(W))$ tel que $\pi'(z)$ ne soit pas dans $q^{-1}(K)$. Alors $K(K(W))_z$ est un fibré stable de rang 2 , de déterminant isomorphe à L . Soit

$$U = Q(K(W)) \setminus \pi'^{-1}(Q(W) \setminus q^{-1}(K)) \quad .$$

D'après la propriété universelle de $U(2,L)$, on a un morphisme

$$\rho : U \longrightarrow U(2,L) \quad ,$$

tel que

$$\rho^{\#}(W) \simeq K(K(W)) \big|_{U \times X} \otimes p^*(\mathcal{L}) \quad ,$$

étant un fibré en droites sur U .

D'après les propriétés fonctorielles du morphisme de déformation infinitésimale, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H^1(Q(K(W)), \underline{\mathrm{End}}(K^2(W)_{x_0})) \arrow[dr, "\alpha"] & \\
T_{X\,x_0} \arrow[ur, "\eta'_{x_0}"] \arrow[dr, "\eta_{x_0}"'] & & H^1(U, \underline{\mathrm{End}}(K^2(W)_{x_0})) \\
 & H^1(U(2,L), \underline{\mathrm{End}}(W_{x_0})) \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

où η'_{x_0} désigne l'application de déformation infinitésimale au point x_0 de la famille $K(K(W))$ de fibrés vectoriels sur $Q(K(W))$, α la restriction et ϕ étant induite par ρ .

L'application α est injective car

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}(Q(K(W))\setminus U) &= \operatorname{codim}(\pi'^{-1}(Q(W)\setminus q^{-1}(K))) \\ &= \operatorname{codim}(Q(W)\setminus q^{-1}(K)) \geq g-1 \geq 3 \quad ,\end{aligned}$$

(voir [9]).

L'application η'_{x_0} est injective d'après la Proposition 3. On en déduit immédiatement que η_{x_0} est injective.

Montrons maintenant que pour tout point x_0 de X , on a

$$h^1(U(2,L),\underline{Ad}(W_{x_0})) = 1 \quad .$$

<u>LEMME 8</u> : *Soit* E *un fibré vectoriel sur une variété algébrique* M , $p : P(E) \longrightarrow M$ *le fibré en espaces projectifs associé. On note* T_p *le fibré tangent aux fibres de* p . *Alors on a*

$$H^i(P(E),\mathcal{O}) = 0 \text{ si } i > 0$$
$$H^i(P(E),T_p^*) \simeq H^{i-1}(M,\mathcal{O}) \quad \textit{pour } i \geq 0$$
$$H^i(P(E),T_p) \simeq H^i(M,\underline{Ad}(E)) \quad \textit{pour } i \geq 0 \quad .$$

Immédiat en utilisant la suite spectrale de Leray de p et les isomorphismes :

$$p_*(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O},\ R^i_* p(\mathcal{O}) = 0 \text{ si } i > 0 \quad ,$$
$$R^1 p_*(T_p^*) \simeq \mathcal{O} \quad , R^i p_*(T_p) = 0 \text{ si } i > 0 \quad ,$$
$$p_*(T_p) \simeq \underline{Ad}(E) \quad , \quad R^i p_*(T_p) = 0 \text{ si } i > 0 \quad .$$

<u>LEMME 9</u> : *On a, sur* $Q(W)\setminus q^{-1}(K)$, $T_\pi = T_q^*$.

(où T_π (resp. T_q) est le sous-fibré vectoriel de $T_{Q(W)}$ tangent aux fibres de π (resp. q)) .

Cela découle immédiatement du fait que si

$$0 \longrightarrow E^* \longrightarrow F \longrightarrow \mathbb{C}_{x_0} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte sur X , E et F étant des fibrés vectoriels, si

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{C}_{x_0} \longrightarrow 0$$

est sa transposée, on a un isomorphisme

$$F^*_{x_0}/\mathbb{C}.\rho \simeq (E^*_{x_0}/\mathbb{C}.\psi)^* \quad ,$$

qui ne change pas si on remplace ρ par un de ses multiples, et de l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_\pi(1) \simeq \mathcal{O}_q(-1) \quad .$$

D'après le lemme 8, on a

$$h^1(U(2,L),\underline{Ad}(W_{x_0})) = h^1(Q(W),T_\pi) \quad ,$$

et

$$\begin{aligned} h^1(Q(W),T_\pi) &= h^1(Q(W)\setminus q^{-1}(K),T_\pi) \\ &\qquad (\text{car } \operatorname{codim}(q^{-1}(K)) \geq 3 \quad , \\ &= h^1(Q(W)\setminus q^{-1}(K),T_q^*) \\ &\qquad \text{d'après le lemme 9} \quad ,\end{aligned}$$

$$= h^0(U_s(2,L^{-1} \otimes L_{x_0}), \mathcal{O})$$

d'après le Lemme 8.

$$= h^0(U(2,L^{-1} \otimes L_{x_0}), \mathcal{O}) \quad , \text{car}$$

$$\operatorname{codim}(U_s(2,L^{-1} \otimes L_{x_0})) = 2g - 1 \geq 2 \quad ,$$

$$= 1$$

Il reste à montrer que pour tout point x_0 de X , on a

$$h^2(U(2,L), Ad(W_{x_0})) = 0 \quad .$$

La démonstration est analogue à la précédente. On utilise ici le fait que

$$\operatorname{codim}(q^{-1}(K)) \geq 4 \quad , \text{car} \quad g \geq 5 \quad .$$

On obtient

$$h^2(U(2,L), Ad(W_{x_0})) = h^1(U(2,L), \mathcal{O})$$

et le résultat découle du fait que la variété $U(2,L)$ est unirationnelle (voir le Chapitre VI de la première partie).

Ceci achève la démonstration du Théorème 1.

<u>Démonstration du Théorème 2</u>

On a déjà

$$h^i(U(2,L), T_{U(2,L)}) = 0 \quad \text{si} \quad i \geq 2 \quad ,$$

d'après le Théorème d'Akizuki-Nakano et le Théorème I-47. On peut donc supposer que $i \leq 1$.

<u>LEMME 10</u> : *On a* $R^1 p_U{}_*(\underline{Ad}(W)) \simeq T_{U(2,L)}$,

$R^i p_U{}_*(\underline{Ad}(W)) = 0$ *si* $i \neq 1$.

(où p_U est la projection $U(2,L) \times X \longrightarrow U(2,L)$.

La première égalité a déjà été vue (Chapitre VI de la première partie, A). Les autres découlent du fait qu'un fibré vectoriel stable est simple.

On a donc

$$h^i(U(2,L), T_{U(2,L)}) = h^{i+1}(U(2,L) \times X, \underline{Ad}(W)) \quad ,$$

en utilisant la suite spectrale de Leray de p_U . D'autre part, d'après le Théorème 1, on a

$$p_X{}_*(\underline{Ad}(W)) = 0 \quad ,$$

$$R^1 p_X{}_*(\underline{Ad}(W)) \simeq T_X \quad ,$$

$$R^2 p_X{}_*(\underline{Ad}(W)) = 0 \quad ,$$

donc d'après la suite spectrale de Leray de p_X on a

$$h^0(U(2,L),T_{U(2,L)}) = h^0(X,T_X) = 0 \ ,$$
$$h^1(U(2,L),T_{U(2,L)}) = h^1(X,T_X) = 3g-3 \ .$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 2.

TROISIÈME PARTIE : FIBRÉS VECTORIELS AVEC STRUCTURE PARABOLIQUE

INTRODUCTION

On étudie ici des fibrés vectoriels E munis de structures quasi-paraboliques, c'est à dire qu'en un nombre fini de points x de X, on se donne une filtration

$$E_x = F_1(E)_x \supset F_2(E)_x \dots \supset F_{n_x}(E)_x \supset \{0\} .$$

Avant de définir une notion de (semi-)stabilité pour de tels objets, il faut associer à chaque terme $F_i(E)_x$ d'une telle filtration un coefficient a_{xi} (on obtient ainsi un "fibré parabolique").

Par une méthode analogue à celle de la première partie on peut construire des variétés de modules de fibrés paraboliques.

Voir [15] .

Dans le chapitre I on donne la définition précise et les propriétés élémentaires des fibrés paraboliques.

Dans le chapitre II on étudie comment varie la (semi-)stabilité d'un fibré parabolique en fonction des coefficients mentionnés précédemment.

Dans le chapitre III on étudie comment varie la (semi-)stabilité d'un fibré parabolique sur X quand on change la base de X. On donne aussi un "Théorème de propreté" pour les fibrés paraboliques, indispensable à la démonstration de l'existence de variétés de modules de fibrés paraboliques.

Dans le chapitre IV on construit ces variétés de modules.

Dans le chapitre V on étudie le cas où k est le corps des nombres complexes.

Dans le chapitre VI on donne les conditions d'existence des fibrés paraboliques.

I.- FIBRÉS AVEC STRUCTURE PARABOLIQUE. (SEMI-)STABILITÉ. QUELQUES PROPRIÉTÉS

A.- Définitions

Soit I un ensemble fini non vide de points de X, F un fibré vectoriel sur X.

DÉFINITION 1 : Une *structure quasi-parabolique* E sur F est la donnée, pour tout point x de I, d'un drapeau de F_x, c'est à dire d'une filtration

$$F_x = F_1(E)_x \supset F_2(E)_x \supset \dots \supset F_{n_x(E)}(E)_x \supset F_{n_x(E)+1}(E)_x = \{0\}$$

de F_x par des sous-espaces vectoriels.

Pour tout point x de I, et $1 \leqq i \leqq n_x(E)$, on pose

$$k_{xi}(E) = \dim(F_i(E)_x / F_{i+1}(E)_x) \quad .$$

La suite $(k_{xi}(E))_{x \in I, 1 \leqq i \leqq n_x(E)}$ s'appelle la *suite de multiplicités pour* E.

On dit alors que F est muni d'une structure quasi-parabolique, ou que E est un *fibré quasi-parabolique*. On commettra souvent l'abus de notation consistant à identifier E et F.

DÉFINITION 2 : Une *structure parabolique* E' sur F est la donnée d'une structure quasi-parabolique E sur F et d'une suite de nombres réels $(a_{xi}(E'))_{x \in I, 1 \leqq i \leqq n_x(E)}$ telle que pour tout point x de I on ait :

$$0 \leqq a_{x1}(E') < \dots < a_{xn_x(E)}(E') < 1 \quad .$$

Une telle suite s'appelle un *système de poids* pour E. On dit que $k_{xi}(E)$ est la *multiplicité* de $a_{xi}(E')$.

On dit alors que F est muni d'une structure parabolique, ou que E' est un *fibré parabolique*. On commettra souvent l'abus de notation consistant à identifier E', E et F.

On dit que I est l'ensemble de points de X où la structure (quasi-) parabolique est concentrée.

DÉFINITION 3 : Un *morphisme de fibrés paraboliques* E et F est un morphisme de fibrés vectoriels

$$g : E \longrightarrow F$$

tel que pour tout point x de I, on ait

$$g_x(F_i(E)_x) \subset F_{j+1}(F)_x \quad \text{dès que} \quad a_{xi}(E) > a_{xj+1}(F) \quad .$$

On dit que g est un *isomorphisme de fibrés paraboliques* si c'est un isomorphisme de fibrés vectoriels et si g^{-1} est un morphisme de fibrés paraboliques.

DÉFINITION 4 : Soit E un fibré parabolique. Un *sous-fibré parabolique* de E est un fibré parabolique F tel que :

(i) F est un sous-fibré vectoriel de E,

(ii) pour tout point x de I et tout élément j de $\{1, \dots, n_x(F)\}$, si i est le plus grand entier tel que $F_j(F)_x \subset F_i(E)_x$, alors on a

$$a_{xj}(F) = a_{xi}(E) \quad .$$

Un *quotient parabolique de* E est la donnée d'un fibré parabolique F et d'un morphisme surjectif de fibrés vectoriels $f : E \longrightarrow F$ tels que :

(i) Pour tout point x de I et tout élément j de $\{1, \dots, n_x(F)\}$, il existe un élément i de $\{1,\dots,n_x(E)\}$ tel que

$$f_x(F_i(E)_x) = F_j(F)_x \quad ,$$

(ii) Si i est le plus grand entier tel que l'égalité précédente soit vérifiée, on a

$$a_{xj}(F) = a_{xi}(E) \quad .$$

<u>Remarque</u> : Soit E un fibré parabolique sur X, et F un sous-fibré vectoriel de E. Il existe une unique structure parabolique sur F telle que pour tout point x de I, la filtration $(F_j(F)_x)$ soit constituée des termes distincts de la filtration $(F_i(E)_x \cap F_x)$. On l'appelle la *structure parabolique canonique* de sous-fibré parabolique de E de F.

On définit de même la structure parabolique canonique d'un fibré vectoriel quotient de E.

Quand on considèrera un sous-fibré vectoriel (resp. un quotient) de E, il sera sous-entendu qu'il est muni de sa structure parabolique canonique.

Soient E, E_1,E_2 des fibrés paraboliques, et

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels sur X.

On dit que c'est une *suite exacte de fibrés paraboliques* si respectivement aux morphismes de la suite exacte précédente, E_1 (resp. E_2) est un sous-fibré (resp. un quotient) parabolique de E.

Soient E_1, E_2 des fibrés paraboliques, et

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels sur X.

On va construire une structure parabolique sur E :

Pour tout point x de I, on choisit un isomorphisme

$$E_x \simeq E_{1x} \oplus E_{2x}$$

compatible avec la suite exacte précédente. On pose

$$\{a_{xi}(E),\ 1 \leq i \leq n_x(E)\} = \{a_{xj}(E_1),\ 1 \leq j \leq n_x(E_1)\} \cup \{a_{xl}(E_2),\ 1 \leq l \leq n_x(E_2)\} \quad ,$$

les $a_{xi}(E)$ étant bien entendu rangés par ordre croissant.

Pour tout élément i de $1,\dots,n_x(E)$, on a

$$F_i(E)_x = F_j(E_1)_x \oplus F_l(E_2)_x \quad ,$$

j (resp. l) étant le plus grand entier tel que $a_{xi}(E) \leq a_{xj}(E_1)$ (resp. $a_{xi}(E) \leq a_{xl}(E_2)$).

On vérifie alors aisément que E_1 (resp. E_2) est un sous-fibré (resp. un quotient) parabolique de E, muni de sa structure canonique.

On dit que le fibré parabolique E est une *extension* du fibré parabolique E_2 par le fibré parabolique E_1.

Dans le cas où $E = E_1 \oplus E_2$, il existe une structure parabolique canonique de E, et on dit que E, muni de cette structure, est la *somme directe* des fibrés paraboliques E_1 et E_2.

On définit de manière évidente la somme directe de deux morphismes de fibrés paraboliques.

<u>DÉFINITION 5</u> : Soit E un fibré parabolique sur X. Le nombre réel

$$\mathrm{pardeg}(E) = \deg(E) + \sum_{x \in I} \left(\sum_{i=1}^{n_x(E)} k_{xi}(E).a_{xi}(E) \right)$$

s'appelle le *degré parabolique* de E.

On pose par $\mu(E) = \dfrac{\mathrm{pardeg}(E)}{\mathrm{rg}(E)}$.

Soit E un fibré quasi-parabolique, a un système de poids pour E, E_a le fibré parabolique défini par E et A. On pose

$$a\text{-}\mathrm{pardeg}(E) = \mathrm{pardeg}(E_a) \quad \text{et} \quad a\text{-}\mathrm{par}\mu(E) = \mathrm{par}\mu(E_a) \quad .$$

<u>Remarques</u> :

1.- Soit E un fibré parabolique, F un sous-fibré vectoriel de E. La structure parabolique canonique de F est la structure parabolique de F faisant de celui-ci un sous-fibré parabolique de E qui rend $\mathrm{pardeg}(F)$ (resp. par $\mu(F)$) maximal. On a un résultat analogue pour les quotients.

2.- Un point x de I est dit *trivial* pour un fibré parabolique E si on a $n_x(E) = 1$. Remarquons que E induit un fibré parabolique E' dont la structure est concentrée en $I \setminus \{x\}$, et qu'on a

$$\mathrm{par}\mu(E') = \mathrm{par}\mu(E) - \mathrm{rg}(E).a_{x1}(E) \quad .$$

3.- Soient E_1, E_2 des fibrés paraboliques et E une extension de E_2 par E_1. Alors on a

$$\mathrm{pardeg}(E) = \mathrm{pardeg}(E_1) + \mathrm{pardeg}(E_2) \quad .$$

<u>DÉFINITION 6</u> : un fibré parabolique E est dit *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout sous-fibré parabolique F de E on a

$$\mathrm{par}\mu(F) \leq \mathrm{par}\mu(E) \quad (\text{resp. } \mathrm{par}\mu(F) < \mathrm{par}\mu(E)) \; .$$

Si E est un fibré quasi-parabolique et a un système de poids pour E, on dit que E est a-*semi-stable* (resp. a-*stable)* si le fibré parabolique défini par E et a est semi-stable (resp.stable).

<u>Remarques</u> :

1.- Dans la définition précédente, on peut remplacer F par un sous-fibré vectoriel de E muni de sa structure parabolique canonique.

2.- Soit x un point trivial pour un fibré parabolique E et E' le fibré parabolique dont la structure est concentrée en $I\setminus\{x\}$ induit par E. Alors E est semi-stable (resp.stable) si et seulement si E' l'est. En particulier, si tous les points de I sont triviaux, E est semi-stable (resp. stable) si et seulement si le fibré vectoriel est semi-stable (resp. stable) au sens de la première partie.

3.- Soit E un fibré parabolique et L un fibré en droites sur X. Il existe une structure parabolique évidente sur $E \otimes L$ induite par celle de E, et $E \otimes L$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si E l'est.

4.- On peut, en ajoutant au besoin des points à I, ramener l'étude des fibrés paraboliques de degré parabolique quelconque à celle des fibrés paraboliques de degré parabolique 0 : cela découle des deux remarques précédentes et de la remarque 2 suivant la définition 5.

B.- La filtration de Harder-Narasimhan

PROPOSITION 7 : *Soit* E *un fibré parabolique. Il existe un unique sous-fibré vectoriel* E_1 *de* E *tel que, pour tout sous-fibré parabolique* F *de* E, *on ait*

$$\operatorname{par}\mu(F) \leq \operatorname{par}\mu(E_1) ,$$

et $\operatorname{rg}(F) \leq \operatorname{rg}(E_1)$ *si* $\operatorname{par}\mu(F) = \operatorname{par}\mu(E_1)$.
Ce sous-fibré parabolique est semi-stable. On l'appelle le sous-fibré parabolique semi-stable maximal de E.

La démonstration est analogue à celle de la Proposition I.2.
On en déduit le résultat suivant, analogue au Théorème I.4 :

THÉORÈME 8 : *Soit* E *un fibré parabolique. Il existe une filtration de* E *par des sous-fibrés vectoriels, et une seule,*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \quad \dots . \subset E_{s-1} \subset E_s = E ,$$

telle que, pour $1 \leq i \leq s-1$, E_i/E_{i-1} *soit le sous-fibré parabolique semi-stable maximal de* E/E_{i-1}.

On l'appelle la filtration de Harder-Narasimhan de E.

C.- Morphismes de fibrés paraboliques semi-stables - Théorème de Jordan-Hölder

La démonstration de la Proposition suivante est analogue à celle des Propositions I.6 et I.7 :

PROPOSITION 9 : *Soient* E *et* F *des fibrés paraboliques semi-stables.*
a) *Si* $\mathrm{par}\mu(E) = \mathrm{par}\mu(F)$, *et* $f : E \longrightarrow F$ *est un morphisme de fibrés paraboliques, alors* f *est de rang constant,* Ker(f) *et* Coker(f) , *munis de leurs structures paraboliques canoniques sont semi-stables, et on a*

$$\mathrm{par}\mu(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{par}\mu(\mathrm{Coker}(f)) = \mathrm{par}\mu(E) \quad .$$

b) *Si* $\mathrm{par}\mu(F) < \mathrm{par}\mu(E)$, *on a* $\mathrm{Hom}(E,F) = \{0\}$.
c) *Si* E *et* F *sont stables, et* $\mathrm{par}\mu(E) = \mathrm{par}\mu(F)$, *on a* $\mathrm{Hom}(E,F) = \{0\}$ *ou bien* E *et* F *sont isomorphes.*
d) *Si* E *est stable,* E *est simple, c'est à dire que les seuls endormorphismes paraboliques de* E *sont les homothéties.*

On en déduit immédiatement le

COROLLAIRE 10 : *Soient* E_1 *et* E_2 *des fibrés paraboliques semi-stables tels que* $\mathrm{par}\mu(E_1) = \mathrm{par}\mu(E_2) = \mu$. *Alors toute extension de* E_2 *par* E_1 *est un fibré parabolique semi-stable et on a* $\mathrm{par}\mu(E) = \mu$.

Soit μ un nombre réel, et C_μ la catégorie dont les objets sont les fibrés paraboliques semi-stables E tels que $\mathrm{par}\mu(E) = \mu$ et les morphismes de fibrés paraboliques entre ceux-ci. D'après le Corollaire 10 la somme directe de deux objets de C_μ , munie de sa structure parabolique canonique, est aussi un objet de C_μ . On en déduit à l'aide de la Proposition 9 la

PROPOSITION 11 : *La catégorie* C_μ *est abélienne, artinienne et noetherienne.*

On peut donc appliquer à C_μ le Théorème de Jordan-Hölder, ce qui donne le

THÉORÈME 12 : *Soit* E *un fibré parabolique semi-stable sur* X . *Il existe une filtration de* E *par des sous-fibrés vectoriels*

$$0 = E_{p+1} \subset E_p \subset \ldots . \subset E_2 \subset E_1 \subset E_0 = E$$

telle que pour $1 \leq i \leq p$, *le fibré parabolique* E_i/E_{i+1} *soit stable et qu'on ait* $\mathrm{par}\,\mu(E_i/E_{i+1}) = \mathrm{par}\,\mu(E)$.

De plus la classe d'isomorphisme parabolique du fibré parabolique $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i/E_{i+1}$ *ne dépend que de celle de* E . *On note* Gr(E) *cette classe d'isomorphisme.*

Soit E un fibré quasi-parabolique, a un système de poids pour E et E_a le fibré parabolique défini par E et A . Si E_a est semi-stable on pose

$$a\text{-}\mathrm{Gr}(E) = \mathrm{Gr}(E_a) \quad .$$

Remarque : Si E est un fibré parabolique semi-stable, les suites de multiplicité (resp. les systèmes de poids) pour E et Gr(E) sont les mêmes.

II.- VARIATION DE LA (SEMI-)STABILITÉ AVEC LA STRUCTURE PARABOLIQUE

Soient r et d des entiers tels que $r \geqq 2$. Soit $\mathcal{V}$ la catégorie des fibrés quasi-paraboliques E de rang r de degré d , de suite de multiplicités $(k_{xi})_{x \in I, 1 \leqq i \leqq n_x}$ fixée, et tels qu'il existe un système de poids a pour E tel que E , muni de A , soit un fibré parabolique de degré parabolique 0 , c'est à dire que

$$\sum_{x \in I} \left(\sum_{i=1}^{n_x} k_{xi} \cdot a_{xi} \right) + d = 0 \quad .$$

On note Ω l'ensemble des suites $a = (a_{xi})_{x \in I, 1 \leqq i \leqq n_x}$ vérifiant l'égalité précédente et telles que pour tout point x de I , on ait

$$0 \leqq a_{x1} < a_{x2} < \dots < a_{xn_x} < 1 \quad .$$

On prouvera le résultat suivant

THÉORÈME 13 : *Etant donné un élément* a *de* Ω *, il existe un élément* a' *de* Ω *à coordonnées rationnelles tel que :*
(i) *pour tout objet* E *de* $\mathcal{V}$ *,* E *est* a*-semi-stable (resp.* a*-stable) si et seulement si* E *est* a'*-semi-stable (resp.* a'*-stable).*
(ii) *pour tout objet* a*-semi-stable* E *de* Ω *, les fibrés quasiparaboliques sous-jacents aux sous-fibrés paraboliques de degré parabolique* 0 *de* E *muni de* a *soient les mêmes que ceux qui sont sous-jacents aux sous-fibrés paraboliques de degré parabolique* 0 *de* E *muni de* a' *.*

Par conséquent les fibrés quasi-paraboliques sous-jacents à a-Gr(E) *et* a'-Gr(E) *sont isomorphes.*

(La notion d'isomorphisme quasi-parabolique étant évidente).

LEMME 14 : *Soit* a *un élément de* Ω *. Alors il existe un voisinage* U *de* a *dans* Ω *tel que pour tout élément* b *de* U *, tout objet de* $\mathcal{V}$ *qui est* a*-stable soit aussi* b*-stable.*

Si E est un objet de $\mathcal{V}$, b un élément de Ω , et F un sous-fibré vectoriel de E , on pose

$$\chi(E,F,b) = - b\text{-par}\mu(F) \quad ,$$

F étant muni de sa structure canonique de sous-fibré parabolique du fibré parabolique défini par E et b .

Alors il existe des constantes C_1, C_2 indépendantes de E et de b telles que

$$\deg(F) \leqq C_1 \Longrightarrow \chi(E,F,b) < 0$$
$$\deg(F) \geqq C_2 \Longrightarrow \chi(E,F,b) \geqq 0$$

Les formes linéaires $\chi(E,F,b)$ en b correspondant aux objets E et aux sous-fibrés F de ceux-ci tels que

$$C_1 \leqq \deg(F) \leqq C_2$$

sont en nombre fini, donc il existe un voisinage U de a et un réel $\delta > 0$ tel que pour tout objet a-stable E de $\mathcal{V}$, tout sous-fibré F de E tel que

$$C_1 \leqq \deg(F) \leqq C_2$$

et tout élément b de U , on ait

$$\chi(E,F,b) \geqq \delta$$

On voit aisément que U est le voisinage cherché.

Ceci achève la démonstration du Lemme 14.

Soit d' un entier tel que $0 > d' > d$. Pour tout élément x de I soit m_x un entier tel que $1 \leqq m_x \leqq n_x$, $i_1,\ldots,i_{m_x}$ un sous-ensemble de $1,\ldots,n_x$ tel que $i_1 < \ldots < i_{m_x}$, $p_{x1},\ldots,p_{xm_x}$ des entiers tels que $1 \leqq p_{xj} \leqq k_{xi_j}$ pour $1 \leqq j \leqq m_x$.

On considère l'ensemble des éléments b de Ω tel que

$$\sum_{x\in I} \left(\sum_{j=1}^{m_x} p_{xj}.b_{xi_j}\right) + d' = 0 \; .$$

Un tel sous-ensemble de Ω est dit *distingué*. Il en existe un nombre fini. On note D leur réunion.

LEMME 15 : *Soit* K *une partie compacte de* $\Omega\setminus D$. *Alors il existe un nombre réel* $\delta > 0$ *tel que pour tout objet* E *de* $\mathcal{V}$, *tout sous-fibré vectoriel* F *de* E *et tout élément* b *de* K , *on ait*

$$|\chi(E,F,b)| \geqq \delta \; .$$

Immédiat.

LEMME 16 : *Soit* S *une composante connexe de* $\Omega\setminus D$. *Pour tout objet* E *de* $\mathcal{V}$, *tous éléments* b_1 *et* b_2 *de* S , *on a*

(i) E *est* b_1-*stable si et seulement si* E *est* b_2-*stable.*

(ii) *Si* E *est* b_1-*semi-stable,* E *est* b_1-*stable.*

Seul (i) ne découle pas trivialement de la définition de D .

Supposons que E soit b_1-stable et soit F un sous-fibré vectoriel de E . Alors on a $\chi(E,F,b_1) > 0$, et comme la forme linéaire en b $\chi(E,F,b)$ ne s'annule pas sur l'ensemble connexe S , on a $\chi(E,F,b_2) > 0$.

Donc E est b_2-stable.

Ceci achève la démonstration du Lemme 16.

Démonstration du Théorème 13

Il est déjà démontré si a est un élément de $\Omega\setminus D$, à cause du Lemme 16 et du fait que D est fermé. Supposons que a appartienne à D. Soit Y l'intersection des ensembles distingués passant par a. Alors il existe un voisinage U de a tel que tout ensemble distingué passant par un point de $Y \cap U$ passe aussi par a. On peut supposer que $Y \cap U$ est connexe, car Y est une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On voit alors aisément que pour tout point b de $Y \cap U$ et tout objet E de $\mathcal{V}$, E est b-semi-stable (resp. b-stable) si et seulement si E a-semi-stable (resp. a-stable).

Puisque Y est défini par des équations linéaires à coefficients rationnels $Y \cap U$ contient des points à coordonnées rationnelles.

Ceci achève la démonstration de la partie (i) du Théorème 13. On vérifie aisément que a' satisfait aussi aux conditions de (ii).

Le Théorème 13 est donc démontré.

III.- QUELQUES RÉSULTATS DE LANGTON. LE THÉORÈME DE PROPRETÉ

(Langton [13], Mehta-Seshadri [15], III).

A.- Fibrés paraboliques sur une courbe projective lisse sur un corps non nécessairement algébriquement clos. Changement de base.

Soit X une courbe projective lisse sur un corps commutatif k. On appelle fibré vectoriel sur X un faisceau localement libre sur X, de rang fini. Si E est un fibré vectoriel sur X et x un point rationnel de X, on appelle fibre de E au-dessus de x le k-espace vectoriel $E_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k$ (qu'on note aussi quelquefois E_x).

On définit les fibrés (quasi-)paraboliques comme dans le Chapitre I, en prenant pour I un ensemble fini non vide de points de $X(k)$.

Soit K un corps commutatif extension de k. On note X_K la courbe projective lisse $X \times_k \mathrm{Spec}(K)$ sur K. On identifie de manière évidente I et un ensemble de points de $X_K(K)$. Si K' est une extension de K, on a $(X_K)_{K'} = X_{K'}$, et on note $i_{K,K'}$ le morphisme $X_{K'} \longrightarrow X_K$ induit par l'inclusion $K \subset K'$. Si E est un fibré vectoriel sur X, on note E_K le fibré vectoriel $i^*_{k,K}(E)$. Remarquons que $(E_K)_{K'} = E_{K'}$.

Si x est un point de I, on a

$$E_{Kx} = E_x \otimes_k K ,$$

donc une structure parabolique sur E induit une structure parabolique sur E_K . Si E est un fibré parabolique sur X , on note E_K le fibré parabolique qu'il définit sur X_K .

La notion de degré (parabolique) d'un fibré (parabolique) a un sens. On définit la (semi-)stabilité d'un fibré parabolique comme dans le chapitre I, et les résultats précédents sont valables sur X , sauf la partie d de la Proposition 9 ("si E est stable, E est simple").

PROPOSITION 17 : *On suppose que* k *est infini ou* K/k *algébrique. Soit* E *un fibré parabolique sur* X *. Alors* E_K *est semi-stable si et seulement si* E *l'est.*

Si E_K est semi-stable, il est évident que E est semi-stable.

Supposons réciproquement que E soit semi-stable.

Soit E' le sous-fibré parabolique semi-stable maximal de E_K . Il faut montrer que $E' = E_K$. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un sous-fibré parabolique F de E tel que $F_K = E'$: en effet, dans ce cas, on aura

$$\mathrm{par}\mu(E') = \mathrm{par}\mu(F) \leq \mathrm{par}\mu(E) = \mathrm{par}\mu(E_K) \quad ,$$

par semi-stabilité de E . On en déduit immédiatement que $E' = E_K$.

Soit z (resp. t) le point générique de X_K (resp. X) , $(e'_1,\ldots\ldots,e'_s)$ une base du $k(z)$-espace vectoriel $E'_z \subset E_{Kz} = E_t \otimes_k K$. On peut écrire

$$e'_i = \sum_j a_{ij}.e_{ij} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq s \quad ,$$

(avec a_{ij} dans K , e_{ij} dans E_t) . Soit K' le sous-corps de K engendré par k et les a_{ij} . On voit aisément qu'il existe un fibré parabolique F' sur $X_{K'}$, tel que $F'_K = E'$, et il suffit de montrer qu'il existe un fibré parabolique F sur X tel que $F_K = F'$. Puisque F' est le sous-fibré parabolique semi-stable maximal de $E_{K'}$, on s'est ramené au cas où K/k est une extension de degré de transcendance fini.

Soit $P(K/k)$ la propriété énoncée par la Proposition 17 , alors si K/k et K'/K sont des extensions, on a

$$P(K'/k) \Longrightarrow P(K/k) \quad \text{et} \quad (P(K/k) \text{ et } P(K'/k)) \Longrightarrow P(K'/k) \quad .$$

On est donc ramené à traiter les cas suivants :

(i) K/k est une extension galoisienne,

(ii) $K = k(u)$, u étant un élément de K tel que u^p soit dans K , $(p = \mathrm{car}(k))$,

(iii) $K = k(T)$.

(i) Soit G le groupe de Galois de K/k . Pour tout élément σ de G , soit σ_K l'automorphisme de X_K au-dessus de X induit par σ :

Soit $U = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de X . Alors, sur l'ouvert

$i^{-1}_{k,K}(U) = \mathrm{Spec}(A \otimes_k K)$ de X_K , σ_K est donné par l'automorphisme $I_A \otimes \sigma$ de $A \otimes_k K$.

On a un isomorphisme canonique $\sigma^*_K(E_K) \simeq E_K$:

Si sur U , E est donné par le A-module libre M , E_K est donné au dessus de $i^{-1}_{k,K}(U)$ par $M \otimes_k K$, et $\sigma^*_K(E_K)$ est donné au-dessus de $i^{-1}_{k,K}(U)$ par le $A \otimes_k K$-module libre N dont le groupe additif sous-jacent est $M \otimes_k K$, et la multiplication

$$(m,c) \longmapsto m \otimes \sigma(c) .$$

L'isomorphisme $E_K \longrightarrow \sigma^*_K(E_K)$ au-dessus de $i^{-1}_{k,K}(U)$ est défini par l'automorphisme de $A \otimes_k K$-modules

$$M \otimes_k K \longrightarrow N$$

$$m \otimes c \longrightarrow m \otimes \sigma(c) .$$

Par unicité de E' , on a $\sigma^*_K(E') = E'$, donc d'après Grothendieck ([6], p. 22) il existe un sous-fibré vectoriel F de E tel que $F_K = E'$. Si on munit F de sa structure parabolique canonique, l'égalité est encore valable. Ceci prouve (i) .

(ii) On appelle dérivation de $\mathcal{O}_{X_K}$ sur $\mathcal{O}_X$ un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules

$$D : \mathcal{O}_{X_K} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_K}$$

tel qu'en tout point x de X_K , et pour tous éléments y, y' de $\mathcal{O}_x$, on ait

$$D_x(y.y') = y.D_x(y') + y'.D_x(y) .$$

Une telle dérivation induit un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules

$$D' : E_K \longrightarrow E_K$$

de la façon suivante : en un point x de U , on a $E_{Kx} = M \otimes_A \mathcal{O}_x$, et

$$D'_x : M \otimes_A \mathcal{O}_x \longrightarrow M \otimes_A \mathcal{O}_x$$

$$m \otimes y \longrightarrow m \otimes D(y) .$$

On a, pour tous éléments e de E_{Kx} , a de $\mathcal{O}_x$;

$$D'_x(a.y) = a.D'_x(y) + D_x(a).y .$$

Soit $p : E_K \longrightarrow E_K/E'$ la projection, alors

$$p \circ D'|_{E'} : E' \longrightarrow E/E'$$

est un morphisme de $\mathcal{O}_{X_K}$-modules, comme on le voit aisément. Ce morphisme est nul (ceci découle de la démonstration de l'unicité de E') .
Donc E' est stable par D' . Par conséquent, d'après Grothendieck ([6]) , p. 23) il existe un sous-fibré vectoriel F de E tel que $F_K = E'$. Il faut évidemment munir ce fibré vectoriel de sa structure canonique de sous-fibré parabolique de E . Ceci prouve (ii).

(iii) Soit a un élément de k. Le $k(X)$-automorphisme f_a de $K(X) = k(X)(T)$ associant $T + a$ à T définit un automorphisme σ_a de X_K sur X, et comme dans (i) on a

$$\sigma_a^*(E_K) = E_K \quad \text{et} \quad \sigma_a^*(E') = E' .$$

Par conséquent E'_z est un sous-$K(X)$-espace vectoriel de $E_t \otimes_{k(X)} K(X)$ stable par $I_{E_t} \otimes f_a$. Il suffit de montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F_t de E_t tel que $F_t \otimes_{k(X)} K(X) = E'_z$. En effet, si F est le sous-fibré parabolique de E défini par F_t, on aura $F_K = E'$.

Pour tout a dans k, on pose

$$u_a = u_n.(T + a)^n + \dots + u_1.(T + a) + u_0 .$$

C'est un élément de E'_z, puisque E'_z est invariant par $I_{E_t} \otimes f_a$.

Le corps k étant infini, il existe des éléments $a_0,\dots,a_n$ de k tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} (T + a_0)^n & (T + a_0)^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ (T + a_n)^n & (T + a_n)^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

soit non nul.

Puisque $u_{a_0},\dots,u_{a_n}$ sont dans E'_z, on en déduit que pour $1 \leqq i \leqq n$ $u_i.T^i$ est un élément de E'_z, ainsi donc que u_i.

Ceci prouve (iii) et achève la démonstration de la Proposition 17.

<u>PROPOSITION 18</u> : *On suppose que* k *est algébriquement clos. Soit* E *un fibré parabolique et* K/k *une extension,* K *étant un corps commutatif algébriquement clos. Alors* E_K *est stable si et seulement si* E *l'est.*

Il est évident que E est stable si E_K l'est. Supposons réciproquement que E soit stable. Soit E_1 la somme des sous-fibrés paraboliques stables F de E_K tels que $\operatorname{par}\mu(F) = \operatorname{par}\mu(E_K)$. On peut, en raisonnant comme dans la Proposition 17, montrer qu'il existe un sous-fibré parabolique F de E tel que $F_K = E_1$: cependant on remarquera qu'on ne doit pas utiliser le cas (ii) de la Proposition 17, car il se peut que $\operatorname{Hom}(E_1, E_K/E_1) \neq 0$. On peut s'en dispenser en appliquant le résultat suivant : toute extension de degré de transcendance fini de k est séparablement engendrée. (voir par exemple [33], Vol.I, Thm. 31 p. 105). Le fibré parabolique étant stable, on en déduit que $F = E$, d'où $E_K = E_1$. Mais on montre aisément en utilisant la Proposition 9, que E_1 est une somme directe de fibrés stables, donc si E_K n'est pas stable, on a

$$\dim(\mathrm{End}'(E_K)) > 1 \quad ,$$

$\mathrm{End}'(E_K)$ désignant l'espace vectoriel des endormorphismes paraboliques de E_K. On note $\mathrm{End}(E_K)$ l'espace vectoriel des endomorphismes du fibré vectoriel sous-jacent à E_K, et on définit de même $\mathrm{End}(E)$ et $\mathrm{End}'(E)$.

Supposons qu'on puisse montrer que

$$\mathrm{End}(E_K) = \mathrm{End}(E) \otimes_k K \quad ,$$

on en déduit immédiatement que

$$\mathrm{End}'(E_K) = \mathrm{End}'(E) \otimes_k K \quad ,$$

et comme E est stable, et k algébriquement clos, on a

$$\dim(\mathrm{End}'(E_K)) = \dim(\mathrm{End}'(E)) = 1 \quad .$$

La Proposition 18 est donc une conséquence du

LEMME 19 : *Soit* K/k *une extension et* E *un fibré vectoriel sur* X. *Alors on a*

$$H^0(X_K, E_K) = H^0(X,E) \otimes_k K \quad .$$

On a $H^0(X_K,E_K) = H^0(X, i_{k,K}*(E_K)) = H^0(X, E \otimes_k K)$, et le Lemme 19 résulte aisément de ce que X est quasi-compact et de ce que

$$h^0(X,\mathcal{O}) = 1$$

Remarque : La proposition 18 suggère de nouvelles définitions :

On suppose k quelconque. On dira qu'un fibré parabolique E sur X est semi-stable (resp. stable) s'il existe une extension algébriquement close K de k telle que le fibré parabolique E_K sur X_K soit semi-stable (resp. stable). D'après la Proposition 18, c'est alors vrai pour toute extension algébriquement close de k.

Remarquons que la nouvelle notion de semi-stabilité est équivalente à la précédente. A priori il n'en est pas de même pour la stabilité.

B.- Familles de fibrés paraboliques

Soit r un entier tel que $r \geqq 2$.

Soit K un corps commutatif, W un k-espace vectoriel de dimension r, $k_1, \ldots, k_n$ des entiers strictement positifs tels que

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = r \quad .$$

On appelle *variété des drapeaux de type* (k_i) *de* W la variété algébrique projective $F(W)(k_i)$ dont les points sont les filtrations

$$W = W_1 \supset W_2 \ldots . W_n \supset W_{n+1} = \{0\}$$

de W par des sous-espaces vectoriels de W, telles que pour $1 \leq i \leq n$ on ait

$$\dim(W_i/W_{i+1}) = k_i \quad .$$

Soit Y un k-schéma noetherien, V un faisceau localement libre de rang r sur Y. On peut définir un Y-schéma propre noté $F(V)(k_i)$, représentant le foncteur associant à un Y-schéma $f : Z \longrightarrow Y$ l'ensemble des suites $(p_1, \ldots, p_n)$, où pour $1 \leq i \leq n$, $p_i : f^*(V) \longrightarrow V_i$ est un quotient localement libre de $f^*(V)$ tel que $\mathrm{Ker}(p_{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(p_i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $\mathrm{rg}(V_i) = k_1 + \ldots + k_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Si Y' est un k-schéma noetherien, et $g : Y' \longrightarrow Y$ un k-morphisme, on a un isomorphisme canonique

$$F(g^*(V))\,(k_i) = F(V)\,(k_i) \times_Y Y' \quad .$$

En particulier, pour tout point y de Y, on a

$$F(V)\,(k_i)_y = F(V_y)(k_i) \quad .$$

Dans tout ce qui suit, on se place sous les hypothèses du Chapitre I.

Soit $(k_{xi})_{x \in I\,,\ 1 \leq i \leq n_x}$ une suite d'entiers strictement positifs, telle que pour tout point x de I, on ait

$$\sum_{i=1}^{n_x} k_{xi} = r \quad .$$

Une *famille de fibrés quasi-paraboliques de suite de multiplicités* (k_{xi}) *paramétrée par un* k-*schéma noetherien* Y est la donnée d'un faisceau localement libre V de rang r sur $Y \times_k X$, et pour tout point x de I, d'une section de $F(V|_{Y \times \{x\}})\,((k_{xi})_{1 \leq i \leq n_x})$

Une *famille de fibrés paraboliques* s'obtient en ajoutant aux données précédentes celle de poids. On définit comme dans la première partie la notion d'*isomorphisme* de deux familles de fibrés paraboliques paramétrées par un même k-schéma noetherien.

Remarquons que si $Y = \mathrm{Spec}(K)$ (K étant une extension de k), ces définitions coïncident avec celles des fibrés (quasi-)paraboliques sur X_K.

Si Y' est un sous-schéma fermé (ou ouvert) de Y, une famille de fibrés (quasi-)paraboliques paramétrées par Y induit par restriction une famille de même nature paramétrée par Y', de même suite de multiplicités.

Si R est une k-algèbre commutative qui est un anneau de valuation discrète, et z le point générique de $\mathrm{Spec}(R)$, $\mathrm{Spec}(k(z))$ est un ouvert de $\mathrm{Spec}(R)$. Si E est un faisceau localement libre sur $\mathrm{Spec}(R) \times_k X$, toute famille de fibrés (quasi-)paraboliques paramétrée par $\mathrm{Spec}(k(z))$ de faisceau sous-jacent E se prolonge de manière unique en une famille de même nature paramétrée par $\mathrm{Spec}(R)$ de faisceau sous-jacent E .

C.- LE THÉORÈME DE PROPRETÉ

Soit R un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal engendré par π tel que $k \subset R$, avec $R/(\pi) = k$. On pose

$$X_R = X \times_k \mathrm{Spec}(R) \quad ,$$

c'est un schéma irréductible lisse sur $\mathrm{Spec}(R)$. Soit D le corps des fractions de R , z le point générique de X_R , t le point générique de X . Le morphisme $i : X_K \longrightarrow X_R$ découlant de l'inclusion $r \subset K$ est une immersion ouverte, car pour toute k-algèbre commutative A , on a

$$A \otimes_k K = (A \otimes_k R)_{1 \otimes \pi} .$$

Le morphisme $j : X \longrightarrow X_R$, découlant de la projection $R \longrightarrow k$ est une immersion fermée. On a de plus

$$X \cap X_K = \emptyset \quad \text{et} \quad X \cup X_K = X_R \quad .$$

On démontrera le

<u>THÉORÈME 20</u> : *Si* F *est un fibré parabolique semi-stable sur* X_K , *il existe une famille* E *de fibrés paraboliques paramétrée par* $\mathrm{Spec}(R)$ *telle que*

$$i^*(E) \simeq F$$

et que $j^*(E)$ *soit un fibré parabolique semi-stable sur* X .

(La définition des fibrés paraboliques $i^*(E)$ et $j^*(E)$ est évidente). Pour une démonstration, voir Mehta-Seshadri [15] .

IV.- LES ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS PARABOLIQUES (SEMI)-STABLES

Soient r et d des entiers, avec $r \geq 2$.

Soit $a = (a_{xi})_{x \in I, 1 \leq i \leq n_x}$ une suite de nombres réels telle que pour tout point x de I on ait

$$0 \leq a_{x1} < \dots . < a_{xn_x} < 1 \quad ,$$

$\chi = (k_{xi})_{x \in I, 1 \leq i \leq n_x}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que pour tout point x de I on ait

$$\sum_{i=1}^{n_x} k_{xi} = r \quad .$$

On note $S(\chi, a, d)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés paraboliques semi-stables de rang r, de degré d, de poids a et de suite de multiplicités χ . On note $S'(\chi,a,d)$ le sous-ensemble de $S(\chi,a,d)$ constitué des classes d'isomorphisme de fibrés paraboliques stables. Pour étudier $S(\chi,a,d)$ et $S'(\chi,a,d)$, on peut supposer que d est aussi grand qu'on le veut, que les a_{xi} sont rationnels et que le degré parabolique d'un fibré parabolique dont la classe d'isomorphisme est un élément de $S(\chi,a,d)$ est 0 . En fait ces assertions doivent être démontrées une fois construits les espaces de modules, on laissera ces vérifications au lecteur.

A.- Espaces de modules grossiers

DÉFINITION 21 : Soit T un k-schéma noetherien. On appelle *famille d'éléments de* $S'(\chi,a,d)$ *paramétrée par* T une famille (E,s) de fibrés paraboliques paramétrée par T telle que pour tout point t de T , la restriction E_t de (E,s) à $X_{\overline{k(t)}}$ soit un fibré parabolique stable ($\overline{k(t)}$ désignant la clôture algébrique de k(t)) .

Soit F le foncteur k-Sch$\longrightarrow$Ens associant à un k-schéma noetherien Y l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles de fibrés paraboliques de suite de multiplicités χ , de poids a et de degré parabolique d .

DÉFINITION 22 : Un *espace de modules grossier* pour $S'(\chi,a,d)$ est un morphisme de foncteurs k-Sch$\longrightarrow$Ens

$$\Psi : F \longrightarrow \mathrm{Mor}(\ ,Y_0) \ ,$$

Y_0 étant un k-schéma noetherien, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\Psi(*) : F(*) \longrightarrow Y_0(k)$ est une bijection

(avec $* = \mathrm{Spec}(k)$, donc $F(*) = S'(\chi,a,d)$) .

(ii) Pour tout morphisme de foncteurs,

$\Psi_1 : F \longrightarrow \mathrm{Mor}(\ ,Y_1)$,

Y_1 étant un k-schéma noetherien, il existe un unique morphisme

$f : Y_0 \longrightarrow Y_1$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Mor}(\ ,Y_0) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(\ ,f)"] \\ F \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{Mor}(\ ,Y_1) \end{tikzcd}$$

On définira dans un cas particulier la notion de bon espace de modules pour $S'(\chi,a,d)$ (voir C) .

On prouvera le

<u>THÉORÈME 23</u> : *Il existe un espace de modules grossier* $U_s(\chi,a,d)$ *pour* $S'(\chi,a,d)$, *qui est une variété quasi-projective lisse.*

De plus, $U_s(\chi,a,d)$ *possède une compacification naturelle, notée* $U(\chi,a,d)$.

On peut décrire l'ensemble sous-jacent à $U(\chi,a,d)$. C'est le quotient de $S(\chi,a,d)$ par la relation d'équivalence suivante : pour tout couple (E,F) de fibrés paraboliques dont les classes d'isomorphisme sont des éléments de $S(\chi,a,d)$, E et F sont équivalents si et seulement si $Gr(E) = Gr(F)$.

On démontrera dans VI que $S'(\chi,a,d) \neq \emptyset$. En admettant ceci, on peut montrer que

$$\dim(U(\chi,a,c)) = r^2.(g-1) + 1 + \sum_{x \in I} \dim(F((k_{xi})_{1\leq i\leq n_x}))$$

B.- <u>Démonstration du Théorème 23</u>

On démontre d'abord le résultat suivant, analogue au Lemme I.20.

<u>LEMME 24</u> : *Si* d *est assez grand, pour tout fibré parabolique* E *dont la classe d'isomorphisme est dans* $S(\chi,a,d)$, *on a*

(i) *Le fibré vectoriel sous-jacent à* E *est engendré par ses sections globales.*

(ii) $h^1(X,E) = 0$.

Dans tout ce qui suit, on choisit d comme dans le Lemme 24.

Les fibrés paraboliques sont la classe d'isomorphisme est un élément de $S(\chi,a,d)$ ont le même polynôme de Hilbert P , et leurs espaces de sections globales ont la même dimension p .

On note Q le schéma de Hilbert correspondant à P et $\mathcal{O}\otimes k^p$ (voir I.III.A) . Soit $\mathcal{U}$ le faisceau canonique sur $Q \times_k X$, R l'ouvert de Q caractérisé par le fait que pour tout point fermé q de R , la restriction $\mathcal{U}_q$ de U à $\{q\}\times X$ est un fibré vectoriel et l'application canonique

$$k^p \longrightarrow H^0(X,\mathcal{U}_q)$$

est un isomorphisme. On sait que R est une variété algébrique lisse irréductible de dimension $r^2.(g-1) + p^2$. On note $\mathcal{V}$ la restriction de $\mathcal{U}$ à $R \times X$.

Soit $\tilde{R}$ la sous-variété fermée de

$$\prod_{x \in I} F(\mathcal{V}_{R\times\{x\}})((k_{xi})_{1 \leq i \leq n_x})$$

constitué des points $(c_x)_{x\in I}$ tels que pour tout couple (x,x') de points de I , la projection de x sur R soit égale à la projection de x' sur R .

On note

$$\pi : \tilde{R} \longrightarrow R$$

la projection canonique. Remarquons que R est une variété irréductible lisse de dimension

$$r^2.(g-1) + p^2 + \sum_{x\in I} F(\mathcal{V})|_{R\times\{x\}})(k_{xi})_{1\leq i\leq n_x}) \quad .$$

Remarquons que chaque point fermé q de $\tilde{R}$ définit une structure parabolique sur le fibré vectoriel $\mathcal{U}_{\pi(q)}$ sur X . On notera $\mathcal{U}_q$ ce fibré parabolique.

On démontre aisément que $\tilde{R}$, muni de la famille de fibrés paraboliques évidente dont le faisceau sous-jacent est $\pi^*(\mathcal{V})$, possède une propriété universelle locale analogue à celle qui est énoncée dans la Proposition I.21.

Soit $\tilde{R}^{ss}$ (resp. $\tilde{R}^s$) l'ensemble des points q de $\tilde{R}$ tels que $\mathcal{U}_q$ soit un fibré parabolique semi-stable (resp. stable).

Le groupe $PGL(p)$ agit sur $\tilde{R}$ et on peut comme dans la Proposition I.22, préciser l'action de $PGL(p)$ sur $\tilde{R}$:

PROPOSITION 25 : (i) *Pour tout couple* (q_1,q_2) *de points fermés de* $\tilde{R}$, *les fibrés paraboliques* $\mathcal{U}_{q_1}$ *et* $\mathcal{U}_{q_2}$ *sont isomorphes si et seulement si* q_1 *et* q_2 *sont dans la même orbite de l'action de* $PGL(p)$ *sur* $\tilde{R}$.
(ii) *Pour tout point fermé* q *de* $\tilde{R}$, *le stabilisateur de* q *sous l'action de* $PGL(p)$ *est isomorphe au quotient* $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q)/k^*.I$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_q)$ *désignant le groupe des automorphismes paraboliques de* $\mathcal{U}_q$.

Pour obtenir $U_s(\chi,a,d)$, il faudrait "quotienter" $\tilde{R}^s$ par $PGL(p)$. Comme pour le cas des fibrés vectoriels, il faut utiliser une variété auxiliaire.

Soit N un entier strictement positif . Pour tout point x de I , et tout entier i tel que $2 \leqq i \leqq n_x$, soit

$$t_{xi} = \sum_{j=1}^{i-1} k_{xi} \quad , \quad t_{x1} = r \quad .$$

On pose

$$Z = H^N_{p,r} \times \prod_{x\in I} \prod_{i=1}^{n_x} H_{p,t_{xi}} \quad .$$

Le groupe $SL(p)$ agit de façon évidente sur Z .
On utilise maintenant des résultats du chapitre III de la première partie. De la Proposition I.25 on déduit le

THÉORÈME 26 : *Soit* $e = (k^p/E_1,\dots,k^p/E_N,(k^p/E_{xi})_{x\in I,1\leqq i\leqq n_x})$ *un élément de* Z . *Pour tout sous-espace vectoriel* V *de* k^p , *on note* V_j *(resp.* V_{xi}*) l'image de* V *dans* k^p/E_j *(resp.* k^p/E_{xi}*)* . *Alors le point* e *de* Z *est semi-stable (resp. stable) pour la linéarisation de l'action de* $SL(p)$ *définie par une suite* $(b_1,\dots,b_N,(b_{xi})_{x\in I,1\leqq i\leqq n_x})$ *d'entiers, si et* *seulement si on a, pour tout sous-espace vectoriel non trivial* F *de* k^p

$$\dim(F).(r.\sum_{j=1}^{N} b_j + \sum_{x\in I}\sum_{i=1} b_{xi}.t_{xi})$$

$$\leqq \quad p.(\sum_{j=1}^{N} b_j.\dim(F_j) + \sum_{x\in I}\sum_{i=1} b_{xi}.\dim(F_{xi})) \quad ,$$

(*resp.* <).

Dans ce qui suit, on considère une linéarisation de l'action de $SL(p)$ sur Z définie par la suite

$$(1,\dots,1,(\varepsilon.(1 - a_{xn_x}),\varepsilon.(a_{x2} - a_{x1}),\dots,\varepsilon.(a_{xn_x} - a_{xn_x-1}))_{x\in I}) \quad ,$$

ε étant un nombre rationnel strictement positif. Soient $x_1,\dots x_N$ des points de X , distincts de ceux de I . On considère le morphisme

$$\tau : R \longrightarrow Z$$
$$q \longmapsto ((\mathcal{U}_q)_{x_1},\dots(\mathcal{U}_q)_{x_{n_x}},(F_i(\mathcal{U}_q)_x)_{x\in I, 1\leqq i\leqq n_x}) \quad .$$

Le résultat suivant généralise une partie du Théorème I.31.

THÉORÈME 27 : *On peut choisir l'entier* N , *le rationnel* ε *de manière que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(i) τ *est injectif*

((ii) $\tau^{-1}(Z^{ss}) = \tilde{R}^{ss}$

(iii) $\tau^{-1}(Z^{s}) = \tilde{R}^{s}$

(Voir Mehta-Seshadri [15] Prop. 4.2).

On en déduit que $\tilde{R}^{ss}$ et $\tilde{R}^{s}$ sont des ouverts de R , et possèdent une propriété universelle locale évidente.

Notons que l'assertion (iv) du Théorème I.31 ("τ est une immersion fermée") ne semble pas généralisable. Cette partie du Théorème I.31 était indispensable à la construction des variétés de modules de fibrés vectoriels stables. On utilisera pour s'en dispenser dans le cas des fibrés paraboliques le Théorème 20 ("Théorème de propreté").

Soit $Y = Z^{ss}/SL(p)$. C'est une variété projective, d'après le Théorème I.25. Soit M l'image de $\tilde{R}^{ss}$ dans Y .

PROPOSITION 28 : *L'image* M *de* $\tilde{R}^{ss}$ *est une sous-variété fermée de* Y .

Il suffit de montrer que tout morphisme $f : \mathrm{Spec}(k((T))) \longrightarrow M$ se prolonge en un morphisme $\mathrm{Spec}(k[[T]]) \longrightarrow M$.

Soit z l'unique point de $\mathrm{Spec}(k((T)))$. Alors il existe un point q de R^{ss} (non nécessairement fermé) tel que $\tau(q) = f(z)$. Le fibré parabolique $\mathcal{U}_q$ est semi-stable d'après le Théorème 27. On déduit du Théorème 20 qu'il existe une famille E de fibrés paraboliques paramétrée par $\mathrm{Spec}(k[[T]])$, telle que $E|_{X_{k((T))}} \simeq \mathcal{U}_q$, et que le fibré parabolique $E|_X$ soit semi-stable.

D'autre part,

$$h^0(X_{k((T))}, E|_{X_{k((T))}}) = h^0(X_{\overline{k((T))}}, i^*_{k((T)),\overline{k((T))}} E|_{X_{k((T))}})$$
$$= p \;,$$

d'après les Lemmes 19 et 24, et

$$h^0(X, E|_X) = p \;,$$

donc

$$H^0(X_{k[[T]]}, E) \simeq k[[T]]^p \;,$$

et E est engendré par ses sections globales. On en déduit un morphisme

$$\mathrm{Spec}(k[[T]]) \longrightarrow \tilde{R}$$

et en utilisant le fait que $\tilde{R}^{ss}$ est un ouvert de $\tilde{R}$, on voit que ce morphisme est à valeurs dans $\tilde{R}^{ss}$. En le composant avec le morphisme $\tilde{R}^{ss} \longrightarrow Y$, on obtient le prolongement souhaité de f .

Ceci prouve la Proposition 28.

Soit $\tilde{M}$ la normalisation de M , le morphisme $\tilde{R}^{ss} \longrightarrow M$ se factorise par un morphisme

$$\rho : \tilde{R}^{ss} \longrightarrow \tilde{M} \;,$$

(car $\tilde{R}^{ss}$ est lisse) qui est surjectif.

On va montrer que $\tilde{M}$ est la variété $U(\chi,a,d)$ souhaitée. On procède comme dans la démonstration du Théorème I.17. On démontre d'abord le résultat suivant, analogue de la Proposition I-32.

<u>PROPOSITION 29</u> : *Soient* q,q' *des points fermés de* $\tilde{R}^{ss}$. *Alors on a* $\mathrm{Gr}(\mathcal{U}_q) = \mathrm{Gr}(\mathcal{U}_{q'})$ *si et seulement si on a*

$$\overline{\mathrm{PGL}(p).q} \cap \overline{\mathrm{PGL}(p).q'} \neq \emptyset \;.$$

La seule étape restante de la démonstration du Théorème 23 qui n'est pas analogue à ce qu'on a vu dans la première partie est la

<u>PROPOSITION 30</u> : *Si* C_1 *et* C_2 *sont deux sous-ensembles fermés disjoints* $\mathrm{PGL}(p)$*-invariants de* $\tilde{R}^{ss}$, *leurs images dans* $\tilde{M}$ *sont disjointes.*

Soit $F(\chi,a,d)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés paraboliques de rang r, de degré d, de poids a et de suite de multiplicités χ .

Soit x_0 un point de $X\backslash I$. Pour tout fibré parabolique E dont la classe d'isomorphisme est dans $F(\chi,a,d)$, on peut définir une autre structure parabolique E' sur le fibré vectoriel sous-jacent à E , en considérant la structure parabolique concentrée en I de E, à laquelle on adjoint en x_0

n'importe quel drapeau complet

$$E_{x_0} = F_1(E)_{x_0} \supset F_2(E)_{x_0} \supset \ldots . \supset F_{r-1}(E)_{x_0} \quad ,$$

avec des poids fixés $b_1, \ldots, b_{r-1}$.

On peut choisir les b_i assez petits pour que les propriétés suivantes soient vérifiées, pour tout fibré parabolique E dont la classe d'isomorphisme est dans $F(\chi,a,d)$ et tout fibré parabolique E' obtenu comme plus haut à partir de E :

(i) Si E' est semi-stable, E' est stable.

(ii) Si E' est semi-stable, E est semi-stable.

(iii) Si E est stable, E' est stable.

On considère le schéma de Hilbert Q' , la variété $\tilde{R}'^s$, le faisceau U' sur $Q' \times_k X$ ainsi que la variété M' qui est un quotient géométrique de $\tilde{R}'^s$ par $PGL(p)$, correspondant aux fibrés paraboliques E' .

Pour tout point t de $\tilde{R}'^s$, il existe un voisinage U de t et un morphisme $f : U \longrightarrow \tilde{R}^{ss}$, unique à $PGL(p)$-translation près, tel que pour tout point fermé q de U , le fibré parabolique $\mathcal{U}'_{f(q)}$ soit isomorphe au fibré parabolique obtenu en privant U_q de sa structure parabolique en x_0 (f est un morphisme "d'oubli"). L'existence de f découle de la propriété universelle locale de $\tilde{R}^{ss}$.

Supposons que $\rho(C_1) \cap \rho(C_2) \neq \emptyset$, et soit x un élément de cette intersection. La réunion des images inverses de C_1 (resp. C_2) par les morphismes locaux précédents est une sous-variété fermée D_1 (resp. D_2) de $\tilde{R}'^s$, et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. On note ρ' la projection $\tilde{R}'^s \longrightarrow \tilde{M}'$. Puisque M' est un quotient géométrique de R'^s par $PGL(p)$, on a $\rho'(D_1) \cap \rho'(D_2) \neq \emptyset$.

Les morphismes locaux précédents se recollent pour donner un morphisme

$$\Psi : \tilde{M}' \longrightarrow \tilde{M} \ .$$

Alors en admettant l'existence de fibrés paraboliques stables, qui sera prouvée dans VI, on voit que génériquement les fibres de Ψ sont des variétés de drapeaux et sont donc connexes. Par conséquent toutes les fibres de Ψ sont connexes. On a donc, puisque

$$\Psi^{-1}(x) \subset \rho'(D_1) \cup \rho'(D_2) \quad ,$$

et que $\Psi^{-1}(x)$ rencontre $\rho'(D_1)$ et $\rho'(D_2)$,

$$\Psi^{-1}(x) \subset \rho'(D_1) \cap \rho'(D_2) \quad ,$$

ce qui est absurde.

Ceci prouve la Proposition 30 et achève la démonstration du Théorème 23.

Notons qu'en démontrant le Théorème 23, on a obtenu la

<u>PROPOSITION 31</u> : *La variété* $U(\chi,a,d)$ *est normale.*

C.- Bons espaces de modules

Le principal résultat de C est analogue au Théorème I.18, et la démonstration ainsi que la généralisation en sont laissées au lecteur.

On suppose que I est réduit à un point x_0 , et $\chi = (1,r-1)$. Autrement dit, on considère des fibrés vectoriels E sur X , on spécifie des hyperplans de E_{x_0} , et on se donne des poids (a_1,a_2) .

On suppose que a_1 et a_2 sont choisis assez petits pour que la propriété suivante soit vérifiée : tout fibré parabolique semi-stable dont la classe d'isomorphisme est dans $F(\chi,a,d)$ est stable.

On appelle famille rigidifiée dans $S(\chi,a,d)$ paramétrée par un k-schéma noetherien T la donnée d'un faisceau localement libre E sur $T\times_k X$ et d'une section s de $E|_{T\times\{x_0\}}$ ne s'annulant pas tels que pour tout point t de T le fibré parabolique sur $X_{\overline{k(t)}}$ défini par E et s soit stable. On définit de manière évidente la notion de morphisme de familles rigidifiées paramétrées par T , ainsi que, pour tout morphisme de k-schémas noetheriens $g : Y \longrightarrow T$, la famille rigidifiée $g^*(E,s)$ dans $S(\chi,a,d)$ paramétrée par Y .

Soit $E : Sch \longrightarrow Ens$ le foncteur contravariant associant à un k-schéma noetherien l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles dans $S(\chi,a,d)$ paramétrées par T .

Alors on a le

THÉORÈME 32 : *La variété* $U(\chi,a,d)$ *représente le foncteur* E .

V.- LE CAS COMPLEXE

Dans cette partie on supposera que $k = \mathbb{C}$.

Soit H le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$, c'est à dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $Im(z) > 0$.

Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de $SL(2,\mathbb{R})$, et z un point de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, on pose

$$g(z) = \frac{a.z + b}{c.z + d} .$$

On a

$$Im(g(z)) = \frac{Im(z)}{|c.z + d|^2} ,$$

donc $g(H) \subset H$. On définit ainsi une action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur H .

L'élément $-I$ de $SL(2,\mathbb{R})$ agit trivialement sur H , on peut donc considérer que c'est $PSL(2,\mathbb{R})$ qui opère sur H .

Soit G un sous-groupe discret de $PSL(2,\mathbb{R})$, tel que H mod.G soit de mesure finie et que G agisse librement sur H .

On appelle point parabolique de G un élément c de $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ tel qu'il existe un élément g de $G\setminus\{-I,i\}$ tel que $g(c) = c$. On note H^+ la réunion de H et de l'ensemble des points paraboliques de G . Pour tout élément g de G , on a $g(H^+) \subset H^+$, on peut donc considérer que G opère sur H^+ . Alors $X = H^+$ mod.G peut être muni d'une structure naturelle de surface de Riemann compacte, et $Y = H$ mod.G est un ouvert de X . De plus $X\setminus Y$ est fini.

On note π la surjection canonique $H^+ \longrightarrow X$.

Soit E un espace hermitien de dimension finie et

$$\rho : G \longrightarrow \mathbb{U}(E)$$

une représentation unitaire de G . Cette représentation induit une action linéaire de G sur le fibré vectoriel $H^+ \times E$, par

$$g.(z,e) = (g(z),\rho(g).e) \quad ,$$

pour tous éléments g,z et e de G,H^+ et E respectivement.

On note V_ρ le fibré vectoriel holomorphe $(H \times E)/G$ sur Y .

Le faisceau analytique sous-jacent est le suivant : pour tout ouvert U de Y $\underline{V}_\rho(U)$ est l'ensemble des sections holomorphes G-invariantes de $(H \times E)|\,\pi^{-1}(U)$.

La représentation ρ définit aussi un fibré vectoriel sur X , qu'on va munir d'une structure holomorphe naturelle. On le notera aussi V_ρ (bien sûr sa restriction à Y est le fibré V_ρ précédent) .

Soit z_0 un point parabolique de G . On peut supposer que $z_0 = \infty$, en considérant un automorphisme intérieur de G . Il existe un voisinage V de $\pi(z_0)$ tel que $V\setminus\{\pi(z_0)\}$ puisse être identifié à U/G_∞ , avec $U = \{x + i.y \ , \ y > c\}$, c étant un nombre réel strictement positif, G_∞ un sous-groupe de G engendré par

$$A : z \longmapsto z + a \quad ,$$

a étant un nombre réel strictement positif.

Soit W^+ un ouvert G-invariant de H^+ , on pose $W = H \cap W^+$. Soit $f : W \longrightarrow E$ une section holomorphe G-invariante de $W \times E$. On dit que f est une *section holomorphe G-invariante de* $W^+ \times E$ si pour tout point parabolique z_0 de G comme plus haut, f est bornée sur $U \cap W$.

Plus précisément, il existe une base $(e_1,\dots\dots,e_r)$ de E telle que la matrice de $\rho(A)$ dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} e^{2.i.\pi.c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{2.i.\pi.c_r} \end{pmatrix} ,$$

avec $0 \leqq c_1 \leqq \ldots . \leqq c_r < 1$.

Soit $f(z) = (f_j(z))_{1 \leqq j \leqq r}$ la décomposition de f dans la base précédente. La G_∞ -invariance de f s'exprime par :

$$f(z+a) = e^{2.i.\pi.c_j}.f_j(z) \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq r \quad .$$

Donc

$$f(z) = e^{2.i.\pi.\frac{c_j}{a}.z} . g_j(\pi(z)) \quad ,$$

g_j étant une fonction holomorphe sur $(\pi(W) \cap V) \setminus z_0$.

Alors f est bornée sur U si et seulement si g l'est sur $(\pi(W) \cap V) \setminus \{z_0\}$ c'est à dire si et seulement si g se prolonge en une fonction holomorphe sur $V \cap \pi(W^+)$.

On peut maintenant définir le faisceau des sections du fibré vectoriel holomorphe V_ρ sur X : pour tout ouvert U de X , $\underline{V}_\rho(U)$ est l'ensemble des sections holomorphes G-invariantes de $\pi^{-1}(U) \times E$.

On note E_ρ le sous-espace vectoriel de E constitué des éléments G-invariants. Tout élément de E_ρ définit de manière évidente une section de V_ρ . On a donc une application linéaire injective

$$E_\rho \longrightarrow H^0(X,V_\rho) \quad .$$

Le résultat suivant est analogue à la Proposition I.37.

<u>PROPOSITION 33</u> : *l'application canonique*

$$E_\rho \longrightarrow H^0(X,V_\rho)$$

est un isomorphisme.

Il existe une structure parabolique canonique sur V_ρ , concentrée en $X \setminus Y$. Soit z_0 un point de $X \setminus Y$. Avec les notations précédentes, on pose

$$a_{z_0 1} = c_1 = c_2 = \ldots . = c_{k_{z_0 1}} ,$$

$$a_{z_0 2} = c_{k_{z_0 1}+1} = \ldots . = c_{k_{z_0 1}+k_{z_0 2}} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{z_0 n_{z_0}} = c_{k_{z_0 1}+\ldots .+k_{z_0 n_{z_0}-1}} = \ldots . = c_{k_{z_0 1}+k_{z_0 n_{z_0}}} ,$$

ce sont les valeurs distinctes des c_j . On pose $k_0 = 0$. Pour $1 \leqq j \leqq n_{z_0}$, on note $F_j(V\rho)_{z_0}$ le sous-espace vectoriel de $V\rho_{z_0}$ engendré par les e_l avec

$$\sum_{m=0}^{j-1} k_{z_0 m} + 1 \leqq l \leqq r \quad .$$

On associe à $F_j(V\rho)_{z_0}$ le poids $a_{z_0 j}$. On définit ainsi un fibré parabolique qu'on notera aussi V_ρ .

Soient ρ_1, ρ_2 des représentations unitaires de G . Il existe une inclusion évidente

$$\mathrm{Hom}(\rho_1,\rho_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_{\rho_1}, V_{\rho_2})$$

($\mathrm{Hom}(V_{\rho_1}, V_{\rho_2})$ désignant l'espace vectoriel des morphismes de fibrés paraboliques $V_{\rho_1} \longrightarrow V_{\rho_2}$) .

Le résultat suivant est analogue au Corollaire I.38.

PROPOSITION 34 : *L'application* ρ *est un isomorphisme.*

La proposition suivante se démontre comme la Proposition I.33.

PROPOSITION 35 : *Soit* ρ *une représentation unitaire de* G . *Alors on a*

$$\mathrm{pardeg}(V_\rho) = 0 \quad .$$

Et enfin, on peut généraliser le Théorème I.39.

THÉORÈME 36 (Seshadri) : a.- *Soit* ρ *une représentation unitaire de* G . *Alors le fibré parabolique* V_ρ *est semi-stable. Il est stable si et seulement si* ρ *est irréductible.*
b.- *Soit* E *un fibré parabolique stable sur* X , *de structure parabolique concentrée en* $X\setminus Y$. *Alors il existe une représentation unitaire* ρ *de* G *telle que les fibrés paraboliques* V_ρ *et* E *soient isomorphes.*

On laisse au lecteur le soin d'exprimer en termes de représentations unitaires les notions de sous-fibré parabolique et de fibré parabolique quotient.

Soit X' une surface de Riemann compacte de genre $g \geqq 2$, et $\{x_1,\dots,x_N\}$ des points distincts de X' . On s'intéresse aux fibrés paraboliques sur X' de structure parabolique concentrée en $\{x_1,\dots,x_N\}$. On peut montrer qu'il existe un sous-groupe G de $PSL(2,\mathbb{R})$ comme précédemment tel que

$$X \simeq X' \quad \text{et} \quad X\setminus Y = \{x_1,\dots,x_N\} \quad .$$

On peut donner une description de G : c'est un groupe à $2g + 1$ générateurs $X_1,Y_1,\dots,X_g,Y_g,Z_1,\dots,Z_N$ avec une relation

$$X_1.Y_1.X_1^{-1}.\,Y_1^{-1} \dots X_g.Y_g.X_g^{-1}.Y_g^{-1}.Z_1 \dots Z_N = e \quad .$$

D'après le Théorème 36, la recherche de fibrés paraboliques stables de degré parabolique 0 et de structure parabolique concentrée en $\{x_1,\ldots\ldots,x_N\}$ se ramène à la recherche de certaines représentations unitaires irréductibles de G . Ceci permet de démontrer le

THÉORÈME 37 : *Si* $k = \mathbb{C}$, $S'(\chi,a,d) \neq \emptyset$.

VI.- L'EXISTENCE DES FIBRÉS PARABOLIQUES

On démontre ici une généralisation du Théorème 37 :

THÉORÈME 38 : *Pour tout corps commutatif algébriquement clos* k *, on a* $S'(\chi,a,d) \neq \emptyset$.

(Esquisse de démonstration).

On peut d'abord montrer que c'est vrai si k est de caractéristique 0 , en utilisant le Théorème 37. Il reste à le montrer en caractéristique non nulle.

Soit A un anneau de valuation discrète complet de caractéristique 0 , de corps résiduel k , et de corps des fractions K . On définit comme précédemment les fibrés paraboliques semi-stables sur X_A , de rang r , de poids a , de suite de multiplicités χ , et de degré d . On peut à l'aide d'un analogue du Lemme 24 , utiliser le Spec(A)-schéma Q_A , et l'ouvert R_A de Q_A (analogues de Q et R) . De même on définit ensuite R_A, R_A^s et R_A^{ss} . On a aussi la variété Z_A, et le morphisme

$$\tau_A : R_A^{ss} \longrightarrow Z_A \quad .$$

Soit M_A l'image de R_A^{ss} dans Z_A/G . On peut voir aisément en utilisant le Théorème de propreté que le morphisme canonique

$$R_A^{ss} \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

est surjectif, et donc aussi le morphisme canonique

$$M_A \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \quad .$$

Comme M est intègre, M_A est plat sur Spec(A), et donc ses fibres sont équidimensionnelles. On en déduit que les dimensions des variétés $U(\chi,a,d)$ pour les corps k et K sont les mêmes.

Il reste à minorer la dimension de la sous-variété de $U(\chi,a,d)$ correspondant aux fibrés paraboliques non stables pour montrer que $S'(\chi,a,d)$ est non vide.

QUATRIÈME PARTIE : STRUCTURES DE NIVEAU

INTRODUCTION

On étudie ici les faisceaux cohérents F munis de structures de niveau, c'est à dire d'un morphisme non nul

$$f : F \longrightarrow rg(F).\mathcal{O}_D \quad ,$$

D étant un sous-schéma fini de X . On peut construire des variétés de modules pour de tels objets, et c'est pour qu'elles soient complètes qu'on ne se limite pas à des fibrés vectoriels.

Dans le chapitre I on donne la définition des structures de niveau (semi-) stables.

Dans le chapitre II on précise les propriétés requises d'une variété de modules de structures de niveau.

Dans le chapitre III on construit les variétés de modules de structures de niveau.

I.- FAISCEAUX COHÉRENTS AVEC STRUCTURES DE NIVEAU. DÉFINITIONS.

Soit F un faisceau cohérent sur X .

Soit D un sous-schéma fermé de X de dimension 0, qui est fixé dans tout ce qui suit.

On pose

$$\delta = h^0(X,\mathcal{O}_D) \quad .$$

DÉFINITION 1 : Une *structure de niveau sur* F est un morphisme non nul de faisceaux

$$f : F \longrightarrow rg(F).\mathcal{O}_D \quad .$$

On dira que deux structures de niveau f , f' sur F sont *équivalentes* s'il existe un automorphisme ρ de F tel que $f \circ \rho = f'$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, "f"] & \\ & rg(F).\mathcal{O}_D \\ F \arrow[uu, "\rho"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

En particulier, pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, f et $\lambda.f$ définissent des structures de niveau équivalentes.

On appellera *structures de niveau* (F,f) la donnée de F et de f comme précédemment, et on définit de manière évidente les morphismes de structures de niveau.

Pour tout faisceau cohérent F sur X, on note $T(F)$ le sous-faisceau de torsion de F.

DÉFINITION 2 : On dit qu'une structure de niveau (F,f) est *semi-stable* (resp. *stable*) si elle a les propriétés suivantes :

(i) Pour tout sous-faisceau L de F, de rang ≥ 1, tel que F/L soit sans torsion de rang ≥ 1, on a

$$\frac{\deg(L)}{\mathrm{rg}(L)} \leq \frac{\deg(F)}{\mathrm{rg}(F)} + \delta.\frac{\mathrm{rg}(F)-\mathrm{rg}(L)}{\mathrm{rg}(F).\mathrm{rg}(L)} \qquad (\text{resp. } <) .$$

(ii) $$l(F/\mathrm{Ker}(f)) \geq \delta \quad (\text{resp. } >) .$$

(iii) Pour tout sous-faisceau L de F de rang ≥ 1 tel que F/L soit sans torsion de rang ≥ 1, on a

$$\frac{\deg(\mathrm{Ker}(f|_L))}{\mathrm{rg}(L)} \leq \frac{\deg(F)}{\mathrm{rg}(F)} - \frac{\delta}{\mathrm{rg}(F)} \qquad (\text{resp. } <) .$$

(iv) $$l(T(F)) \leq \delta \qquad (\text{resp. } <).$$

(v) Le morphisme

$$f|_{T(F)} : T(F) \longrightarrow \mathrm{rg}(F).\mathcal{O}_D$$

est injectif.

REMARQUES : 1 - Soit $\Psi : \mathrm{rg}(F).\mathcal{O}_D \simeq \mathrm{rg}(F).\mathcal{O}_D$ un isomorphisme. Alors une structure de niveau (F,f) est (semi-)stable si et seulement si $(F, \Psi\circ f)$ l'est.

2 - Pour tout entier m, on a un isomorphisme

$$r.\mathcal{O}_D \simeq r.\mathcal{O}_D(m) \quad ,$$

donc une structure de niveau (F,f) en définit une $(F(m),f')$ et (F,f) est (semi-)stable si et seulement si $(F(m),f')$ l'est.

II.- ESPACES DE MODULES DE FAISCEAUX COHÉRENTS AVEC STRUCTURES DE NIVEAU

Soient r, d des entiers, avec $r \geq 2$.

DÉFINITION 3 : On appelle *famille de structures de niveau* paramétrée par un k-schéma noetherien T la donnée de

(i) Un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur $T \times X$, plat sur T, tel que pour point t de T, le faisceau $\mathcal{G}_t$ sur $(X_t)_{\overline{k(t)}}$ soit de rang r et de degré d.

(ii) Un morphisme de faisceaux sur $T \times X$

$$f : \mathcal{G} \longrightarrow p_X^*(r.\mathcal{O}_D) \quad ,$$

avec $p_X : T \times X \longrightarrow X$, tel que pour tout point t de T , f_t soit non nul.

Deux telles familles $(\mathcal{G},f)$, $(\mathcal{G}',f')$ paramétrées par T sont dites *équivalentes*, ou isomorphes, si pour tout point t de T , il existe un voisinage T_1 de t et un isomorphisme

$$\rho : \mathcal{G}'|_{T_1} \simeq \mathcal{G}|_{T_1}$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}'|_{T_1} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\rho"'] & p_X^*(r.\mathcal{O}_D) \arrow[d, equal] \\ \mathcal{G}|_{T_1} \arrow[r, "f"] & p_X^*(r.\mathcal{O}_D) \end{tikzcd} \quad .$$

On note $Z(r,d)$ (resp. $Z'(r,d)$) l'ensemble des classes d'isomorphisme de structures de niveau semi-stables (resp. stables) (F,f) sur X, avec F de rang r et de degré d.

Soit $F : k\text{-Sch} \longrightarrow \text{Ens}$ le foncteur associant à tout k-schéma noetherien Y l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles de structures de niveau stables, de rang r et de degré d, paramétrées par Y .

<u>DÉFINITION 4</u> : Un *espace de modules grossier* pour $Z'(r,d)$ est un morphisme de foncteurs $k\text{-Sch} \longrightarrow \text{Ens}$

$$\Psi : F \longrightarrow \text{Mor}(\ \ ,Y_0) \quad ,$$

Y_0 étant un k-schéma noetherien, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\Psi(*) : F(*) \longrightarrow Y_0(k)$ est une bijection
(avec $* = \text{Spec}(k)$, donc $F(*) = Z'(r,d)$) .

(ii) Pour tout morphisme de foncteurs

$$\Psi_1 : F \longrightarrow \text{Mor}(\ \ ,Y_1) \quad ,$$

Y_1 étant un k-schéma noetherien, il existe un unique morphisme

$$f : Y_0 \longrightarrow Y_1$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \text{Mor}(\ \ ,Y_0) \arrow[d, "\text{Mor}(\ \ ,f)"] \\ F \arrow[ur] \arrow[r] & \text{Mor}(\ \ ,Y_1) \end{tikzcd} \quad .$$

Un espace de modules grossier pour $Z'(r,d)$ est unique à isomorphisme près.

III.- CONSTRUCTION DES ESPACES DE MODULES

Le but de ce chapitre est de démontrer le

THÉORÈME 5 : *Soient* r, d *des entiers, avec* $r \geq 2$. *Il existe un espace de modules grossier pour* $Z'(r,d)$, *dont le* k*-schéma sous-jacent est une variété quasi-projective lisse, notée* $U_s(D,r,d)$.

Cette variété possède une compacification nautrelle, notée $U(D,r,d)$. *C'est une variété projective.*

De plus on a , si $U_s(D,r,d) \neq \emptyset$,

$$\dim(U(D,r,d)) = r^2.(g-1) + r.\delta \quad .$$

Comme dans les parties précédentes on montre aussi que *la (semi-)stabilité est une propriété ouverte.*

On va d'abord construire une famille de structures de niveau "contenant" toutes les structures de niveau (F,f) , avec F de rang r et de degré d. On voit aisément que pour étudier les structures de niveau on peut supposer d aussi grand qu'on le veut, cela résulte de la Remarque 2 de I. Ceci justifie le

LEMME 6 : *Soit* k_0 , r *des entiers, avec* $r \geq 2$. *Il existe un entier* d_0 *tel que, pour toute structure de niveau semi-stable* (F,f) *avec* $rg(F) = r$ *et* $\deg(F) \geq d_0$, *les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(a) *On a* $h^1(X,F) = 0$ *et* F *est engendré par ses sections globales.*

(b) *Pour tout sous-faisceau* L *de* F *de rang* r' *tel que* F/L *soit localement libre et*

$$\deg(L) \geq k_0 + \frac{r'}{r} . \deg(F) \quad ,$$

on a

$$h^1(X,L) = 0$$

et L *est engendré par ses sections globales.*

Posons $\deg(F) = d$.

(a) Remarquons que F est engendré par ses sections globales si et seulement si $G_0 = F/T(F)$ l'est. Pour cela il suffit qu'on ait

$$h^1(X,G_0 \otimes L_x^{-1}) = 0$$

pour tout point x de X , soit, par dualité de Serre

$$h^1(X,G_0^* \otimes L_x \otimes K) = 0$$

Soit σ une section non nulle de $G_0^* \otimes L_x \otimes K$. Alors σ définit un morphisme injectif de fibrés vectoriels sur X

$$W \longrightarrow G_0 \quad ,$$

avec

$$\deg(W) \geq \deg(G_0) + 1 - 2.g \geq d - \delta + 1 - 2.g$$
$$\text{et} \quad rg(W) = r - 1 \quad .$$

Mais on a aussi

$$\deg(W) \leqq l(T(F)) + \deg(W) \leqq (r-1).\frac{d}{r} + \frac{\delta}{r} \quad ,$$

car (F,f) est semi-stable (propriété (i)) . Donc si on prend

$$d_0 > r.(2g-1) + \delta.(r+1)$$

un tel σ ne peut exister et F est donc engendré par ses sections globales.

On a alors aussi $h^1(F) = 0$ car pour cela il suffit que

$$d > r.(2g-2) + (r+1).\delta \quad .$$

(b) Il suffira de trouver d_0 tel que pour tout sous-faisceau L de F de rang r' , tel que $1 \leqq r' \leqq r-1$ et que F/L soit sans torsion, on ait

$$h^1(X, L_x^{-1} \otimes L) = 0$$

pour tout point x de X dès que

$$\deg(L) \geqq k_0 + \frac{r'}{r}.\deg(F) \quad .$$

Supposons que

$$h^1(X, L_x^{-1} \otimes L) \neq 0 \quad .$$

Alors, par dualité de Serre, il existe une section non triviale σ de $L^* \otimes L_x \otimes K$. Si $r' = 1$, on en déduit $\deg(L) \leqq 2.g - 1$, et il suffit de prendre

$$d_0 > r.(2.g - 1) - k_0.r \quad .$$

Supposons que $r' > 1$. De σ on déduit un morphisme injectif de fibrés vectoriels sur X

$$W \longrightarrow F/T(F) \quad ,$$

avec

$$rg(W) = r'-1 \quad ,$$

et $\deg(W) \geqq \deg(L_0) + 1 - 2.g \geqq \deg(L) - \delta + 1 - 2.g$

$$\geqq k_0 + \frac{r'}{r}.d - \delta + 1 - 2.g \quad , \text{ avec } L_0 = L/T(F) \quad .$$

On a aussi, par semi-stabilité de (F,f) ,

$$\deg(W) \leqq l(T) + \deg(W) \leqq (r'-1).\left(\frac{d}{r} + \frac{\delta.(r-r'+1)}{r.(r'-1)}\right) \quad ,$$

et il suffit de prendre

$$d_0 > 2.\delta.r + r.(2.g-1) - k_0.r \quad .$$

Ceci prouve b et achève la démonstration du Lemme 6.

On suppose dans ce qui suit que $d \geqq d_0$. On a alors

$$h^0(F) = d + r.(1-g) = p \quad ,$$

pour toute structure de niveau semi-stable (F,f) , F étant de degré d et de de rang r. Le polynôme de Hilbert de F est

$$P(Z) = r.\deg(\mathcal{O}(1)).Z + p \quad .$$

On pose

$$Q = \mathrm{Quot}^{P}_{\mathcal{O}\otimes k^{P}/X/k} \quad ,$$

et on note $\mathcal{F}$ un faisceau universel sur $Q \times X$ (voir 1.III) .
Alors *il existe un entier* $m_0 \geq 0$ *tel que pour tout entier* $m \geq m_0$ *et tout point* q *de* Q *on ait*

(i) $h^1(X_q, \mathcal{F}_q(m)) = 0$,

(ii) $\mathcal{F}_q(m)$ *est engendré par ses sections globales.*

(Facile).

<u>REMARQUE</u> : pour toute structure de niveau semi-stable (F,f) avec F de degré d et de rang r, il existe un point q de Q tel que les faisceaux $\mathcal{F}_q$ et F soient isomorphes. Cela découle du Lemme 6.

Soient p_X, p_Q les projections

$$Q \times X \longrightarrow X \quad \text{et} \quad Q \times X \longrightarrow Q \quad .$$

Soit m un entier tel que $m \geq m_0$. On pose

$$\mathcal{E} = p_{Q*}(\mathcal{F}(m)) \quad .$$

D'après ce qui précède, $\mathcal{E}$ est localement libre et le morphisme canonique

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}(m)$$

est surjectif.

Le faisceau cohérent $p_{Q*}(\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathcal{E}, p_X^*(r.\mathcal{O}_D))$ sur Q est aussi localement libre.

Soit $\pi : V \longrightarrow Q$ le fibré vectoriel sur Q associé à ce faisceau.

Soit Sch_Q la catégorie des Q-schémas noetheriens.

<u>PROPOSITION 7</u> : *La variété algébrique* V *représente le foncteur*

$$F : \mathrm{Sch}_Q \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

associant à un Q-*schéma* T *l'ensemble* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_T, p_X^*(r.\mathcal{O}_D))$.
(avec $p_X : T \times X \longrightarrow X$, et $\mathcal{E}_T = p_T^*(\rho^*(\mathcal{E}))$, $\rho : T \longrightarrow Q$, $p_T : T \times X \longrightarrow T$) .

Pour tout Q-schéma $\rho : T \longrightarrow Q$, on pose

$$\mathcal{V}_T = p_{T*}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}_T, p_X^*(r.\mathcal{O}_D))) \quad ,$$

c'est un faisceau localement libre sur T . On note $s(\mathcal{V}_T)$ le T-schéma associé. En particulier on a $s(\mathcal{V}_Q) = V$.

On a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{V}_T \longrightarrow \rho^*(\mathcal{V}_Q) \quad ,$$

induisant un morphisme de Q-schémas

$$\Psi : s(\mathcal{V}_T) \longrightarrow s(\mathcal{V}_Q) = V \quad .$$

La courbe X étant projective et connexe, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_T, p_X^*(r.\mathcal{O}_D)) \simeq H^0(T, \mathcal{V}_T)$$

et un élément σ de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_T, p_X^*(r.\mathcal{O}_D))$ définit donc une section σ de $s(\mathcal{V}_T)$ sur T, et par conséquent un morphisme

$$\Psi \circ \bar{\sigma} : T \longrightarrow V .$$

Réciproquement, étant donné $a : T \longrightarrow V$, morphisme de Q-schémas, on en déduit une section de $\rho^*(\mathcal{V}_Q)$, donc de $\mathcal{V}_T$, c'est à dire un élément de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_T, p_X^*(r.\mathcal{O}_D))$.

Ces constructions sont clairement inverses l'une de l'autre. La Proposition 7 en découle.

Considérons maintenant le foncteur

$$G : \mathrm{Sch}_Q \longrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$T \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(m)_T, p_X^*(r.\mathcal{O}_D)) .$$

C'est un sous-foncteur de F.

<u>DÉFINITION 8</u> : Soient $F_0, G_0 : \mathrm{Sch}_Q \longrightarrow \mathrm{Ens}$ des foncteurs, G_0 étant un sous-foncteur de F_0. On dit que G_0 est *fermé* si pour tout Q-schéma noetherien T et tout élément σ de $F(T)$ il existe un sous-schéma fermé T_σ de T tel que :

Pour tout sous-schéma fermé T' de T, $i : T' \longrightarrow T$, $F(i)(\sigma)$ est un élément de $G(T')$ si et seulement si $T' \subset T_\sigma$.

<u>PROPOSITION 9</u> : *Le sous-foncteur* G *de* F *est fermé.*

Soit $\mathcal{H}$ le faisceau cohérent sur $Q \times X$ noyau de $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}(m)$.
Il existe un faisceau inversible L sur $Q \times X$ tel que $\mathcal{H} \otimes L$ soit engendré par ses sections globales. Soit $E_1 = H^0(\mathcal{H} \otimes L)$. Il faut montrer qu'étant donné un Q-schéma noetherien $\rho : T \longrightarrow Q$ et un élément σ de $F(T)$, il existe un sous-schéma fermé maximal T_σ de T tel que si

$$\sigma' : \mathcal{O}_{T \times X} \otimes E_1 \longrightarrow p_X^*(r.\mathcal{O}_D) \otimes L_T ,$$

(avec $L_T = \rho^{\#}(L)$) est le morphisme déduit de σ, on ait

$$\sigma' \Big|_{T_\sigma \times X} = 0 .$$

On peut voir σ' comme une famille de morphismes du type

$$\sigma'' : \mathcal{O}_{T_A} \longrightarrow L_A ,$$

A étant une k-algèbre commutative artinienne locale, $\mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow X$, $T_A = T \times_k \mathrm{Spec}(A)$, $L_A = q^*(\rho^{\#}(L))$, $q : T_A \longrightarrow T \times X$.
Alors pour tout sous-schéma fermé Z de T, on a $\sigma' \big|_{Z \times X} = 0$ si et seulement si pour tout σ'' on a $\sigma'' \Big|_{Z_A} = 0$.

Il suffit donc de montrer qu'il existe un sous-schéma fermé maximal T'' de T tel que $\sigma'' \Big|_{T''_A} = 0$. On prendra pour T_σ l'intersection des T''.
On verra plus loin qu'on peut supposer $T = \mathrm{Spec}(B)$.

On a alors $L_A \simeq \mathcal{O}_{T_A}$ et σ'' est donné par un élément de $A \otimes_k B$,

$$e_1 \otimes b_1 + \dots + e_n \otimes b_n \quad ,$$

$(e_1,\dots,e_n)$ étant une base du k-espace vectoriel A . Alors on a

$$T'' = \mathrm{Spec}(B/(b_1,\dots,b_n)) \quad .$$

Montrons qu'on peut supposer que $T = \mathrm{Spec}(B)$:

Si f est un élément de B , le schéma T'' pour B_f est la trace sur B_f du schéma T'' pour B , de telle sorte que les schémas T'' pour divers ouverts affines de T se "recollent" bien.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 9 .

<u>PROPOSITION 10</u> : *Le foncteur* G *est représenté par un sous-schéma fermé de* V .

Soit $\sigma_0 : \mathcal{E}_V \longrightarrow p_X^*(r.\mathcal{O}_D)$ correspondant à $I_V : V \longrightarrow V$.
On va montrer que G est représenté par V_{σ_0} .

Soit $\rho : T \longrightarrow Q$ un Q-schéma noetherien et σ un élément de $G(T)$.
Il faut montrer que le morphisme associé

$$\rho_\sigma : T \longrightarrow V$$

se factorise de la façon suivante

$$\rho_\sigma : T \longrightarrow V_{\sigma_0} \hookrightarrow V \quad .$$

On reprend les notations de la Proposition 9. L'assertion est locale, on peut donc supposer que $T = \mathrm{Spec}(B)$, et qu'il existe un ouvert affine $\mathrm{Spec}(A)$ de V tel que

$$\rho : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \quad ,$$

représenté par $\rho : A \longrightarrow B$.

Comme dans la Proposition 9, la donnée de σ_0 entraine celle d'un certain nombre d'éléments de $A \otimes_k A_0$, A_0 étant une k-algèbre commutative artinienne locale. Soit u un d'entre eux :

$$u = e_1 \otimes a_1 + \dots + e_n \otimes a_n \quad ,$$

$(e_1,\dots,e_n)$ étant une base de A_0 .

On a

$$V_{\sigma_0} = \bigcap \mathrm{Spec}(A/(a_1,\dots,a_n)) \quad .$$

Il faut montrer que $\rho(a_i) = 0$. Mais on voit aisément que puisque σ est dans $G(T)$, on a $u \otimes 1 = 0$ (dans $(A \otimes {}_kA_0) \otimes_A B)$, donc $a_i \otimes 1 = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ dans $A \otimes_A B$, c'est à dire $\rho(a_i) = 0$.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 10.

On note V' le sous-schéma fermé de V qui représente G .

Posons

$$\tilde{Q} = P(V') \hookrightarrow P(V) \quad .$$

C'est un schéma projectif sur Q .

Sur V' il existe un "morphisme universel"

$$\Phi' : \mathcal{F}(m)_{V'} \longrightarrow p_X^*(r.\mathcal{O}_D) \quad .$$

On note $\mathcal{O}_P(1)$ le fibré tautologique sur le fibré en espaces projectifs $P(V)$. La restriction de $\mathcal{O}_P(-1)$ à $\tilde{Q}$ est notée $\mathcal{L}$.

Remarquons que toute section de $\mathcal{L}$ sur un ouvert U de $\tilde{Q}$ définit un morphisme

$$\mathcal{F}(m)_U \longrightarrow p_X^*(r.\mathcal{O}_D) \quad .$$

Le couple $(\tilde{Q},\mathcal{L})$ possède la *propriété universelle locale* suivante :

Etant donnée une famille de structures de niveau $(\mathcal{G},f)$ paramétrée par un k-schéma noetherien T , et un point t de T , il existe un voisinage T_1 de t , un ouvert U de Q , une section s de $\mathcal{L}|_U$, définissant un morphisme

$$f_0 : \mathcal{F}(m)_U \longrightarrow p_X^*(r.\mathcal{O}_D) \quad ,$$

et un morphisme

$$\Psi : T_1 \longrightarrow U \quad ,$$

tels que

$$\Psi^*(f_0) : f|_{T_1} \quad .$$

<u>Remarque</u> : En fait V' est bien "ce qu'on espère" : soit $\pi : V' \longrightarrow Q$ la projection, q un point de Q . Alors on a un isomorphisme canonique

$$\pi^{-1}(q) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(m)_q, p_X^*(r.\mathcal{O}_D)) \quad .$$

Si $\tilde{q}$ est un point de $\tilde{Q}$, $q = \pi(\tilde{q})$, on note $f_{\tilde{q}}$ un élément non nul de la droite $\tilde{q}$; $f_{\tilde{q}}$ est un morphisme

$$\mathcal{F}(m)_q \longrightarrow p_X^*(r.\mathcal{O}_D) \quad .$$

On notera $T_q = T(\mathcal{F}_q)$, $\mathcal{G}_q = \mathcal{F}_q/T_q$, $\pi' : \tilde{Q} \longrightarrow Q$.

Soit $\tilde{R} \subset \tilde{Q}$ l'ouvert de $\tilde{Q}$ caractérisé par le fait qu'un point $\tilde{q}$ de $\tilde{Q}$ appartient à $\tilde{R}$ si et seulement si $f_{\tilde{q}}|_{T_q} : T_q \longrightarrow r.\mathcal{O}_D$ est injectif , $h^1(\mathcal{F}_q) = 0$ et le morphisme $k^p \longrightarrow H^0(X_q,\mathcal{F}_q)$ est un isomorphisme. L'image de $\tilde{R}$ par π' est un ouvert R de Q .

On note R^{ss} (resp. R^s) l'ensemble des points q de R tels que $(\mathcal{F}_q,f_{\tilde{q}})$ soit une structure de niveau semi-stable (resp. stable) .

Soit $N > 0$ un entier, $x_1,\dots,x_N$ des points distincts de X en dehors du support de D .

Soit $\quad Z = H^N_{p,r} \times P(\mathrm{Hom}(k^p,H^0(X,r.\mathcal{O}_D))$

muni de la polarisation

$$(1,\dots,1,N.\varepsilon)$$

avec

$$\varepsilon = \frac{r.\delta}{p-\delta} \quad .$$

On définit un morphisme

$$\tilde{\tau} : \tilde{R} \longrightarrow Z$$

de la façon suivante :

Pour tout point $\tilde{q}$ de $\tilde{Q}$, $q = \pi'(q)$, on pose

$$\tilde{\tau}(\tilde{q}) = (\mathcal{F}_{qx_1}, \dots, \mathcal{F}_{qx_N}, a_{\tilde{q}}) ,$$

$a_{\tilde{q}}$ étant défini par $f_{\tilde{q}}$ (un isomorphisme $\mathcal{O}_D \simeq \mathcal{O}_D(m)$ étant choisi une fois pour toutes.).

Le morphisme $\tilde{\tau}$ induit

$$\tau : Q \longrightarrow H^N_{p,r} .$$

<u>Un calcul de stabilité</u>

Posons $W = H^0(X, r.\mathcal{O}_D)$. Sur $Z = H^N_{p,r} \times P(\mathrm{Hom}(k^p, W))$ agit $SL(p)$ de façon évidente.

Soit $k.\rho$ un élément de $P(\mathrm{Hom}(k^p, W))$, c un sous-groupe à un paramètre de $SL(p)$, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de k^p telle que c soit de la forme

$$c(t)(e_i) = t^{\bar{r}_i}.e_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p ,$$

les r_i étant des entiers tels que

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = 0 .$$

On peut écrire

$$\rho = \sum_{i=1}^{p} e_i^* \otimes w_i ,$$

avec w_i dans W .

Alors

$$c(t)(\rho) = \sum_{i=1}^{p} e_i^* \otimes t^{-r_i}.w_i ,$$

donc

$$\mu(k.\rho, c) = \mathrm{Max}(\{r_i, w_i \neq 0\}) .$$

On a vu dans le chapitre III de la première partie que si $E_1, \dots, E_N$ sont des sous-espaces vectoriels de k^p de dimension $p-r$, et $y = (k^p/E_1, \dots, k^p/E_p)$, on a

$$\mu(y,c) = -N.(p-r).r_p + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{N} \dim(E_j \cap M_i).(r_{i+1} - r_i) ,$$

M_i désignant le sous-espace vectoriel de k^p engendré par $e_1, \dots e_i$.

Donc si on choisit une polarisation $(1, \dots, 1, N.\varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$, on a

$$\mu((y,k.\rho),c) = -N.(p-r).r_p + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{N} \dim(E_j \cap M_i).(r_{i+1} - r_i) + N.\varepsilon.\mathrm{Max}(\{r_i, w_i \neq 0\}) .$$

Cette expression dépend linéairement de (r_i) et tout (r_i) est combinaison linéaire à coefficients positifs des (r_i) suivants :

$$r_1 = \dots = r_s = p-s \quad ,$$
$$r_{s+1} = \dots = r_p = -s \quad , \ (1 \leqq s \leqq p-1) \quad .$$

Pour ce choix particulier, on a

$$\mu((y,k.\rho),c) = -N.(p-r).r_p + (r_{s+1}-r_s).\sum_{j=1}^{N} \dim(E_j \cap M_s)$$
$$= -N.r.s + p.\sum_{j=1}^{N} \dim(\pi_j(M_s))$$
$$+ \operatorname{Max}(\{r_i, w_i \neq 0\}).N.\mathcal{E} \quad ,$$

$(\pi_j : k^p \longrightarrow k^p/E_j)$. Mais on a

$$\operatorname{Max}(\{r_i,\ w_i \neq 0\}) = p-s \quad \text{si} \quad \rho(M_s) \neq \{0\} \quad ,$$
$$= -s \quad \text{si} \quad \rho(M_s) = \{0\} \quad ,$$

On en déduit aisément le

THÉORÈME 11 : *Un point* $(y,k.\rho)$ *de* Z *est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout sous-espace vectoriel propre* F *de* k^p *, on a*

$$-r.\dim(F) + \frac{p}{N}.\sum_{j=1}^{N} \dim(F_j) + \mathcal{E}.(\delta(\rho,F).p-\dim(F)) \geqq 0$$

(resp. > 0 *) , en posant*

$$\delta(\rho,F) = 0 \ \ si \ \ \rho(F) = \{0\} \quad , \quad \delta(\rho,F) = 1 \ \ si \ \ \rho(F) \neq \{0\} \quad ,$$

F_j *étant l'image de* F *dans* k^p/E_j .

Le résultat suivant est analogue au Théorème I.31.

THÉORÈME 12 : *L'entier* r *étant fixé, il existe un entier* d_0 *tel que pour tout* $d \geqq d_0$ *et tout* N *assez grand on puisse trouver des points distincts* $x_1,\dots,x_N$ *de* $X/\operatorname{Supp}(D)$ *tels que*

(i) τ *est injective*

(ii) $\tau^{-1}(Z^{ss}) = \tilde{R}^{ss}$

(iii) $\tau^{-1}(Z^{s}) = \tilde{R}^{s}$

(iv) $\tilde{\eta}|_{\tilde{R}^{ss}} : \tilde{R}^{ss} \longrightarrow Z^{ss}$ *est propre.*

On utilisera deux lemmes.

LEMME 13 : *Soit* E *un fibré vectoriel sur* X *et* W *un sous-espace vectoriel de* $H^0(X,E)$ *engendrant* E *génériquement. Soit* m *le nombre de points* x *de* X *tels que* W *n'engendre pas* E_x *. Alors on a*

$$m \leqq \deg(E) \quad .$$

Il existe un sous-espace vectoriel W' de W , tel que $\dim(W') = rg(E)$ et tel que W' engendre E . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes W' \longrightarrow E \longrightarrow T \longrightarrow 0 \quad ,$$

T étant un faisceau de torsion dont le support contient l'ensemble des points x de X tels que W n'engendre pas E_x .

Alors

$$m \leqq l(T) = \deg(E) \quad ,$$

ce qui prouve le Lemme 13.

<u>LEMME 14</u> : *Soit* E *un fibré vectoriel sur* X *tel que* $H^0(X,E)$ *engendre génériquement* E *. Alors on a*

$$h^0(X,E) \leqq rg(E) + \deg(E) \quad .$$

Soit W' un sous-espace vectoriel de $H^0(X,E)$ engendrant génériquement E et tel que $\dim(W') = rg(E)$. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}\otimes W' \longrightarrow E \longrightarrow T \longrightarrow 0 \quad ,$$

T étant un faisceau de torsion, d'où

$$h^0(X,E) \leqq \dim(W') + l(T) = rg(E) + \deg(E) \quad ,$$

ce qui prouve le Lemme 14.

Démontrons maintenant le Théorème 12.

<u>(i)</u> On montrera d'abord le résultat suivant : si N est assez grand, on peut choisir les points $x_1,\ldots,x_N$ de X de manière que pour tous points $\tilde{q}$, $\tilde{q}'$ de $\tilde{R}$, avec $\pi'(\tilde{q}) = q$, $\pi'(\tilde{q}') = q'$, si $\tau(q) = \tau(q')$, alors on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} k^p \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{Q}_q \arrow[d, "\wr"] \\ k^p \arrow[r] & \mathcal{Q}_{q'} \end{tikzcd} \quad .$$

Soit Θ l'ensemble des couples (q,q') dans $R\times R$ tels qu'il existe un tel diagramme commutatif. Posons

$$\tau = \tau_{(x_i)_{1\leqq i\leqq N}} \quad .$$

Il suffira de prouver qu'on a

$$\bigcap_{\substack{N\geqq 1 \\ (x_i)_{1\leqq i\leqq N}\in (X\setminus Supp(D))^N}} (\tau_{(x_i)} \times \tau_{(x_i)})^{-1}(\Delta) = \Theta \; ,$$

(Δ désignant la diagonale de $R\times R$) .

Autrement dit, si (q,q') est un élément de $R\times R$ tel que pour tout (x_i) on ait $\tau_{(x_i)}(q) = \tau_{(x_i)}(q')$, alors (q,q') est dans Θ .

Soient E et E' les noyaux de $k^p \longrightarrow \mathcal{Q}_q$ et $k^p \longrightarrow \mathcal{Q}_{q'}$. En dehors de $Supp(D)$, on a $E_x = E'_x$, donc aussi sur $Supp(D)$. Donc $E = E'$ et et (q,q') est dans $\ominus$.

Supposons maintenant les points x_i choisis comme précédemment et montrons que $\tilde{\tau}$ est injective. Soient $\tilde{q}$, $\tilde{q}'$ des points de R tels que $\tilde{\tau}(\tilde{q}) = \tilde{\tau}(\tilde{q}')$. Posons $q = \pi'(\tilde{q})$, $q' = \pi'(\tilde{q}')$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} k^p & \longrightarrow & \mathcal{G}_q \\ \Vert & & \wr \\ k^p & \longrightarrow & \mathcal{G}_{q'} \end{array} \quad .$$

Comme $k^p \simeq H^0(X,\mathcal{F}_q) \simeq H^0(X,\mathcal{F}_{q'})$ on en déduit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X,T_q) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{F}_q) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{G}_q) & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr & & \wr & & \wr & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X,T_{q'}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{F}_{q'}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{G}_{q'}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad .$$

Les morphismes $k^p \simeq H^0(X,\mathcal{F}_q) \longrightarrow H^0(X,r.\mathcal{O}_D)$ et $k^p \simeq H^0(X,\mathcal{F}_{q'}) \longrightarrow H^0(X,r.\mathcal{O}_D)$ (définis par $\tilde{q}$ et $\tilde{q}'$) sont donc les mêmes, et par conséquent $H^0(X,T_q)$ et $H^0(X,T_{q'})$ sont des sous-espaces vectoriels égaux de $H^0(X,.\mathcal{O}_D)$ (rappelons que $T_q \hookrightarrow r.\mathcal{O}_D$ et $T_{q'} \hookrightarrow r.\mathcal{O}_D$) . On a donc $T_q = T_{q'}$.

Comme

$\mathcal{F}_q \simeq T_q \oplus \mathcal{F}_q/T_q$, on déduit aisément du diagramme commutatif précédent que $q = q'$, puis $\tilde{q} = \tilde{q}'$.

Ceci prouve (i) .

<u>(ii) et (iii)</u> - Montrons d'abord : pour un choix convenable de (x_i) ,

pour tout point $\tilde{q}$ *de* $\tilde{R}$, *si* $(\mathcal{F}_q,f_{\tilde{q}})$ *est semi-stable (resp. stable) il en est de même de* $\tilde{\tau}(\tilde{q})$.

Pour tout sous-espace vectoriel propre M de k^p , on pose

$$\lambda(M) = -r.\dim(M) + \frac{p}{N}.\sum_{j=1}^{N} \dim(M_j) + \varepsilon.(\delta(f_q,M).p - \dim(M)) \quad ,$$

avec $M_j = \mathrm{im}(M \longrightarrow (\mathcal{F}_q)_{x_j})$.

Il faut montrer que $\lambda(M) \geqslant 0$ (resp. > 0) .

Soit L le sous-faisceau de $\mathcal{F}_q$ engendré par M , $r' = \mathrm{rg}(L)$, T le sous-faisceau de torsion de L .

a) *Cas où* $r' = 0$

Alors $L = T$, $\delta(f_{\tilde{q}},M) = 1$,

$\lambda(M) = -r.\dim(M) + \varepsilon.(p - \dim(M))$

$$\frac{r.p}{p-\delta}.(\delta - \dim(M)) \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0\ )$$

car $l(T) \leq \delta$ (resp. $< \delta$) (d'après la propriété (iv)) .

On peut maintenant supposer que $r' > 0$. Si $\delta(f_{\tilde{q}},M) = 0$, soit L' le sous-fibré vectoriel de $\mathrm{Ker}(f_{\tilde{q}})$ engendré par M . Alors M engendre génériquement L' . D'après le Lemme 13, $M \longrightarrow L'_{x_i}$ est non surjective en au plus $\deg(L')$ points x_i , donc

$$\lambda(M) \geq -r.\dim(M) + p.r'.\frac{N-\deg(L')}{N} - \frac{r.\delta}{p-\delta}.\dim(M)$$

$$= p.(-\frac{r}{p-\delta}.\dim(M) + \frac{r'}{N}.(N-\deg(L'))\ ) \ .$$

b) *Cas où* $\delta(f_{\tilde{q}},M) = 0$, $h^1(L') = 0$, L' *engendré par ses sections globales*

Alors

$$\dim(M) \leq h^0(L') = \deg(L') + r'.(1-g) \ .$$

Supposons d'abord que M n'engendre pas L' , alors

$$\dim(M) \leq h^0(L') - 1$$

(car L' est engendré par ses sections globales), donc

$$\lambda(M) \geq \frac{p.r'.r}{p-\delta}.(\ -(1+\frac{r'.(p-\delta)}{r.N}.\mu(L') + \frac{p-\delta}{r} + (g-1) + \frac{p-\delta}{r.r'}\ ) \ .$$

D'après la semi-stabilité de $(\mathcal{F}_q,f_{\tilde{q}})$, on a

$$\mu(L') \leq \frac{p-\delta}{r} + g - 1 \ ,$$

donc on peut choisir N assez grand pour que dans tous les cas ont ait

$$\mu(L') < \frac{\frac{p-\delta}{r} + g - 1 + \frac{p-\delta}{r.r'}}{1+\frac{r'(p-\delta)}{r.N}} \ ,$$

et on aura alors

$$\lambda(M) > 0 \ .$$

Supposons maintenant que M engendre L' . Alors

$$\lambda(M) = \frac{p.r}{p-\delta}.(\deg(L') + r'.(\frac{p-\delta}{r} + g - 1)) \ .$$

D'après la semi-stabilité (resp. la stabilité) de $(\mathcal{F}_q,f_{\tilde{q}})$ on a

$$\mu(L') \leq \frac{p-\delta}{r} + g - 1 \qquad (\text{resp. } <) \ ,$$

donc $\lambda(M) \geq 0$ (resp. > 0) .

c) *Cas où* $\delta(f_{\tilde{q}},M) = 0$, $h^1(L') \neq 0$ *ou bien* L' *n'est pas engendré par ses sections globales*

Alors d'après le Lemme 6 on a

$$\deg(L') \leq k_0 + \frac{r'}{r}.\deg(\mathcal{F}_q)$$

(k_0 étant à déterminer par la suite, ainsi que d_0) .

On a d'après le Lemme 14

$$\dim(M) \leqq h^0(L') \leqq r' + \deg(L') \quad ,$$

donc

$$\lambda(M) \geqq p.\Big(- \frac{r.r'}{p-\delta} \; \frac{r'.\deg(\mathcal{F}_q)}{p-\delta} + r' - \frac{r'^2}{N.r} \cdot \deg(\mathcal{F}_q)$$

$$- \frac{k_0.r}{p-\delta} - \frac{k_0.r'}{N}\Big) \quad ,$$

il faut donc choisir

$$k_0 < -1 + r'.(1-g) - \frac{\delta.r'}{r} - r' \quad ,$$

puis N de telle sorte que l'inégalité

$$\lambda(M) > 0$$

soit toujours vérifiée.

d) *Cas où* $\delta(f_{\tilde{q}},M) \neq 0$

Soit L le sous-fibré vectoriel de $\mathcal{G}_q$ engendré par M. On peut supposer que $h^1(L) = 0$ et que L est engendré par ses sections globales car dans le cas contraire on fait la même démonstration que précédemment. Alors

$$\dim(M) \leqq \deg(L) + r'.(1-g) \quad , \text{ donc}$$

$$\lambda(M) \geqq \frac{p.r.r'}{p-\delta} . \Big(-\frac{\deg(L)}{r'} + \frac{\deg(F)}{r} + \frac{\delta.(r-r')}{r.r'}\Big) \geqq 0$$

(resp. > 0) , par semi-stabilité (resp. stabilité) de $(\mathcal{F}_q, f_{\tilde{q}})$, $(r' = rg(L))$.

Montrons maintenant :

Si $\tilde{q}$ *est un point de* $\tilde{R}$ *tel que* $\tilde{\tau}(\tilde{q})$ *soit (semi-)stable, alors* $(\mathcal{F}_q, f_{\tilde{q}})$ *l'est aussi.*

<u>Propriété (i)</u>

Soit L un sous-faisceau propre de $\mathcal{F}_q$ tel que $\mathcal{F}_q/L$ soit sans torsion. Alors

$$h^0(L) \leqq \chi(L) = \deg(L) + rg(L).(1-g) \quad .$$

Prenons $M = H^0(L)$, alors $\lambda(M) \geqq 0$ (resp. > 0) entraine

$$-r.(\deg(L) + rg(L).(1-g)) + p.rg(L) + \frac{r.\delta}{p-\delta} .(p - rg(L).(1-g) - \deg(L))$$

$\geqq 0$ (resp. > 0) , ce qui équivaut à

$$\frac{\deg(L)}{rg(L)} \leqq \frac{\deg(\mathcal{F}_q)}{rg(\mathcal{F}_q)} + \frac{\delta.(r - rg(L))}{r.rg(L)} \quad (\text{resp.} <) \quad .$$

<u>Propriété (ii)</u>

Elle équivaut à

$$d' = \deg(\mathrm{Ker}(f_{\tilde{q}})) \leqq \deg(\mathcal{F}_q) - \delta \text{ (resp. } < \text{)} \quad .$$

Prenons $M = H^0(\mathrm{Ker}(f_{\tilde{q}}))$. C'est un sous-espace propre de k^D car $f_{\tilde{q}} \neq 0$

et $\mathcal{F}_q$ est engendré par ses sections globales.

On a

$$\dim(M) \leqq d' + r.(1-g) \quad ,$$

donc $\lambda(M) \geqq 0$ (resp. > 0) entraine

$$-r.(d' + r.(1-g)) + p.r - \frac{r.\delta}{p-\delta} . (d' + r.(1-g)) \geqq 0 \quad (\text{ resp. } > 0 \text{ }) \quad ,$$

ce qui équivaut à

$$d' \leqq \deg(\mathcal{F}_q) - \delta \text{ (resp. } < \text{)} \quad .$$

Propriété (iii)

On prend $M = H^0(\mathrm{Ker}(f|_L))$. Alors

$$(\dim(M) \geqq rg(L).(1-g) + \deg(\mathrm{Ker}(f|_L)) \quad ,$$

donc $\lambda(M) \geqq 0$ (resp. > 0) entraine, avec $d' = \deg(\mathrm{Ker}(f|_L))$ et $r' = rg(L)$ que

$$-r.(d'+r'.(1-g)) + p.r' - \frac{r.\delta}{p-\delta} .(d'+r'.(1-g)) \geqq 0 \quad (\text{resp. } > 0 \text{ }) \quad ,$$

ce qui équivaut à

$$\frac{d'}{r'} \leqq \frac{d}{r} - \frac{\delta}{r} \quad (\text{ resp. } < \text{ }) \quad .$$

Propriété (iv)

On prend $M = H^0(T)$. On peut supposer que $T \neq 0$. Alors $\lambda(M) \geqq 0$ (resp. > 0) entraine

$$-r.l(T) + \frac{r.\delta}{p-\delta} . (p - l(T)) \geqq 0 \quad (\text{ resp. } > 0 \text{ }) \quad ,$$

ce qui équivaut à

$$l(T) \leqq \delta \quad (\text{ resp. } < \text{ }) \quad .$$

Propriété (v)

Elle découle immédiatement de la définition de R .

Ceci achève la démonstration de (ii) et (iii) .

(iv)

Pour montrer que $\tau|_{\tilde{R}^{ss}}$ est propre, il suffit de prouver qu'il existe une partie fermée Y de $\tilde{Q} \times Z$ telle que le graphe de $\tau|_{\tilde{R}^{ss}}$ soit l'intersection de Y et de $\tilde{Q} \times Z^{ss}$.

On définit Y de la façon suivante : un point $(\tilde{q},z)$ de $\tilde{Q} \times Z$ appartient à Y si et seulement si pour $1 \leqq i \leqq N$, $z_i = k^p \longrightarrow (\mathcal{F}_q)_{x_i}$) (et $\mathcal{F}_q$ est libre en x_i) , ou bien $\mathcal{F}_q$ est non libre en x_i , et si la composante de z dans $P(\mathrm{Hom}(W,k^p)$ est $k.f_{\tilde{q}}$) .

Alors Y est fermé dans $\tilde{Q} \times Z$: ceci est immédiat. Il reste à voir que

$Y \cap (\tilde{Q} \times Z^{ss})$ est le graphe de $\tilde{\tau}|_{\tilde{R}^{ss}}$. Il est évident que pour tout point $\tilde{q}$ de $\tilde{R}^{ss}$, $(\tilde{q},\tilde{\tau}(\tilde{q}))$ est dans Y. Il reste à montrer que si $(\tilde{q},z)$ est un point de Y tel que $\tilde{q}$ ne soit pas dans $\tilde{R}^{ss}$, alors z n'appartient pas à Z^{ss}.

Supposons que $\tilde{q}$ soit dans $\tilde{R}$, alors $z = \tilde{\tau}(\tilde{q})$, et d'après (ii), z n'est pas dans Z^{ss}.

Si $\tilde{q}$ n'est pas dans $\tilde{R}$, remarquons que les degrés des quotients de $\mathcal{O} \otimes k^p$ sont $\geqq 0$, donc $\mathcal{F}_q$ est non libre en au plus p points de X. Si $k^p \longrightarrow H^0(\mathcal{F}_q)$ n'est pas injective ou si $f_{\tilde{q}}|T_q$ n'est pas injectif, il existe un sous-espace propre M de k^p tel que

$$z_i(M) = \{0\}$$

pour au moins $N-p$ indices i (dans le premier cas $M = \mathrm{Ker}(k^p \longrightarrow H^0(\mathcal{F}_q))$ et dans le second $M = \mathrm{Ker}(H^0(f_{\tilde{q}})))$.

Alors

$$\lambda(M) \geqq -r.\dim(M) + \frac{p^2.\dim(M)}{N},$$

et il suffit de prendre

$$N > \frac{p^2}{r}.$$

Supposons maintenant que $\rho : k^p \longrightarrow H^0(\mathcal{F}_q)$ est injective et que $f_{\tilde{q}}|T_q$ est injectif. Puisque $\tilde{q}$ n'est pas dans $\tilde{R}$, ρ n'est pas surjective, et $h^1(\mathcal{F}_q) \neq 0$.

Soit $\mathcal{G}$ un sous-faisceau propre de $\mathcal{F}_q$, M l'image réciproque de $H^0(\mathcal{G})$ par ρ. On a

$$\dim(M) \geqq d - h^0(\mathcal{F}_q) + h^0(\mathcal{G}).$$

On a d'après le Lemme 14 et le fait que $l(T_q) \leqq \delta$,

$$h^0(\mathcal{F}_q) \leqq d + r + \delta$$
$$h^0(\mathcal{G}) \geqq \chi(\mathcal{G}) \geqq \deg(\mathcal{G}) + r.(1-g),$$

donc

$$\dim(M) \geqq \deg(\mathcal{G}) - C,$$

C étant une constante. On a

$$\lambda(M) = -r.\dim(M) + p.\mathrm{rg}(\mathcal{G}) + \frac{p}{N}.\sum_{1\leqq i\leqq N} (\dim(M_i) - \mathrm{rg}(\mathcal{G})) + \varepsilon.(\delta(f_q,M).p - \dim(M)).$$

Si d est assez grand, on a

$$\varepsilon < 2.\frac{r.\delta}{p},$$

donc

$$\lambda(M) \leqq -r.\dim(M) + p.\mathrm{rg}(\mathcal{G}) + 2.r.\delta$$
$$\leqq -r.\deg(\mathcal{G}) + p.\mathrm{rg}(\mathcal{G}) + 2.r.\delta + r.C.$$

Supposons que pour tout choix de $\mathcal{G}$ on ait

$$-r.\deg(\mathcal{G}) + p.\mathrm{rg}(\mathcal{G}) + 2.r.\delta + r.C \geqq 0.$$

Alors

$$\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F}_q) + C' \quad ,$$

C' étant une constante.

Ceci est impossible si d est assez grand, en vertu du

<u>LEMME 15</u> : *Soit* C_0 *une constante,* $(\mathcal{F}, f)$ *une structure de niveau sur* X *telle que* $\mathcal{F}$ *soit de rang* r *et que pour tout sous-faisceau propre* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{F}$ *, on ait*

$$\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F}) + C_0 \quad .$$

Alors si

$$\deg(\mathcal{G}) \leq C_1 \quad ,$$

(C_1 *étant une constante dépendant de* X , r , C_0), on a

$$h^1(X, \mathcal{F}) = 0 \quad .$$

Analogue au Lemme 6 .

Ceci achève la démonstration du Théorème 12.

Le reste de la démonstration du Théorème 5 est analogue à ce qu'on a vu dans la première partie.

CINQUIÈME PARTIE : DÉSINGULARISATION DES VARIÉTES DE MODULES DE FIBRÉS SEMI-STABLES

INTRODUCTION

Les résultats de cette partie proviennent de l'article de Seshadri ([40]) .

D'après le Théorème I.45, si r et d sont des entiers non premiers entre eux tels que $r \geqq 2$, la variété $U(r,d)$ est singulière en les points non stables, sauf si $g = 2$ et $r = 2$.

On tentera de "désingulariser" $U(r,d)$. En fait on n'y parviendra que pour $r = 2$. Il s'agit de trouver une variété projective Z et un morphisme surjectif

$$p : Z \longrightarrow U(r,d)$$

tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) $p|_{p^{-1}(U_s(r,d))} \longrightarrow U_s(r,d)$ est un isomorphisme,

(ii) Z est un "bon espace de modules" pour un certain "problème de modules" . c'est à dire que Z représente un foncteur "naturel"

$$\mathrm{Sch} \longrightarrow \mathrm{Ens} \quad ,$$

(iii) Z est lisse.

La variété Z est une sous-variété fermée d'une variété de modules de fibrés paraboliques stables sur X . Cette variété est constituée de fibrés paraboliques stables de rang r^2, tels que la k-algèbre des endomorphismes du fibré vectoriel sous-jacent soit une spécialisation de $M(r)$, l'algèbre des endomorphismes de k^r .

Dans le Chapitre I on définit et on étudie les spécialisations de $M(r)$.

Dans le Chapitre II on s'intéresse aux k-algèbres unitaires de dimension finie et aux familles de celles-ci.

Dans le Chapitre III on étudie une classe de fibrés paraboliques parmi lesquels sont les fibrés paraboliques dont les classes d'isomorphisme constituent la variété Z .

Dans le Chapitre IV on définit quelques foncteurs, en particulier celui que Z est censée représenter.

Dans le Chapitre V on démontre les résultats principaux de cette partie, qui ont été évoqués précédemment.

I.- SPÉCIALISATIONS DE M(r)

Soit r un entier tel que $r \geqq 2$.

Rappelons que $M(r)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de k^r .

On note $\mathcal{A}(r)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}(k^{r^2} \otimes k^{r^2}, k^{r^2})$ dont les éléments sont les structures d'algèbre sur k^{r^2} . Chaque isomorphisme $M(r) \longrightarrow k^{r^2}$ définit une telle structure.

Soit e_0 un élément non nul de k^{r^2} . On note $\mathcal{A}'_r$ l'ensemble des structures d'algèbres sur k^{r^2} , isomorphes à $M(r)$, et dont l'élément unité soit e_0 . Soit $\mathcal{A}_r = \overline{\mathcal{A}'_r}$. Les éléments de $\mathcal{A}_r$ sont des algèbres unitaires dont e_0 est l'unité.

La variété $\mathcal{A}_r$ s'appelle la *variété des spécialisations de* $M(r)$, et une k-algèbre isomorphe à un élément de $\mathcal{A}_r$ une *spécialisation de* $M(r)$.

Il existe sur $\mathcal{A}(r)$ une $\mathcal{O}$-algèbre évidente W , telle que pour tout point z de $\mathcal{A}(r)$, la k-algèbre $W_z \otimes k$ soit isomorphe à z . On note aussi W la restriction de W à $\mathcal{A}_r$.

PROPOSITION 1 : *Soit* Y *un* k-*schéma algébrique réduit*, B *une* $\mathcal{O}_Y$-*algèbre localement libre de rang* r^2 *telle qu'il existe un ouvert dense* Y' *de* Y *tel que pour tout point fermé* y *de* Y' , *la* k-*algèbre* $B_Y \otimes k$ *soit une spécialisation de* $M(r)$.

Alors pour tout point fermé y *de* Y , *il existe un voisinage* U *de* y *et un morphisme*

$$f : U \longrightarrow \mathcal{A}_r$$

tel que les $\mathcal{O}_U$-*algèbres* $f^*(W)$ *et* $B|_U$ *soient isomorphes.*

Comme le problème est local, on se ramène au cas où Y est affine, et c'est immédiat.

Soit G le sous-groupe de $GL(k^{r^2})$ constitué des automorphismes de k^{r^2} laissant e_0 fixe. Ce groupe opère sur $\mathcal{A}_r$ de la façon suivante : pour tous éléments z, f de $\mathcal{A}_r$ et G respectivement, et tous vecteurs v_1, v_2 de k^{r^2} , on a

$$v_1 \cdot_{f.z} v_2 = f^{-1}(f(v_1) \cdot_z f(v_2)) \quad ,$$

(pour tout élément z' de $\mathcal{A}_r$, $\cdot_{z'}$ désigne la loi de multiplication k^{r^2} , muni de z') .

Si z est une structure d'algèbre sur k^{r^2} isomorphe à $M(r)$ et dont e_0 est l'élément unité, le groupe d'isotropie de z s'identifie à $PGL(r)$ et par conséquent on a

$$\dim(\mathcal{A}_r) = (r^2 - 1)^2 \quad .$$

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration du

THÉORÈME 2 : *La variété algébrique* $\mathcal{A}^2$ *est isomorphe à* $\mathbb{A}^9$.

En particulier, $\mathcal{A}_2$ est lisse.

Posons

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

(i étant un élément de k tel que $i^2 = -1$) . Alors (e_0, e_1, e_2, e_3) est une base de $M(2)$ et on a

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -e_0 \quad ,$$

$$e_1.e_2 = -e_2.e_1 = -e_3 \quad ,$$

$$e_2.e_3 = -e_3.e_2 = -e_1 \quad ,$$

$$e_3.e_1 = -e_1.e_3 = -e_2 \quad .$$

Maintenant on va construire une classe de spécialisations de $M(2)$. Soit V un k-espace vectoriel de dimension 3, q une forme quadratique sur V et $C(q)$ l'algèbre de Clifford de q :

Si $T(V)$ désigne l'algèbre tensorielle de V et $I(V)$ l'idéal bilatère de $T(V)$ engendré par les éléments de le forme $x \otimes x - q(x)$, x parcourant V , alors on a

$$C(q) = T(v)/I(V) \quad .$$

Soit $\pi : T(V) \longrightarrow C(q)$ la projection canonique. On pose

$$W(q) = \pi(k \oplus (V \otimes V)) \quad .$$

Alors $W(q)$ est un k-espace vectoriel de dimension 4 : si B désigne la forme bilinéaire symétrique associée à q , $(k \oplus (V \otimes V)) \cap I(V)$ est le sous-espace vectoriel de $T(V)$ constitué des vecteurs de la forme

$$(y \otimes x + x \otimes y) - 2.B(x,y) \quad ,$$

x et y parcourant V . Ce sous-espace est de dimension 6, donc $W(q)$ est de dimension 4.

En fait, $W(q)$ est une sous-algèbre de $T(V)$: il faut montrer que pour tous éléments v_1, v_2, v_3, v_4 de V , $\pi(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4)$ est un élément de $W(q)$. Puisque V est de dimension 3, v_1, v_2, v_3, v_4 sont liés. Supposons qu'il existe des scalaires a_1, a_2, a_3, a_4 tels que $v_4 = a_1.v_1 + a_2.v_2 + a_3.v_3$ (les autres cas sont analogues). Alors il est aisé de montrer que

$$\begin{aligned}\pi(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4 = (a_3.q(v_3) + 2.a_1.B(v_3,v_1) + 2.a_2.B(v_2,v_3)).\pi(v_1 \otimes v_2) \\ + a_1.q(v_1).\pi(v_2 \otimes v_3) \\ - (a_2.q(v_2) + 2.a_1.B(v_2,v_1)).\pi(v_1 \otimes v_3) \quad ,\end{aligned}$$

donc $\pi(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4)$ est un élément de $W(q)$.

Si la forme quadratique q est non dégénérée, la k-algèbre $W(q)$ est isomorphe à $M(2)$: en effet soit (v_1,v_2,v_3) une base orthonormale de V. On pose $f_0 = \pi(1)$, $f_1 = \pi(v_2.v_3)$, $f_2 = \pi(v_3.v_1)$, $f_3 = \pi(v_1.v_2)$, alors (f_0,f_1,f_2,f_3) est une base de $W(q)$ et on a :

$$f_1^2 = f_2^2 = f_3^2 = -f_0 \quad ,$$

$$f_1.f_2 = - f_2.f_1 = -f_3 \quad ,$$

$$f_2.f_3 = - f_3.f_2 = -f_1 \quad ,$$

$$f_3.f_1 = - f_1.f_3 = -f_2 \quad .$$

Soit (e_0,e_1,e_2,e_3) la base canonique de k^4, (v_1,v_2,v_3) une base de V. Alors pour toute forme quadratique q sur V, si on pose $f_0 = \pi(1)$, $f_1 = \pi(v_2 \otimes v_3)$, $f_2 = \pi(v_3 \otimes v_1)$, $f_3 = \pi(v_1 \otimes v_2)$, (f_0,f_1,f_2,f_3) est une base de $W(q)$.

Soit $\theta : S^2V^* \longrightarrow \mathcal{A}(2)$ l'application associant à la forme quadratique q la structure de k-algèbre sur k^4 définie par l'isomorphisme $g : W(q) \longrightarrow k^4$ tel que $g(f_i) = e_i$ pour $0 \leqq i \leqq 3$. Puisque si q est non dégénérée, $\theta(q)$ est isomorphe à $M(2)$, π est à valeurs dans $\mathcal{A}_2$.

Pour tout élément (c_1,c_2,c_3) de k^3, on pose

$$m(c_1,c_2,c_3) = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

et on note de même l'automorphisme de k^4 induit, qui est un élément de G. Soit

$$\Theta : k^3 \times S^2V \longrightarrow \mathcal{A}_2$$
$$(c,q) \longrightarrow m(c).\theta(q) \quad .$$

Explicitons Θ :

Si q est une forme quadratique sur V et (c_1,c_2,c_3) un élément de k^3, la structure de k-algèbre $\Theta((c_1,c_2,c_3),q)$ sur k^4 est définie par :

$$e_1^2 = c_{11}.e_0 + (2.c_1 + 2.B(v_2,v_3)).e_1 \quad ,$$

$$e_2^2 = c_{22}.e_0 + (2.c_2 + 2.B(v_3,v_1)).e_2 \quad ,$$

$$e_3^2 = c_{33}.e_0 + (2.c_3 + 2.B(v_1,v_1)).e_3 \quad ,$$

$$e_1.e_2 = c_{12}.e_0 + c_2.e_1 + c_1.e_2 - q(e_3).e_3 \quad ,$$

$$e_2.e_3 = c_{23}.e_0 - q(e_1).e_1 + c_3.e_2 + c_2.e_3 \quad ,$$

$$e_3.e_1 = c_{31}.e_0 + c_3.e_1 - q(e_2).e_2 + c_1.e_3 \quad ,$$
$$e_2.e_1 = c_{21}.e_0 + (2.B(v_3,v_1) + c_2).e_1 + (2.B(v_2,v_3) + c_1).e_2 + q(e_3).e_3 \quad ,$$
$$e_3.e_2 = c_{32}.e_0 + (2.B(v_1,v_2) + c_3).e_2 + (2.B(v_3,v_1) + c_2).e_3 + q(e_1).e_1 \quad ,$$
$$e_1.e_3 = c_{13}.e_0 + (2.B(v_1,v_2) + c_3).e_1 + (2.B(v_2,v_3) + c_1).e_3 + q(e_2).e_2 \quad ,$$

les c_{ij} étant des scalaires, dépendant "algébriquement" de (c_1,c_2,c_3) et q .

Ceci prouve que Θ est un morphisme.

D'après la table de multiplication précédente, l'application tangente

$$T(\Theta) : T_{k^3 \times S^2V^*} \longrightarrow \Theta^*(T_{\mathrm{Hom}(W \otimes W,W)})$$

est injective, donc Θ est une immersion.

Le morphisme Θ est propre : d'après le critère valuatif de propreté, il suffit de montrer que si R est un anneau de valuation discrète de corps résiduel k , de corps des fractions K , et si A est une structure de R-algèbre sur R^4 dont l'extension A_K à K^4 provient de $(k^3 \times S^2V^*)$ (K) , alors A provient de $(k^3 \times S^2V^*)$ (R) . Posons $A_K = \Theta((c_1,c_2,c_3), q)$, c_1,c_2,c_3 étant des éléments de K et q une forme quadratique sur $V \otimes_k K$. Puisque A_K provient d'une structure de R-algèbre sur R^4, d'après la table de multiplication précédente, c_1,c_2,c_3 sont des éléments de R et q provient d'une forme quadratique sur R^4. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Le morphisme Θ est donc une immersion fermée.

Mais on a

$$\dim(\mathcal{A}_2) = 9 = \dim(k^3 \times S^2V^*) \quad ,$$

donc Θ est un isomorphisme.

Ceci prouve le Théorème 2.

II.- <u>k-ALGÈBRES UNITAIRES DE DIMENSION FINIE</u>

Soit B une k-algèbre unitaire de dimension finie. On munit B^* de la structure de B-module à droite définie par

$$u.f(v) = f(u.v)$$

pour tous éléments f , (u,v) de B^* , B^2 respectivement.

On note $C(B)$ la k-algèbre unitaire des B-endomorphismes de B^*. On a une inclusion naturelle $B^{op} \hookrightarrow C(B)$:

$$u \longmapsto (f \longmapsto (v \longmapsto f(v.u))) \quad .$$

On note $D(B)$ la k-algèbre des $C(B)$-endomorphismes de B^* . Evidemment on a une inclusion

$$B \hookrightarrow D(B) \quad .$$

PROPOSITION 3 : *Si* B *est une* k-*algèbre unitaire de dimension finie, alors on a*

$$C(B) = B^{op} \quad \textit{et} \quad D(B) = B \quad .$$

Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_p)$ une base de B , e_0 étant l'élément unité. On pose pour $1 \leq i, j \leq p$,

$$e_i . e_j = a^0_{ij} + \sum_{l=1}^{p} a^l_{ij} . e_l \quad ,$$

les a^l_{ij} étant des éléments de k .

Pour tout élément non nul t de k , on note A(t) l'automorphisme du k-espace vectoriel B dont la matrice dans la base $(e_0, \ldots, e_p)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & t & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & t \end{pmatrix}$$

Il existe une unique structure de k-algèbre B_t sur le k-espace vectoriel B telle que A soit un isomorphisme de k-algèbres. La loi de multiplication dans B_t est définie par

$$e_i . e_j = a^0_{ij} . t^2 . e_0 + \sum_{l=1}^{p} a^l_{ij} . t . e_l \quad ,$$

pour $1 \leq i, j \leq p$, e_0 étant l'élément unité.

On définit maintenant une structure de $\mathcal{O}$-algèbre sur $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \otimes k^{p+1}$ de la façon suivante : si $(f_0, \ldots, f_p)$ désigne la base canonique de k^{p+1}, on a en tout point t de $\mathbb{A}^1$:

$$f_0 . f_i = f_i . f_0 = f_i \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq p \quad ,$$

$$f_i . f_j = a^0_{ij} . t^2 . e_0 + \sum_{l=1}^{p} a^l_{ij} . t . e_l \quad \text{pour} \quad 1 \leq i, j \leq p \quad .$$

Alors pour $t \neq 0$, la k-algèbre k^{p+1} est isomorphe à B . Pour tout élément t de k on note $._t$ l'action de k^{p+1}_t sur $(k^{p+1})^*$.

Soit Z le sous-ensemble de $\mathrm{End}(k^{p+1}) \times k$ constitué des couples (f,t) tels que

$$f(e_i ._t e^*_j) = e_i ._t f(e^*_j) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \, , \, j \leq p \quad ,$$

($(e^*_0, \ldots, e^*_p)$ désigne la base duale de $(e_0, \ldots, e_p)$) .

On vérifie aisément que Z est une sous-variété fermée de $\mathrm{End}(k^{p+1}) \times k$.

Soit $\pi : Z \longrightarrow k$ la restriction de la projection. Pour tout élément non nul t de k on a

$$\dim(\pi^{-1}(t)) = \dim(C(k^{p+1}_t)) = \dim(C(B)) \geq p+1 \quad ,$$

et par conséquent $\dim(C(k_0^{p+1})) = \dim(\pi^{-1}(0)) \geq \dim(C(B))$.
Mais il est aisé de voir que $C(k_0^{p+1}) = (k_0^{p+1})^{op}$, on a donc

$$\dim(C(B)) = p + 1 ,$$

d'où $C(B) = B^{op}$.

Le reste de la Proposition 3 se démontre de la même manière.

Soit n un entier strictement positif. On note $\mathcal{B}(n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}(k^n \otimes k^n, k^n)$ constitué des structures d'algèbre unitaire sur k^n . Il existe sur $\mathcal{B}(n)$ une $\mathcal{O}$-algèbre évidente W telle que pour tout point z de $\mathcal{B}(n)$, la k-algèbre $W_z \otimes k$ soit isomorphe à z .

PROPOSITION 4 : *Soit* T *un* k-*schéma noetherien,* B *une* $\mathcal{O}_T$-*algèbre unitaire localement libre telle que pour tout point* t *de* T *, il existe un voisinage* T_1 *de* t *et un morphisme*

$$f : T_1 \longrightarrow \mathcal{B}(n)$$

tel que les $\mathcal{O}_{T_1}$-*algèbres* $f^*(W)$ *et* $B|_{T_1}$ *soient isomorphes.*

Alors la $\mathcal{O}_T$-*algèbre* $C(B)$ *des* B-*endomorphismes de* B^* *est isomorphe à* B^{op} *et la* $\mathcal{O}_T$-*algèbre des* $C(B)$-*endomorphismes de* B^* *est isomorphe à* B .

Soit t un point de T , T_1 un voisinage de T et $f : T_1 \longrightarrow \mathcal{B}(n)$ un morphisme tel que les $\mathcal{O}_T$-algèbres $f^*(W)$ et $B|_{T_1}$ soient isomorphes. Soit $(m_1,\dots,m_n)$ une base du $\mathcal{O}_{f(t)}$-module libre $W_{f(t)}$, m_1 étant l'identité. Pour $2 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, soient

$$g_{ij} : \mathrm{End}_{\mathcal{O}_t}(W^*_{f(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{f(t)}} \mathcal{O}_t) \longrightarrow W^*_{f(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{f(t)}} \mathcal{O}_t$$

$$g \longmapsto g((m_i \otimes 1).(m_j^* \otimes 1)) - (m_i \otimes 1).g(m_j^* \otimes 1) ,$$

$$h_{ij} : \mathrm{End}_{\overline{k(f(t))}}(W^*_{f(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{f(t)}} \overline{k(f(t))}) \longrightarrow W^*_{f(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{f(t)}} \overline{k(f(t))}$$

$$g \longmapsto g((mi_i \otimes 1).(m_j^* \otimes 1)) - (m_i \otimes 1).g(m_j^* \otimes 1) .$$

D'après la Proposition 4 il existe un sous-ensemble I de $\{1,\dots,r\}^2$ tel que

$$\prod_{(i,j)\in I} h_{ij} : \mathrm{End}_{\overline{k(f(t))}}(W^*_{f(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{f(t)}} \overline{k(f(t))} \longrightarrow \longrightarrow (W^*_{f(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{f(t)}} \overline{k(f(t))})^I$$

soit surjective, de noyau isomorphe à $W_{f(t)} \otimes_{\mathcal{O}_{f(t)}} \overline{k(f(t))}$.

On en déduit que $\prod_{(i,j)\in I} g_{ij}$ est surjective, et par conséquent son noyau N est un $\mathcal{O}_t$-module libre de rang n , et on a

$$B_t^{op} \subset C(B)_t \subset N .$$

Mais on montre aisément en utilisant la Proposition 3 que

$$\mathrm{End}_{B_t \boxtimes k(t)}(B_t^* \boxtimes k(t)) = B_t^{op} \boxtimes k(t) \quad ,$$

on en déduit immédiatement que $C(B)_t = B_t^{op}$.

Le reste de la Proposition 4 se montre de manière analogue.

III.- ÉTUDE D'UNE CLASSE DE FIBRÉS PARABOLIQUES

Soient r, n, d des entiers tels que $r \geqq 2$, $n \geqq 2$, a_1, a_2 des nombres réels tels que $0 < a_1 < a_2 < 1$, et x_0 un point de X . On note $P_{n,d}$ la catégorie des fibrés paraboliques semi-stables de rang n, de degré d, dont la structure parabolique est concentrée en x_0 , de suite de multiplicités $(1,n-1)$, de poids (a_1,a_2) .

LEMME 5 : *On peut choisir* (a_1,a_2) *de manière que les propriétés suivantes soient vérifiées. pour tout entier* n *tel que* $n \leqq r^2$ *et tout objet* E *de* $P_{n,d}$:

(i) E *est stable*

(ii) le fibré vectoriel sous-jacent à E *est semi-stable*

(iii) pour tout sous-fibré vectoriel F *de* E *, on a*

$$\mu(F) < \mu(E) \Longrightarrow \mathrm{par}\,\mu(F) < \mathrm{par}\,\mu(E) \quad .$$

Pour avoir (iii), il suffit d'avoir $a_2 < r^{-2}$, et cela entraine aussi (i) et (ii).

Ceci prouve le Lemme 5.

On note $Q_{n,d}$ la catégorie des fibrés vectoriels semi-stables de rang n de degré d sur X .

Soit E un fibré vectoriel semi-stable de degré d . La somme E_1 de tous les sous-fibrés vectoriels stables F de E tels que $\mu(E) = \mu(F)$ est un sous-fibré vectoriel de E , et on a :

(i) on peut écrire

$$E_1 \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} s_i.F_i \quad ,$$

avec $m \geqq 1$, $s_i \geqq 1$ si $1 \leqq i \leqq m$, F_i étant un fibré stable, $\mu(F_i) = \mu(E)$, les F_i étant deux à deux non isomorphes.

(ii) pour tout fibré vectoriel stable F avec $\mu(F) = \mu(E)$, tout entier positif s et tout morphisme

$$f : s.F \longrightarrow E \quad ,$$

il existe un entier i tel que $F \simeq F_i$ et f se factorise de la façon suivante :

$$f : s.F \longrightarrow s_i.F_i \hookrightarrow E \quad .$$

(iii) pour tout fibré semi-stable E' tel que $\mu(E) = \mu(E')$, et tout morphisme $f : E \longrightarrow E'$,
on a $f(E_1) \subset E'_1$.
Remarquons qu'on a $E_1 \neq 0$.

Pour tout fibré vectoriel stable F tel que $\mu(E) = \mu(F)$, on pose

$$s(F,E) = \dim(\,\mathrm{Hom}(F,\mathrm{Gr}(E))\,) \quad .$$

On a $s_i \leqq s(F_i,E)$ pour $1 \leqq i \leqq m$, et

$$\sum_F \mathrm{rg}(F).s(F,E) = \mathrm{rg}(E) \quad ,$$

(la somme étant étendue à l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés stables F tels que $\mu(E) = \mu(F)$) .

PROPOSITION 6 : *Soit* E' *un fibré vectoriel semi-stable tel que* $\mu(E') = \mu(E)$. *Alors on a*

$$\dim(\mathrm{Hom}(E',E)) \leqq \sum_{i=1}^{m} s_i.s(F_i,E') \quad .$$

Démonstration par récurrence sur $\mathrm{rg}(E')$.
Si $\mathrm{rg}(E') = 1$ c'est immédiat.
Supposons que ce soit vrai pour tous les fibrés semi-stables F tels que $\mu(F) = \mu(E)$ et de rang $< \mathrm{rg}(E')$.

Si $\mathrm{Hom}(E'_1,E_1) = \{0\}$, alors on a

$$\dim(\mathrm{Hom}(E',E)) = \dim(\mathrm{Hom}(E'/E'_1,E)) \leqq \sum_{i=1}^{m} s_i.s(F_i,E'/E'_1)$$

(d'après l'hypothèse de récurrence),
mais on a $s(F_i,E'/E'_1) = s(F_i,E')$ pour $1 \leqq i \leqq m$, donc on a bien

$$\dim(\mathrm{Hom}(E',E)) \leqq \sum_{i=1}^{m} s_i.s(F_i,E) \quad .$$

Si $\mathrm{Hom}(E'_1,E) \neq \{0\}$, on peut supposer que $F_1 = F'_1$,

(avec $E'_1 \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} s'_i.F'_i$) . Pour tout morphisme $f : E' \longrightarrow E$, on a :

$$f(s'_1.F_1) \subset s_1.F_1 \quad .$$

On note f_1 le morphisme induit $s'_1.F_1 \longrightarrow s_1.F_1$.
Etant donné un morphisme $f' : E' \longrightarrow E$, on a $f'_1 = f_1$ si et seulement si $f - f'$ provient d'un morphisme $E'/s'_1.F_1 \longrightarrow E$, donc

$$\dim(\mathrm{Hom}(E',E)) \leqq \dim(\mathrm{Hom}(s'_1.F_1,s_1.F_1)) + \dim(\mathrm{Hom}(E'/s'_1.F_1,E)) \quad .$$

On a

$$\dim(\mathrm{Hom}(E'/s'_1.F_1,E)) \leqq \sum_{i=1}^{m} s_i.s(F_i,E'/s'_1.F_1)$$

d'après l'hypothèse de récurrence, et

$$\dim(\mathrm{Hom}(s'_1.F_1,s_1.F_1)) = s'_1.s_1$$

car F_1 est stable. On a donc

$$\dim(\mathrm{Hom}(E',E)) \leq \sum_{i=1}^{m} s_i.s(F_i,E'/s'_1.F_1) + s'_1.s_1 \quad .$$

Mais $s(F_1,E') = s(F_1,E'/s'_1.F_1) + s'_1$, et $s(F_i,E') = s(F_i,E'/s'_1.F_1)$ si $2 \leq i \leq m$, on a donc bien

$$\dim(\mathrm{Hom}(E',E)) \leq \sum_{i=1}^{m} s_i.s(F_i,E') \quad .$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 6.

<u>PROPOSITION 7</u> : *Soit* E *un objet de* $Q_{n,d}$. *Il existe une structure parabolique sur* E *en faisant un objet de* $P_{n,d}$ *si et seulement si pour tout fibré vectoriel stable* F *tel que* $\mu(F) = \mu(E)$, *tout entier* $s > rg(F)$, *il n'existe pas de morphisme injectif de fibrés vectoriels*

$$s.F \longrightarrow E \quad .$$

Condition équivalente : si on pose $E_1 \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} s_i.F_i$, alors $s_i \leq rg(F_i)$ pour $1 \leq i \leq m$.

Supposons qu'une telle structure existe, et qu'il existe un morphisme injectif de fibrés vectoriels

$$s.F \longrightarrow E \quad ,$$

F étant un fibré vectoriel stable tel que $\mu(F) = \mu(E)$, s un entier avec $s > rg(F)$. On note q la projection $E_{x_0} \longrightarrow E_{x_0}/F_2(E)_{x_0}$.

Soit

$$g : \mathrm{Hom}(F,s.F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F_{x_0},E_{x_0}/F_2(E)_{x_0})$$
$$f \longmapsto q_{x_0} \circ f \quad .$$

Puisque $s > rg(F)$, il existe un élément non nul f de $\mathrm{Hom}(F,s.F)$ tel que $g(f) = 0$, et f définit un morphisme injectif de fibrés vectoriels

$$f' : F \longrightarrow E$$

tel que $f'(F_{x_0}) \subset F_2(E)_{x_0}$. Ce morphisme identifie F et un sous-fibré vectoriel de E . On a

$$\mathrm{par}\mu(F) = \mu(F) + a_2 > \frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot a_2 + \mu(E) = \mathrm{par}\mu(E) \quad ,$$

ce qui contredit la stabilité de E . On ne peut donc pas avoir de morphisme injectif $s.F \longrightarrow E$.

Supposons réciproquement que pour tout fibré stable F avec $\mu(F) = \mu(E)$, tout entier positif s , et tout morphisme injectif $s.F \longrightarrow E$, on ait $s \leq rg(F)$.

Il suffit de montrer qu'il existe un hyperplan $F_2(E)_{x_0}$ de E_{x_0} , tel que pour tout sous-fibré stable F de E avec $\mu(F) = \mu(E)$, on ait $F_{x_0} \not\subset F_2(E)_{x_0}$: en effet, si tel est le cas, on munit E de la structure parabolique définie par $F_2(E)_{x_0}$ et (a_1,a_2) . Si F est un sous-fibré vectoriel de E tel que $\mu(F) < \mu(E)$, on a $\mathrm{par}\mu(F) < \mathrm{par}\mu(F)$, et si $\mu(F) = \mu(E)$, F est semi-stable, et on a $F_{x_0} \not\subset F_2(E)_{x_0}$, car F possède un sous-fibré vectoriel stable F' tel que $\mu(F') = \mu(E)$, donc

$$\mathrm{par}\mu(F) = \mu(F) + \frac{a_1}{\mathrm{rg}(F)} + \frac{\mathrm{rg}(F)-1}{\mathrm{rg}(F)} \cdot a_2 < \mathrm{par}\mu(E) \quad .$$

Donc le fibré parabolique défini par E , $F_2(E)_{x_0}$ et (a_1,a_2) est stable.

Il reste à trouver $F_2(E)_{x_0}$.

Tout sous-fibré vectoriel stable F de E tel que $\mu(F) = \mu(E)$ est isomorphe à un des F_i . L'ensemble des sous-fibrés de E isomorphes à F_i s'identifie à $P(k^{s_i})$. Soit S_i le sous-ensemble de $P(E^*_{x_0}) \times P(k^{s_i})$ constitué des couples (H,F) (H étant un hyperplan de E_{x_0} et F un sous-fibré vectoriel de E isomorphe à F_i) tels que $F_{x_0} \subset H$. Il est immédiat que Z_i est une sous-variété fermée de codimension $\mathrm{rg}(F_i)$.

Puisque $\mathrm{rg}(F_i) \geq s_i$, l'ensemble des hyperplans H de E_{x_0} tels que pour tout sous-fibré vectoriel F de E isomorphe à F_i , on ait $F_{x_0} \not\subset H$ est un ouvert non vide U_i de $P(E^*_{x_0})$. Il suffit alors de prendre $F_2(E)_{x_0}$ dans $\bigcap_{i=1}^{m} U_i$.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 7.

<u>REMARQUE</u> : On déduit de la Proposition 7 que la fait qu'un objet de $Q_{n,d}$ puisse être muni d'une structure parabolique en faisant un objet de $P_{n,d}$ est indépendant du choix du point x_0 de X .

<u>PROPOSITION 8</u> : *Soit* E *un objet de* $P_{n,d}$, $\mathrm{End}(E)$ *l'ensemble des endomorphismes du fibré vectoriel sous-jacent à* E *. Alors on a*

$$\dim(\mathrm{End}(E)) \leq n \quad .$$

De plus, si $n = r^2$ *, les* k*-algèbres* $\mathrm{End}(E)$ *et* $M(r)$ *sont isomorphes si et seulement s'il existe un fibré stable* F *tel que le fibré vectoriel sous-jacent à* E *soit isomorphe à* $\mathrm{rg}(F).F$.

On définit les entiers m , s_i , les fibrés stables F_i , les entiers $s(F_i,E)$ pour $1 \leq i \leq m$, comme précédemment. On a d'après la Proposition 6 :

$$\dim(\mathrm{End}(E)) \leq \sum_{i=1}^{m} s_i . s(F_i,E) \quad ,$$

et d'après la Proposition 7 ,

$$s_i \leq \mathrm{rg}(F_i) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

donc

$$\dim(\mathrm{End}(E)) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rg}(F_i).s(F_i,E) \leq \mathrm{rg}(E) \quad .$$

Si on a l'égalité, on a $rg(F_i) = s_i$ pour $1 \leqq i \leqq m$.

Si f est un endomorphisme de E , f induit un endomorphisme f_1 de E_1 . Soit

$$\begin{aligned} q : \mathrm{End}(E) &\longrightarrow \mathrm{End}(E_1) \\ f &\longmapsto f_1 \end{aligned}$$

Le noyau de cette application linéaire s'identifie à $\mathrm{Hom}(E/E_1,E)$. On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(E/E_1,E) \longrightarrow \mathrm{End}(E) \xrightarrow{q} \mathrm{End}(E_1) \quad .$$

Supposons que $\dim(\mathrm{End}(E)) = n$, alors

$$\dim(\mathrm{End}(E_1)) = \sum_{i=1}^{m} s_i^2 \text{ , car les } F_i \text{ sont stables,}$$

et

$$\dim(\mathrm{Hom}(E/E_1,E)) \leqq \sum_{i=1}^{m} si.s(F_i,E/E_1)$$

d'après la Proposition 6. Comme on a $s(F_i,E) = s(F_i,E/E_1) + s_i$ pour $1 \leqq i \leqq m$, et $n = \sum_{i=1}^{m} s_i.s(F_i,E)$, on a

$$\dim(\mathrm{End}(E)) = \dim(\mathrm{End}(E_1)) + \dim(\mathrm{Hom}(E/E_1,E)) \quad ,$$

d'où on déduit que l'application linéaire q est surjective.

La k-algèbre $\mathrm{End}(E_1)$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{m} M(s_i)$.

Supposons que la k-algèbre $\mathrm{End}(E)$ soit isomorphe à $M(r)$. On a alors un morphisme surjectif de k-algèbres

$$M(r) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} M(s_i) \quad .$$

Supposons que $s_1 < r$. On a alors un morphisme surjectif de k-algèbres

$$M(r) \longrightarrow M(s_1) \quad ,$$

dont le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit A un élément non nul de $\mathrm{Ker}(f)$. Puisque $\mathrm{Ker}(f)$ est un idéal bilatère de $M(r)$, $\mathrm{Ker}(f)$ contient toutes les matrices B telles que $rg(B) \leqq rg(A)$. Or celles-ci engendrent $M(r)$, donc $f = 0$, ce qui est absurde. On a donc

$$s_1 = rg(F_1) = r \quad .$$

Par conséquent le fibré vectoriel sous-jacent à E est isomorphe à $rg(F_1).F_1$.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 8 .

<u>PROPOSITION 9</u> : *Soient* E_1, E_2 *des objets de* $P_{n,d}$ *tels que*

$$\dim(\mathrm{End}(E_1)) = \dim(\mathrm{End}(E_2)) = n \quad .$$

Alors E_1 *et* E_2 *sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels sous-jacents le sont.*

Il suffit évidemment de prouver que si les fibrés vectoriels sous-jacents à E_1 et E_2 sont isomorphes, alors E_1 et E_2 le sont.

On supposera donc qu'on a un objet E de $Q_{n,d}$, et deux hyperplans H_1 et H_2 de E_{x_0} faisant de E un objet de $P_{n,d}$. On note Z l'ouvert de $P(E^*_{x_0})$ constitué des hyperplans de E_{x_0} faisant de E un objet de $P_{n,d}$. Le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ opère à droite sur Z. Il suffit de montrer que ce groupe opère transitivement. Puisqu'un fibré parabolique stable est simple, le groupe d'isotropie d'un point de Z est isomorphe à k^*. On en déduit, puisque $\mathrm{Aut}(E)$ est de dimension n, que les orbites de Z sont de dimension $n-1 = \dim(Z)$. Il en découle immédiatement que $\mathrm{Aut}(E)$ agit transitivement sur Z.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 9.

<u>Remarque</u> : On peut évidemment démontrer la première partie de la Proposition 8 en considérant l'action de $\mathrm{Aut}(E)$ sur $P(E^*_{x_0})$. Mais cette méthode ne permet pas de démontrer la suite de la Proposition 8.

<u>PROPOSITION 10</u> : *Soit* E *un objet de* $P_{n,d}$ *tel que* $\dim(\mathrm{End}(E)) = n$. *Soit* G *le sous-groupe de* $GL(E_{x_0}) \simeq GL(n)$ *constitué des automorphismes du* $\mathrm{End}(E)$-*module* E_{x_0}. *Alors le groupe structural du fibré vectoriel sous-jacent à* E *peut être réduit à* G.

On choisit un isomorphisme $E_{x_0} \simeq k^n$ permettant d'identifier $GL(E_{x_0})$ et $GL(n)$.

Soit $\pi : P(E^*) \longrightarrow X$ la projection. L'ensemble Z des points H de $P(E^*)$ tels que le fibré vectoriel sous-jacent à E, muni de H et (a_1,a_2) au point $\pi(H)$ soit un fibré parabolique stable, est un ouvert de $P(E^*)$ et on a $\pi(Z) = X$.

Soit U un ouvert non vide de X, s une section de $E^*|_U$ induisant une section de $Z|_U$. Soit

$$f_s : U \times \mathrm{End}(E) \longrightarrow E^*|_U$$

le morphisme de fibrés vectoriels sur U défini par

$$f_{sx}(g) = s(x) \circ g_x ,$$

pour tout point x de U et tout élément g de $\mathrm{End}(E)$. Remarquons que puisque $\mathrm{Aut}(E)$ agit transitivement sur un ouvert non vide de $P(E^*_x)$ pour tout point x de U, f_s est un isomorphisme.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de X tel que pour tout élément i de I, il existe une section s_i de $E^*|_{U_i}$ induisant une section de $Z|_{U_i}$.

On suppose que E est défini par des morphismes de transition

$$\theta_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n) \quad ,$$

et qu'il existe un unique élément i_0 de I tel que U_{i_0} contienne x_0 .

Un élément ρ de $End(E)$ est donné par des morphismes

$$\rho_i : U_i \longrightarrow GL(n) \quad , \text{ pour } i \text{ dans } I \quad ,$$

tels que :

(i) $s_i \circ \theta_{ij} = \theta_{ij} \circ s_j$ pour tous i , j dans I .

(ii) $s_{i_0} = \rho$, considéré comme un élément de $GL(n)$.

Soit i un élément de I , y_i un point de U_i . Alors, pour tout point x de U_i et tout élément ρ de $End(E)$, on a

$$({}^t f_{sy_i}^{-1} \circ {}^t f_{sx}) \circ \rho_i(x) \quad ({}^t f_{sy_i}^{-1} \circ {}^t f_{sx})^{-1} = \rho_i(y_i) \quad :$$

il suffit pour cela de remarquer que

$${}^t f_{sx} \circ \rho_i(x) \circ {}^t f_{sx}^{-1} \quad : End(E)^* \longrightarrow End(E)^*$$

n'est autre que la multiplication à droite par ρ considéré comme un élément de la k-algèbre des endomorphismes du $End(E)$-module $End(E)^*$.

On en déduit aisément qu'il existe un élément c_i de $GL(n)$ tel que pour tout élément ρ de $End(E)$, on ait

$$\rho_i(y_i) = c_i^{-1} \circ \rho \circ c_i \quad .$$

On considère maintenant le morphisme

$$\begin{aligned} \lambda_i : U_i &\longrightarrow GL(n) \\ x &\longmapsto c_i \circ {}^t f_{sy_i}^{-1} \circ {}^t f_{sx} \quad . \end{aligned}$$

On utilise le nouveau système de morphismes de transition pour E défini par

$$\begin{aligned} \theta'_{ij} : U_i \cap U_j &\longrightarrow GL(n) \\ x &\longmapsto \lambda_i^{-1}(x) \circ \theta_{ij}(x) \circ \lambda_j(x) \quad , \end{aligned}$$

pour tous éléments i , j de I . Alors, pour tout point x de $U_i \cap U_j$, on a

$$s \circ \theta'_{ij}(x) = \theta'_{ij}(x) \circ s \quad ,$$

ce qui prouve que θ'_{ij} est à valeurs dans G .

Ceci achève la démonstration de la Proposition 10.

Remarque : En utilisant la Proposition 3, on voit que la k-algèbre des $End(E)$-endomorphismes de E_{x_0} est isomorphe à $End(E)^{op}$. On en déduit aussi que la $\mathcal{O}_X$-algèbre des $\underline{End}(E)$-endomorphismes de E est un faisceau localement libre.

IV.- DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS DE QUELQUES FONCTEURS

Soient r et d des entiers, avec $r \geq 2$.

DÉFINITION 11 : On appelle *famille de spécialisations de* $M(r)$ paramétrée par un k-schéma noetherien T une $\mathcal{O}_T$-algèbre B telle que pour tout point t de T , il existe un voisinage T_1 de t et un morphisme

$$f : T_1 \longrightarrow \mathcal{A}_r$$

tels que les $\mathcal{O}_{T_1}$-algèbres $f^*(W)$ et $B|_{T_1}$ soient isomorphes.

La définition d'un morphisme de familles de spécialisations de $M(r)$ paramétrées par T est évidente. Si B est une famille de spécialisations de $M(r)$ paramétrée par T , et $g : Y \longrightarrow T$ un morphisme de k-schémas noetheriens, la $\mathcal{O}_Y$-algèbre $g^*(B)$ est une famille de spécialisations de $M(r)$ paramétrée par Y .

Soit G le foncteur

$$k\text{-Sch} \longrightarrow \text{Ens}$$

associant à un k-schéma noetherien T l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles de spécialisations de $M(r)$ paramétrées par T .

Soit $\mathcal{A}_r$ le foncteur

$$k\text{-Sch} \longrightarrow \text{Ens}$$

représenté par $\mathcal{A}_r$.

On a une inclusion

$$\mathcal{A}_r \longrightarrow G$$

qui est un *morphisme formellement lisse* (voir Appendice I) d'après la Proposition 1 .

On note $W_{r,d}$ la sous-catégorie de $P_{r^2,d.r}$ constituée des objets E tels que $\mathrm{End}(E)$ soit une spécialisation de $M(r)$.

Si K est un corps commutatif algébriquement clos extension de k , on note $W_{r,d} \boxtimes K$ la catégorie $W_{r,d}$ correspondant à la courbe $X \times_k \mathrm{Spec}(K)$ sur K . On définit de même $P_{r^2,d.r} \boxtimes K$.

DÉFINITION 12 : On appelle *famille rigidifiée dans* $W_{r,d}$ paramétrée par un k-schéma noetherien T la donnée d'un faisceau localement libre E sur $T \times_K X$, et d'une section s de $E^*|_{T \times \{x_0\}}$ ne s'annulant pas, tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) pour tout point t de T , le fibré parabolique sur $X \times_k \mathrm{Spec}\overline{(k(t))}$ $\overline{(k(t)}$ désignant la clôture algébrique de $k(t)$) dont le fibré vectoriel sous-jacent est obtenu à partir de E par le changement de base

$$\mathrm{Spec}\,\overline{(k(t))} \longrightarrow T \quad ,$$

et dont la structure parabolique, concentrée en le point $\{x_0\} \times \mathrm{Spec}(\overline{k(t)})$, est définie par l'hyperplan noyau de s_t et (a_1,a_2) est un objet de $W_{r,d} \otimes \overline{k(t)}$.

(ii) la $\mathcal{O}_T$-algèbre localement libre $p_{T*}(\underline{\mathrm{End}}(E))$ (p_T désignant la projection $T \times_k X \longrightarrow T$) est une famille de spécialisations de $M(r)$.

<u>DÉFINITION 13</u> : On appelle *famille rigidifiée dans* $P_{r^2,d}$ paramétrée par un k-schéma noetherien T la donnée d'un faisceau localement libre E sur $T \times_k X$ et d'une section s de $E^*|_{T \times \{x_0\}}$ ne s'annulant pas tels que le fibré parabolique sur $X \times_k \mathrm{Spec}(\overline{k(t)})$ défini par E et s (comme dans la Définition 12) soit un objet de $P_{r^2,d.r} \otimes \overline{k(t)}$, pour tout t dans T .

La définition des morphismes de familles rigidifiées dans $P_{r^2,d.r}$ (resp. $W_{r,d}$) paramétrées par T est évidente. On définit aussi, pour tout morphisme de k-schémas noetheriens $g : Y \longrightarrow T$, toute famille rigidifiée (E,s) dans $P_{r^2,d.r}$(resp. $W_{r,d}$) paramétrée par T , la famille $g^*(E,s)$ de même nature paramétrée par Y .

Soit F : k-Sch $\longrightarrow$ Ens le foncteur contravariant associant à un k-schéma noetherien T l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles dans $W_{r,d}$ paramétrées par T .

On définit de même le foncteur E : k-Sch $\longrightarrow$ Ens correspondant aux familles rigidifiées dans $P_{r^2,d.r}$.

D'après la deuxième partie, le foncteur E est représentable par une variété projective lisse $S_{r,d}$, dont les points (fermés) sont les classes d'isomorphisme d'objets de $P_{r^2,d.r}$.

On a un morphisme de foncteurs évident

$$\phi : F \longrightarrow G \ .$$

On montrera plus loin qu'il est formellement lisse.

<u>Groupe structural d'une famille de fibrés vectoriels sur</u> X

Soit A une k-algèbre commutative noetherienne. Un faisceau localement libre E de rang r sur $\mathrm{Spec}(A) \times_k X$ est défini par un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i\in I}$ de X et des morphismes de transition

$$\theta_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow H^0(\mathrm{Spec}(A), GL(r,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})) = Gl(r,A)$$

(en fait, à valeurs dans un sous-k-espace vectoriel de dimension finie). On peut considérer que $GL(r,A)$ est l'ensemble des sections globales du faisceau de groupes $\mathrm{Spec}(A) \times_k GL(r)$. Si H est un sous-faisceau de groupes de ce faisceau, on dira que le groupe structural de E peut être réduit à H si on peut choisir des morphismes de transition θ_{ij} à valeurs dans $H^0(\mathrm{Spec}(A),H)$.

Soit E une famille dans $W_{r,d}$ paramétrée par $\mathrm{Spec}(A)$. On peut supposer que $E|_{\mathrm{Spec}(A) \times \{x_0\}} = r.\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(C)}$, et si p_A désigne la projection $\mathrm{Spec}(A) \times_k X \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$, $p_{A}*(\underline{\mathrm{End}}(E))$ est une sous-$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-algèbre de $\mathrm{Spec}(A)\times_k M(r)$. On note H la $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-algèbre des $p_A*(\underline{\mathrm{End}}(E))$-endomorphismes de $r.\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$, G le faisceau de groupes sur $\mathrm{Spec}(A)$ des éléments inversibles de H .

Le résultat suivant se démontre comme les Propositions 4 et 10 :

PROPOSITION 14 : *La* $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$*-algèbre* H *(resp. le faisceau de groupes* G *sur* $\mathrm{Spec}(A)$ *) est isomorphe à* $p_A*(\mathrm{End}(E)^{op})$ *(resp. au faisceau de groupes sur* $\mathrm{Spec}(A)$ *des éléments inversibles de* $p_{A*}(\mathrm{End}(E)^{op})$*) .*

De plus, le groupe structural de E *peut être réduit à* G *.*

V.- LES RÉSULTATS PRINCIPAUX

THÉORÈME 15 : *Soit* $N_{r,d}$ *l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de* $P_{r^2,d.r}$ *tels que* $\mathrm{End}(E)$ *soit une spécialisation de* $M(r)$ *.*
Alors :

(i) $N_{r,d}$ *est une sous-variété fermée de* $S_{r,d}$ *.*

(ii) $N_{r,d}$ *représente le foncteur* F *(restreint aux k-schémas algébriques).*

THÉORÈME 16 : *Si* $\mathcal{A}_r$ *est lisse, il en est de même de* $N_{r,d}$ *. De plus, il existe un morphisme surjectif*

$$\pi : N_{r,d} \longrightarrow U(r,d)$$

induisant un isomorphisme $\pi^{-1}(U_s(r,d)) \longrightarrow U_s(r,d)$ *.*

En particulier , $N_{2,0}$ est lisse, et on obtient donc une désingularisation de $U(2,0)$ au sens de l'Introduction.

On utilisera le résultat suivant :

PROPOSITION 17 : *Le morphisme de foncteurs*

$$\phi : F \longrightarrow G$$

est formellement lisse.

(Voir appendice I).

Soit D un objet de $\mathcal{A}$, D_0 un quotient de D , (E_0,s_0) une famille dans $W_{r,d}$ paramétrée par $\mathrm{Spec}(D_0)$, B un élément de $G(\mathrm{Spec}(D))$ tel que les $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(D_0)}$-algèbres $p_{D_0*}(\underline{\mathrm{End}}(E_0))$ et $i^*(B)$ soient isomorphes (i désignant l'inclusion $\mathrm{Spec}(D_0) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D)$ et p_{D_0} la projection

$\mathrm{Spec}(D_0) \times X \longrightarrow \mathrm{Spec}(D_0)$) .

Il faut montrer qu'il existe une famille dans $W_{r,d}$ paramétrée par Spec(D) telle que les $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(D)}$-algèbres $p_D*(\underline{\mathrm{End}}(E))$ et B soient isomorphes et que $i^*(E,s) \simeq (E_0,s_0)$.

Puisque D est artinienne, on peut supposer que $D_0 = D/I$, I étant un idéal de D tel que $I.M = \{0\}$, M étant l'idéal maximal de D .

Notons que Spec(D) et $\mathrm{Spec}(D_0)$ ne contiennent qu'un seul point z .
Soit $f : \mathrm{Spec}(D) \longrightarrow \mathcal{R}_r$ un morphisme tel que les $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(D)}$-algèbres B et $f^*(W)$ soient isomorphes. Alors B (resp. B_0) provient de la D-algèbre $D \otimes_k (W_{f(z)} \otimes \mathcal{O}_{f(z)}k)$ (resp. $D_0 \otimes_k (W_{f(z)} \otimes \mathcal{O}_{f(z)}k)$) (B_0 désignant la $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(D_0)}$-algèbre $i^*(B)$) , qu'on peut noter aussi B(resp. B_0) .

On peut considérer que B_0^{op} (resp. B^{op}) est une sous-D_0-algèbre (resp. une sous-D-algèbre) de $\mathrm{End}(B_0^*)$ (resp. $\mathrm{End}(B^*)$) .

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X , tel que E_0 soit défini par des fonctions de transitions

$$\theta_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G_0^{op} \quad , \text{ pour } \quad 1 \leq i < j \leq m \quad ,$$

(G_0 désigne le groupe des éléments inversibles de B_0) . On doit avoir

$$\theta_{il} = \theta_{jm} . \theta_{ij} \quad \text{pour tous éléments } \; i,\, j,\, l \; \text{ de } \{1,\ldots\ldots,m\}$$

tels que $i < j < l$.

Ces fonctions s'étendent en des morphismes

$$\theta'_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G^{op} \quad (G \text{ est défini comme } G_0)$$

(car les θ_{ij} sont à valeurs dans un sous-k-espace vectoriel de dimension finie de B_0^{op}) . Mais on n'a pas nécessairement

$$\theta'_{ij} = \theta'_{jl} . \theta'_{ij} \quad .$$

Soit E' le fibré vectoriel sur X , défini à partir de E_0 par le changement de base $\mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D_0)$, F le fibré vectoriel des End(E')-endomorphismes de E' .

Un élément $(a_{ijl})_{1\leq i<j<l\leq m}$ de $\prod_{i<j<l} H^0(U_i \cap U_j \cap U_l , \mathcal{O} \otimes B)$ tel que

$$a_{ijk} + a_{ikl} - a_{ijl} - \overline{\theta}_{ij}^{-1} . a_{jkl} . \overline{\theta}_{ij} = 0$$

pour $i < j < k < l$,
($\overline{\theta}_{ij}$ désignant l'image de θ_{ij} dans $W_{f(z)} \otimes \mathcal{O}_{f(z)}k$) ,
définit un élément de $H^2(X,F) \otimes D$.

Si $i < j < l$, on peut poser

$$\theta'_{il} \cdot \theta'^{-1}_{ij} . \theta'^{-1}_{jl} = 1 + b_{ijl} \quad ,$$

b_{ijl} étant un morphisme

$$U_i \cap U_j \cap U_l \longrightarrow I \otimes_k (W_{f(z)} \otimes \mathcal{O}_{f(z)} k) \quad .$$

On pose $a_{ijl} = \theta'^{-1}_{il}.b_{ijl}.\theta'_{il}$, alors $(a_{ijl})_{1\leq i<j<l\leq m}$ définit un élément de $H^2(X,F) \otimes D$:

Il suffit de montrer que

$$a_{ijk} + a_{ikl} - a_{ijl} - \theta'^{-1}_{ij} . a_{jkl}.\theta'_{ij} = 0 ,$$

car puisque $I.M = \{0\}$, on a

$$\theta'^{-1}_{ij}.a_{jkl}.\theta'_{ij} = \overline{\theta}'^{-1}_{ij}.a_{jkl}.\overline{\theta'_{ij}} .$$

Il suffit donc de montrer que

$$1 + a_{ijk} + a_{ikl} - a_{ijl} - \theta'^{-1}_{ij}.\theta'^{-1}_{jk}.\theta'^{-1}_{kl}.\theta'_{jl}.\theta'_{ij} = 0$$

mais

$$\theta'^{-1}_{ij}.\theta'^{-1}_{jk}.\theta'^{-1}_{kl}.\theta'_{jl}.\theta'_{ij} = (1+a_{ijk}).(1+a_{ikl}).(1-a_{ijl})$$
$$1 + a_{ijk} + a_{ikl} - a_{ijl} ,$$

on a donc bien l'égalité voulue.

Puisque X est une courbe, on a

$$h^2(X,F) = 0 ,$$

donc (a_{ijl}) est un bord, c'est à dire qu'il existe un élément $(1_{ij})_{1\leq i<j\leq m}$ de $\prod_{i<j} H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O} \otimes B)$ tel que

$$1_{ij} - 1_{il} + \overline{\theta}^{-1}_{ij} .1_{jl}.\overline{\theta}_{ij} = a_{ijl} ,$$

sur $U_i \cap U_j \cap U_l$, pour $1 \leq i < j < l \leq m$.

On peut supposer que 1_{ij} est à valeurs dans $I.B$, et on a donc

$$1_{ij} - 1_{il} + \theta'^{-1}_{ij} . 1_{jl}.\theta'_{ij} = a_{ijl} .$$

On pose maintenant

$$\Theta_{ij} = \theta'_{ij}.(1 + 1_{ij}) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i < j \leq m .$$

Alors on a

$$\Theta_{il} = \Theta_{jl}. \Theta_{ij} \quad \text{pour } i < j < l$$, comme on le vérifie aisément.

Par conséquent (Θ_{ij}) définit un faisceau localement libre E sur $\operatorname{Spec}(D) \times_k X$ induisant E_0 . La section s_0 de $E^*_0|_{\operatorname{Spec}(D_0) \times \{x_0\}} \simeq r.\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(D_0)}$ s'étend en une section s de $E^*_{\operatorname{Spec}(D) \times \{x_0\}}$. Il est immédiat que (E,s) est une famille rigidifiée dans $P_{r^2,d.r}$ paramétrée par $\operatorname{Spec}(D)$ induisant (E_0,s_0) .

Il reste à montrer que les $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(D)}$-algèbres B et $p_D*(\underline{\operatorname{End}}(E))$ sont isomorphes, ce qui découle du fait que B est une sous-algèbre localement libre de $p_D*(\underline{\operatorname{End}}(E))$, et que ces $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(D)}$-algèbres ont le même rang.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 17.

<u>Démonstration du Théorème 15</u>

(i) D'après la Proposition 9, on a une application

$$f : U_s(r,d) \longrightarrow S_{r,d}$$

associant à la classe d'isomorphisme d'un fibré vectoriel stable F de rang r et de degré d la classe d'isomorphisme d'un fibré parabolique semi-stable dont le fibré vectoriel sous-jacent est $r.F$. Si on note $N'_{r,d}$ le sous-ensemble de $N_{r,d}$ constitué des classes d'isomorphisme d'objet E de $P_{r^2,d.r}$ tels que la k-algèbre End(E) soit isomorphe à $M(r)$. D'après la Proposition 9, f induit une bijection de $U_s(r,d)$ sur $N'_{r,d}$. L'application f est régulière : pour le voir on utilise la propriété universelle de $S_{r,d}$ au voisinage de chaque point de $U_s(r,d)$.

Pour prouver (i) il suffit de montrer que

$$N_{r,d} = \overline{N'_{r,d}} \ .$$

Soit E un objet de $P_{r^2,d.r}$ dont la classe d'isomorphisme est un élément de $N_{r,d}$. Soit s_0 un élément de $E^*_{x_0}$ tel que $\mathrm{Ker}(s_0) = F_2(E)_{x_0}$.

Il existe une $k[[T]]$ - algèbre B telle que

$$B \otimes_{k[[T]]} k \simeq \mathrm{End}(E)$$

et

$$B \otimes_{k[[T]]} \overline{k((T))} \simeq M(r,\overline{k((T))})$$

comme k-algèbres et $\overline{k((T))}$-algèbres respectivement, ($k((T))$ désignant le corps des fractions de $k[[T]]$ et $\overline{k((T))}$ la clôture algébrique de $k((T))$).

Il suffit de construire une famille rigidifiée dans $W_{r,d}$, (F,s) , paramatrée par $\mathrm{Spec}(k[[T]])$ telle que si p_0 désigne la projection $\mathrm{Spec}(k[[T]]) \times X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k[[T]])$, les $k[[T]]$ -algèbres B et $p_{0*}(\underline{\mathrm{End}}(F))$ soient isomorphes, et que $i^*(F,s) \simeq (E_0,s_0)$ (i désignant l'inclusion $\mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k[[T]])$) . En utilisant la propriété universelle de $S_{r,d}$ on peut en effet en déduire que la classe d' isomorphisme de E est un élément de $N_{r,d}$, et comme il est évident que $\overline{N'_{r,d}} \subset N_{r,d}$, on aura $\overline{N_{r,d}} = \overline{N'_{r,d}}$.

Il reste à montrer l'existence de (F,s) . Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$D_n = k[[T]] / (T^n) \ .$$

C'est une k-algèbre commutative artinienne locale.

D'après la démonstration de la Proposition 17, il existe une suite $(F_n,s_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout entier $n\geq 1$, on ait :

(i) (F_n,s_n) est une famille rigidifiée dans $W_{r,d}$ paramétrée par $\mathrm{Spec}(D_n)$,

(ii) il existe un isomorphisme

$$g_n : i_n^*(F_{n+1}, s_{n+1}) \longrightarrow (F_n, s_n) \quad ,$$

(i_n désignant l'inclusion $\mathrm{Spec}(D_n) \longrightarrow \mathrm{Spec}(D_{n+1})$)

(iii) si p_n désigne la projection $\mathrm{Spec}(D_n) \times_k X \longrightarrow \mathrm{Spec}(D_n)$, et j_n l'inclusion $\mathrm{Spec}(D_n) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k[[T]])$, il existe un isomorphisme

$$f_n : p_n{*}(\underline{\mathrm{End}}(F_n)) \longrightarrow j_n^*(B) \quad ,$$

tel que f_{n+1} induise f_n (via g_n) .

Il existe un faisceau localement libre F , et un seul, sur $\mathrm{Spec}(k[[T]]) \times_k X$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait un isomorphisme

$$h_n : j_n^{\#}(F) \longrightarrow F_n \quad ,$$

tel que h_{n+1} induise h_n (via g_n) .

Soit $U = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de X . On a un morphisme

$$k[[T]] \otimes A \longrightarrow \varprojlim((k[[T]]/(T^n)) \otimes A \quad .$$

La donnée de $(F_n|_{\mathrm{Spec}(D_n) \times_k U})_{n\geq 1}$ est équivalente à la donnée d'une suite $(M_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, on ait :

(i) M_n est un $(k[[T]]/(T^n)) \otimes A$-module libre de rang n .

(ii) il existe un isomorphisme

$$M_{n+1} \otimes ((k[[T]]/(T^n)) \otimes A \longrightarrow M_n \quad .$$

On pose

$$M = \varprojlim(M_n) \otimes ((k[[T]]/(T^n)) \otimes A) \quad .$$

Il est aisé de voir que les M se "recollent" pour donner un faisceau localement libre F sur $\mathrm{Spec}(k[[T]]) \times_k X$, et que F est unique.

De même, $(s_n)_{n\geq 1}$ s'étend en une section s de $F^*|_{\mathrm{Spec}(k[[T]]) \times \{x_0\}}$ ne s'annulant pas, et (F,s) est une famille rigidifiée dans $P_{r^2,d.r}$ paramétrée par $\mathrm{Spec}(k[[T]])$.

D'après la démonstration de la Proposition 17, on a des inclusions

$$i_n : p_n^*(j_n^*(B)) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(F_n) \quad ,$$

i_{n+1} induisant i_n, et donc une inclusion

$$p_0^*(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(F) \quad .$$

On en déduit que, au point fermé de $\mathrm{Spec}(k[[T]])$, le morphisme naturel

$$p_0{*}(\underline{\mathrm{End}}(F)) \otimes k \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(E)$$

est surjectif. Par conséquent $p_0{*}(\underline{\mathrm{End}}(F))$ est un faisceau localement libre, de même rang que B . Comme il contient B comme faisceau localement libre, on a

$$B = p_0{*}(\underline{\mathrm{End}}(F)) \quad .$$

On a donc bien

$$N_{r,d} = \overline{N'_{r,d}} \quad .$$

Ceci prouve (i).

(ii) D'après la propriété universelle de $S_{r,d}$, le foncteur que représente $N_{r,d}$ (noté aussi $N_{r,d}$) est un sous-foncteur de F . Soit T un k-schéma algébrique, et (E,s) une famille dans $W_{r,d}$ paramétrée par T . D'après la propriété universelle de $S_{r,d}$, cette famille définit un morphisme

$$g : T \longrightarrow S_{r,d} \quad .$$

Il faut montrer que ce morphisme est à valeurs dans $N_{r,d}$. Soit J le faisceau d'idéaux de $N_{r,d}$ dans $S_{r,d}$. Soit t un point de T . Alors $g(t)$ est un point de $N_{r,d}$. Il faut montrer que le noyau du morphisme

$$\Psi : \mathcal{O}_{g(t)} \longrightarrow \mathcal{O}_t$$

contient $J_{g(t)}$. On peut se limiter au cas où t est un point fermé.

Il suffit de montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le noyau du morphisme induit par Ψ

$$\mathcal{O}_{g(t)}/m^n_{g(t)} \longrightarrow \mathcal{O}_t/m^n_t \quad ,$$

contient $(J + m^n_{g(t)})/m^n_{g(t)}$. On en déduira par le Théorème de Krull, que $J \subset \mathrm{Ker}(\Psi)$. On est donc ramené au cas où T est le spectre d'une k-algèbre artinienne locale D_0 , de corps résiduel k . Il existe une k-algèbre commutative locale complète noetherienne intègre R telle que D_0 soit un quotient de R . On montre comme dans (i) que le morphisme de restriction

$$F(\mathrm{Spec}(R)) \longrightarrow F(\mathrm{Spec}(D_0))$$

est surjectif (autrement dit, toute famille rigidifiée dans $W_{r,d}$ paramétrée par $\mathrm{Spec}(D_0)$ se prolonge à $\mathrm{Spec}(R)$) . Puisque R est intègre , $\mathrm{Spec}(R)$ est réduit, et on en déduit aisément que

$$F(\mathrm{Spec}(R)) = N_{r,d}(\mathrm{Spec}(R)) \quad .$$

Mais on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} N_{r,d}(\mathrm{Spec}(D_0)) & \longrightarrow & F(\mathrm{Spec}(D_0)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ N_{r,d}(\mathrm{Spec}(R)) & \longrightarrow & F(\mathrm{Spec}(R)) \end{array}$$

ce qui montre que $N_{r,d}(\mathrm{Spec}(D_0)) = F(\mathrm{Spec}(D_0))$.

Ceci prouve (ii) et achève la démonstration du Théorème 15.

Démonstration du Théorème 16

Pour montrer la lissité de $N_{r,d}$, il suffit de prouver qu'étant donné deux k-algèbres commutatives artiniennes locales D et D_0 , D_0 étant un quotient de D , tout morphisme

$$\alpha : \mathrm{Spec}(D_0) \longrightarrow N_{r,d}$$

s'étend en un morphisme

$$\beta : \mathrm{Spec}(D) \longrightarrow N_{r,d} \ .$$

Ceci résulte immédiatement de l'existence d'un fibré universel sur $S_{r,d}$, de la Proposition 17, de la partie (ii) du Théorème 15 et de la lissité de $\mathcal{A}_r$.

Il reste à prouver l'existence de π .

Soit $g : U(r,d) \longrightarrow U(r^2,d.r)$ l'application associant à la classe d'équivalence d'un fibré vectoriel F la classe d'équivalence de $r.F$. Cette application est régulière, on peut le voir en remontant aux schémas de Grothendieck construits dans la première partie, et elle est évidemment injective.

On peut montrer que g induit un isomorphisme de $U_s(r,d)$ sur $g(U_s(r,d))$ (ceci doit pouvoir se montrer en remontant aux "covariants" et en faisant l'étude "différentielle" d'un morphisme entre ceux-ci induisant g) . Par conséquent g est birationnel.

On a $g(U(r,d)) = p(N_{r,d})$, p désignant le morphisme canonique

$$S_{r,d} \longrightarrow U(r^2,d.r) \ .$$

En effet, $g(U(r,d))$ et $p(N_{r,d})$ contiennent le sous-ensemble dense dans chacun d'eux $g(U_s(r,d))$. On note p' la restriction de p à $N_{r,d}$.

Puisque $N_{r,d}$ est lisse, $p' : N_{r,d} \longrightarrow g(U(r,d))$ induit un morphisme $\pi : N_{r,d} \longrightarrow U(r,d)$. Il est immédiat que π induit un isomorphisme de $\pi^{-1}(U_s(r,d))$ sur $U_s(r,d)$.

Ceci achève la démonstration du Théorème 16.

SIXIÈME PARTIE : ÉTUDE LOCALE DES VARIÉTÉS DE MODULES

INTRODUCTION :

Dans tout ce qui suit, k sera le corps des nombres complexes. Les résultats prouvés ici sont sans doute valables pour un corps de caractéristique nulle.

On démontrera des cas particulier du

THÉORÈME 1 : *Soient* r,d *des entiers non premiers entre eux, avec* $r \geq 2$. *Alors pour aucun ouvert non vide* U *de* $U_s(r,d)$ *il n'existe un fibré de Poincaré sur* $U \times X$.

On ne traitera que les cas $d = 0$. Ce théorème est complètement démontré dans [31] , par une autre méthode.

On voit aisément qu'il suffit de prouver l'

assertion 1 : En aucun point de R^s , le morphisme

$$R^s \longrightarrow U_s(r,0)$$

n'est une fibration localement triviale.

Sur la variété $M(r)^g = Z_r$ le groupe PGL(r) opère de la façon suivante : pour tout point $(M_1,\ldots,M_g)$ de Z_r , et tout élément k.A de PGL(r), on a

$$(k.A).(M_1,\ldots,M_g) = (A.M_1.A^{-1},\ldots,A.M_g.A^{-1}) .$$

Soit Z_r^s l'ouvert des points stables de Z_r pour cette action. On montrera dans le Chapitre II que l'assertion 1 découle de l'

assertion 2 : En aucun point de Z_r^s , le morphisme

$$Z_r^s \longrightarrow Z_r^s/PGL(r)$$

n'est une fibration localement triviale.

Pour cela, l'outil essentiel est le "théorème de Luna" dont l'énoncé est donné à la fin de cette partie. Il permet notamment d'obtenir la

PROPOSITION 2 : *Soit* y *le point de* U(r,0) *correspondant au fibré trivial de rang* r . *Alors la complétion de l'anneau local de* U(r,0) *au point* y *est isomorphe au complété de l'anneau local de* $Z_r/PGL(r)$ *en le point image de* $(0,\ldots,0)$.

Dans le Chapitre I, on étudie la variété $Z_r/PGL(r)$ en vue de prouver l'assertion 1.

Dans le Chapitre II, on montre que l'assertion 2 entraine l'assertion 1 et que l'assertion 2 est vraie.

I.- LA VARIÉTÉ $M(r)^g/PGL(r)$ ET SES RELATIONS AVEC LES MODULES D'ALGÈBRES

Soit $A = k\{X_1,\ldots,X_g\}$ l'algèbre des polynômes en les variables (ne commutant pas) $X_1,\ldots,X_g$. On peut voir A comme l'algèbre tensorielle d'un k-espace vectoriel de dimension g .

Soit k-alg la catégorie des k-algèbres commutatives,

$$F_{1,r} = F_1 : \text{k-alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

le foncteur associant à tout objet R de k-alg l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(A \otimes_k R)$-modules à gauche, libres de rang r sur R , munis d'une base (ordonnée). (Deux couples $(V,(v_1,\ldots,v_r))$, $(V',(v'_1,\ldots,v'_r))$, constitués d'un $(A \otimes_k R)$-module à gauche libre sur R et d'une de ses bases sur R , sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de $(A \otimes_k R)$-modules $f : V \longrightarrow V'$ tel que $f(v_i) = v'_i$ pour $1 \leq i \leq r$.
Autre définition de F_1 : soit W_0 un k-espace vectoriel de dimension r . Alors $F_1(R)$ est l'ensemble des structures de $(A \otimes_k R)$-module sur $W_0 \otimes_k R$.

Tout k-schéma noetherien Y définit un foncteur

$$\begin{aligned} &\text{k-alg} \longrightarrow \text{Ens} \\ &R \longmapsto \text{Hom}(\text{Spec}(R),Y) \ . \end{aligned}$$

On dit qu'un foncteur (contravariant) $F : \text{k-alg} \longrightarrow \text{Ens}$ est *représentable* s'il est isomorphe à un foncteur du type précédent. Le k-schéma noetherien associé Y est unique à isomorphisme près, on dit que Y *représente* F .

PROPOSITION 3 : *La variété algébrique* Z_r *représente le foncteur* F_1 .

Une structure de $(A \otimes_k R)$-module sur $W_0 \otimes_k R$ est définie par des R-endomorphismes $f_1,\ldots,f_h$ de $W_0 \otimes_k R$, c'est à dire par g applications linéaires $M(r)^* \longrightarrow R$, c'est à dire par un morphisme

$$\text{Spec}(R) \longrightarrow Z_r \ .$$

Soit $F_{2,r} = F_2 : \text{k-alg} \longrightarrow \text{Ens}$
le foncteur associant à tout objet R de k-alg l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(A \otimes_k R)$-modules à gauche libres de rang r sur R .

Soit V un élément de $F_2(k)$, c'est à dire un A-module libre de rang r sur k . Alors V possède une filtration

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{m-1} \subset V_m = V$$

par des sous-A-modules, telle que pour $1 \leq i \leq m$, V_i/V_{i-1} soit un A-module simple. La somme directe $\bigoplus_{1\leq i\leq m} V_i/V_{i-1}$ ne dépend que de V .
On posera

$$Gr(V) = \bigoplus_{1\leq i\leq m} V_i/V_{i-1} \ .$$

Les résultats suivants sont dus à M. Artin [1] :

Soit

$$\pi : Z_r \longrightarrow Z_r/PGL(r)$$

le morphisme canonique. Alors, si v_1, v_2 sont des points de Z_r, définissant des objets V_1, V_2 de $F_2(k)$ (d'après la Proposition 3), on a

$$\pi(v_1) = \pi(v_2)$$

si et seulement si

$$Gr(V_1) = Gr(V_2) .$$

De plus l'ouvert $PGL(r)$-invariant Z_r^s de Z_r constitué des points stables (c'est à dire des points z tel que le morphisme $PGL(r) \longrightarrow Z_r$ défini par z soit propre et injectif) est constitué des points de Z_r tels que le A-module associé soit simple. Le groupe $PGL(r)$ opère librement sur Z_r^s et

$$\pi: Z_r^s \longrightarrow Z_r^s/PGL(r)$$

est un quotient géométrique. En fait c'est une fibration principale localement isotriviale (c'est à dire que tout point z de Z_r^s possède un voisinage étale U de la forme $PGL(r) \times U'$, U' étant un voisinage étale de $\pi(z)$, ces données étant compatibles avec l'action de $PGL(r)$). Cependant on verra plus loin que π n'est pas une fibration principale localement triviale.

L'ouvert Z_r^{ss} de Z_r constitué des points semi-stables (c'est à dire des points z tels que $(0,\ldots,0)$ soit dans $\overline{PGL(r).z}$) est caractérisé de la façon suivante : un point z de Z_r n'est pas semi-stable si et seulement si le gradué du A-module associé à z est trivial (on dit qu'un A-module M est trivial si $X_i.M = \{0\}$ pour $1 \leq i \leq g$).

On a un morphisme canonique de foncteurs

$$F_1 \longrightarrow F_2 .$$

Soit R un objet de k-alg, V un élément de $F_2(R)$. Si on choisit une base de V sur R, on obtient un élément de $F_1(R)$, et donc un morphisme

$$f : Spec(R) \longrightarrow Z_r$$

On vérifie aisément que le morphisme

$$g = \pi \circ f : Spec(R) \longrightarrow Z_r/PGL(r)$$

ne dépend pas du choix de la base de V, et ne dépend donc que de V.

Il est immédiat que g possède la propriété suivante :

si $x : R \longrightarrow k$ est un point géométrique de $Spec(R)$, alors

$$g(x) = Gr(V \otimes_R k) .$$

On peut montrer que F_2 n'est pas représentable (en particulier, $Z_r/PGL(r)$ ne représente pas F_2). On n'utilisera pas ce résultat.

Soit F_1^s le sous-foncteur de F_1 défini par : pour tout objet R de k-alg , $F_1^s(R)$ est constitué des éléments de $F_1(R)$ tels que pour tout point géométrique $R \longrightarrow K$, le A-module associé soit simple.

On définit de même le sous-foncteur F_2^s de F_2 .

Il est immédiat que F_1^s est représenté par Z_r^s .

Pour tout k-schéma noetherien Y , on notera aussi Y le foncteur k-alg k-alg $\longrightarrow$ Ens représenté par Y .

Alors on a défini plus haut un morphisme de foncteurs

$$\Phi : F_2^s \longrightarrow Z_r^s/PGL(r) \quad .$$

Soit R une k-algèbre locale, $\theta : Spec(R) \longrightarrow Z_r^s/PGL(r)$ un morphisme.

Puisque π est localement isotriviale, on voit qu'il existe une algèbre locale R' , étale sur R , et un morphisme

$$\theta' : Spec(R') \longrightarrow Z_r^s/PGL(r)$$

tels qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Spec(R') & \longrightarrow & Z_r^s \\ \downarrow & & \downarrow \\ Spec(R) & \longrightarrow & Z_r^s/PGL(r) \end{array} \quad .$$

En particulier, si R est un corps algébriquement clos K , on a R' = K , et donc θ se relève en un point de Z_r^s à valeurs dans K . On en déduit immédiatement que ϕ induit une bijection

$$F_2^s(K) \longrightarrow (Z_r^s/PGL(r))(K) \quad .$$

On a un morphisme de foncteurs naturel

$$F_{1,r} \hookrightarrow F_{1,r^2} \qquad (\text{ resp. } F_{2,r} \longrightarrow F_{2,r^2})$$

défini par :

Pour tout objet R de k-alg , à tout élément V de $F_{1,r}(R)$ (resp. $F_{2,r}(R)$) on associe r.V .

On en déduit un morphisme canonique

$$Z_r \longrightarrow Z_{r^2} \ ,$$

induisant un morphisme canonique

$$\delta : Z_r/PGL(r) \longrightarrow Z_{r^2}/PGL(r^2) \quad .$$

<u>PROPOSITION 4</u> : *Le morphisme* δ *est propre et injectif, et induit donc un isomorphisme birationnel de* $Z_r/PGL(r)$ *sur son image.*

Le morphisme δ est décrit de la façon suivante sur les points géométriques : pour tout élément V de $F_{1,r}(k)$,

$$\delta(Gr(V)) = r.Gr(V) \quad ,$$

d'où on déduit immédiatement que δ est injectif. Pour montrer que δ est propre, on utilise le fait que la graduation canonique des anneaux locaux des points de $M(r)$ (resp. $M(r^2)$) est $PGL(r)$ (resp. $PGL(r^2)$)-invariante et définit donc une graduation des anneaux locaux des points de $Z_r/PGL(r)$ (resp. $PGL(r^2)$) , que δ préserve les graduations, et que les éléments de degré 1 de ces anneaux locaux les engendrent.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 4 .

Soit W'_0 un k-espace vectoriel de dimension r^2 . On définit des foncteurs

$$A_1 \ , \ A_2 \ : \text{k-alg} \longrightarrow \text{Ens}$$

par

- $A_1(R)$ est l'ensemble des structures d'algèbres B sur $W'_0 \otimes_k R$, munies d'un morphisme d'algèbres

$$f : A \otimes_k R \longrightarrow W'_0 \otimes_k R \ .$$

- $A_2(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de R-algèbres B libres de rang r , munies d'un morphisme d'algèbres

$$f : A \otimes_k R \longrightarrow B \ .$$

On a des morphismes canoniques de foncteurs

$$A_1 \longrightarrow F_{1,r^2} \ , \quad A_2 \longrightarrow F_{2,r^2} \ ,$$

définis par : pour tout objet R de k-alg , à tout élément (B,f) de $A_1(R)$ (resp. $A_2(R)$) , on associe B , vue comme $(A \otimes_k R)$-module grâce à f .

En fait, A_1 et A_2 sont des sous-foncteurs de F_{1,r^2} et F_{2,r^2} respectivement.

Soit A_1^s (resp. A_2^s) le sous-foncteur de A_1 (resp. A_2) défini par : pour tout objet R de k-alg ,

- $A_1^s(R)$ est l'ensemble des éléments (B,f) de $A_1(R)$ tels que pour tout point géométrique $R \longrightarrow k$ de Spec(R) , $B \otimes_R k$ soit une k-algèbre simple, et que le morphisme $A \longrightarrow B \otimes_R k$ soit surjectif.
- (idem pour $A_2^s(R)$) .

On a un morphisme canonique

$$F_{2,r} \longrightarrow A_2 \ ,$$

défini par : pour tout objet R de k-alg, à tout élément V de $F_{2,r}(R)$, on associe la R-algèbre $\mathrm{End}_R(V)$, munie du morphisme canonique

$$f : A \otimes_k R \longrightarrow \mathrm{End}_R(V)$$

provenant de la structure de $(A \otimes_k R)$-module de $\mathrm{End}_R(V)$.

Le morphisme f est surjectif si et seulement si V est dans $F_{2,r}^s(R)$: il suffit de le montrer pour $R = k$, et cela revient à prouver que f est surjectif si et seulement si le A-module V est simple. Cela découle d'un résultat connu sous le nom de "Théorème de Burnside" (voir par exemple

S. Lang, [12], p. 444, Cor. 1). On a donc aussi un morphisme de foncteurs

$$F_2^s \longrightarrow A_2^s \ .$$

On peut aussi montrer que ce foncteur induit, pour tout corps commutatif algébriquement clos K extension de k, une bijection

$$F_{2,r}^s(K) \longrightarrow A_2^s(K) \ ,$$

(cela revient à dire que toute K-algèbre simple de dimension finie sur K est isomorphe à une algèbre du type $\mathrm{End}_K(E)$, E étant un K-espace vectoriel).

PROPOSITION 5 : *La variété* $Z_r^s/PGL(r)$ *représente le foncteur* A_2^s .

(On ne fera qu'une esquisse de démonstration).

Montrons d'abord que la restriction de $\lambda : Z_r/PGL(r) \longrightarrow Z_{r^2}/PGL(r^2)$ à $Z_r^s/PGL(r)$ est une immersion :

La variété $Z_r^s/PGL(r)$ est lisse et pour tout point $(M_1,\ldots,M_g) = m$ de Z_r^s, on a

$$T_{\pi(m)} = Z_r \ / \ \left\{ (M_j.A - A.M_i)_{1\leq i\leq g} \ , \ A\in M(r) \right\} \ .$$

D'autre part, si π' désigne la projection

$$Z_{r^2} \longrightarrow Z_{r^2}/PGL(r) \ ,$$

on a une injection, en notant m' l'image de m dans $Z^s_{r^2}/PGL(r^2)$

$$T_{m'}/T_{\pi'^{-1}(\pi'(m'))} \longrightarrow T_{\pi'(m')} \ .$$

Il suffit donc de montrer que l'application induite par δ

$$T_{\pi(m)} \longrightarrow T_{m'}/T_{\pi'^{-1}(\pi'(m'))}$$

est injective. Pour cela, on utilise l'isomorphisme

$$T_{m'}/T_{\pi'^{-1}(\pi'm'))} \simeq$$

$$\left\{ ((M_i.A_{ts} - A_{ts}.M_i)_{1\leq t,\ s\leq r})_{1\leq i\leq g} \ , \ A_{t,s}\in M(r) \right\} +$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & M^i_{12} & M^i_{13} & \ldots & M^i_{1r} \\ 0 & 0 & M^i_{23} & \ldots & M^i_{2r} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & M^i_{3r} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{1\leq i\leq g} \ , \ M^i_{st}\in M(r) \right\} .$$

(On obtient cet isomorphisme en utilisant le fait que tout élément $(N_i)_{1\leq i\leq g}$ de la fibre de $\pi'(m')$ est $PGL(r^2)$-équivalent à un élément de la forme $(N'_i)_{1\leq i\leq g}$, avec

$$\begin{pmatrix} M_i & P^i_{12} & P^i_{13} & \dots & P^i_{1r} \\ 0 & M_i & P^i_{23} & \dots & P^i_{2r} \\ 0 & 0 & M_i & \dots & P^i_{3r} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_i \end{pmatrix} = N'_i \ .$$

(P^i_{st} étant dans $M(r)$) , ce résultat se déduisant aisément du fait que le A-module défini par m est simple).

Ceci prouve que la restriction de λ à $Z^s_r/PGL(r)$ est une immersion.

Soit maintenant R un objet de k-alg , et (B,f) un objet de $A^s_2(R)$. Puisque $A^s_2 \hookrightarrow F_{2,r^2}$, B définit comme on l'a vu plus haut un morphisme

$$\mathrm{Spec}(R) \longrightarrow Z_{r^2}/PGL(r^2) \ .$$

Ce morphisme est à valeurs dans $Z^s_r/PGL(r)$: il suffit de le vérifier pour tout point géométrique de $\mathrm{Spec}(R)$, et ceci est une conséquence immédiate de la remarque précédant la Proposition 5 (pour toute extension algébriquement close K de k on a $F^s_{2,r}(K) = A^s_2(K)$) .

On obtient donc un morphisme

$$\mathrm{Spec}(R) \longrightarrow Z^s_r/PGL(r) \ .$$

Ceci définit un morphisme de foncteurs

$$A^s_2 \longrightarrow Z^s_r/PGL(r) \ .$$

Réciproquement, supposons donné un morphisme

$$\lambda : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow Z^s_r/PGL(r) \ .$$

Supposons R locale. Puisque $Z^s_r \longrightarrow Z^s_r/PGL(r)$ est localement isotriviale, il existe un morphisme de k-algèbres $R \longrightarrow R'$, avec R' étale finie sur R , tel qu'il existe un morphisme

$$\lambda' : \mathrm{Spec}(R') \longrightarrow Z^s_r$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(R') & \longrightarrow & Z^s_r \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{Spec}(R) & \longrightarrow & Z^s_r/PGL(r) \end{array} \ .$$

Puisque Z^s_r représente $F^r_{1,r}$, λ' définit un élément V de $F^s_{1,r}(R')$, et $\mathrm{End}_{R'}(V)$ un élément de $A^s_2(R')$. Mais le diagramme commutatif précédent définit une donnée de descente pour $\mathrm{End}_{R'}(V)$ relativement à λ' . Donc il existe une R-algèbre W telle que $\lambda'^*(W) = \mathrm{End}_{R'}(V)$. On vérifie aussi que le morphisme d'algèbres canonique $A \otimes_k R \longrightarrow \mathrm{End}_{R'}(V)$ descend en un morphisme unique $A \otimes_k R \longrightarrow W$. On a ainsi défini un élément de $A_2^s(R)$.

On peut prolonger cette construction à toutes les k-algèbres (non nécessairement locales). Pour cela on montre d'abord que l'on peut choisir la R-algèbre W précédente d'une manière "canonique". Ainsi, si on part d'une algèbre R quelconque et d'un morphisme

$$\mathrm{Spec}(R) \longrightarrow Z_r^s/PGL(r) \quad ,$$

on obtiendra une $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$-algèbre (en utilisant la construction précédente) et par conséquent une R-algèbre.

On laisse au lecteur la vérification des faits suivants : on définit ainsi un morphisme de foncteurs $Z_r^s/PGL(r) \longrightarrow A_2^r$, et les deux foncteurs définis précédemment sont inverses l'un de l'autre.

Ceci achève (l'esquisse de) la démonstration de la Proposition 5.

<u>PROPOSITION 6</u> : *Soit* R *une* k*-algèbre locale,* (B,f) *un élément de* $A_2^s(R)$ *auquel est associé*

$$\lambda : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow Z_r^s/PGL(r) \quad .$$

Alors λ *se relève en un morphisme* $\mathrm{Spec}(R) \longrightarrow Z_r^s$ *si et seulement si* B *est isomorphe à* $\mathrm{End}_R(V)$, V *étant une* $(A \otimes_k R)$*-algèbre , libre de rang* r *sur* R , f *étant le morphisme canonique.*

Cela découle immédiatement de la démonstration de la Proposition 5 (prendre $R' = R$) .

Soit maintenant R une k-algèbre commutative connexe et normale. Soit (B,f) un élément de $A_2(R)$ tel qu'il existe un élément non nul t de R tel que l'élément $(B_t f')$ de $A_2(R_t)$ défini par (B,f) soit en fait dans $A_2^s(R_t)$.

<u>LEMME 7</u> : *Il existe un morphisme*

$$\rho : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow Z_r/PGL(r)$$

tel que pour tout point géométrique $x : R \longrightarrow k$ *de* $\mathrm{Spec}(R)$, *si* $B \otimes_R k$ *est munie de la structure de* A*-module à gauche définie par* f , *on ait*

$$Gr(B \otimes_R k) = r.Gr(P) \quad ,$$

P *étant un* A*-module à gauche, de dimension* r *sur* k , *et*

$$\rho(x) = Gr(P) \quad .$$

Puisque $A_2 \hookrightarrow F_{2,r^2}$, de (B,f) on déduit un morphisme

$$\rho' : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow Z_{r^2}/PGL(r^2) \quad .$$

D'après les hypothèses, si y désigne le point générique de $\mathrm{Spec}(R)$, $\rho(y)$ est dans l'image de $Z_r^s/PGL(r)$ dans $Z_{r^2}/PGL(r^2)$. Le morphisme

$$\lambda : Z_r/PGL(r) \longrightarrow Z_{r^2}/PGL(r^2)$$

en induit un, propre et birationnel de $Z_r/PGL(r)$ sur $\lambda(Z_r/PGL(r))$, et puisque R est normal et connexe, on en déduit que ρ se factorise de la façon suivante

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(R) \arrow[rr, "\rho'"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Z_{r^2}/PGL(r^2) \\ & Z_r/PGL(r) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Les propriétés voulues de ρ sont aisément vérifiées.
Ceci achève la démonstration du Lemme 7.

II.- APPLICATIONS A L'ÉTUDE LOCALE DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FIBRÉS SEMI-STABLES.

Soit Q le schéma de Grothendieck utilisé dans la première partie, correspondant à $(r,0)$. On utilise les notations de la première partie.
On a

$$R^{ss}/PGL(p) \simeq U(r,0) \quad ,$$

$(p = a.r + r.(1-g) \quad , a > 0)$. Soit z un point de R tel que

$$\mathcal{F}_z \simeq \mathcal{O}(m) \otimes k^r \quad .$$

L'orbite de z dans R^{ss} sous l'action de $PGL(p)$ représente le point de $U(r,0)$ correspondant au fibré trivial.

Le groupe d'isotropie de z est $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(m) \otimes k^r) \simeq GL(r)$, en particulier c'est un groupe réductif. De plus, R^{ss} est lisse.

On peut donc appliquer un Théorème de Luna [14] ("Luna's slice theorem") qui affirme qu'il existe un ouvert affine $PGL(p)$-stable W de z et une sous-variété $GL(r)$-stable lisse V de W contenant z , transversale à l'orbite de z , et telle que le morphisme canonique

$$V/GL(r) \longrightarrow W/PGL(p)$$

soit étale.

En particulier, on en déduit le

<u>LEMME 8</u> : *Soit* B *l'anneau local de* V *en* z . *Alors l'anneau des éléments* $GL(r)$*-invariants du complété* $\hat{B}$ *de* B *s'identifie au complété de l'anneau local de* $U(r,0)$ *en le point correspondant au fibré trivial.*

<u>Remarque</u> : L'énoncé du Théorème de Luna est donné à la fin de la présente partie.

On applique maintenant la *théorie de la déformation des fibrés vectoriels*. Il est immédiat que au voisinage de z , $\mathcal{F}/_{V \times X}$ définit une déformation verselle de $\mathcal{O}\otimes k^r$. D'autre part, il existe aussi une telle déformation paramétrée par $H^1(X,\underline{Ad}(\mathcal{F}_z)) \simeq M(r)^g$, dont la restriction à $\{0\} \times X$ est $\mathcal{O}\otimes k^r$. On a une action canonique de $GL(r) \simeq Aut(\mathcal{O}\otimes k^r)$ sur $H^1(X,\underline{Ad}(\mathcal{F}_z))$, induisant l'action de $PGL(r)$ sur $M(r)^g$. D'après l'unicité d'une déformatiton verselle, on en déduit un isomorphisme

$$\hat{B}^{GL(r)} \simeq \hat{C}$$

($\hat{B}^{GL(r)}$ désignant l'anneau des éléments $GL(r)$-invariants de $\hat{B}$, et C l'anneau local de l'image de (0) dans $Z_r/PGL(r)$) .

Remarque : On a un isomorphisme entre les complétés car il s'agit d'une unicité au sens analytique.

Ceci entraine immédiatement la Proposition 2.

Démontrons maintenant le Théorème 1.

On veut montrer qu'en aucun point de R^s le morphisme canonique

$$\eta : R^s \longrightarrow R^s/PGL(p)$$

n'est une fibration localement triviale.

Soit L le corps des fonctions rationnelles sur $R^s/PGL(p)$ $(= U_s(r,0))$ ou, ce qui revient au même, sur $U(r,0)$. Soit y le point de $U(r,0)$ correspondant au fibré trivial de rang r sur X , et $\bar{L}$ le corps des quotients du complété de l'anneau local de $U(r,0)$ en y . On a $L \subset \bar{L}$.

Supposons que η soit localement trivial en un point de R^s . Alors le morphisme canonique

$$\mathrm{Spec}(L) \longrightarrow R^s/PGL(p)$$

se relève en en morphisme

$$\mathrm{Spec}(L) \longrightarrow R^s \quad .$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & R^s \arrow[r] \arrow[d] & R^{ss} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(L) \arrow[ur] \arrow[r] & R^s/PGL(p) \arrow[r] & U(r,0) \end{tikzcd} ,$$

donc le morphisme canonique

$$\mathrm{Spec}(\bar{L}) \longrightarrow U(r,0)$$

se relève aussi en un morphisme

$$\rho : \mathrm{Spec}(\bar{L}) \longrightarrow R^{ss} \quad .$$

Puisque U intersecte l'orbite de z transversalement en z , on a

$$\hat{\mathcal{O}}_{R^{ss}_z} = \hat{\mathcal{O}}_{PGL(p).z,z} \otimes_k \hat{B} ,$$

et par conséquent ρ se relève en un morphisme

$$\mathrm{Spec}(\bar{L}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B) \quad .$$

A l'aide des isomorphismes précédents, on en déduit qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & M(r)^g \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(\hat{L}) \arrow[ur] \arrow[r] & M(r)^g/PGL(r) \end{tikzcd}$$

($\hat{L}$ désignant cette fois le corps des quotients de la complétion de l'anneau local de $Z_r/PGL(r)$ en l'image de (0)) .

On en déduit qu'il existe un élément non nul de l'idéal maximal de $\hat{C}$ tel que le morphisme canonique

$$\mathrm{Spec}(\hat{C}_f) \longrightarrow M(r)^g/PGL(r)$$

se relève en un morphisme

$$\mathrm{Spec}(\hat{C}_f) \longrightarrow M(r)^g \quad .$$

On va montrer que ceci entraine une contradiction, ce qui prouvera le Théorème 1.

Soit $\mathrm{Spec}(\hat{C})^s$ le sous-schéma ouvert de $\mathrm{Spec}(\hat{C})$ image inverse de $Z_r^s/PGL(r)$ par le morphisme canonique

$$j : \mathrm{Spec}(C) \longrightarrow Z_r/PGL(r) \quad .$$

Alors on voit aisément que $\mathrm{Spec}(\hat{C})^s$ est non vide et régulier.

Soit

$$\chi : T \longrightarrow \mathrm{Spec}(\hat{C})^s$$

le $PGL(r)$-fibré principal image inverse du $PGL(r)$-fibré principal

$$Z_r^s \longrightarrow Z_r^s/PGL(r)$$

par le morphisme

$$\mathrm{Spec}(\hat{C})^s \longrightarrow Z_r^s/PGL(r) \quad .$$

Alors χ est localement trivial. Ceci découle des faits suivants :

- $\mathrm{Spec}(\hat{C})^s$ est un schéma régulier.
- χ est trivial sur un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(\hat{C})^s$, à savoir $\mathrm{Spec}(\hat{C}_f) \cap \mathrm{Spec}(\hat{C})^s$, comme on vient de le voir.

On pose $P = k[X,Y]$.

Supposons qu'on ait une P-algèbre D possédant les propriétés suivantes :

(i) Le P-module sous-jacent à D est libre de rang r^2 .

(ii) Le gradué du A-module $D \otimes k$ est trivial.

(iii) $D \otimes_P k(\hat{P})$ est une $k(\hat{P})$-algèbre intègre.

(iv) Il existe un morphisme de P-algèbres

$$\Psi : P\{X_1,\ldots,X_g\} \longrightarrow D$$

qui est surjectif.

L'élément $(D \otimes_P \hat{P}, \Psi \otimes_P I_{\hat{P}})$ de $A_2(\hat{P})$ définit d'après le Lemme 7 un morphisme

$$\theta : \mathrm{Spec}(\hat{P}) \longrightarrow Z_r/PGL(r)$$

tel que l'image du point générique de Spec(P) soit dans $Z_r^s/PGL(r)$.

Le morphisme θ se factorise de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\hat{P}) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\Psi"'] & Z_r/PGL(r) \\ \mathrm{Spec}(\hat{C}) \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

$$\theta = j \circ \Psi \quad .$$

Alors si ε désigne le point générique de Spec(P), $\Psi(\varepsilon)$ est un élément de $\mathrm{Spec}(\hat{C})^s$, d'après (iii) .

Puisque la fibration χ est localement triviale, le morphisme canonique

$$\mathrm{Spec}(k(\hat{P})) \longrightarrow Z_r/PGL(r)$$

se factorise de la façon suivante

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(k(\hat{P})) \arrow[r] \arrow[dr] & Z_r \arrow[d] \\ & Z_r/PGL(r) \end{tikzcd} \quad .$$

D'après la Proposition 6, la k(P)-algèbre $D \otimes_P k(\hat{P})$ est isomorphe à l'algèbre des matrices $r \times r$ à coefficients dans $k(\hat{P})$. Mais ceci est absurde car $D \otimes_P k(\hat{P})$ est intègre d'après (iii).

Pour achever la démonstration du Théorème 1, il suffit donc de construire D . On prend $D = k[X^{1/r}, Y^{1/r}]$. Il est clair que D est un $k[X,Y]$ -module libre de rang r^2 . De plus,

$$D \otimes_P k(\hat{P}) \subset k((X^{1/r}, Y^{1/r})) \quad ,$$

qui est une $k(\hat{P})$-algèbre intègre. Il reste à montrer que le gradué du A-module $D \otimes_P k$ est trivial, et (iv), ce qui est aisé.

Ceci achève la démonstration du Théorème 1.

APPENDICE

LE THÉORÈME DE LUNA

Enoncé : On suppose k de caractéristique 0.

Soit X une variété affine sur laquelle agit un groupe réductif G. Soit T une orbite fermée de G dans X telle que X soit normale le long de T, .

Alors si x est un point de T, il existe une sous-variété localement fermée V de X, contenant x, G_x-stable (G_x désignant le groupe d'isotropie de x), telle que $G.V$ soit ouvert dans X, et que le G-morphisme

$$G \times_{G_x} V \longrightarrow G.V$$

soit fortement étale.

De plus, si X est lisse en x, on peut choisir V lisse et il existe un G_x-morphisme fortement étale de V sur un voisinage de 0 dans T_{Xx}/T_{Tx}.

(Voir [14] et [16]).

SEPTIÈME PARTIE : FAISCEAUX (SEMI)-STABLES SUR UNE COURBE RÉDUITE

INTRODUCTION

On généralise ici les résultats de la première partie, c'est à dire qu'on s'intéresse aux fibrés vectoriels sur une courbe X projective et réduite (mais pas nécessairement lisse ou irréductible). Malheureusement les variétés de modules ainsi obtenues ne sont pas complètes et on est conduit à considérer des faisceaux de profondeur 1.

La définition de la (semi-)stabilité d'un faisceau cohérent de profondeur 1 sur X doit bien sûr tenir compte des composantes irréductibles de X, c'est pourquoi elle fait intervenir une polarisation de X.

Le principal résultat de cette partie est l'existence des variétés de modules de faisceaux cohérents de profondeur 1 sur X.

Dans le Chapitre I on définit les faisceaux cohérents de profondeur 1 et on donne quelques unes de leurs propriétés.

Dans le Chapitre II on définit les faisceaux de profondeur 1 (semi-)stables et on en étudie quelques propriétés.

Dans le Chapitre III est donné le Théorème d'existence.

I.- FAISCEAUX COHÉRENTS DE PROFONDEUR 1

DÉFINITION 1 : Soit x un point de X, M un $\mathcal{O}_x$-module de type fini. On dit que M est *de profondeur 1* s'il existe un élément de m_x qui ne soit pas un diviseur de zéro de M.

Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X est dit de profondeur 1 si pour tout point x de X, $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module de profondeur 1.

Le Lemme suivant donne une caractérisation des faisceaux cohérents de profondeur 1 sur X.

LEMME 2 : *Soit* x *un point de* X, M *un* $\mathcal{O}_x$*-module de type fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est de profondeur 1.*

(ii) aucun élément de m_x *ne s'annulant sur aucune composante irréductible de* X *passant par* x *n'est un diviseur de zéro de* M.

Il est évident que (ii) entraine (i).

Supposons (i) vraie.

Soit ρ un élément non nul de m_x ne s'annulant sur aucune composante irréductible de X, m un élément non nul de M. Il faut montrer que $\rho.m \neq 0$. Supposons le contraire. Alors $\mathcal{O}_x.m$ est de dimension finie sur k, et on en déduit immédiatement que M ne peut être de profondeur 1 (pour tout élément u de m_x, l'endomorphisme de $\mathcal{O}_x.m$ induit par la multiplication par u ne peut pas être injectif, car il ne peut être surjectif).

Ceci achève la démonstration du Lemme 2.

On déduit du Lemme 2 que la restriction d'un faisceau cohérent de profondeur 1 à une composante irréductible de X est nulle ou sans torsion en dehors des points d'intersection avec les autres composantes irréductibles.

En particulier, les faisceaux cohérents de profondeur 1 sur une courbe irréductible sont les faisceaux sans torsion. Ce sont les faisceaux localement libres si la courbe est lisse.

<u>LEMME 3</u> : *Soit* $\mathcal{G}$ *un faisceau cohérent sur* X. *Il existe un unique sous-faisceau* T *de* $\mathcal{G}$ *concentré en un nombre fini de points tel que* $\mathcal{G}/T$ *soit de profondeur 1.*

Unicité : Si T,T' sont des sous-faisceaux de $\mathcal{G}$ concentrés en un nombre fini de points et tels que $\mathcal{G}/T$ et $\mathcal{G}/T'$ soient de profondeur 1, on voit aisément en utilisant le Lemme 2 que les morphismes

$$T \longrightarrow \mathcal{G}/T'$$
$$T' \longrightarrow \mathcal{G}/T$$

sont nuls, donc $T = T'$.

Existence : en chaque point x de X, T_x est l'ensemble des éléments u de $\mathcal{G}_x$ tels qu'il existe un élément ρ de $\mathcal{O}_x$ non diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_x$ tel que $\rho.u = 0$.

Le fait que T soit un faisceau cohérent découle de ce que si x est un point de X et ρ un élément de $\mathcal{O}_x$ qui n'est pas diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_x$, l'idéal (ρ) contient une puissance de m_x.

On dit que T est le *sous-faisceau de torsion* de $\mathcal{G}$.

<u>REMARQUES</u> : 1 - Tout faisceau localement libre sur X est de profondeur 1.

2 - Tout sous-faisceau d'un faisceau de profondeur 1 est de profondeur 1.

Soient $X_1,\dots,X_m$ les composantes irréductibles de X, $y_1,\dots,y_p$ les points de X situés sur plusieurs composantes irréductibles, et pour $1 \leq j \leq p$, $X_{a(j,1)},\dots,X_{a(j,q_j)}$ les composantes irréductibles de X passant par y_j. On pose

$$\mathcal{O}_{jl} = \mathcal{O}_{X_{a(j,l)},y_j}$$

$$m_{jl} = m_{X_{a(j,l)},y_j} \quad .$$

On a

$$m_{y_j} = \bigoplus_{i=1}^{q_j} m_{jl}$$

et $\quad m_{jl}.m_{jl'} = 0 \quad \text{si} \quad l \neq l' \quad .$

Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X , et $1 \leqq i \leqq m$, on pose

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}/_{X_i} \quad ,$$

et on note de même son image réciproque sur X . On pose

$$\mathcal{F}_{jl} = \mathcal{F}/_{X_{a(j,l)},y_j} \quad ,$$

pour $1 \leqq j \leqq m$ et $1 \leqq l \leqq q_j$.

PROPOSITION 4 : *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau de profondeur* 1 *sur* X , *et pour* $1 \leqq i \leqq m$,

$$r_i = rg(\mathcal{F}_i) \quad .$$

Alors on a

$$\chi(\mathcal{F}) \leq \sum_{i=1}^{m} \chi(\mathcal{F}_i) \leq \chi(\mathcal{F}) + C \quad ,$$

avec

$$C = \sum_{j=1}^{n} q_j.(\sum_{l=1}^{q_j} r_{a(j,l)}.(1 + \delta_{jl})) \quad ,$$

avec

$$\delta_{jl} = \dim_k(\tilde{\mathcal{O}}_{jl}/\mathcal{O}_{jl})$$

$\tilde{\mathcal{O}}_{jl}$ *désignant la cloture intégrale de* $\mathcal{O}_{jl}$.

La démonstration de cette Proposition nécéssitera quelques préliminaires.

Faisceaux sans torsion sur une courbe irréductible.

Les résultats qui suivent sont démontrés en rang 1 dans [5] .

Soit r un entier, $r > 0$. Soit Y une courbe irréductible projective sur k , x un point de Y , $\pi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ la normalisation de Y . Soient $x_1, \ldots . x_p$ les points de $\tilde{Y}$ au-dessus de x . On a un isomorphisme canonique

$$\tilde{\mathcal{O}}_x = \mathcal{O}_{x_1} \cap \ldots . \cap \mathcal{O}_{x_p} \quad ,$$

$\tilde{\mathcal{O}}_x$ désignant la cloture intégrale de $\mathcal{O}_x$, et $\tilde{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x$ est un k-espace vectoriel de dimension $p-1$. On pose

$$\delta_x = p - 1 \quad .$$

L'anneau $\tilde{\mathcal{O}}_x$ est principal et possède p idéaux maximaux,

$$m'_{x_i} = m_{x_i} \cap \left(\bigcap_{j=1} \mathcal{O}_{xj}\right) \quad , \quad 1 \leq i \leq p \quad .$$

Tout idéal de $\tilde{\mathcal{O}}_x$ s'écrit de façon unique comme produit de puissances de ces idéaux maximaux.

Si M est un $\mathcal{O}_x$-module , on notera $\tilde{M}$ le $\tilde{\mathcal{O}}_x$-module $M \otimes_{\mathcal{O}_x} \tilde{\mathcal{O}}_x$.

Soit $\mathcal{O}(1)$ un faisceau inversible ample sur Y .

<u>LEMME 5</u> : *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sans torsion de rang r sur Y . Il existe un entier m tel qu'il existe un morphisme injectif*

$$\mathcal{F}(-m) \longrightarrow r.\mathcal{O}_Y \quad .$$

Pour m assez grand le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}(-m), r.\mathcal{O}_Y$ est engendré par ses sections globales. Soit y un point lisse de Y , alors on a

$$\mathcal{F}(-m)_y \simeq r.\mathcal{O}_y \quad .$$

Soit $\Psi : \mathcal{F}(-m)_y \longrightarrow r.\mathcal{O}_y$ un isomorphisme, $\rho : \mathcal{F}(-m) \longrightarrow r.\mathcal{O}_Y$ un morphisme tel que $\rho_y = \Psi$. Puisque $\mathcal{F}$ est sans torsion ρ est injectif.

Ceci prouve le Lemme 5.

<u>LEMME 6</u> : *Soit M un $\mathcal{O}_x$-module sans torsion de rang r . Il existe des éléments $m_1,\dots,m_r$ de M tels que*

$$\tilde{M} \simeq \bigoplus_{i=1} \tilde{\mathcal{O}}_x.m_i \quad .$$

Démonstration par récurrence sur r .

D'après le Lemme précédent, on peut supposer que $M \hookrightarrow r.\mathcal{O}_x$.

Supposons que $r = 1$, alors M est un idéal de $\mathcal{O}_x$. On peut écrire

$$\tilde{M} = \prod_{i=1}^{p} m_i'^{\,r_i} \quad , \quad r_i \geq 0 \quad .$$

Soient

$$p_i : M \longrightarrow m_{x_i}^{r_i}/m_{x_i}^{r_i+1} \quad , \quad 1 \leq i \leq p \quad ,$$

$$p : M \longrightarrow \prod_{1\leq i\leq p} m_{x_i}^{r_i}/m_{x_i}^{r_i+1}$$

les morphismes canoniques. On a $p_i \neq 0$ sinon

$$M \subset m_{x_i}^{r_i+1} \;.\; \prod_{j\neq 1} m_{x_j}^{r_j} \quad .$$

Donc $\mathrm{Ker}(p_i)/\mathrm{Ker}(p) \neq M/\ker(p)$. Puisque k est infini, on a

$$M/\mathrm{Ker}(p) \neq \bigcup_{1\leq i\leq p} \mathrm{Ker}(p_i)/\mathrm{Ker}(p) \quad .$$

Soit m_1 un élément de M au-dessus d'un élément de $(M/\mathrm{Ker}(p))\setminus(\bigcup_{1\leq i\leq p} \mathrm{Ker}(p_i)/\mathrm{Ker}(p))$. Il est aisé de voir que

$$\tilde{M} = (m_1) \quad .$$

Supposons le Lemme 6 vrai pour $r-1\geq 1$ et M de rang r . Considérons la première projection

$$q : r.\mathcal{O}_y \longrightarrow \mathcal{O}_y \quad .$$

Posons

$$M' = M \cap \mathrm{Ker}(q) \quad .$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à M' on voit que

$$\tilde{M}' \simeq \bigoplus_{i=1}^{r-1} \tilde{\mathcal{O}}_x . m_i \quad ,$$

avec $m_1,\ldots.m_{r-1}$ dans M' . Si $M'' = q(M)$, d'après ce qui précède on a

$$\tilde{M}'' = \tilde{\mathcal{O}}_x . m \quad ,$$

avec m dans M'' .

On en déduit aisément que $\tilde{M} = \tilde{M}' \oplus \tilde{M}''$.

Le Lemme 6 en découle immédiatement.

<u>LEMME 7</u> : *Soit* M *un* $\mathcal{O}_x$*-module sans torsion de rang* r*. Alors on a*

$$\dim_k(M/m_x.M) \leq (1+\delta_x).r$$

D'après le Lemme 6 on a

$$M = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \tilde{\mathcal{O}}_x . m_i \quad ,$$

avec $m_1,\ldots.,m_r$ dans M . Donc

$$\begin{aligned} \dim_k(M/m_x.M) &\leqslant r.\dim_k(\tilde{\mathcal{O}}_x/m_x) \\ &\leqslant r.(\dim_k(\tilde{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x) + \dim_k(\mathcal{O}_x/m_x)) = (1+\delta_x).r \quad , \end{aligned}$$

ce qui prouve le Lemme 7.

Démontrons maintenant la Proposition 4.

Montrons d'abord que le morphisme canonique

$$\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus_{1\leq i\leq m} \mathcal{F}_i$$

est injectif.

Le noyau de ρ est $\bigcap_{i=1}^{m} I_i.\mathcal{F}$, I_i désignant l'idéal de X_i .

En un point x de X distinct des y_j , on a $I_{ix} = \{0\}$, donc $\mathrm{Ker}(\rho)_x = 0$.

Si $1\leq l\leq q_j$, on a

$$I_{a(j,l)y_j} = \bigoplus_{s\neq l} m_{jl} \quad ,$$

donc

$$m_{jl}.I_{a(j,l)y_j} = \{0\} \quad ,$$

d'où $m_{y_j}.\mathrm{Ker}(\rho)_{y_j} = \{0\}$,

et comme $\mathcal{F}$ est de profondeur 1,

$$\mathrm{Ker}(\rho)_{y_j} = \{0\} .$$

Le morphisme ρ est donc injectif.

Soit T le conoyau de ρ , c'est un faisceau de torsion concentré en les y_j . On a

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{m} \chi(\mathcal{F}_i) - l(T) ,$$

ce qui prouve déjà que

$$\chi(\mathcal{F}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \chi(\mathcal{F}_i) .$$

D'autre part on a, pour $1 \leqq j \leqq n$,

$$\bigoplus_{1 \leqq l \leqq q_j} m_{jl}.\mathcal{F}_{jl} \subset \mathrm{Im}(\rho)_{yj}$$

donc

$$l(T_{y_j}) \leqq \sum_{1 \leqq l \leqq q_j} l(\mathcal{F}_{jl}/m_{jl}.\mathcal{F}_{jl}) .$$

Or on a

$$\mathcal{F}_{jl}/m_{jl}.\mathcal{F}_{jl} \simeq \mathcal{F}_{y_j}/m_{y_j}.\mathcal{F}_{yj}$$

(car $m_{y_j} \quad \bigoplus_{1 \leqq l \leqq q_j} m_{jl}$ et $\mathcal{F}_{jl} = \mathcal{F}_{y_j}/(\bigoplus_{s \neq l} m_{js}).\mathcal{F}_{y_j})$.

Donc

$$l(T_{y_j}) \leqq q_j.l(\mathcal{F}_{y_j}/m_{y_j}.\mathcal{F}_{y_j}) .$$

et il reste à prouver que

$$l(\mathcal{F}_{y_j}/m_{y_j}.\mathcal{F}_{y_j}) \leqq \sum_{1 \leqq l \leqq q_j} r_{a(j,l)}.(1 = \delta_{jl}) .$$

Pour $1 \leqq l \leqq q_j$ soit T'_l le sous-module de torsion de $\mathcal{F}_{jl}$, et

$$\mathcal{G}_l = \mathcal{F}_{jl}/T'_l .$$

Alors $\mathcal{G}_l$ est un $\mathcal{O}_{jl}$-module sans torsion de rang $r_{a(j,l)}$. Soit t' un élément de T'_l . Montrons que pour tout élément t de $\mathcal{F}_{y_j}$ au-dessus de t' on a

$$m_{jl}.t = \{0\} .$$

En effet il existe un entier $r > 0$ tel que

$$m_{jl}^{r}.t \subset \bigoplus_{s \neq l} m_{js}.\mathcal{F}_{y_j}$$

(car t' est dans T'_l) . On en déduit immédiatement que

$$m_{y_j}.m_{jl}^{r}.t = \{0\} ,$$

donc $m_{jl}^{r}.t = \{0\}$ puisque $\mathcal{F}$ est de profondeur 1. Si $r > 1$, on a

$$m_{y_j}.m_{jl}^{r-1}.t = \{0\}$$

donc encore $m_{j1}^{r-1}.t = \{0\}$, et en raisonnant par récurrence on obtient

$$m_{j1}.t = \{0\} .$$

On a un morphisme canonique

$$\Psi : T'_1 \longrightarrow \bigoplus_{s\neq 1} \mathcal{G}_s/m_{js}.\mathcal{G}_s$$

qui est injectif :

Soit t' un élément de T'_1 tel que $\Psi(t') = 0$, t un élément de $\mathcal{F}_{y_j}$ au-dessus de t' . On peut écrire, pour $s \geqq 2$, $t = v + t_s$, avec v dans $m_{y_j}.\mathcal{F}_{y_j}$ et t_s au-dessus d'un élément de T'_s (car l'image de t' dans $\mathcal{G}_s/m_{js}.\mathcal{G}_s$ est nulle).

D'après ce qui précède, on a $m_{js}.t_s = \{0\}$. On peut donc écrire

$$m_{js}.t = m_{js}.a_s.u_s ,$$

avec u_s dans $\mathcal{F}_{y_j}$ et a_s dans m_{js} .

Soit

$$u = a_2.u_2 + \dots + a_{q_j}.u_{q_j} .$$

Alors

$$m_{js}.(t-u) = \{0\} \text{ pour } s \geqq 2 ,$$

et

$$m_{j1}.(t-u) = \{0\} \text{ car } t' \text{ est dans } T'_1 .$$

On a donc $t = u$ car $\mathcal{F}$ est de profondeur 1. Donc $t' = 0$, ce qui prouve que Ψ est injective.

On a donc

$$\dim_k(\mathcal{F}_{y_j}/m_{y_j}.\mathcal{F}_{y_j}) = \dim_k(\mathcal{F}_{j1}/m_{j1}.\mathcal{F}_{j1})$$

$$= \dim_k(T'_1) + \dim_k(\mathcal{G}_1/m_{j1}.\mathcal{G}_1) \leq \sum_{l=1}^{q_j} \dim_k(\mathcal{G}_l/m_{jl}.\mathcal{G}_l)$$

$$\leq \sum_{l=1}^{q_j} r_{a(j,l)}.(1 + \delta_{jl}) ,$$

d'après le Lemme 7.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 4.

De la démonstration de la Proposition 4 découle le

<u>COROLLAIRE 8</u> : *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau de profondeur* 1 *et* L *un fibré en droites sur* X . *Alors on a*

$$\chi(\mathcal{F} \otimes L) = \chi(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{m} rg(\mathcal{F}_i).\deg(L_i) .$$

Cela découle immédiatement de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus_{1\leqq j\leqq m} \mathcal{F}_i \longrightarrow T \longrightarrow 0 .$$

II.- FAISCEAUX DE PROFONDEUR 1 SEMI-STABLES. QUELQUES PROPRIÉTÉS

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres rationnels tels que

$$a_i > 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 1 \quad .$$

On pose

$$a = (a_i)_{1 \leq i \leq m} \quad .$$

Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X on pose

$$a\text{-rg}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{m} a_i . \text{rg}(\mathcal{F}_i) \quad ,$$

$$a\text{-}\mu(\mathcal{F}) = \frac{\chi(\mathcal{F})}{a\text{-rg}(\mathcal{F})} \quad (\text{si} \quad a\text{-rg}(\mathcal{F}) \neq 0 \ ) \quad .$$

DÉFINITION 9 : Un faisceau de profondeur 1 , $\mathcal{F}$, est dit a-*semi-stable* (resp. a-*stable*) si pour tout sous-faisceau propre $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, on a

$$a\text{-}\mu(\mathcal{G}) \leq a\text{-}\mu(\mathcal{F}) \quad (\text{resp.} <) \quad .$$

(Si a est donné on parlera plus simplement de faisceaux (semi-)stables).

REMARQUES : 1 - Soit L un fibré en droites sur X tels que si $d_i = \deg(L_i)$ pour $1 \leq i \leq m$, on ait

$$a_i . d_j = a_j . d_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \ , \ j \leq m \quad .$$

Alors pour tout faisceau de profondeur 1 $\mathcal{F}$ sur X , $\mathcal{F} \otimes L$ est de profondeur 1, et est semi-stable (resp. stable) si et seulement si $\mathcal{F}$ l'est. Ceci résulte du Corollaire 8.

2 - Soit Y une courbe projective sur k qui est une sous-variété de X (Y est donc la réunion de certaines composantes irréductibles de X) , et $\mathcal{F}$ un faisceau de profondeur 1 sur Y . Alors l'image directe de $\mathcal{F}$ sur X est de profondeur 1 et est semi-stable (resp. stable) si et seulement si $\mathcal{F}$ l'est.

3 - Un faisceau de profondeur 1 sur X , $\mathcal{F}$, est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout quotient $\mathcal{G}$ non trivial et de profondeur 1 de $\mathcal{F}$, on a

$$\frac{\chi(\mathcal{G})}{a\text{-rg}(\mathcal{G})} \geq \frac{\chi(\mathcal{F})}{a\text{-rg}(\mathcal{F})} \quad (\text{resp.} >) \quad .$$

Morphismes de faisceaux (semi-)stables. Théorème de Jordan-Hölder

Les démonstrations des résultats qui suivent sont calquées sur celles des Propositions I-6, Corollaire I-7 , Propositions I-8 et I-9 et Théorèmes I-10.

Pour la Proposition 12, on utilise le Lemme 3.

PROPOSITION 10 : *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des faisceaux de profondeur 1 semi-stables sur* X *, supposée connexe.*

a) Si $a\text{-}\mu(\mathcal{F}) < a\text{-}\mu(\mathcal{E})$ *, on a* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 0$.

b) Si $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *sont stables, et* $a\text{-}\mu(\mathcal{E}) = a\text{-}\mu(\mathcal{F})$ *on a* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \{0\}$ *ou bien* $\mathcal{E} \simeq \mathcal{F}$.

c) Si $\mathcal{E}$ *est stable ,* $\mathcal{E}$ *est simple, c'est à dire que ses seuls endomorphismes sont les homothéties.*

COROLLAIRE 11 : *Soient* $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$ *des faisceaux de profondeur 1 semi-stables sur* X *tels que* $a\text{-}\mu(\mathcal{E}_1) = a\text{-}\mu(\mathcal{E}_2)$ *, et* $\mathcal{E}$ *une extension de* $\mathcal{E}_2$ *par* $\mathcal{E}_1$.
Alors $\mathcal{E}$ *est un faisceau de profondeur 1 semi-stable.*

Soit μ un nombre rationnel et C_μ la catégorie dont les objets sont les faisceaux de profondeur 1 semi-stables $\mathcal{E}$ sur X tels que $a\text{-}\mu(\mathcal{E}) = \mu$, et les morphismes de faisceaux cohérents entre ces faisceaux.

D'après le Corollaire 11, on peut définir de manière évidente la somme directe de deux objets (ou deux morphismes) de la catégorie C_μ .

PROPOSITION 12 : *Soient* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *des faisceaux de profondeur 1 semi-stables sur* X *tels que* $a\text{-}\mu(\mathcal{E}) = a\text{-}\mu(\mathcal{F})$ *, et* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *un morphismes de faisceaux.*

Alors le faisceau Coker(f) *est de profondeur 1 et semi-stable,* Ker(f) *est semi-stable et*

$$a\text{-}\mu(\mathrm{Ker}(f)) = a\text{-}\mu(\mathrm{Coker}(f)) = a\text{-}\mu(\mathcal{E}) \quad .$$

On en déduit la

PROPOSITION 13 : *La catégorie* C_μ *est abélienne, artinienne et noetherienne.*

On peut donc appliquer à C_μ le Théorème de Jordan-Hölder, ce qui donne le

THÉORÈME 14 : *Soit* $\mathcal{E}$ *un faisceau de profondeur 1 semi-stable sur* X .
Il existe une filtration de $\mathcal{E}$ *par des sous-faisceaux*

$$0 = \mathcal{E}_{p+1} \subset \mathcal{E}_p \subset \dots \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$$

telle que pour $0 \leqq i \leqq p$,
$\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ *soit de profondeur 1 et stable et*

$$a\text{-}\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}) = a\text{-}\mu(\mathcal{E}) \quad .$$

De plus, la classe d'isomorphisme du faisceau

$\bigoplus_{1\leqq i\leqq p} \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ *ne dépend que de celle de* $\mathcal{E}$.
On note cette classe $\mathrm{Gr}(\mathcal{E})$.

III.- ESPACES DE MODULES DE FAISCEAUX STABLES. THÉORÈME D'EXISTENCE

Soient $r_1,\ldots,r_m$ des entiers ≥ 0 . On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur X est de rang $(r_1,\ldots r_m)$ si pour $1 \leq i \leq m$, on a

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}_i) = r_i \ .$$

Posons

$$\gamma = (r_1,\ldots,r_m) \quad , \ r = r_1.a_1 + \ldots + r_m.a_m \ .$$

On définit de manière évidente les familles de faisceaux de profondeur 1 (a-(semi-)stables) de rang γ et de caractéristique d'Euler d paramétrées par un k-schéma noetherien.

Les définitions des espaces de modules grossiers et des bons espaces de modules pour les faisceaux de profondeur 1 a-stables de rang γ et de caractéristique d'Euler d sur X sont calquées sur celles de la première partie (une modification cependant : pour pouvoir utiliser les schémas de Grothendieck, il faut se limiter à des familles plates de faisceaux stables). Soit $S'(a,\gamma,d)$ (resp. $S(a,\gamma,d)$) l'ensemble des classes d'isomorphismes de faisceaux a-stables (resp. a-semi-stables) de rang γ et de caractéristique d'Euler d .

THÉORÈME 15 : *Il existe un espace de modules grossier pour* $S'(a,\gamma, d)$ *dont le* k*-schéma sous-jacent est une variété quasi-projective, notée* $U_s(a,\gamma,d)$.

Cette variété possède une compacification naturelle notée $U(a,\gamma,d)$. *L'ensemble des points de* $U(a,\gamma,d)$ *à valeurs dans* k *est isomorphe au quotient de* $S(a,\gamma,d)$ *par la relation d'équivalence suivante : des faisceaux de profondeur 1 a-semi-stables* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *de rang* γ *et de caractéristique d'Euler* d *sont équivalents si et seulement si* $\mathrm{Gr}(\mathcal{E}) = \mathrm{Gr}(\mathcal{F})$.

On montre aussi que la a-(semi-)stabilité est une propriété ouverte. La variété $U(a,\gamma,d)$ possède elle aussi une "propriété universelle" évidente, liée aux familles plates de faisceaux a-semi-stables.

REMARQUE : Cas d'une courbe irréductible

Dans ce cas, $a = (1)$ et $\gamma = (r)$, et on note plus simplement

$$U(r,d) = U(a,\gamma,d) \quad , \quad U_s(r,d) = U_s(a,\gamma,d) \ .$$

Un faisceau sans torsion $\mathcal{F}$ de rang r et de degré d sur X est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout sous-faisceau propre $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ on a

$$\frac{\deg(\mathcal{G})}{\mathrm{rg}(\mathcal{G})} \leq \frac{\deg(\mathcal{F})}{\mathrm{rg}(\mathcal{F})} \quad (\text{resp. } <) \ .$$

En particulier, si X est lisse, les résultats de cette partie sont contenus dans ceux de la première partie.

On construit d'abord une famille de faisceaux de profondeur 1 de rang γ et de caractéristique d'Euler d "contenant" tous les éléments de $S(a,\gamma,d)$. On utilise pour cela les schémas de Grothendieck (voir première partie).

PROPOSITION 16 : *Soit* k_0 *un entier. Il existe un entier* d_0 *tel que pour tout faisceau de profondeur 1* a*-semi-stable* $\mathcal{F}$ *de rang* γ *et tel que* $a\text{-}\mu(\mathcal{F}) \geq d_0$ *les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(i) $\mathcal{F}$ *est engendré par ses sections globales et* $h^1(X,\mathcal{F}) = 0$.

(ii) Pour tout sous-faisceau $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{F}$ *tel que*

$$\chi(\mathcal{G}) \geq k_0 + \frac{a\text{-}rg(\mathcal{G})}{a\text{-}rg(\mathcal{F})} \cdot \chi(\mathcal{F}) \quad ,$$

$h^1(X,\mathcal{G}) = 0$ *et* $\mathcal{G}$ *est engendré par ses sections globales.*

LEMME 17 : *Soit* $\mathcal{E}$ *un faisceau cohérent sur* X . *Alors il existe un entier* $n > 0$ *tel que pour tout sous-faisceau* $\mathcal{H}$ *de* $\mathcal{E}$ *et tout point* x *de* X , *on ait*

$$\chi(\mathcal{E} \otimes m_x^*) \leq n \quad .$$

Laissé au lecteur.

Démontrons la Proposition 16.

On peut remplacer k_0 par $\mathrm{Inf}(k_0,0)$ et alors il suffit que la propriété (ii) soit vérifiée.

Soit $\mathcal{G}$ un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ tel que

$$\chi(\mathcal{G}) \geq k_0 + \frac{a\text{-}rg(\mathcal{G})}{a\text{-}rg(\mathcal{F})} \cdot \chi(\mathcal{F})$$

et $h^1(X,\mathcal{G}) \neq 0$.

Il existe alors un morphisme non nul

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow K \quad ,$$

dont le noyau est noté $\mathcal{H}$. Soit n l'entier du Lemme 17, pour $\mathcal{E} = K$. Alors on a

$$\chi(\mathcal{H}) \geq \chi(\mathcal{G}) - n \quad ,$$

donc
$$\chi(\mathcal{H}) \geq k_0 - n + \frac{a\text{-}rg(\mathcal{G})}{a\text{-}rg(\mathcal{F})} \cdot \chi(\mathcal{F})$$

On a

$$a\text{-}rg(\mathcal{H}) \leq a\text{-}rg(\mathcal{G}) - \mathrm{Inf}((a_i)) \quad ,$$

donc

$$a\text{-}\mu(\mathcal{H}) \geq \frac{k_0 - n = a\text{-}rg(\mathcal{G}) . a\text{-}\mu(\mathcal{F})}{a\text{-}rg(\mathcal{G}) - \mathrm{Inf}((a_i))} \quad ,$$

si $\mathcal{H} \neq 0$.

D'autre part, on a, par a-semi-stabilité de $\mathcal{F}$,

$$a\text{-}\mu(\mathcal{H}) \leq a\text{-}\mu(\mathcal{F}) \quad ,$$

donc

$$a\text{-}\mu(\mathcal{F}) \leq \frac{n - k_0}{\mathrm{Inf}((a_i))} \quad ,$$

et il suffit de prendre

$$d_0 > \frac{n - k_0}{\mathrm{Inf}((a_i))} \quad .$$

Si $\mathcal{H} = 0$, on obtient

$$n \geq k_0 + a\text{-rg}(\mathcal{G}) \, . a\text{-}\mu(\mathcal{F}) \quad ,$$

et le d_0 précédent convient.

Pour que $\mathcal{F}$ soit engendré par ses sections globales, il suffit que pour tout point x de X , on ait

$$h^1(X, \mathcal{F} \otimes m_x) = 0 \quad .$$

Le même raisonnement que précédemment permet de trouver d_0 .

Ceci achève la démonstration de la Proposition 16.

Soit $r = r_1 . a_1 + \dots . + r_m . a_m$.

Dans ce qui suit on suppose $d \geq d_0 . r$, pour un k_0 négatif (qui sera à déterminer ensuite). Soit $\mathcal{O}(1)$ un faisceau inversible ample sur X . Relativement à $\mathcal{O}(1)$, le polynôme de Hilbert d'un faisceau dont la classe d'isomorphisme est dans $S(a,\gamma,d)$ est

$$P(Y) = d + \sum_{1 \leq i \leq m} \deg(\mathcal{O}(1)_i) . r_i . Y \quad .$$

(Ceci se voit en remarquant que pour tout faisceau de profondeur 1 $\mathcal{F}$ sur X on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \mathcal{F}_i \longrightarrow T \longrightarrow 0 \quad ,$$

T étant un faisceau concentré en un nombre fini de points, ainsi qu'on l'a remarqué dans la démonstration de la Proposition 4.)

On pose

$$Q = \mathrm{Quot}^P_{\mathcal{O} \otimes k^d / X / k} \quad ,$$

et on note $\mathcal{F}$ un faisceau universel sur $Q \times X$ (voir 1.III) .

Soit R l'ouvert de Q constitué des points q tels que

- $(\mathcal{F}_q)_{\overline{k(q)}}$ est de profondeur 1 sur $(X_q)_{\overline{k(q)}}$,

  (Cf. EGA IV 12.2.2)

- Le morphisme $k(q)^d \longrightarrow H^0(X_q, \mathcal{F}_q)$ est un isomorphisme.

(Notons qu'on a alors $h^1(X_q, \mathcal{F}_q) = 0$.

Soit R^{ss} (resp. R^s) le sous-ensemble de R constitué des points q tels que $(\mathcal{F}_q)_{\overline{k(q)}}$ soit a-semi-stable (resp. a-stable) sur $(X_q)_{\overline{k(q)}}$.

Soient $N_1, \ldots, N_m$ des entiers > 0 tels que pour $1 \leqq i$, $j \leqq m$, on ait $N_i . a_j = N_j . a_i$ et soit

$$N = N_1 + \ldots + N_m .$$

et pour $1 \leqq i \leqq m$, $x_1^i, \ldots, x_{N_i}^i$ des points de X_i , distincts des y_j et lisses.

Soit

$$Z = \prod_{i=1}^{m} H_{d,r_i}^{N_i} ,$$

muni de la polarisation $(a_1, \ldots a_m)$ (pour les notations voir 1.III).

Ce qui suit découle immédiatement du Chapitre III de la première partie.

<u>PROPOSITION 18</u> : *Un point* $(F_{ij})_{1 \leqq i \leqq m; 1 \leqq j \leqq N_i}$ *est a-semi-stable (resp. a-stable) pour l'action de* $SL(d)$ *sur* Z *si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel propre* M *de* k^d *, on a, en notant* M_{ij} *l'image de* M *dans* F_{ij} :

$$- r.\dim(M) + \frac{d}{N} . \sum_{i,j} \dim(M_{ij}) \geqq 0 \quad (\textit{resp.} > 0) .$$

Soit

$$(\tau_{(x_j^i)} =) \quad \tau : R \longrightarrow Z$$
$$q \longmapsto (\mathcal{F}_{q_{x_j^i}})_{1 \leqq i \leqq m \ ; \ 1 \leqq j \leqq N_i} .$$

C'est un morphisme.

<u>THÉORÈME 19</u> : *Si* d *et* N *sont assez grands, il est possible de choisir les points* x_j^i *de telle sorte qu'on ait les propriétés suivantes :*

(i) τ *est injective*

(ii) $R^{ss} = \tau^{-1}(Z^{ss})$

(iii) $R^s = \tau^{-1}(Z^s)$

(iv) $\tau : R^{ss} \longrightarrow Z^{ss}$ *est propre.*

(i) On voit aisément qu'il suffit de prouver le résultat suivant :

Si q , q' sont des points de R tels que les quotients de k^d , $\mathcal{F}_{qx}$ et $\mathcal{F}_{q'x}$ soient les mêmes pour tout point lisse x de X , alors $q = q'$. On note $\mathcal{G}_q$ le noyau de $k^d \longrightarrow \mathcal{F}_q$.

Alors le morphisme

$$\mathcal{G}_q \longrightarrow k^d / \mathcal{G}_{q'} = \mathcal{F}_{q'}$$

a une image concentrée en un nombre fini de points de X (des points non lisses), et comme $\mathcal{F}_{q'}$ est de profondeur 1, de morphisme est nul, et $\mathcal{G}_q \subset \mathcal{G}_{q'}$. De même on a $\mathcal{G}_{q'} \subset \mathcal{G}_q$, d'où $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_{q'}$ et $q = q'$.

<u>(ii) et (iii)</u>

Montrons d'abord : pour un choix convenable de (x_j^i) , *pour tout point* q *de* R , *si* $\mathcal{F}_q$ *est semi-stable (resp. stable) il en est de même de* $\tau(q)$.

Pour tout sous-espace vectoriel M de k^d, on pose, en notant M_{ij} l'image de M dans $\mathcal{F}_{q x_j^i}$,

$$\lambda(M) = -r.\dim(M) + \frac{d}{N}.\sum_{i,j} \dim(M_{ij}) \quad .$$

Soit M un sous-espace vectoriel propre de k^d. Soit $\mathcal{G}'$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}_q$ engendré par M. On pose $r_i' = \mathrm{rg}(\mathcal{G}'_i)$.
Soit T le sous-faisceau de torsion de $\mathcal{F}_q/\mathcal{G}'$, voir Lemme 3.
Soit $\mathcal{G}$ l'image réciproque de T par le morphisme $\mathcal{F}_q \longrightarrow \mathcal{F}_q/\mathcal{G}'$.

a) *Cas où* $h^1(\mathcal{G}) = 0$, $\mathcal{G}$ *est engendré par ses sections globales, et* M *engendre tous les* $\mathcal{G}_{x_j^i}$

Alors

$$\lambda(M) = -r.\dim(M) + \frac{d}{N} \sum_{1\leq i\leq m} r_i'.N_i$$
$$= -r.\dim(M) + a\text{-}\mathrm{rg}(\mathcal{G}).d$$

On a $\dim(M) \leq h^0(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{G})$ car $h^1(\mathcal{G}) = 0$,
d'où

$$\lambda(M) = -r.\chi(\mathcal{G}) + a\text{-}\mathrm{rg}(\mathcal{G}).\chi(\mathcal{F}_q) \quad ,$$

et $\qquad \lambda(M) \geq 0$ (resp. > 0), par a-(semi-)stabilité de $\mathcal{F}_q$.

b) *Cas où* $h^1(\mathcal{G}) = 0$, $\mathcal{G}$ *est engendré par ses sections globales,* M *n'engendre pas tous les* $\mathcal{G}_{x_j^i}$

Le Lemme 13 de la quatrième partie s'étend au cas d'une courbe irréductible non nécessairement lisse (la démonstration est la même). Donc sur chaque X_i, il existe au plus

$\deg(\mathcal{G}_i) = \chi(\mathcal{G}_i) + r_i'.(g_i-1)$ points x_j^i tels que M n'engendre pas $\mathcal{G}_{x_j^i}$, g_i désignant le genre arithmétique de X_i. De plus,

$$\dim(M) \leq \chi(\mathcal{G}) - 1 \quad ,$$

car $\mathcal{G}$ est engendré par ses sections globales, donc

$$\lambda(M) \geq -r.(\chi(\mathcal{G}) - 1) + \frac{d}{N}\cdot\sum_{1\leq i\leq m} (N_i-(\chi(\mathcal{G}_i) + r_i'.(g_i-1))).r_i'$$
$$= -r.\chi(\mathcal{G}) + a\text{-}\mathrm{rg}(\mathcal{G}).\chi(\mathcal{F}_q) + r - \frac{d}{N}\sum_{1\leq i\leq m} r_i'.(g_i-1)$$
$$- \frac{d}{N}.\sum_{1\leq i\leq m} r_i'.\chi(\mathcal{G}_i) \quad .$$

Il existe une constante C, ne dépendant que de X et r, telle que

$$\sum_{1\leq i\leq m} \chi(\mathcal{G}_i) \leq \chi(\mathcal{G}) + C \quad ,$$

donc

$$\sum_{1 \leq i \leq m} r'_i . \chi(\mathcal{G}_i) \leq \operatorname{Max}(r'_i).(\chi(\mathcal{G}) + C)$$

$$\leq \operatorname{Max}(r_i).(\frac{\text{a-rg}(\mathcal{G}).d}{\text{a-rg}(\mathcal{F}_q)} + C)$$

(par semi-stabilité de $\mathcal{F}_q$) , d'où

$$\lambda(M) \geq -r.\chi(\mathcal{G}) + \text{a-rg}(\mathcal{G}).\chi(\mathcal{F}_q) + r - \frac{d}{N}.(C_0 + C_1\chi(\mathcal{F}_q)) ,$$

C_0 et C_1 étant des constantes dépendant de r et X .

On peut choisir N assez grand pour que

$$r > \frac{d}{N}.(C_0 + C_1.d) ,$$

et par a-semi-stabilité de $\mathcal{F}_q$, on a

$$-r.\chi(\mathcal{G}) + \text{a-rg}(\mathcal{G}).\chi(\mathcal{F}_q) \geq 0 ,$$

d'où

$$\lambda(M) > 0 .$$

c) *Cas où* $h^1(\mathcal{G}) \neq 0$ *,ou bien* $\mathcal{G}$ *n'est pas engendré par ses sections globales*

On a alors, avec $r' = \text{a-rg}(\mathcal{G})$,

$$\chi(\mathcal{G}) < k_0 + \frac{r'}{r}.d .$$

Il existe une constante C ne dépendant que de X et de r telle que

$$h^0(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{G}) + C$$

(Ceci découle de la Proposition 4 et du Lemme 14 de la quatrième partie qui s'applique à chaque composante de X). On a alors

$$\lambda(M) \geq -r.(\chi(\mathcal{G}) + C) + \frac{d}{N}.\sum_{1 \leq i \leq m} (N_i - \chi(\mathcal{G}_i) - r'_i.(g_i - 1)).r'_i$$

$$\geq r'\chi(\mathcal{F}_q) - r.\chi(\mathcal{G}) - r.C - \frac{d}{N}.C_0 - \frac{d}{N}.C_1.\chi(\mathcal{G})$$

(pour des constantes C_0 et C_1) ,

$$\geq r'.\chi(\mathcal{F}_q) - r'.\chi(\mathcal{F}_q) - r.k_0 - r.C$$

$$- \frac{d}{N}.(C_0 + C_1.k_0 + \frac{r'}{r}.\chi(\mathcal{F}_q))$$

$$= - k_0.(r - \frac{d.C_0}{N}) - r.C - \frac{d}{N}.\frac{r'}{r}.\chi(\mathcal{F}_q) - \frac{d}{N}.C_1 .$$

Il faut donc que

$$k_0 < - (r - \frac{d.C_0}{N})^{-1}.(r.C + \frac{1}{N}.\frac{r'}{r}.d^2 + \frac{d}{N}.C_1) .$$

On choisit d'abord d de telle sorte que

$$k_0 < -(r - \frac{1}{2})^{-1}.(r.C + 1)$$

puisse être pris, puis N tel que

$$\frac{d.C_0}{N} < \frac{1}{2} , \quad \frac{d^2}{N} < \left(\frac{r'}{r} + \frac{C_1}{d}\right)^{-1}$$

et on a alors

$$\lambda(M) > 0$$

Montrons maintenant :

Si q *est un point de* Q *tel que* $\tau(q)$ *soit semi-stable (resp. stable) alors* $\mathcal{F}_q$ *l'est aussi.*

Soit $\mathcal{G}$ un sous-faisceau propre de $\mathcal{F}_q$.

a) *Cas où* $h^1(\mathcal{G}) \neq 0$, *ou bien* $\mathcal{G}$ *n'est pas engendré par ses sections globales*

Alors

$$\chi(\mathcal{G}) \leq k_0 + \frac{r'}{r} \cdot \chi(\mathcal{F})$$

et puisque $k_0 < 0$, on a

$$a-\mu(\mathcal{G}) < a-\mu(\mathcal{F}) \quad .$$

b) *Cas où* $h^1(\mathcal{G}) = 0$ *et* $\mathcal{G}$ *est engendré par ses sections globales*

On prend $M = H^0(\mathcal{G})$ et on obtient aussitôt la a-(semi)stabilité de $\mathcal{F}_q$.

Ceci prouve (ii) et (iii).

(iv) Pour montrer que $\tau : R^{ss} \longrightarrow Z^{ss}$ est propre, il suffit de prouver qu'il existe une partie fermée Y de $Q \times Z$ telle que le graphe de $\tau : R^{ss} \longrightarrow Z^{ss}$ l'intersection de Y et $Q \times Z^{ss}$.

On définit Y de la façon suivante : un point (q,z) de $Q \times Z$ appartient à Y si et seulement si pour tout (i,j) , $z_{ij} = k^d \longrightarrow \mathcal{F}_{q_{x_j^i}}$, (et alors $\mathcal{F}_q$ est libre en x_j^i) ou alors si $\mathcal{F}_{q_{x_j^i}}$ est non libre.

Il est immédiat que Y est fermé dans $Q \times Z$. Il reste à voir que $Y \cap (Q \times Z)$ est le graphe de $\tau : R^{ss} \longrightarrow Z^{ss}$. Il est évident que pour tout point q de R^{ss} , $(q,\tau(q))$ est dans Y . Il reste à montrer que si (q,z) est un point de Y tel que q ne soit pas dans R^{ss} , alors z n'appartient pas à Z^{ss} .

Supposons que q soit dans R . Alors $z = \tau(q)$, et d'après (ii) , z n'est pas dans Z^{ss} .

Si q n'est pas dans R , remarquons que les caractéristiques d'Euler des quotients de $\mathcal{O} \otimes k^d$ sont minorées, donc il existe un entier p (indépendant de q) tel que $\mathcal{F}_q$ soit non libre en au plus p points x_j^i . Si $\mathcal{F}_q$ n'est pas de profondeur 1 ou si $k^d \longrightarrow H^0(\mathcal{F}_q)$ n'est pas injective, il existe un sous-espace propre M de k^d tel que

$$z_j^i(M) = \{0\}$$

pour au moins $N - p$ points x_j^i . Si $\mathcal{F}_q$ n'est pas de profondeur 1 , M est constitué de sections globales du sous-faisceau de torsion de $\mathcal{F}_q$, et si $k^d \longrightarrow H^0(\mathcal{F}_q)$ n'est pas injectif, M est le noyau de cette application.

Alors

$$\lambda(M) \leq -r.\dim(M) + \frac{p.\dim(M).d}{N} \quad ,$$

et il suffit de prendre

$$N > \frac{p.d}{r} \quad .$$

On suppose maintenant que $\widetilde{\mathcal{F}}_q$ est de profondeur 1 et que l'application $k^d \xrightarrow{\rho} H^0(\mathcal{F}_q)$ est injective. Puisque q n'est pas dans R, cette application n'est pas surjective, et par conséquent, puisque $d = \chi(\mathcal{F}_q)$, on a $h^1(\mathcal{F}_q) \neq 0$.

Soit $\mathcal{G}$ un sous-faisceau propre de $\widetilde{\mathcal{F}}_q$, M l'image réciproque de $H^0(\mathcal{G})$ par ρ. On a

$$\dim(M) \geq d - h^0(\mathcal{F}_q) + h^0(\mathcal{G}) \quad .$$

On a déjà vu qu'il existait une constante C ne dépendant que de X et de r telle que

$$h^0(\mathcal{F}_q) \leq \chi(\mathcal{F}_q) + C \quad .$$

On a

$$h^0(\mathcal{G}) \geq \chi(\mathcal{G}) \quad ,$$

donc

$$\dim(M) \geq \chi(\mathcal{G}) - C \quad .$$

On a

$$\lambda(M) = -r.\dim(M) + a\text{-}rg(\mathcal{G}).d + \frac{d}{N}.\sum_{i,j}(\dim(M_{ij})-rg(\mathcal{G}_i)) \quad .$$

Le dernier terme est négatif. Il suffit donc de trouver $\mathcal{G}$ tel que

$$-r.\dim(M) + a\text{-}rg(\mathcal{G}).d < 0 \quad .$$

Supposons que pour tout choix de $\mathcal{G}$ on ait

$$-r.\dim(M) + a\text{-}rg(\mathcal{G}).d \geq 0 \quad .$$

Alors

$$a\text{-}\mu(\mathcal{G}) \leq a\text{-}\mu(\mathcal{F}_q) + \frac{C}{r} \quad .$$

Ceci est impossible si d est assez grand, ainsi que le montre le Lemme suivant.

<u>LEMME 20</u> : *Soit* D *une constante,* $\mathcal{F}$ *un faisceau de profondeur* 1 *sur* X *de rang* r *tel que pour tout sous-faisceau propre* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{F}$ *on ait*

$$a\text{-}\mu(\mathcal{G}) \leq a\text{-}\mu(\mathcal{F}) + D \quad .$$

Alors si

$$\chi(\mathcal{F}) \geq D' \quad ,$$

(D' *étant une constante dépendant de* a, r, D, X *) on a*

$$h^1(X,\mathcal{F}) = 0 \quad .$$

La démonstration est analogue à celle de la Proposition 16.

Ceci achève la démonstration du Théorème 19.

Le reste de la démonstration du Théorème 15 est analogue à ce qu'on a vu dans la première partie.

HUITIÈME PARTIE : POINTS DOUBLES ORDINAIRES

INTRODUCTION :

Cette partie traite des faisceaux de profondeur 1 (semi-)stables sur une courbe X projective et réduite, dont les points singuliers sont des points doubles ordinaires.

Dans ce cas on peut établir une relation entre faisceaux de profondeur 1 sur X et fibrés vectoriels sur la normalisation de X, munis d'une certaine structure. On n'a pas étudié la relation entre la (semi-)stabilité sur X et sur la normalisation de X. Il semble que les structures intervenant sur cette dernière aient un rapport avec les structures de niveau étudiées dans la quatrième partie.

On peut aussi montrer que les variétés de modules de faisceaux de rang 2 de profondeur 1 semi-stables sont réduites. On se ramène à étudier un point précis d'un certain schéma de Grothendieck.

Dans le Chapitre I on étudie les $\mathcal{O}_x$-modules de profondeur 1, x étant un point double ordinaire de X.

Dans le Chapitre II on établit une relation entre faisceaux de profondeur 1 sur X et fibrés vectoriels sur la normalisation de X. Pour simplifier on s'est placé dans le cas où X était réduite et n'avait qu'un seul point singulier.

Dans le Chapitre III on étudie les singularités des variétés de modules de faisceaux de profondeur 1 semi-stables. On montre en particulier que les variétés de modules de faisceaux de profondeur 1 semi-stables de rang 2 sur X sont réduites.

I.- POINTS DOUBLES ORDINAIRES

Soit X une courbe projective réduite sur k.

Soit $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ la normalisation de X (si X n'est pas irréductible, $\tilde{X}$ est simplement la réunion des normalisations des composantes irréductibles de X).

DÉFINITION 1 : Soit x un point de X. On dit que x est un *point double ordinaire* si la complétion de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ est isomorphe à $k[[Y,T]] / (Y.T)$.

Dans ce cas, $\pi^{-1}(x)$ est constitué de deux points. Un point x de X situé sur plusieurs composantes irréductibles de X est double ordinaire si et seulement si par x il passe deux composantes irréductibles de X et si x est lisse sur chacune d'elles.

Dans ce qui suit on suppose que les points singuliers de X sont des points doubles ordinaires.

On s'intéresse aux espaces de modules de faisceaux de profondeur 1 sur X (voir septième partie). Pour les étudier, il faut d'abord examiner la structure locale des faisceaux de profondeur 1 sur X .

Soit x un point double ordinaire de X . Supposons d'abord que x soit situé sur une seule composante irréductible de X , notée X_1 .

Posons

$$\pi^{-1}(x) = \{x_1, x_2\} \subset \tilde{X}_1 \ .$$

Soit $\tilde{\mathcal{O}}_x$ la normalisation de $\mathcal{O}_x$. Alors on a

$$\tilde{\mathcal{O}}_x = \mathcal{O}_{x_1} \cap \mathcal{O}_{x_2}$$

$$\mathcal{O}_x = \left\{\rho \in \tilde{\mathcal{O}}_x, \rho(x_1) = \rho(x_2)\right\} \ ,$$

$$m_x = m_{x_1} \cap m_{x_2} \ .$$

Pour $i=1,2$ soit t_i une coordonnée locale au point x_i , définie en x_j $(i \neq j)$, avec $t_i(x_j) = 1$. On a un isomorphisme

$$\tilde{\mathcal{O}}_x \longrightarrow m_x$$

$$\rho \longmapsto t_1 . t_2 . \rho \ .$$

<u>PROPOSITION 2</u> : *Soit* x *un point double ordinaire de* X *situé sur une seule composante irréductible de* X *et* M *un* $\mathcal{O}_x$*-module de type fini. Alors* M *est de profondeur 1 si et seulement si il existe des entiers* a,b *tels que*

$$M \simeq a.\mathcal{O}_x \oplus b.m_x \ ,$$

et ces entiers sont uniques.

Les entiers a et b sont uniques, car

$$rg(M \otimes_{\mathcal{O}_x} k) = a + 2.b \ ,$$

$$rg(M) = a + b \ .$$

Il est évident que $a.\mathcal{O}_x \oplus b.m_x$ est de profondeur 1. Soit réciproquement M un $\mathcal{O}_x$-module de type fini de profondeur 1, c'est à dire sans torsion.

Montrons qu'il suffit de prouver que M est isomorphe à un $\mathcal{O}_x$-module F tel qu'il existe un entier $r \geqq 0$ tel que

$$r.\mathcal{O}_x \subset F \subset r.\tilde{\mathcal{O}}_x \ .$$

Si tel est le cas, on a

$$r.\tilde{\mathcal{O}}_x / r.\mathcal{O}_x \simeq k^r \ ,$$

et soit W l'image du morphisme canonique $F \longrightarrow k^r$. On peut supposer que si $(e_1, \ldots, e_r)$ est la base canonique de k^r , W est engendré par

$e_1,\dots,e_t$. Il est alors immédiat que

$$F = t.\tilde{\mathcal{O}}_x \oplus (r-t).\mathcal{O}_x \ ,$$

et le résultat découle du fait que $\tilde{\tilde{\mathcal{O}}}_x \simeq m_x$.

Puisque M est sans torsion, on a

$$M \subset M \otimes_{\mathcal{O}_x} K \ ,$$

désignant le corps des fractions de $\mathcal{O}_x$, et

$$M \otimes_{\mathcal{O}_x} K \simeq r.K \ ,$$

avec $r = rg(M)$. Le $\mathcal{O}_x$-module $M \otimes_{\mathcal{O}_x} \tilde{\mathcal{O}}_x$ est libre, car il est sans torsion et $\tilde{\mathcal{O}}_x$ est un anneau principal. Posons $\tilde{M} = M \otimes_{\mathcal{O}_x} \tilde{\mathcal{O}}_x$.

L'anneau possède deux idéaux maximaux : $m_i = (t_i)$, $i=1,2$.

Considérons le $\tilde{\mathcal{O}}_{xm_i}$-module $\tilde{F}_{m_i}$, $i=1,2$. D'après le Lemme de Nakayama on peut trouver des éléments $f_1,\dots{}^i,f_r$ de F constituant une base de $\tilde{F}_{m_i}$. Soit $(g_1,\dots,g_r)$ une base de $\tilde{\tilde{F}}$. Le fait pour (f_j) d'être une base de $\tilde{F}_{m_i}$ ne dépend que des images des f_j dans $F \otimes_{\mathcal{O}_x} k$, et les images de tels (f_j) constituent un ouvert de Zariski de $(F \otimes_{\mathcal{O}_x} k)^r$. On peut donc choisir (f_j) comme base de F_{m_1} et F_{m_2} .

Alors (f_j) est une base de $\tilde{F}$: par rapport à (g_j) son déterminant n'est ni dans m_1 ni dans m_2 et est donc inversible.

On peut, puisque $F \subset r.K$, supposer que $F \subset r.\mathcal{O}_x$ (en considérant $u.F \simeq F$ pour un élément convenable u non nul de m_x) .

Posons

$$f_j = (a_1^j,\dots,a_r^j) \ , \ 1 \leq j \leq r \ , \ a_j^i \ \text{dans} \ \mathcal{O}_x \ .$$

Alors $A = (a_i^j)_{1\leq i,j\leq r}$ définit un élément de $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_x}(r.\mathcal{O}_x)$ et un élément de $\mathrm{Aut}_K(r.K)$. On a dans $r.K$

$$A(r.\mathcal{O}_x) \subset F \subset A(r.\tilde{\mathcal{O}}_x) \ .$$

donc $\quad r.\mathcal{O}_x \subset A^{-1}(F) \subset r.\mathcal{O}_x$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 2.

Supposons maintenant que x est situé sur deux composantes irréductibles de X , notées X_1 et X_2 .

On pose

$$\mathcal{O}_{x_i} = \mathcal{O}_{X_i x} \ ,$$

$$m_{x_i} = m_{X_i x} \ ,$$

On a

$$\mathcal{O}_x = \left\{(\rho,\Psi) \in \mathcal{O}_{x_1} \oplus \mathcal{O}_{x_2} \ , \rho(x) = \Psi(x)\right\} \ .$$

Pour $i=1,2$, soit t_i une coordonnée locale en x sur X_i . Alors on a

$$m_x \simeq \mathcal{O}_{x_1} \oplus \mathcal{O}_{x_2} \ ,$$

un isomorphisme étant donné par

$$(\rho,\Psi) \longrightarrow t_1.\rho + t_2.\Psi \quad .$$

PROPOSITION 3 : *Soit* x *un point double ordinaire de* X *situé sur deux composantes irréductibles de* X *et* M *un* $\mathcal{O}_x$*-module de type fini. Alors* M *est de profondeur* 1 *si et seulement si il existe des entiers* a , b , c *tels que*

$$M \simeq a.\mathcal{O}_x \oplus b.\mathcal{O}_{x_1} \oplus c.\mathcal{O}_{x_2} \quad ,$$

et ces entiers sont uniques.

Les entiers a , b , c sont uniques car

$$\mathrm{rg}(M \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_{x_1}) = a + b \quad ,$$

$$\mathrm{rg}(M \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_{x_2}) = a + c \quad ,$$

$$\mathrm{rg}(M \otimes_{\mathcal{O}_x} k) = a + b + c \quad .$$

Il est évident que $a.\mathcal{O}_x \oplus b.\mathcal{O}_{x_1} \oplus c.\mathcal{O}_{x_2}$ est de profondeur 1. Soit réciproquement M un $\mathcal{O}_x$-module de type fini de profondeur 1.

Remarquons que d'après le Lemme 7-2 , le $\mathcal{O}_{x_i}$-module $t_i.M$ est sans torsion. Par conséquent c'est un $\mathcal{O}_{x_i}$-module libre :

$$t_i.M \simeq r_i.\mathcal{O}_{x_i} \quad , \quad i = 1,2 \quad .$$

L'application

$$\Psi : M \longrightarrow t_1.M \oplus t_2.M$$
$$m \longmapsto (t_1.m, t_2.m)$$

est injective car M est de profondeur 1. On note i l'inclusion

$$t_1.M \oplus t_2.M \subset M \quad .$$

Avec les isomorphismes précédents, on a

$$\Psi(t_1.M \oplus t_2.M) = r_1.m_{x_1} \oplus r_2.m_{x_2} \quad ,$$

et par conséquent

$$t_1.M \oplus t_2.M/\Psi(\mathrm{Im}(i)) = k^{r_1} \oplus k^{r_2} \quad .$$

On note χ l'application canonique

$$M \longrightarrow k^{r_1} \oplus k^{r_2} \quad .$$

On a $\mathrm{Ker}(\chi) = t_1.M \oplus t_2.M$.

Soit f un élément de M n'appartenant pas à $t_1.M$ tel que $t_2.f = 0$. Alors $\chi(f) = (a,0)$, a étant un élément non nul de k^{r_1} .
Montrons que si $f_1,\ldots,f_p$ sont des éléments de M n'appartenant pas à $t_1.M$ tels que $t_2.f_j = 0$, et que $\chi(f_1),\ldots,\chi(f_p)$ soient libres, alors $f_1,\ldots,f_p$ sont libres sur $\mathcal{O}_{x_1}$:

Supposons que

$$\alpha_1.f_1 + \ldots + \alpha_p.f_p = 0 \quad ,$$

les α_j étant des éléments non tous nuls de $\mathcal{O}_{x_1}$. Soit t_1^m la plus grande puissance de t_1 divisant tous les α_j . Posons

$$\alpha_j = t_1^m . \beta_j \quad , \quad 1 \leq j \leq p \quad .$$

Alors on a

$$\beta_1 . f_1 + \ldots . + \beta_p . f_p = 0 \ :$$

de

$$t_1 . (t_1^{m-1} . \beta_1 . f_1 + \ldots . + t_1^{m-1} . \beta_p . f_p) = 0$$

et

$$t_2 . (t_1^{m-1} . \beta_1 . f_1 + \ldots . + t_1^{m-1} . \beta_p . f_p) = 0$$

(car $t_2 . f_j = 0$ pour $1 \leq j \leq p$) , on déduit, puisque M est de profondeur 1,

$$t_1^{m-1} . \beta_1 . f_1 + \ldots . + t_1^{m-1} . \beta_p . f_p = 0 \quad ,$$

puis en raisonnant par récurrence

$$\beta_1 . f_1 + \ldots . \ \beta_p . f_p = 0 \quad .$$

Donc

$$\beta_1(x) . \chi(f_1) + \ldots . + \beta_p(x) . \chi(f_p) = 0 \quad ,$$

ce qui est impossible car $\chi(f_1), \ldots ., \chi(f_p)$ sont libres et les $\beta_j(x)$ non tous nuls. Donc $f_1, \ldots ., f_p$ sont libres sur $\mathcal{O}_{x_1}$.

Soit N_1 le sous-espace vectoriel de k^{r_1} engendré par les $\chi(f)$, f étant un élément de M n'appartenant pas $t_1.M$ tel que $t_2.f = 0$. On définit de même le sous-espace vectoriel N_2 de k^{r_2} .

Montrons qu'on a $N_i = k^{r_i} \cap \mathrm{Im}(\chi)$, $i=1,2$.

Soit u un élément de $k^{r_i} \cap \mathrm{Im}(\chi)$, $u \neq 0$, $u = \chi(f)$, avec f dans M . Alors $t_j.f$ $(j \neq i)$ est dans $t_j^2.M$ et on peut donc écrire

$$t_j . f = t_j^2 . g \quad ,$$

avec g dans M . Soit $f' = f - t_j.g$. On a

$$\chi(f) = \chi(f') \quad \text{et} \quad t_j . f' = 0 \quad ,$$

ce qui prouve notre assertion.

Soit M_i un sous-module de M engendré par des f n'appartenant pas à $t_i.M$ et tels que $t_j.f = 0$, et $\chi(M_i) = N_i$. D'après ce qui précède, M_i est un $\mathcal{O}_{x_i}$-module libre.

On a $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, car $t_i.(M_1 \cap M_2) = \{0\}$ pour $i = 1,2$ et M est de profondeur 1.

Soit N_0 un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(\chi)$ supplémentaire de $N_1 \oplus N_2$. Soient $g_1, \ldots, g_d$ des éléments de M tels que $\chi(g_1), \ldots ., \chi(g_d)$ soit une base de N_0, et M_0 le sous-module de M engendré par $g_1, \ldots . g_d$.

Montrons que $g_1, \ldots . g_d$ sont libres sur $\mathcal{O}_x$:

Supposons que

$$\alpha_1 . g_1 + \ldots + \alpha_d . g_d = 0 \quad ,$$

$\alpha_1,\ldots,\alpha_d$ étant des éléments non tous nuls de $\mathcal{O}_x$. On sait déjà, puisque $\chi(g_1),\ldots,\chi(g_d)$ sont libres, que $\alpha_j(x) = 0$ pour $1 \leq j \leq d$. On peut donc écrire

$$\alpha_j = t_1^m.u_j + t_2^n.v_j \quad , \text{ pour } \quad 1 \leq j \leq d \quad ,$$

avec ou bien les $u_j(x)$ non tous nuls, ou bien les $v_j(x)$ non tous nuls. Supposons les $u_j(x)$ non tous nuls (l'autre cas est analogue). En multipliant l'égalité

$$\alpha_1.g_1 + \ldots + \alpha_d.g_d = 0$$

par t_1 et en raisonnant par récurrence on obtient

$$t_1.(u_1.g_1 + \ldots + u_d.g_d) = 0 \quad .$$

Posons

$$w = u_1.g_1 + \ldots + u_d.g_d \quad .$$

Alors $\chi(w)$ est un élément non nul de N_0, mais ceci est impossible car il est immédiat que $\chi(w)$ est dans N_2.

Ceci prouve que $g_1,\ldots,g_d$ sont libres sur $\mathcal{O}_x$.

Le $\mathcal{O}_x$-module M_0 est donc libre.

Il reste à montrer que $M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2$.

D'après le Lemme de Nakayama, on a $M = M_0 + M_1 + M_2$.

Soient g_0, g_1, g_2 des éléments de M_0, M_1, M_2 respectivement, tels que

$$g_0 + g_1 + g_2 = 0 \quad .$$

On en déduit

$$t_i.g_0 + t_i.g_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1,2 \quad .$$

Si on en déduit

$$t_i.g_0 = 0 \quad ,$$

on aura $g_0 = 0$ car M est de profondeur 1, puis $g_1 = g_2 = 0$ pour la même raison.

Il faut donc montrer que $M_0 \cap M_i = \{0\}$.

Soit g un élément de $M_0 \cap M_i$, supposé non nul. Alors m est multiple de t_i, car $\chi(g) = 0$. On peut écrire

$$g = t_i^p.f_0 \quad ,$$

avec f_0 dans M_0, et $\chi(f_0) \neq 0$, et

$$g = t_i^q.f_i \quad ,$$

avec f_i dans M_i et $\chi(f_i) \neq 0$.

Si $q < p$, on a

$$t_i^q.(t_i^{p-q}).f_0 - f_i) = 0 \quad ,$$

d'où

$$t_i.(t_i^{p-q}.f_0 - f_i) = 0 \quad ,$$

et on en déduit que $\chi(f_i)$ est dans N_j, ce qui est absurde.

De même, on n'a pas $p < q$, donc $p = q$. On a alors

$$t_i.(f_0 - f_i) = 0 \quad ,$$

donc $\chi(f_0 - f_i)$ est dans N_j , ce qui est absurde.

On a donc bien $M_0 \cap M_i = 0$.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 3.

On a va maintenant étudier les morphismes de $\mathcal{O}_x$-modules de profondeur 1. Etudions d'abord le cas d'un point double ordinaire situé sur une seule composante irréductible de X .

LEMME 4 : *Soit* x *un point double ordinaire situé sur une seule composante irréductible de* X . *On a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_x}(m_x) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(m_x, \mathcal{O}_x) \simeq \tilde{\mathcal{O}}_x \quad .$$

Chaque élément de $\tilde{\mathcal{O}}_x$ définit par multiplication un élément de $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_x}$ (resp. $\mathrm{Hom}_x(m_x, \mathcal{O}_x)$) . Soit $\rho : m_x \longrightarrow m_x$ un $\mathcal{O}_x$-morphisme. En utilisant l'isomorphisme $m_x \simeq \tilde{\mathcal{O}}_x$, on obtient un $\mathcal{O}_x$-endomorphisme de $\tilde{\mathcal{O}}_x$, qu'on note aussi ρ .

Posons $a = \rho(1)$. Soient c un élément de $\mathcal{O}_x$, t un élément non nul de m_x . Alors $c.t$ est dans $\mathcal{O}_x$, donc

$$\rho(c.t) = a.c.t = t.\rho(c) \quad ,$$

d'où $\rho(c) = a.c$, car $\tilde{\mathcal{O}}_x$ est intègre. On a donc bien

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_x}(m_x) \simeq \tilde{\mathcal{O}}_x \quad .$$

Soit $\rho : m_x \longrightarrow \mathcal{O}_x$ un $\mathcal{O}_x$-morphisme, supposé non nul. Alors ρ est injective : si t est un élément de m_x tel que $\rho(t) = 0$, et $t \neq 0$, pour tout élément u de m_x on a

$$\rho(t.u) = u.\rho(t) = 0 = t.\rho(u) \quad ,$$

donc $\rho(u) = 0$ et $\rho = 0$. Ceci prouve que ρ est injective.
On peut donc prolonger ρ à $\bar{\rho} : K \longrightarrow K$, application K-linéaire. Cette application est une homothétie, donnée par un élément a de K . Il reste à montrer que a est dans $\tilde{\mathcal{O}}_x$. D'abord, pour tout élément c de m_x , $c.a$ est dans $\mathcal{O}_x$. Ecrivons

$$a = b.t_1^p.t_2^q \quad , \text{avec } b(x_i) \neq 0 \text{ pour } i=1,2 \quad .$$

Alors $b.t_1^{p+1}.t_2^{q+1}$ est dans $\mathcal{O}_x$, donc $q \geq -1$, $p \geq -1$.
Si $p = q = -1$, $t_1^2.t_2.a = t_1.b$ est dans $\mathcal{O}_x$, ce qui est absurde, car $t_1.b(x_1) = 0$ et $t_1.b(x_2) \neq 0$.
Si $p = -1$ et $q = 0$, $t_2.t_1.a = t_2.b$ est dans $\mathcal{O}_x$, ce qui est absurde.
De même on ne peut pas avoir $q = -1$, $p = 0$. Donc $p \geq 0$, $q \geq 0$, c'est à dire que a est dans $\tilde{\mathcal{O}}_x$. On a donc bien

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(m_x, \mathcal{O}_x) \simeq \tilde{\mathcal{O}}_x \quad .$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 4.

On en déduit la

<u>PROPOSITION 5</u> : *Soient* x *un point double ordinaire situé sur une seule composante irréductible de* X , a , b *des entiers* ≥ 0 . *Alors le groupe*

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_x}(a.\mathcal{O}_x \oplus b.m_x)$$

est constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec A *dans* $GL(a,\mathcal{O}_x)$, B *dans* $M(a,b,\tilde{\mathcal{O}}_x)$, C *dans* $M(b,a,m_x)$ *et* D *dans* $GL(b,\tilde{\mathcal{O}}_x)$.

(Pour tout anneau Z , $M(m,n,Z)$ est l'anneau des matrices $m\mathrm{X}n$ à coefficients dans Z) .

Soit ρ un automorphisme de $a.\mathcal{O}_x \oplus b.m_x$. D'après le Lemme précédent on peut écrire

$$\rho = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ,$$

avec A dans $M(a,a,\mathcal{O}_x)$, B dans $M(a,b,\tilde{\mathcal{O}}_x)$, C dans $M(b,a,m_x)$ et D dans $M(b,b,\tilde{\mathcal{O}}_x)$. Comme ρ est un isomorphisme, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & I_b \end{pmatrix} ,$$

avec A' dans $M(a,a,\mathcal{O}_x)$, B dans $M(a,b,\mathcal{O}_x)$, C dans $M(b,a,m_x)$, D dans $M(b,b,\mathcal{O}_x)$. On a

$$A.A' + B.C' = I_a ,$$

donc C' étant à coefficients dans m_x , on voit que $\det(A).\det(A')$ prend la valeur 1 en x_1 et x_2 , donc est inversible, c'est à dire que A est dans $GL(a,\mathcal{O}_x)$. On a

$$C.B' + D.D' = I_b ,$$

et en utilisant le fait que C est à coefficients dans m_x on en déduit que D est dans $GL(b,\mathcal{O}_x)$.

Réciproquement, si A est dans $GL(a,\mathcal{O}_x)$, B dans $M(a,b,\mathcal{O}_x)$, C dans $M(b,a,m_x)$ et D dans $GL(b,\tilde{\mathcal{O}}_x)$, on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{matrix} (A - B.D^{-1}.C)^{-1} & A^{-1}.B.(C.A^{-1}.B - D)^{-1} \\ D^{-1}.C.(B.D^{-1}.C - A)^{-1} & (D - C.A^{-1}.B)^{-1} \end{matrix} ,$$

($A - B.D^{-1}.C$ et $D - C.A^{-1}.B$ étant inversibles car A et D le sont et que

C est à coefficients dans m_x) .

Ceci achève la démonstration de la Proposition 5.

Etudions maintenant le cas d'un point double ordinaire situé sur deux composantes irréductibles de X .

<u>LEMME 6</u> : *Soit* x *un point double ordinaire situé sur deux composantes irréductibles de* X . *Alors si* $1 \leq i \neq j \leq 2$, *on a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{O}_{x_i},\mathcal{O}_{x_j}) = \{0\} ,$$

et des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{O}_{x_i},\mathcal{O}_x) \simeq m_{x_i} \quad , \quad \mathrm{End}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{O}_{x_i}) \simeq \mathcal{O}_{x_i} .$$

Soit $\rho : \mathcal{O}_{x_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{x_j}$ un $\mathcal{O}_x$-morphisme. Puisque $m_{x_i}.\mathcal{O}_{x_j} = \{0\}$, on a $\rho(m_{x_i}) = \{0\}$, donc ρ définit un $\mathcal{O}_x$-morphisme

$$\bar{\rho} : k \longrightarrow \mathcal{O}_{x_j} ,$$

qui est aussi un $\mathcal{O}_{x_j}$-morphisme et est donc nul. Donc $\rho = 0$.

Tout élément de m_{x_i} définit par multiplication un $\mathcal{O}_x$-morphisme de $\mathcal{O}_{x_i}$ dans $\mathcal{O}_x$. Réciproquement soit $\rho : \mathcal{O}_{x_i} \longrightarrow \mathcal{O}_x$ un $\mathcal{O}_x$-morphisme, et $a = \rho(1)$. On a $m_{x_j}.\mathcal{O}_{x_i} = \{0\}$ donc $m_{x_j}.a = \{0\}$ et a est dans m_{x_i} .

Le reste du Lemme 6 se montre de même.

On en déduit la

<u>PROPOSITION 7</u> : *Soient* x *un point double ordinaire situé sur deux composantes irréductibles de* X , a , b c *des entiers* ≥ 0 . *Alors le groupe*

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_x}(a.\mathcal{O}_x \oplus b.\mathcal{O}_{x_1} \oplus c.\mathcal{O}_{x_2})$$

est constitué de matrices

$$\begin{pmatrix} A & F & G \\ D & B & 0 \\ E & 0 & C \end{pmatrix} ,$$

avec A *dans* $GL(a,\mathcal{O}_x)$, B *dans* $GL(b,\mathcal{O}_x)$, C *dans* $GL(C,\mathcal{O}_{x_2})$, D *dans* $M(b,a,\mathcal{O}_{x_1})$, E *dans* $M(c,a,\mathcal{O}_{x_2})$, F *dans* $M(a,b,m_{x_1})$ *et* G *dans* $M(a,c,m_{x_2})$.

Analogue à la Proposition 5.

II.- RELATIONS ENTRE FAISCEAUX DE PROFONDEUR 1 SUR X ET FIBRÉS VECTORIELS SUR $\tilde{X}$.

On supposera que la courbe X est irréductible (les singularités sont des points doubles ordinaires). Dans le cas où X n'est pas irréductible, on obtiendrait des résultats analogues. Puisque ces résultats sont essentiellement de nature locale, on supposera que X ne comporte qu'un point double ordinaire x . On reprend les notations du Chapitre I.

Dans la septième partie on a défini les variétés de modules de faisceaux de profondeur 1 (c'est à dire sans torsion) stables de rang r et de degré d , et leurs complétions, notées respectivement $U_s(r,d)$ et $U(r,d)$.

Pour $0 \leqq a \leqq r$, on note $U^a(r,d)$ (resp. $U_s^a(r,d)$) le sous-ensemble de $U(r,d)$ (resp. $U_s(r,d)$) constitué des points correspondant à des faisceaux $\mathcal{F}$ tels que

$$\mathcal{F}_x \simeq a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x \quad .$$

On montre aisément que

$$\bigcup_{b\leqq a} U^b(r,d) \quad (\text{resp.} \quad \bigcup_{b\leqq a} U_s^b(r,d))$$

est fermé dans $U(r,d)$ (resp. $U_s(r,d)$) .

REMARQUE : Il n'est nullement évident qu'étant donnés deux faisceaux sans torsion semi-stables sur X , $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, tels que $Gr(\mathcal{F}) = Gr(\mathcal{G})$, on ait $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{G}_x$.

PROPOSITION 8 : *On a dans* $U(r,d)$ *(resp.* $U_s(r,d)$)

$$\overline{U^a(r,d)} = \bigcup_{b\leqq a} U^b(r,d)$$

(resp. $\overline{U_s^a(r,d)} = \bigcup_{b\leqq a} U_s^b(r,d)$) .

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau (semi-)stable de rang r de degré d et tel que

$$\mathcal{F}_x \simeq b.\mathcal{O}_x \oplus (r-b).m_x \quad , \text{ avec } b \leqq a \quad .$$

D'après la Proposition 21 qu'on verra plus loin, il existe un faisceau localement libre E de rang r tel qu'il existe un morphisme injectif

$$i : \mathcal{F} \longrightarrow E$$

tel qu'au point x

$$i_x : a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x \longrightarrow r.\mathcal{O}_x$$

soit l'inclusion canonique.

Soit $T = \mathrm{Coker}(i)$. On peut écrire

$$T = T' \oplus (r-a).k_x \quad ,$$

T' étant un faisceau de torsion dont le support ne contient pas x , k_x désignant le faisceau concentré en x de fibre k .

Soit T_0 la famille de faisceaux de torsion sur X paramétrée par X , définie par :

Pour tous point y de X , $T_{0y} = T' \oplus (a-b).k_y \oplus (r-a).k_x$.

Alors si $p : X \times X \longrightarrow X$ désigne la projection (sur le facteur X qui n'est pas l'espace de paramètres), on a un morphisme évident

$$p^*(E) \longrightarrow T_0 \quad ,$$

qui est surjectif, et dont le noyau est noté $\mathcal{F}_0$.

Alors $\mathcal{F}_0$ est plat sur l'espace de paramètres X : pour cela il suffit de montrer que T_0 est plat sur X , ce qui découlera du fait que T'_0 est plat sur X , T'_0 désignant la famille de faisceaux de torsion sur X paramétrée par X définie par :

Pour tout point y de Y , $T'_{0y} = (a-b).k_y$.

Ceci se prouve en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \mathcal{O}_{X \times X} \longrightarrow T_0 \longrightarrow 0 \quad ,$$

(J désignant le faisceau d'idéaux de la diagonale de $X \times X$) , et en utilisant le lemme 19 plus loin.

On en déduit, puisque $\mathcal{F}$ est (semi-)stable et que la (semi-)stabilité est une propriété ouverte qu'il existe un voisinage U de x tel que pour tout point y de U , $\mathcal{F}_{0y}$ soit (semi-)stable. On en déduit aisément la Proposition 8 en utilisant la propriété universelle des espaces de modules.

En particulier, l'ouvert de U(r,d) (resp. $U_s(r,d)$) correspondant aux faisceaux localement libres est dense.

Il est immédiat que ce résultat est toujours valable si X possède plusieurs points doubles ordinaires (en étant toujours irréductible). Si X n'est plus irréductible, on obtient des ouverts denses des variétés de modules en considérant les faisceaux $\mathcal{F}$ tels que pour $1 \leqq i \leqq m$, $\mathcal{F}_i$ soit localement libre en dehors des points d'intersection de X_i avec les autres composantes irréductibles et que si x est un point situé sur deux composantes irréductibles X_{i_1} , X_{i_2} , on ait, en posant $r_i = rg(\mathcal{F}_i)$:

$$\mathcal{F}_x \simeq \inf(r_{i_1}, r_{i_2}).\mathcal{O}_x \oplus |r_{i_1} - r_{i_2}| .\mathcal{O}_{x_{i_j}} \quad ,$$

avec j tel que $Max(r_{i_1}, r_{i_2}) = r_{i_j}$) .

Revenons au cas où X est irréductible.

<u>PROPOSITION 9</u> : *La variété* U(r,d) *resp.* $U_s(r,d)$ *est irréductible.*

On prouve d'abord l'irréductibilité de $U^r(r,d)$ (resp. $U^r_s(r,d)$) , en utilisant l'irréductibilité du jacobien (voir [5]), comme dans le cas d'une courbe lisse, puis on applique la Proposition 8.

On suppose que X ne possède qu'un point double ordinaire, noté x .

On va étudier les relations entre faisceaux sans torsion sur X et fibrés vectoriels sur X, munis d'une certaine structure.

On n'a pas étudié les questions de (semi-)stabilité, mais il doit exister une notion de (semi-)stabilité des structures intervenant sur $\tilde{X}$ telle que la (semi-)stabilité d'un faisceau sans torsion sur X soit équivalente à la (semi-)stabilité de la structure correspondante sur $\tilde{X}$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X de rang r, de degré d, tel que

$$\mathcal{F}_x \simeq a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x \qquad (0 \leqq a \leqq r) \quad .$$

On a un morphisme évident

$$\mathcal{F}_x \longrightarrow a.k_x \quad ,$$

qui dépend évidemment de l'isomorphisme $\mathcal{F}_x \simeq a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x$, mais son noyau $\mathcal{F}'$ est indépendant de cet isomorphisme, car d'après la Proposition 5 le sous-module $r.m_x$ de $\mathcal{F}_x$ en est indépendant.

On a

$$\mathcal{F}'_x \simeq r.m_x \quad ,$$

et

$$\deg(\mathcal{F}') = \deg(\mathcal{F}) - a \quad .$$

<u>PROPOSITION 10</u> : *Soit* $\mathcal{G}$ *un faisceau sans torsion sur* X. *Alors il existe un fibré vectoriel* E *sur* $\tilde{X}$ *tel que*

$$\pi_*(E) \simeq \mathcal{G}$$

si et seulement si

$$\mathcal{G}_x \simeq r.m_x \quad ,$$

et un tel E *est unique à isomorphisme près.*

On a

$$\deg(E) = \deg(\mathcal{G}) + r \quad .$$

Unicité de E : il suffit de prouver le résultat suivant : soit U un ouvert affine de X contenant x, M, M' des $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\pi^{-1}(U))$-modules sans torsion, et $\rho : M \longrightarrow M'$ un $\mathcal{O}_X(U)$-isomorphisme. Alors ρ est un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\pi^{-1}(U))$-isomorphisme :

Soit m un élément de M, et a dans $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\pi^{-1}(U))$. Si c est dans l'idéal de x, $a.c$ est dans $\mathcal{O}_X(U)$, donc

$$\rho(a.c.m) = a.c.\rho(m) = a.\rho(c.m) \quad ,$$

donc

$$\rho(a.m) = a.\rho(m) \quad ,$$

car M' est sans torsion. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Existence de E : il faut montrer qu'on peut définir E par la simple condition : pour tout ouvert U de X,

$$E(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{G}(U) \quad .$$

Il suffit de prendre

$$E = \pi^*(\mathcal{G}) \; / \; \mathrm{Tors}(\; \pi^*(\mathcal{G})\;) \quad .$$

Montrons maintenant que $\deg(E) = \deg(\mathcal{G}) + r$.

On plonge d'abord E dans une somme directe $r.L$, L étant un fibré vectoriel sur X , engendré par ses sections globales, $E_x \longrightarrow r.L_x$ étant un isomorphisme. On en déduit un morphisme injectif

$$\mathcal{G} \longrightarrow r.\pi_*(L) \quad ,$$

et $l(r.L/E) = l(r.\pi_*(L)/\mathcal{G})$, de telle sorte qu'il suffit de montrer que

$$\deg(\pi_*(L)) = \deg(L) - 1 \quad .$$

Pour cela, on considère une section $\mathcal{O} \longrightarrow L$ ne s'annulant pas en x_1 et x_2 , on en déduit un morphisme injectif

$$\pi_*(\mathcal{O}) = \underline{m}_x \longrightarrow \pi_*(L) \quad ,$$

($\underline{m}_x$ désignant le faisceau d'idéaux de x) , et on a

$$l(\pi_*(L)/\underline{m}_x) = l(L/\mathcal{O}) \quad ,$$

donc

$$\deg(\pi_*(L)) = \deg(L) - 1 \quad .$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 10.

Soit ρ un $\mathcal{O}_x$-endomorphisme de m_x , qu'on peut considérer comme un $\mathcal{O}_x$-endomorphisme de $\tilde{\mathcal{O}}_x$. D'après le Lemme 4, on a $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_x}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \simeq \tilde{\mathcal{O}}_x$, donc

$$\rho((t_i)) \subset (t_i) \qquad (i=1,2) \quad .$$

Soient M , N des $\tilde{\mathcal{O}}_x$-modules libres de type fini,

$$\rho : M \longrightarrow N$$

un $\mathcal{O}_x$-morphisme. Alors

$$\rho(t_i.M) \subset t_i.N \qquad (i=1,2) \quad .$$

Soit M_i l'image de

$$t_i.M \otimes_{\mathcal{O}_x} k \longrightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_x} k \quad .$$

Alors on a

$$M \otimes_{\mathcal{O}_x} k = M_1 \oplus M_2 \quad ,$$

$$\dim_k(M_i) = \dim_{\tilde{\mathcal{O}}_x}(M) \qquad (i=1,2) \quad .$$

Si M est un $\tilde{\mathcal{O}}_x$-module libre de type fini, on notera $\bar{M}$ le k-espace vectoriel

$$M \otimes_{\mathcal{O}_x} k \quad .$$

<u>LEMME 11</u> : *Soit* $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\bar{M},\bar{N})$ *l'application canonique.*
a) *Soit* $\rho : M \longrightarrow N$ *un* $\tilde{\mathcal{O}}_x$*-morphisme. Alors* $\phi(\rho) = 0$ *si et seulement si la matrice de* ρ *(dans des bases des* $\mathcal{O}$*-modules libres* M *et* N *) est à*

coefficients dans m_x .

b) *L'image de* ϕ *est constituée des applications linéaires* $f : \bar{M} \longrightarrow \bar{N}$ *telles que*

$$f(M_i) \subset N_i \quad , \textit{pour} \quad i = 1 , 2 \quad .$$

a) Immédiat.

b) D'après a ,

$$\mathrm{Im}(\phi) \simeq \mathrm{rg}(M).\mathrm{rg}(N).\tilde{\mathcal{O}}_x/m_x \quad ,$$

(comme k-espace vectoriel), donc $\mathrm{Im}(\phi)$ est de dimension $2.\mathrm{rg}(M).\mathrm{rg}(N)$.
Comme c'est aussi la dimension de

$$\left\{f : \bar{M} \longrightarrow \bar{N} \quad , f(M_i) \subset N_i \quad , i=1,2\right\} \quad ,$$

et que $\mathrm{Im}(\phi)$ est contenu dans ce sous-espace vectoriel, $\mathrm{Im}(\phi)$ lui est égal, ce qui prouve b .

Ceci achève la démonstration du Lemme 11 .

Soit W un k-espace vectoriel de dimension a , W_x le faisceau concentré en x de fibre W .

Les extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow W_x \longrightarrow 0$$

sont classifiées par $\mathrm{Ext}^1(W_x, \mathcal{F}')$. On peut supposer d assez grand pour que $h^1(X, \mathcal{F}') = 0$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{m}_x \otimes W \longrightarrow \mathcal{O} \otimes W \longrightarrow W_x \longrightarrow 0$$

d'où on déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow W^* \otimes H^0(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{\phi_\circ} \mathrm{Hom}(\underline{m}_x \otimes W, \mathcal{F}') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(W_x, \mathcal{F}') \longrightarrow 0 \quad .$$

Si M et N sont des $\tilde{\mathcal{O}}_x$-modules libres de type fini, on pose

$$\mathrm{Hom}'(M,N) = \left\{f : \bar{M} \longrightarrow \bar{N} \quad , f(M_i) \subset N_i, \ i=1,2\right\} \quad .$$

D'après ce qui précède, et les Lemmes 4 et 11, on a

$$\mathrm{Coker}(\phi_\circ) \simeq \mathrm{Hom}'(m_x \otimes W, \mathcal{F}'_x) \quad ,$$

d'où le

<u>LEMME 12</u> : *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1(W_x, \mathcal{F}') \simeq \mathrm{Hom}'(m_x \otimes W, \mathcal{F}'_x) \quad .$$

Si M, N sont des $\mathcal{O}_x$-modules libres de type fini, f un élément de $\mathrm{Hom}'(M,N)$, on note f_1, f_2 les composantes de f , $M_1 \longrightarrow N_1$ et $M_2 \longrightarrow N_2$.

<u>LEMME 13</u> : *Le* $\mathcal{O}_x$*-module* $\mathcal{G}_x$ *est isomorphe à*

$$a.\mathcal{O}_x \oplus (r - a).m_x$$

si et seulement l'élément f *de* $\mathrm{Hom}'(m_x \otimes W, \mathcal{F}'_x)$ *correspondant est tel que* f_1 *et* f *soient injectives.*

Remarquons que $\mathrm{Hom}'(m_x \boxtimes W, \mathcal{F}'_x)$ classifie aussi les extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow M \longrightarrow W \longrightarrow 0 \quad .$$

Pour tout morphisme

$$f : \mathcal{F}'_x \longrightarrow a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x \quad ,$$

on a

$$\mathrm{Im}(f) \subset r.m_x \quad ,$$

donc à isomorphisme près de $\mathcal{F}'_x$ et de W, une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

est équivalente à la suite "triviale"

$$0 \longrightarrow r.m_x \longrightarrow a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x \longrightarrow a.k \longrightarrow 0 \quad .$$

Mais à cette suite est associée l'inclusion

$$a.m_x/m_x^2 \subset r.m_x/m_x^2 \quad ,$$

élément f de $\mathrm{Hom}'(m_x \boxtimes W, \mathcal{F}'_x)$ tel que f_1 et f_2 soient injectives.

Réciproquement, supposons f_1 et f_2 injectives. En utilisant un automorphisme de $\mathcal{F}'_x$, on se ramène au cas où f est l'inclusion $a.m_x/m_x^2 \longrightarrow r.m_x/m_x^2$, à qui correspond $a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x$.

Ceci achève la démonstration du Lemme 13.

<u>LEMME 14</u> : *Soient*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow W_x \longrightarrow 0 \quad ,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{G}_1 \longrightarrow W_x \longrightarrow 0$$

des extensions telles que

$$\mathcal{G}_{0x} \simeq \mathcal{G}_{1x} \simeq a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x \quad .$$

Alors $\mathcal{G}_0$ *et* $\mathcal{G}_1$ *sont isomorphes si et seulement si elles se déduisent l'une de l'autre par des automorphismes de* $\mathcal{F}'$ *et* W.

Cela résulte immédiatement du fait que le sous-faisceau $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{G}_i$ $(i=0,1)$ est uniquement déterminé.

Soit E un fibré vectoriel sur X tel que

$$\mathcal{F}' \simeq \pi_*(E) \quad .$$

On a des isomorphismes canoniques

$$(\mathcal{F}'_x)_i \simeq E_{x_j} \quad (1 \leq i,\ j \leq 2) \quad .$$

Par conséquent, un élément f de $\mathrm{Hom}'(m_x \boxtimes W, \mathcal{F}'_x)$ tel que f_1, f_2 soient injectives définit une *structure quasi-parabolique* sur E (voir troisième partie), donnée en x_i par

$$\Delta_i = \mathrm{Im}(f_j) \quad (1 \leq i \neq j \leq 2) \quad .$$

De plus, par l'intermédiaire de W, on a un isomorphisme

$$\sigma : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2 \quad .$$

On pose

$$\mathcal{E}(f) = (E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) \quad .$$

On considère maintenant des triplets $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$, Δ_i étant un sous-espace vectoriel de E_{x_i} de dimension a pour $i = 1 , 2$, σ un isomorphisme entre Δ_1 et Δ_2 . De tels triplets $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ et $(E,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ sont dits *isomorphes* s'il existe un automorphisme g de E tel que

$$g_{x_i}(\Delta_i) = \Delta_i' \quad (i=1,2) \quad ,$$

et $$\sigma' = g_{x_2} \circ \sigma \circ g_{x_1}^{-1} \quad .$$

Etant donné un triplet $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$, soit

$$\lambda : W \longrightarrow \Delta_1$$

un isomorphisme de k-espaces vectoriels. Soit f l'élément de $\mathrm{Hom}'(m_x \otimes W,\mathcal{F}_x')$ défini par

$$f_2 : W \xrightarrow{\lambda} \Delta_1 \hookrightarrow (\mathcal{F}_x')_2 \quad ,$$

$$f_1 : W \xrightarrow{\lambda} \Delta_1 \xrightarrow{\sigma} \Delta_2 \longrightarrow (\mathcal{F}_x')_1$$

qui donne une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow W_x \longrightarrow 0$$

avec

$$\mathcal{F}_x \simeq a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x \quad .$$

Il est immédiat que si on change λ , on obtient le même $\mathcal{F}$, on peut donc écrire

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) \quad .$$

<u>LEMME 15</u> : *Soient* f , f' *des éléments de* $\mathrm{Hom}'(m_x \otimes W,\mathcal{F}_x')$ *tels que* f_i, f_i' *soient injectives pour* $i = 1 , 2$. *Alors* $\mathcal{E}(f)$ *et* $\mathcal{E}(f')$ *sont isomorphes si et seulement si* f *et* f' *définissent des faisceaux isomorphes.*

Etant donnés des triplets $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ *et* $(E,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$, *les faisceaux* $\mathcal{F}(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ *et* $(E,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ *sont isomorphes si et seulement si les triplets le sont.*

Si f *est un élément de* $\mathrm{Hom}'(m_x \otimes W,\mathcal{F}_x')$ *tel que* f_1, f_2 *soient injectives définissant un faisceau isomorphe à* $\mathcal{F}(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$, *les triplets* $\mathcal{E}(f)$ *et* $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ *sont isomorphes.*

Si f *est un élément de* $\mathrm{Hom}'(m_x \otimes W,\mathcal{F}_x')$ *tel que* f_1, f_2 *soient injectives, le faisceau que définit* f *est isomorphe à* $\mathcal{F}(\mathcal{E}(f))$.

Immédiat avec ce qui précède.

On en déduit le

<u>THÉORÈME 17</u> : *Il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de faisceaux sans torsion* $\mathcal{F}$ *de rang* r , *de degré* d *sur* X , *tels que*

$$\mathcal{F}_x \simeq a.\mathcal{O}_x \oplus (r-a).m_x \ ,$$

et l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$, E *étant un fibré vectoriel de rang* r , *de degré* $d-a+r$ *sur* X , Δ_i *un sous-espace vectoriel de dimension* a *de* E_{x_i} *pour* $i = 1 , 2$, *et* σ *un isomorphisme entre* Δ_1 *et* Δ_2 .

REMARQUE : On voit que se donner une telle structure sur E revient à considérer une "classe d'équivalence" de structures de niveau sur E (voir quatrième partie).

III.- SINGULARITÉS DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FAISCEAUX DE PROFONDEUR 1 SEMI-STABLES.

Soit X une courbe projective sur k , réduite, et dont les singularités sont des points doubles ordinaires. On conjecture que les variétés de modules de faisceaux de profondeur 1 semi-stables sont réduites. On ne prouvera ce résultat que pour les faisceaux de rang 2 sur chaque composante de X . Pour simplifier l'exposé, on supposera que X est irréductible et n'a qu'un seul point double ordinaire. On a alors la

THÉORÈME 18 : *Soit* d *un entier. Alors la variété* $U(2,d)$ *est réduite.*

On ne considérera que les points z de $U(2,d)$ correspondant à des faisceaux $\mathcal{F}$ tels que

$$\mathcal{F}_x \simeq 2.m_x$$

(x désignant le point double ordinaire de X) . Ce sont en effet les points de $U(r,d)$ les plus "compliqués".

On ramène ensuite l'étude de $\hat{\mathcal{O}}$ à celle de $\hat{\mathcal{O}}_{Z,(0,0)}$, Z désignant la sous-variété fermée de $M(2) \times M(2)$ définie par les équations

$$X.Y = Y.X = 0 \ .$$

En fait, pour tout entier $r \geqq 2$, on peut considérer la sous-variété fermée Z_r de $M(r) \times M(r)$ définie par les équations

$$X.Y = Y.X = 0 \ ,$$

et on montre que $U(r,d)$ est réduite si et seulement si Z_r est réduite au point $(0,0)$. On ne sait démontrer ce résultat que pour $r = 2$ (R.C. Cowsik).

Voir l'Appendice I (morphismes formellement lisses).

On va d'abord démontrer un Lemme algébrique très utile pour la suite (voir [2] , [4] , [40]).

LEMME 19 : *Soit* $A \longrightarrow B$ *un morphisme local d'anneaux locaux noetheriens. Soient* L *et* N *des* B-*modules de type fini,* L *étant* A-*plat. Alors un* B-*morphisme*

$$f : N \longrightarrow L$$

est injectif, de conoyau A-*plat si et seulement si*

$$f \otimes_A K : N \otimes_A K \longrightarrow L \otimes_A K$$

est injectif (K *désignant le corps résiduel de* A) .

Il est évident que si f est injectif et Coker(f) A-plat, $f \otimes_A K$ est injectif, car alors

$$\mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Coker}(f),K) = \{0\} .$$

Supposons réciproquement $f \otimes_A K$ injectif. On a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \longrightarrow L \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0 \quad ,$$

$$N \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \longrightarrow 0 \quad .$$

On en déduit le diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Coker}(f),K) \arrow[r] & \mathrm{Im}(f) \otimes_A K \arrow[r] \arrow[u] & L \otimes_A K \arrow[r] & \mathrm{Coker}(f) \otimes_A K \arrow[r] & 0 \\
 & & N \otimes_A K \arrow[r, equal] \arrow[u] & N \otimes_A K \arrow[u] & & \\
 & & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(f) \otimes_A K \longrightarrow L \otimes_A K$ est injectif et que

$$\mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Coker}(f),K) = \{0\} ,$$

d'où on déduit que Coker(f) est A-plat (SGA I, Exp. 4 , Thm. 5.6) . Puisque L et Coker(f) sont A-plats, il en est de même de Im(f) . Soit N' le noyau du morphisme surjectif $N \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$. Puisque

$$N \otimes_A K \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \otimes_A K$$

est un isomorphisme, et puisque Im(f) est A-plat, on a $N' \otimes_A K = 0$, et d'après le Lemme de Nakayama, on a $N' = \{0\}$, ce qui prouve que f est injectif.

Ceci achève la démonstration du Lemme 18.

On note $\mathcal{A}$ la catégorie des k-algèbres commutatives artiniennes locales.

Soient r , d des entiers, avec $r > 0$, et d assez grand pour que pour tout faisceau sans torsion $\mathcal{F}$ semi-stable de rang r et de degré d, soit engendré par ses sections globales et $h^1(X,\mathcal{F}) = 0$.

Soit

$$Q = \mathrm{Quot}^{P}_{\otimes k^{p}/X/k} \quad , \quad (P = p + r.\deg(\ (1)).T \quad .$$

(avec $p = d + r.(1-g)$) , le schéma de Grothendieck "contenant" tous les faisceaux sans torsion semi-stables de rang r et de degré d , $\mathcal{F}$ un faisceau universel sur $Q \times X$.

<u>LEMME 20</u> : *Le faisceau* $\mathcal{F}^*$ *sur* $Q \times X$ *est plat sur* Q .

On utilise le Lemme 19. Pour une démonstration, voir D'Souza [5] , III.2.

On en déduit qu'on peut choisir un entier $m > 0$ tel que pour tout point q de Q on ait

$$h^1(X_q, \mathcal{F}^*_q(m)) = 0 \quad .$$

On pose

$$V = p_{Q*}(\mathcal{F}^*(m)) \quad ,$$

(p_Q désignant la projection $Q \times X \longrightarrow Q$) . C'est un faisceau localement libre sur Q . On note $Gr(r,V)$ le fibré en grassmanniennes sur Q , qui représente le foncteur associant à tout Q-schéma $f : Y \longrightarrow Q$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de quotients

$$f^*(V) \longrightarrow V_1 \quad ,$$

V_1 étant localement libre de rang $rg(V) - r$ sur Y .

Soit q un point fermé de Q , alors $\mathcal{F}_q$ est un faisceau sur X . On suppose que $\mathcal{F}_q$ est sans torsion et que

$$\mathcal{F}_{qx} \simeq r.m_x \quad .$$

<u>PROPOSITION 21</u> : *Etant donné un faisceau sans torsion* $\mathcal{G}$ *de rang* r *sur* X *tel que*

$$\mathcal{G}_x \simeq r.m_x \quad ,$$

il existe un plongement

$$\mathcal{G} \otimes \mathcal{L} \longrightarrow r.\mathcal{O}_X$$

($\mathcal{L}$ *étant un fibré en droites sur* X *) tel qu'au point* x *ce plongement soit l'inclusion*

$$r.m_x \longrightarrow r.\mathcal{O}_x \quad .$$

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x/m_x^2}(r.m_x/m_x^3, r.\mathcal{O}_x/m_x^2)$ constitué des applications provenant de morphismes de $\mathcal{O}_x$-modules $r.m_x \longrightarrow r.\mathcal{O}_x$.

Le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G}, r.\mathcal{O}_X) \longrightarrow W_x$$

est surjectif. Soit Z sont noyau. Pour tout $m_\circ > 0$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Z(m_\circ) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}(-m_\circ), r.\mathcal{O}_X) \longrightarrow W_x \longrightarrow 0 \quad .$$

Si $m_\circ$ est assez grand, on a

$$h^1(X,Z(m_\circ)) = 0 \quad ,$$

donc

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}(-m_\circ), r.\mathcal{O}_X) \longrightarrow W_x$$

est surjective. Soit $\rho : \mathcal{G}(-m_\circ) \longrightarrow r.\mathcal{O}_X$ un morphisme dont l'image dans W corresponde à l'inclusion $r.m_x \longrightarrow r.\mathcal{O}_x$ .Alors il existe une matrice non singulière M à coefficients dans $\mathcal{O}_x$, telle que

$$M \circ \rho_x : r.m_x \longrightarrow r.\mathcal{O}_x$$

soit l'inclusion.

Il existe un fibré en droites $\mathcal{L}_\circ \subset \mathcal{O}$ tel que $\mathcal{L}_{0x} = \mathcal{O}_x$, et un morphisme

$$f : r.\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}_0 \longrightarrow r.\mathcal{O}_X \quad ,$$

induisant M .

On prend alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(-m_\circ)$ et le morphisme

$$f \circ (\rho \otimes I_{\mathcal{L}_0}) : \mathcal{G} \otimes \mathcal{L} \longrightarrow r.\mathcal{O}_X \quad .$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 21.

On peut donc supposer qu'il existe un sous-espace vectoriel W de dimension r de $H^0(X,\mathcal{F}_q^*(m))$ tel que $\mathcal{F}_q(-m) \hookrightarrow \mathcal{O} \otimes W^*$, et qu'au point x cette injection soit l'inclusion $r.m_x \longrightarrow r.\mathcal{O}_x$.

Soit z le point de $Gr(r,V)$ correspondant à W , il est au-dessus de q .

Soit A un objet de $\mathcal{A}$,

$$p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow 0$$

une suite exacte induisant $\mathcal{O} \otimes k^p \longrightarrow \mathcal{F}_q \longrightarrow 0$ sur X , W_A un sous A-module libre de rang r de $H^0(X_A, \mathcal{F}_A^*(m))$ tel que

$$W_A \otimes_A k = W \quad .$$

Alors

$$f : \mathcal{F}_A(-m) \longrightarrow W_A^* = \mathrm{Hom}_A(W_A, A)$$

est un morphisme injectif.

<u>REMARQUE</u> : D'après le Lemme 19, Coker(f) est A-plat (c'est à dire Spec(A)-plat).

Soit F le foncteur

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

le foncteur associant à A l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples

$$(p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow 0 \ , \ W_A)$$

comme précédemment. (Deux tels couples $(p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow 0 \ , \ W_A)$ et $(p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{F}'_A \longrightarrow 0 \ , \ W'_A)$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme

$$f : \mathcal{F}_A \longrightarrow \mathcal{F}'_A$$

tel que

$$W_A = H^0({}^t f(m))(W'_A) \quad ,$$

et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p.\mathcal{O}_{X_A} & \text{———} & \mathcal{F}_A \\ \| & & | \\ p.\mathcal{O}_{X_A} & \text{———} & \mathcal{F}'_A \end{array}$$

soit commutatif.)

<u>PROPOSITION 22</u> : *L'anneau* $\hat{\mathcal{O}}_z$ *représente le foncteur* F .

Immédiat.

Soit

$$G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

le foncteur associant à A l'ensemble des classes d'isomorphisme de quotients

$$p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow 0$$

induisant $\mathcal{O} \otimes k^p \longrightarrow \mathcal{F}_q \longrightarrow 0$ sur X , $\mathcal{F}_A$ étant A-plat.

Alors *l'anneau* $\hat{\mathcal{O}}_q$ *représente le foncteur* G .

<u>LEMME 23</u> : *Le morphisme de foncteurs*

$$F \longrightarrow G$$

associant, pour tout objet A *de* $\mathcal{A}$, *à la classe d'isomorphisme de* $(p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow 0 \ , \ W_A)$ *celle de* $p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow 0$, *est formellement lisse.*

Pour étudier l'anneau local de $U(r,d)$ au point correspondant à $\mathcal{F}_q$, $\mathcal{O}$, on peut commencer par étudier $\hat{\mathcal{O}}_q$ et $\hat{\mathcal{O}}_z$. En particulier si $\hat{\mathcal{O}}_z$ est réduit, il en est de même de $\hat{\mathcal{O}}_q$, et donc aussi de $\mathcal{O}$.

On suppose maintenant que $k^p \simeq H^0(X,\mathcal{F}_q)$.

Soit $Q' = \mathrm{Quot}^P_{r.\mathcal{O}_X/X/k}$, P étant le polynôme de Hilbert de $W^*/\mathcal{F}_q(-m) = T$, q' un point de Q' correspondant à $W^* \longrightarrow T \longrightarrow 0$ (une fois choisi un isomorphisme $k^r \simeq W$.)

Soit $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ le foncteur associant à A l'ensemble des classes d'isomorphisme de quotients

$$r.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow T_A \longrightarrow 0$$

induisant $r.\mathcal{O}_X \longrightarrow T \longrightarrow 0$, T_A étant A-plat.

Alors $\hat{\mathcal{O}}_{q'}$ *représente* H .

<u>LEMME 24</u> : *Le morphisme de foncteurs*

$$F \longrightarrow H$$

associant, pour tout objet A *de* $\mathcal{A}$ *, à la classe d'isomorphisme de* $(p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow 0,\ W_A)$ *celle de* $W_A^* \longrightarrow W_A^*/\mathcal{F}_A(-m) \longrightarrow 0$ *, est formellement lisse.*

Autrement dit, étant donné $A' \longrightarrow A \longrightarrow 0$, A , A' étant des objets de $\mathcal{A}$, et des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_A \longrightarrow W_A^* \longrightarrow T_A \longrightarrow 0 \ ,$$

$$p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{G}_A \longrightarrow 0 \ , \ \mathcal{G}_A \text{ étant A-plat,}$$

$$W_A^* \longrightarrow T_{A'} \longrightarrow 0 \ , \ T_{A'} \text{ étant A'-plat} \ ,$$

induisant $W_A^* \longrightarrow T_A \longrightarrow 0$, et si $\mathcal{G}_{A'} = \mathrm{Ker}(W_A^* \longrightarrow T_{A'})$, alors il existe une suite exacte sur $X_{A'}$

$$p.\mathcal{O}_{X_{A'}} \longrightarrow \mathcal{G}_{A'} \longrightarrow 0$$

induisant $p.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{G}_A \longrightarrow 0$, et $\mathcal{G}_{A'}$ est A-plat.

Cette dernière assertion est évidente car $T_{A'}$ est A'-plat. D'autre part on a

$$\mathcal{G}_{A'}\big|X_A \simeq \mathcal{G}_A \ :$$

En effet, soit $\mathcal{H}$ le noyau du morphisme surjectif

$$\mathcal{G}_{A'}\big|X_A \simeq \mathcal{G}_A \ .$$

Puisque $\mathcal{G}_A$ est A-plat, on a

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{X_A}}(\mathcal{G}_A, \mathcal{O}_X) = 0 \ ,$$

donc

$$\mathcal{H}\big|_X \doteq 0 \ ,$$

d'où $\mathcal{H} = 0$.

Enfin, on a

$$H^0(X_{A'}, \mathcal{G}_{A'}) = p.\mathcal{O}_{X_{A'}} \ .$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 24.

L'étude de $\hat{\mathcal{O}}_{q'}$ donnera donc des renseignements sur $\hat{\mathcal{O}}_q$. En particulier $\hat{\mathcal{O}}_z$ est réduit si et seulement si $\hat{\mathcal{O}}_{q'}$ l'est.

<u>LEMME 25</u> : *Soit* T *un faisceau de torsion concentré en un nombre fini de points sur* X , $x_1, \ldots, x_s$. *Soient* A *un objet de* $\mathcal{A}$, $x_{1A}, \ldots, x_{sA}$ *les points de* X_A *a valeurs dans* A *déduits de* $x_1, \ldots, x_s$, T_A *un faisceau cohérent sur* X_A *tel que* $T_{A\,X} \simeq T$. *Alors le support de* T *est contenu dans* $\{x_{iA}\}$.

On a

$$X_A \setminus \{x_{iA}\} = (X\setminus\{x_i\})_A \quad \text{, et si on pose}$$

$$\mathcal{F}_0 = T_A \big| (X\setminus\{x_i\})_A \quad ,$$

on a

$$\mathcal{F}_0 \big|_{X\setminus\{x_i\}} = 0 \quad ,$$

d'où on déduit

$$\mathcal{F}_0 = 0 \quad \text{, ce qu'il fallait démontrer.}$$

Supposons que T ($= \operatorname{Coker}(\mathcal{F}_q(-m) \longrightarrow W^*)$) soit concentré en $x_0,\ldots\ldots,x_s$, avec $x_0 = x$.

Pour $0 \leq i \leq s$, soit

$$Q'_i = \operatorname{Quot}^{P_i}_{r.\mathcal{O}_X/X/k} \quad ,$$

P_i désignant le polynôme de Hilbert de T_{x_i} , et soit q'_i le point de Q'_i correspondant au morphisme

$$r.\mathcal{O}_X \longrightarrow T_{x_i}$$

déduit de q' .

<u>LEMME 26</u> : *On a* $\hat{\mathcal{O}}_{q'} \simeq \prod_{0\leq i\leq s} \hat{\mathcal{O}}_{q'_i}$.

Soit $H_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ le foncteur associant à A l'ensemble des classes d'isomorphisme de quotients $r.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow T_{x_i A}$ étant A-plat , dont la restriction à X est $r.\mathcal{O}_X \longrightarrow T_{x_i}$.

D'après le Lemme 25, on a un isomorphisme

$$H = \prod_{0\leq i\leq s} H_i \quad ,$$

et $\hat{\mathcal{O}}_{q'}$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_{q'_i}$) représente H (resp. H_i). Le Lemme 26 en découle immédiatement.

On est donc ramené à étudier les $\hat{\mathcal{O}}_{q'_i}$ et $\mathcal{O}$ est réduit si et seulement si les $\hat{\mathcal{O}}_{q'_i}$ le sont.

<u>LEMME 27</u> : *Si* $x_i \neq x$, *alors* $\hat{\mathcal{O}}_{q'_i}$ *est lisse, donc réduit.*

Soit $*$ le foncteur trivial $\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, représenté par k . Il faut montrer que H_i est "lisse", c'est à dire que le morphisme évident de foncteurs

$$H_i \longrightarrow *$$

est formellement lisse.

Soit $A' \longrightarrow A \longrightarrow 0$ une suite exacte d'objets de $\mathcal{A}$, $r.\mathcal{O}_{X_A} \xrightarrow{f} T_{x_i A} \longrightarrow 0$ un élément de $H_i(A)$. Alors $\operatorname{Ker}(f)$ est localement libre, car x_i est lisse. Il faut prolonger f en

$$f' : r.\mathcal{O}_{X_{A'}} \longrightarrow T_{x_i A} \longrightarrow 0 \quad ,$$

avec $T_{x_i A'}$ A'-plat. Pour cela, on se donne une base $(e_1, \ldots, e_r)$ du $\mathcal{O}_{X_A, x_{iA}}$-module libre $\operatorname{Ker}(f)_{x_{iA}}$, on prolonge ensuite $e_1, \ldots, e_r$ à des éléments $f_1, \ldots, f_r$ de $r.\mathcal{O}_{X_{A'}, x_{iA'}}$. On pose

$$Z = \operatorname{Ker}(r.\mathcal{O}_{X_{A'}} \longrightarrow r.\mathcal{O}_{X_{A'}, x_{iA'}}/(f_1, \ldots, f_r)) ,$$

et

$$T_{x_{iA'}} = r.\mathcal{O}_{X_{A'}, x_{iA'}}/(f_1, \ldots, f_r) .$$

Alors la restriction de $T_{x_{iA'}}$ à X_A est isomorphe à $T_{x_{iA}}$ et $T_{x_{iA'}}$ est A'-plat. Cela résulte aisément du Lemme 19.

Ceci achève la démonstration du Lemme 27.

Il reste donc à étudier $\hat{\mathcal{O}}_{q'_0}$.

Soit

$$Z = \{(X,Y) \in M(r) \times M(r),\ X.Y = Y.X = 0\} .$$

C'est une sous-variété fermée de $M(r) \times M(r)$, de dimension r^2 .

Posons

$$R = \hat{\mathcal{O}}_x \simeq k[T_1, T_2]\ /(T_1.T_2) ,$$

$$u = T_1\ , v = T_2\ ,\ \text{éléments de } R\ .$$

On a une suite exacte de R-modules

$$R^2 \xrightarrow{\alpha} R^2 \xrightarrow{\beta} R \longrightarrow k \longrightarrow 0 ,$$

α étant donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

β par (v,u) . On en déduit la suite exacte

$$(*) \quad R^{2.r} \xrightarrow{\alpha_r} R^{2.r} \xrightarrow{\beta_r} R^r \longrightarrow k^r \longrightarrow 0$$

déterminée par les matrices

$$\begin{pmatrix} u.I_r & 0 \\ 0 & v.I_r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (v.I_r\ ,\ u.I_r) \ .$$

Soit A un objet de $\mathcal{A}$,

$$(\Sigma) \quad (R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\alpha_{r_A}} (R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\beta_{r_A}} (R \otimes_k A)^r \longrightarrow T_A \longrightarrow 0$$

une suite exacte de $(R \otimes_k A)$-modules induisant $(*)$, T_A étant A-plat .

On a un morphisme canonique

$$\mathcal{O}_{x_A} \longrightarrow R \otimes_k A$$

(x_A point de X_A déduit de x) .

Donc (Σ) définit un morphisme de faisceaux sur X_A

$$r.\mathcal{O}_{x_A} \longrightarrow T_A \longrightarrow 0$$

(T_A : faisceau de torsion concentré en x_A et A-plat).

On en déduit un morphisme

$$f : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow Q'_0$$

tel que $f(p) = q_0$, p étant le point fermé de $\mathrm{Spec}(A)$.

Considérons maintenant un morphisme

$$g : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow Z$$

tel que $g(p) = (0,0)$.

Soient $(X_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$, $(Y_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ les coordonnées des deux facteurs de $M(r) \times M(r)$. Elles définissent $a = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$, $b = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$, à coefficients dans m_A . Réciproquement, puisque $(X_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$, $(Y_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$, 1 engendrent $\mathcal{O}_{M(r) \times M(r)}$, la donnée de $a = (a_{ij})$, $b = (b_{ij})$, définit un morphisme

$$g : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow M(r) \times M(r)$$

envoyant p dans $(0,0)$ si et seulement a et b sont à coefficients dans m_A . Il est immédiat que g *est à valeurs dans* Z *si et seulement si* $a.b = b.a = 0$.

On a donc établi un isomorphisme entre d'une part l'ensemble des morphismes $g : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow Z$ tels que $g(p) = 0$, et d'autre part l'ensemble des couples (a,b) de $M(r,m_A) \times M(r,m_A)$ tels que $a.b = b.a = 0$.

Soit (a,b) un élément de $M(r,m_A) \times M(r,m_A)$ tel que $a.b = b.a = 0$. On en déduit un complexe

$$(*)_{(a,b)} : (R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\alpha_{A(a,b)}} (R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\beta_{A(a,b)}} (R \otimes_k A)^r \longrightarrow T_A \longrightarrow 0 \quad ,$$

en prenant

$$\alpha_{A(a,b)} = \begin{pmatrix} u.I_r & a \\ & \\ b & v.I_r \end{pmatrix} , \quad \beta_{A(a,b)} = (v.I_r - b, u.I_r - a) \quad ,$$

$$T_A = \mathrm{Coker}(\beta_{a(a,b)}) \quad .$$

Alors T_A est A-plat et $(*)_{(a,b)}$ est une suite exacte. C'est une conséquence immédiate du Lemme 19.

En prenant $A = \mathcal{O}_{Z,(0,0)}/m^n_{(0,0)}$ pour chaque $n \geq 1$, on obtient une suite compatible de "déformations" de $(*)$ (en prenant évidemment pour a et b les images de (X_{ij}) et (Y_{ij}) dans $\mathcal{O}_{Z,(0,0)}/m_{(0,0)}$.

Ceci définit un morphisme d'anneaux locaux

$$\bar{\theta} = \hat{\mathcal{O}}_{q_0} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{Z,(0,0)} \quad .$$

Si (a,b) est dans $M(r,m_A) \times M(r,m_A)$ et $a.b = b.a = 0$, (a,b) définit un morphisme

$$\mathrm{Spec}(A) \longrightarrow Z \quad ,$$

donc un morphisme

$$\mathcal{O}_{Z,(0,0)}/m^n(0,0) \longrightarrow A \qquad \text{pour} \quad n \gg 0 \quad ,$$

et on a, en notant $\bar{X}$, $\bar{Y}$ les images de (X_{ij}) , (Y_{ij}) dans $A' = \mathcal{O}_{Z,(0,0)}/m^n(0,0)$,

$$(*)_{(a,b)} = (*)_{(\bar{X},\bar{Y})} \otimes_{A'} A \quad .$$

Soit A un objet de $\mathcal{A}$,

$$(R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\alpha_{rA}} (R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\beta_{r.A}} (R \otimes_k A)^r \longrightarrow T_A \longrightarrow 0 \quad ,$$

$$(R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\alpha'_{rA}} (R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\beta'_{r.a}} (R \otimes_k A)^r \longrightarrow T'_A \longrightarrow 0$$

des suites exactes induisant $(*)$. On dit que $(\alpha_{rA}, \beta_{rA})$ et $(\alpha'_{rA}, \beta'_{rA})$ sont *isomorphes* s'il existe des automorphismes σ et τ de $(R \otimes_k A)^{2.r}$, induisant $I_{2.r}$ sur $R^{2.r}$, tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
(R \otimes_k A)^{2.r} \arrow[r, "\alpha_{rA}"] \arrow[d, "\sigma"] & (R \otimes_k A)^{2.r} \arrow[r, "\beta_{rA}"] \arrow[d, "\tau"] & (R \otimes_k A)^r \arrow[d, equal] \\
(R \otimes_k A)^{2.r} \arrow[r, "\alpha'_{rA}"] & (R \otimes_k A)^{2.r} \arrow[r, "\beta'_{rA}"] & (R \otimes_k A)^r
\end{tikzcd}$$

Soit

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

le foncteur associant à un objet A de $\mathcal{A}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de "déformations" de $(*)$

$$(R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\alpha_{rA}} (R \otimes_k A)^{2.r} \xrightarrow{\beta_{rA}} (R \otimes_k A)^r \longrightarrow T_A \longrightarrow 0 \quad ,$$

avec $T_A = \mathrm{Coker}(\beta_{rA})$, T_A étant A-plat.

<u>PROPOSITION 28</u> : *L'anneau* $\hat{\mathcal{O}}_{Z,(0,0)}$ *représente le foncteur* ϕ .

A tout morphisme local $\hat{\mathcal{O}}_{Z,(0,0)} \longrightarrow A$, on a vu qu'on pouvait associer une déformation de $(*)$, du type $(*)_{(a,b)}$.

Il reste à prouver les deux assertions suivantes :

(i) Pour tout objet A de $\mathcal{A}$, toute suite exacte

$$(R \otimes_k A)^{2.r} \longrightarrow (R \otimes_k A)^{2.r} \longrightarrow (R \otimes_k A)^r \longrightarrow T_A \longrightarrow 0$$

de $(R \otimes_k A)$-modules, induisant $(*)$, est isomorphe (au sens qu'on a vu précédemment) à une suite exacte du type $(*)_{(a,b)}$, (a,b) étant un élément de $M(r,m_A) \times M(r,m_A)$ tel que $a.b = b.a = 0$.

(ii) Pour tout objet A de $\mathcal{A}$, si (a_0,b_0) , (a_1,b_1) sont des éléments de $M(r,m_A) \times M(r,m_A)$ tels que les suites exactes $(*)_{(a_0,b_0)}$ et $(*)_{(a_1,b_1)}$ soient isomorphes, on a $(a_0,b_0) = (a_1,b_1)$.

En faisant une démonstration par récurrence, on se ramène à prouver que si

$$0 \longrightarrow (\varepsilon) \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

est une suite exacte, A , A' étant des éléments de $\mathcal{A}$, ε un élément de A' tel que $\varepsilon.m_{A'} = \{0\}$, et si les propriétés (i) et (ii) sont vraies pour A , elles le sont aussi pour A' .

(i) Soit

$$0 \longrightarrow (R \otimes_k A')^{2.r} \xrightarrow{\alpha'_r} (R \otimes_k A')^{2.r} \xrightarrow{\beta'_r} (R \otimes_k A')^{r} \longrightarrow T_{A'} \longrightarrow 0$$

une suite exacte de $(R \otimes_k A')$-modules. On peut supposer que (α'_r,β'_r) induit une suite exacte du type $(*)_{(a,b)}$. Soit (a',b') un élément de $M(r,m_{A'}) \times M(r,m_{A'})$, relèvement de (a,b) . On a

$$a'.b' = \varepsilon.\sigma \quad , \quad b'.a' = \varepsilon.\Gamma \quad ,$$

avec σ , Γ dans $M(r,k)$. On peut écrire

$$\alpha'_r = \begin{pmatrix} u.I_r + \varepsilon.M & a' + \varepsilon.U \\ b' + \varepsilon.V & v.I_r + \varepsilon.N \end{pmatrix} ,$$

$$\beta'_r = (V.I_r - b' + \varepsilon.P \ , \ u.I_r - a' + \varepsilon.Q) \quad ,$$

avec M , N , P , Q à coefficients dans R , U , V à coefficients dans m_R (en modifiant au besoin a' et b') .

La condition

$$\beta'_r \circ \alpha'_r = 0$$

s'écrit

$$\begin{cases} (v.I_r-b'+\varepsilon.P).(u.i_r+\varepsilon.M) + (u.I_r-a'+\varepsilon.Q).(b'+\varepsilon.V) = 0 \ , \\ (v.I_r-b'+\varepsilon.P).(a'+\varepsilon.U) + (u.I_r-a'+\varepsilon.Q).(v.I_r+\varepsilon.N) = 0 \ , \end{cases}$$

donc, puisque $\varepsilon.a' = \varepsilon.b' = 0$, on a

$$\begin{cases} v.M + u.P + u.V - \sigma = 0 \\ v.U + u.N + v.Q - \Gamma = 0 \qquad (\text{dans } M(r,R)) \ , \end{cases}$$

d'où

$$\sigma = \Gamma = 0 \quad ,$$

c'est à dire

$$a'.b' = b'.a' = 0 \quad ,$$

et on peut écrire

$$\begin{cases} P + V = v.B \\ M = -u.B \end{cases} \qquad \begin{cases} U + Q = u.C \\ N = -v.C \end{cases},$$

avec B , C dans $M(r,R)$.

Ecrivons maintenant une condition d'isomorphisme de deux telles suites, définies respectivement par (M,N,P,Q,U,V) et (M',N',P',Q',U',V') :
Il existe des automorphismes de la forme

$$E = \begin{pmatrix} I_r + \varepsilon.E_1 & \varepsilon.E_2 \\ \varepsilon.E_3 & I_r + \varepsilon.E_4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I_r + \varepsilon.F_1 & \varepsilon.F_2 \\ \varepsilon.F_3 & I_r + \varepsilon.F_4 \end{pmatrix},$$

avec E_i , F_i à coefficients dans R tels que

$$F \circ \alpha'_f = \alpha''_r \circ E \quad \text{et} \quad \beta'_r = \beta''_r \circ F \ .$$

On a

$$F \circ \alpha'_r = \begin{pmatrix} u.I_r + \varepsilon.(M + u.F_1) & a' + \varepsilon.(U + v.F_2) \\ b' + \varepsilon.(V + u.F_3) & v.I_r + \varepsilon.(N + v.F_4) \end{pmatrix}$$

$$\alpha''_r \circ E = \begin{pmatrix} u.I_r + \varepsilon.(M' + u.E_1) & a' + \varepsilon.(U' + u.E_2) \\ b' + \varepsilon.(V' + v.E_3) & v.I_r + \varepsilon.(N' + v.E_4) \end{pmatrix},$$

$$\beta'_r = (v.I_r - b' + \varepsilon.P \ , \ u.I_r - a' + \varepsilon.Q) \ ,$$

$$\beta''_r \circ F = (v.I_r - b' + \varepsilon.(P' + v.F_1 + u.F_3), u.I_r - a' + \varepsilon.(Q' + v.F_2 + u.F_4)) \ .$$

Les égalités voulues sont vérifiées dès que

$$\begin{cases} M + u.F_1 = M' + u.E_1 \\ U + v.F_2 = U' + u.E_2 \\ V + u.F_3 = V' + v.E_3 \\ N + v.F_4 = N' + v.E_4 \\ P = P' + v.F_1 + u.F_3 \\ Q = Q' + v.F_2 + u.F_4 \end{cases} .$$

Prenons

$$\begin{cases} F_1 - E_1 = B \\ F_4 - E_4 = C \end{cases},$$

de telle sorte qu'on a $M' = N' = 0$. Prenons aussi E_3 , F_3 , E_2 , F_2 tels que

$$\begin{cases} V = v.E_3 - u.F_3 \\ U = u.E_2 - v.F_2 \end{cases},$$

et on a donc $U' = V' = 0$. On a

$$\begin{cases} P' = v.(-F_1 + B - E_3) \\ Q' = x.(-F_4 + C - E_2) \end{cases} .$$

On prend maintenant

$$\begin{cases} F_1 = - E_3 + B \\ E_1 = - E_3 \\ F_4 = C - E_2 \\ E_4 = - E_2 \end{cases} .$$

On a alors $P' = Q' = 0$.

Ceci prouve que $(\alpha'_r, \beta'_r) \simeq (*)_{(a',b')}$ et démontre (i) pour A' .

(ii) Montrons d'abord que si (a',b') est un élément de $M(r,m_{A'}) \times M(r,m_{A'})$ tel que $a'.b' = b'.a' = 0$, si (a,b) désigne l'image de (a',b') dans $M(r,m_A) \times M(r,m_A)$, tout automorphisme de $(*)_{(a,b)}$ est induit par un automorphisme de $(*)_{(a',b')}$.

Soit

$$f : (*)_{(a',b')} \longrightarrow (*)_{(a',b')}$$

un automorphisme, donné par des automorphismes σ et Γ de $(R \otimes_k A)^{2.r}$ tels que

$$\begin{aligned} \alpha_{A(a,b)} \circ \sigma &= \Gamma \circ \alpha_{A(a,b)} \\ \beta_{A(a,b)} \circ \sigma &= \beta_{A(a,b)} \end{aligned} .$$

On peut prolonger σ et Γ en des automorphismes σ' , Γ' de $(R \otimes_k A')^{2.r}$. On a alors

$$\alpha_{A'(a',b')} \circ \sigma' = \Gamma' \circ \alpha_{A'(a',b')} + \varepsilon.S'$$

$$\beta_{A'(a',b')} \circ \Gamma' = \beta_{A'(a',b')} + \varepsilon.T' \quad ,$$

S' et T' étant à coefficients dans R . Remarquons que

$$\beta_{A'(a',b')} \circ \varepsilon.S' = \varepsilon.\ \beta_{A'(a',b')} \circ S'$$

$$\varepsilon.T' \circ \alpha_{A'(a',b')} = \varepsilon.T' \circ \alpha_{A'(a',b')} \quad ,$$

d'où on déduit

$$\beta_{A'(a',b')} \circ \alpha_{A'(a',b')} \circ \sigma' + \beta_{A'(a',b')} \circ \Gamma' \alpha_{A'(a',b')} =$$

$$\beta_{A'(a',b')} \circ \Gamma' \circ \alpha_{A'(a',b')} + \varepsilon.\beta_{A'(a',b')} \circ S' + \beta._{A'(a',b')} \circ \alpha_{A'(a',b')} +$$

$$\varepsilon.T' \circ \alpha_{A'(a',b')} \quad ,$$

d'où on déduit

$$\varepsilon.(\beta_{A'(a',b')} \circ S' + T' \circ \alpha_{A'(a',b')}) = 0 \quad ,$$

et

$$\beta_{A'(a',b')}\circ S' + T'\circ\alpha_{A'(a',b')} = 0 \quad .$$

D'autre part, si $g : (R \otimes_k A')^{2.r} \longrightarrow T_{A'} = \mathrm{Coker}(\beta_{A'(a',b')})$,
induisant $g_0 : R^{2.r} \longrightarrow T$, on a

$$g \circ \beta_{A'(a',b')}\circ\Gamma' = g \circ \beta_{A'(a',b')} + \varepsilon.g_0 \circ T' \quad ,$$

d'où

$$g_0 \circ T' = 0 \quad , \text{ et } \quad \mathrm{Im}(T') \subset \mathrm{Im}(\beta_{A'(a',b')}) \quad ,$$

et T' se met sous la forme

$$T' = \beta_{A'(a',b')}\circ Q \quad .$$

On a

$$\beta_{A'(a',b')}(S'+Q \circ \alpha_{A'(a',b')}) = \beta_{A'(a',b')}\circ S' + T' \circ\alpha_{A'(a',b')} = 0,$$

donc $\mathrm{Im}(S' + Q\circ\alpha_{A'(a',b')}) \subset \mathrm{Im}(\alpha_{A'(a',b')})$,
et $S' + Q \circ\alpha_{A'(a',b')}$ se met sous la forme

$$S' + Q \circ \alpha_{A'(a',b')} = \alpha_{A'(a',b')}\circ P \quad .$$

Alors $(\sigma' - \varepsilon.P \;,\; \Gamma' - \varepsilon.Q)$ est la déformation cherchée de (σ,Γ) :

$$\alpha_{A'(a',b')}\circ (\sigma' - \varepsilon.P) - (\Gamma' - \varepsilon.Q) \circ \alpha_{A'(a',b')} =$$

$$\varepsilon.(S' - (\alpha_{A'(a',b')}\circ P - Q \circ \alpha_{A'(a',b')})) = 0 \quad ,$$

$$\beta_{A'(a',b')}\circ (\Gamma' - \varepsilon.Q) - \beta_{A'(a',b')} = \varepsilon.(T' - \beta_{A'(a',b')}\circ Q) = 0 \quad .$$

Démontrons maintenant (ii).

Soient (a,b) , (a',b') des éléments de $M(r,m_{A'}) \times M(r,m_{A'})$ tels que $a.b = b.a = a'.b' = b'.a' = 0$ tels que les suites exactes $(*)_{(a,b)}$ et $(*)_{(a',b')}$ soient isomorphes.

Puisque (ii) est vraie pour A, (a,b) et (a',b') ont même image (a_0,b_0) dans $M(r,m_A)$. D'après ce qui précède, on peut supposer que l'isomorphisme entre $(*)_{(a,b)}$ et $(*)_{(a',b')}$ induit l'identité de $(*)_{(a_0,b_0)}$.

On peut donc écrire

$$\begin{pmatrix} Ir + .F_1 & \varepsilon.F_2 \\ \varepsilon.F_3 & I_r+\varepsilon.F_4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u.I_r & a \\ b & v.I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u.I_r & a' \\ b' & v.I_r \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_r+\varepsilon.F_1 & \varepsilon.E_2 \\ \varepsilon.E_3 & I_r+\varepsilon.E_4 \end{pmatrix} ,$$

avec E_i, F_i à coefficients dans R . On en déduit

$$a' = a + \varepsilon.(v.F_2 - u.E_2) \quad ,$$
$$b' = b + \varepsilon.(u.F_3 - v.E_3) \quad ,$$

d'où $a = a'$, $b = b'$ puisque a, a', b, b' sont à coefficients dans $m_{A'}$.

Ceci prouve que (ii) est vraie pour A' .

La proposition 28 est donc démontrée.

Rappelons que $H_0 : \mathcal{A} \longrightarrow \text{Ens}$ désigne le foncteur associant à A l'ensemble des classes d'isomorphisme de quotients $r.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow T_A \longrightarrow 0$, T_A étant A-plat, dont la restriction à X est le quotient canonique $r.\mathcal{O}_X \longrightarrow r.k_x \longrightarrow 0$.

On a un morphisme évident de foncteurs

$$\Theta : \phi \longrightarrow H_0$$

décrit plus haut, induisant le morphisme

$$\theta : \hat{\mathcal{O}}_{q_0} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{Z,(0,0)}$$

qu'on a aussi défini plus haut.

PROPOSITION 29 : *Le morphisme de foncteurs* Θ *est un isomorphisme.*

On en déduit immédiatement, puisque Z est réduit, le Théorème 18. Montrons d'abord que Θ *est surjectif.*

Soit $r.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow T_A$ un quotient A-plat induisant $r.\mathcal{O}_X \longrightarrow r.k_x$. On en déduit une suite exacte

$$f : (R \otimes_k A)^r \longrightarrow T_A \longrightarrow 0 ,$$

(ici T_A désigne $T_{Ax_A} \otimes_{\mathcal{O}_{x_A}} (R \otimes_k A)$) , T_A étant A-plat, induisant

$$f_0 : R^r \longrightarrow k^r \longrightarrow 0$$

(le morphisme canonique).

D'après le Lemme 19, on a $\mathrm{Ker}(f) \otimes_A k = \mathrm{Ker}(f_0)$. Le R-module $\mathrm{Ker}(f)$ admet $2.r$ générateurs, on peut donc d'après le Lemme de Nakayama trouver un morphisme surjectif

$$g : ((R \otimes_k A)^{2.r} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \quad \text{induisant} \quad R^{2.r} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_0) .$$

Le $(R \otimes_k A)$-module $\mathrm{Ker}(f)$ est A-plat, donc en appliquant le même raisonnement que précédemment à g on obtient

$$(R \otimes_k A)^{2.r} \longrightarrow (R \otimes_k A)^{2.r} ,$$

et la suite exacte obtenue définit un élément de $\Theta(A)$ au-dessus de $r.\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow T_A \longrightarrow 0$.

Ceci prouve que Θ est surjectif.

Montrons maintenant que Θ *est injectif.*

Il faut montrer que si A est un objet de $\mathcal{A}$, (a,b) , (a',b') des éléments de $M(r, m_A)$ tels que $a.b = b.a = a'.b' = b'.a' = 0$, et qu'on ait un diagramme commutatif

$$(D) \qquad \begin{array}{ccc} (R \otimes_k A)^r & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\beta_{A(a,b)}) \\ \| & & \wr\| \\ (R \otimes_k A)^r & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\beta_{A(a',b')}) \end{array} \quad ,$$

alors on a $(a,b) = (a',b')$.

Remarquons qu'on déduit sans peine de (D) un morphisme

$$(*)_{(a,b)} \longrightarrow (*)_{(a',b')}$$

(prendre des générateurs). Il faut montrer que c'est un isomorphisme. Cela découle du résultat suivant :

Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (R \otimes_k A)^{2.r} & \xrightarrow{\alpha_{A(a,b)}} & (R \otimes_k A)^{2.r} & \xrightarrow{\beta_{A(a,b)}} & (R \otimes_k A)^r \\ \Big\downarrow \sigma & & \Big\downarrow \Gamma & & \| \\ (R \otimes_k A)^{2.r} & \xrightarrow{\alpha_{A(a,b)}} & (R \otimes_k A)^{2.r} & \xrightarrow{\beta_{A(a,b)}} & (R \otimes_k A)^r \end{array} \quad ;$$

alors σ et Γ sont des isomorphismes. Posons

$$\sigma = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} E & B \\ C & D \end{pmatrix} .$$

On a $\beta_{A(a,b)} \circ \Gamma = \beta_{A(a,b)}$, d'où

$$\begin{cases} v.E + u.C = v.I_r \\ v.B + u.D = u.I_r \end{cases} ,$$

d'où

$$\begin{cases} C = v.U \quad , \quad E = I_r + u.S \\ B = u.V \quad , \quad D = I_r + v.T \end{cases} ,$$

on en déduit immédiatement que σ est un isomorphisme. On a

$$\Gamma \circ \alpha_{A(a,b)} = \alpha_{A(a,b)} \circ \sigma ,$$

d'où

$$\begin{cases} u.N = 0 \quad , \quad u.M = u.(I_r + u.S) \\ v.P = 0 \quad , \quad v.Q = v.(I_r + v.T) \end{cases} ,$$

d'où

$$\begin{cases} N = v.N' \quad , \quad M = I_r + u.S + v.S' \\ P = u.P' \quad , \quad Q = I_r + v.T + u.T' \end{cases} ,$$

on en déduit immédiatement que Γ est un isomorphisme.

Par conséquent $\mathcal{O}$ est réduit si et seulement si $\mathcal{O}_{Z,(0,0)}$ l'est. Le théorème 18 est donc une conséquence du Théorème suivant, dû à R.C Cowsik.

<u>THÉORÈME 30</u> : *La sous-variété fermée* Z *de* $M(2) \times M(2)$ *définie par les équations*

$$X.Y = Y.X = 0$$

est réduite au point $(0,0)$.

Soit I l'idéal de Z , c'est à dire l'idéal de $k[X_{ij},Y_{ij}]$ engendré par les coefficients des matrices $X.Y$ et $Y.X$, I_1 l'idéal de $k[X_{ij},Y_{ij}]$ engendré par les X_{ij} , I_2 l'idéal de $k[X_{ij},Y_{ij}]$ engendré par les Y_{ij} , I_3 l'idéal de $k[X_{ij},Y_{ij}]$ engendré par I , $\det(X)$, $\det(Y)$.

Alors on a

$$I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \quad .$$

Il est immédiat que $I \subset I_1 \cap I_2 \cap I_3$, et il suffit de montrer que $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \subset I$.

Soit f un élément de $I_1 \cap I_2 \cap I_3$. Puisque f est dans I_3 , on peut écrire

$$f = a + b.\det(X) + c.\det(Y) \quad ,$$

a étant un élément de I , b et c des éléments de $k[X_{ij},Y_{ij}]$. Puisque f est dans I_1 , $c.\det(Y)$ est aussi dans I_1 . Donc c aussi, $\det(Y)$ n'y étant pas et I_1 étant premier. On en déduit que $c.\det(Y)$ est dans I : en effet, si Δ_Y désigne la matrice des cofacteurs de Y , on a

$$\Delta_Y.Y = \det(Y).Id \quad ,$$

d'où

$$\Delta_Y Y.X = X.\det(Y) \quad ,$$

ce qui prouve que

$$\det(Y).I_1 \subset I \quad .$$

De même, $b.\det(X)$ appartient à I . Donc f est un élément de I , et

$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 \subset I \quad .$$

Puisque $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$; et que les idéaux I_1 et I_2 sont premiers, il reste à montrer que I_3 est premier.

Regardons d'abord Z de plus près. Il possède trois composantes irréductibles de dimension 4. Ce sont les sous-variétés $\pi_1^{-1}(0)$, $\pi_2^{-1}(0)$, et $\overline{Z \setminus \pi_1^{-1}(0) \cup \pi_2^{-1}(0)}$ (π_1 et π_2 désignant les restrictions à Z des projections $M(2) \times M(2) \longrightarrow M(2)$) . Pour voir cela on peut par exemple étudier les fibres de π_1 . On pose

$$W_0 = \overline{Z \;\; \pi_1^{-1}(0) \cup \pi_2^{-1}(0)} \quad .$$

Soit W la sous-variété réduite de $M(2) \times M(2)$ définie par le sous-ensemble de $M(2) \times M(2)$ sous-jacent à W_0 . Il suffit de montrer que l'idéal de W est I_3 .

Soit

$$\rho : \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \longrightarrow M(2) \times M(2)$$

$$((r_0,r_1),(s_0,s_1),(t_0,t_1)) \longrightarrow \left(\begin{pmatrix} r_0.s_0.t_0 & r_0.s_0.t_1 \\ r_0.s_1.t_0 & r_0.s_1.t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1.s_1.t_1 & -r_1.s_0.t_1 \\ -r_1.s_1.t_0 & r_1.s_0.t_0 \end{pmatrix} \right)$$

(ce morphisme induit le plongement de Segree $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_7$) . Alors son image est une sous-variété de $M(2) \times M(2)$, de dimension 4, contenue dans W , donc égale à W . Le noyau du morphisme

$$\rho^* : k[X_{ij},Y_{ij}] \longrightarrow k[r_0,s_0,r_1,s_1,t_0,t_1]$$

induit par ρ est donc J . L'image S de ρ^* , qui est isomorphe à l'anneau des fonctions régulières sur W , est la sous-algèbre de $k[r_0,r_1,s_0,s_1,t_0,t_1]$ engendrée par les monômes du type

$$r_0^{\alpha_0}.r_1^{\alpha_1}.s_0^{\beta_0}.s_1^{\beta_1}.t_0^{\gamma_0}.t_1^{\gamma_1} ,$$

avec

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \beta_0 + \beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 .$$

Ces monômes constituent une base du k-espace vectoriel S .

Pour u , v , w dans $\{0,1\}$, on note $P(u,v,w)$ l'unique monôme X_{ij} (ou Y_{ij}) tel que $\rho^*(X_{ij}) = r_u.s_v.t_w$. On déduit aisément de ce qui précède que J est engendré par les éléments de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} P(u_i,v_i,w_i) - \prod_{i=1}^{n} P(u_i',v_i',w_i') ,$$

avec

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i' , \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i' , \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i' .$$

Il reste à montrer que ces éléments sont dans I_3 .

En faisant un raisonnement par récurrence sur n , on se ramène à prouver que

$$P(u_1,v_1,w_1).P(u_2,v_2,w_2) - (P(u_1',v_1',w_1').P(u_2',v_2',w_2')$$

est dans I_3 , si

$$u_1 + u_2 = u_1' = u_2' , v_1 + v_2 = v_1' + v_2' , w_1 + w_2 = w_1' + w_2' .$$

On le montre aisément en examinant chaque cas.

Ceci achève la démonstration du Théorème 30.

I.- MORPHISMES FORMELLEMENT LISSES

Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des k-algèbres commutatives artiniennes locales, F et G des foncteurs covariants

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens} \quad ,$$

$$\phi : F \longrightarrow G$$

un morphisme de foncteurs.

On dit que ϕ est *formellement lisse* si étant donnée une suite exacte

$$A \xrightarrow{p} A_0 \longrightarrow 0$$

d'éléments de $\mathcal{A}$, des éléments f_0 de $F(A_0)$, g de $G(A)$ tels que

$$G(p)(g) = \phi_{A_0}(f_0) \quad ,$$

il existe un élément f de $F(A)$ tel que

$$\phi_A(f) = g \quad ,$$

$$F(p)(f) = f_0 \quad .$$

<u>Autre définition équivalente</u> :

Etant donnée une suite exacte

$$A \xrightarrow{p} A_0 \longrightarrow 0$$

d'éléments de $\mathcal{A}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(p)} & F(A_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{A_0}} \\ G(A) & \xrightarrow{G(p)} & G(A_0) \end{array} \quad ,$$

et donc une application canonique

$$F(A) \longrightarrow F(A_0) \times_{G(A_0)} G(A) \quad .$$

Alors le morphisme de foncteurs ϕ est formellement lisse si et seulement si pour toute suite exacte $A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$, cette application est surjective.

Si $\mathcal{B}$ est une catégorie contenant $\mathcal{A}$, on définit de manière évidente les morphismes formellement lisses de foncteurs $\mathcal{B} \longrightarrow \mathrm{Ens}$.

On étend aussi de manière évidente la notion de morphisme formellement lisse à des foncteurs contravariants

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens} \quad ,$$

$\mathcal{C}$ étant une sous-catégorie pleine de k-Sch, la catégorie des k-schémas noetheriens.

Quelques propriétés des foncteurs formellement lisses

1. Soit $\phi : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs covariants $\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$.

Supposons F et G représentés par des k-algèbres commutatives locales de corps résiduel k , B_F et B_G respectivement.

Alors ϕ est induit par un morphisme de k-algèbres locales

$$\rho : B_G \longrightarrow B_F ,$$

et ϕ est formellement lisse si et seulement si ρ l'est (au sens de SGA I, Exp. 3).

En particulier, B_G est lisse sur k (resp. intègre, sans éléments nipotents) si et seulement si B_F l'est.

2. Soit $\phi : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs contravariants $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}$.

Supposons F et G représentés par des k-schémas noetheriens Y_F et Y_G respectivement.

Alors ϕ est induit par un morphisme de k-schémas.

$$\rho : Y_F \longrightarrow Y_G ,$$

et le foncteur ϕ est formellement lisse si et seulement si ρ est un morphisme lisse.

En particulier, si x est un point de Y_F , Y_F est lisse (resp. irréductible, réduit) en x si et seulement si Y_G l'est en $\rho(x)$.

II.- EXTENSIONS

(Narasimhan-Ramanan [20] et Ramanan [31])

Soit Y une variété algébrique, et V , W des fibrés vectoriels sur Y . Les extensions de W par V sont classifiées par $H^1(Y,\underline{\mathrm{Hom}}(W,V))$.

On pose $H = H^1(Y,\underline{\mathrm{Hom}}(W,V))$. On note p_Y et P_H les projections $H \times Y \longrightarrow Y$ et $H \times Y \longrightarrow H$.

PROPOSITION 1 : *Il existe un fibré vectoriel* E *sur* $H \times Y$ *et une suite exacte de morphismes de fibrés vectoriels*

$$0 \longrightarrow p_Y^*(V) \longrightarrow E \longrightarrow p_Y^*(W) \longrightarrow 0$$

telle que pour tout point h *de* H , *sa restriction à* $\{h\} \times Y$:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow E_h \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

soit associée à l'élément h *de* $H^1(Y,\underline{\mathrm{Hom}}(W,V))$.

Comme $R^i p_{Y*}(p_Y^*(\underline{\mathrm{Hom}}(W,V)) = 0$ si $i > 0$, on a un isomorphisme

$$H^1(H \times Y , p_Y^*(\underline{\mathrm{Hom}}(W,V))) \simeq H^1(Y , p_{Y*}(\mathcal{O}) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(W,V)) .$$

Mais on a $H \subset p_{Y*}(\mathcal{O})$, donc I_H définit un élément de $H^1(H \times Y \ , \underline{Hom}(p_{Y*}(W), p_Y^*(V)))$. Il suffit de prendre l'extension de $p_Y^*(W)$ par $p_Y^*(V)$ définie par cet élément.

Ce résultat se généralise :

Soient S et T des variétés algébriques, V (resp. W) un fibré vectoriel sur $S \times Y$ (resp. $T \times Y$) , tels que $\dim(H^1(Y, \underline{Hom}(W_t, V_s)))$ soit indépendant du point du point (s,t) de $S \times T$.

On note $p_{S\times T}$, p_T , p_S les projections $S \times T \times Y \longrightarrow S \times T$, $S \times T \longrightarrow T$, $S \times T \longrightarrow S$ respectivement.

On pose

$$F = R^1(p_{S\times T})_* (\underline{Hom}(p_T^\#(W), p_S^\#(V))) \ .$$

C'est un fibré vectoriel sur $S \times T$. On note $\pi : F \longrightarrow S \times T$ la projection.

<u>PROPOSITION 2</u> : *Si on a pour* $i = 1 , 2$,

$$h^i(S \times T, (p_{S\times T})_*(\underline{Hom}(p_T^\#(W), p_S^\#(V))) \otimes F^*) = 0 \ ,$$

il existe un fibré vectoriel E *sur* $F \times Y$ *(considéré en tant que variété algébrique) et une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \pi^\#(p_S^\#(V)) \longrightarrow E \longrightarrow \pi^\#(p_T^\#(W)) \longrightarrow 0$$

telle que pour tout point (s,t) *de* $S \times T$ *et tout élément* h de $F_{(s,t)} = H^1(Y, \underline{Hom}(W_t, V_s))$, *sa restriction à* $\{h\} \times Y$:

$$0 \longrightarrow W_t \longrightarrow E_h \longrightarrow V_s \longrightarrow 0$$

soit associée à h .

On a, pour tout $i > 0$,

$$R^i(\pi^\# \times I_Y)_*(\pi^\# (\underline{Hom}(p_T^\#(W), p_S^\#(V)))) = 0 \ ,$$

donc on a un isomorphisme canonique

$$H^1(F \times Y \ , \pi^\#(\underline{Hom}(p_T^\#(W), p_S^\#(V)))) \simeq H^1(S \times T \times Y, \underline{Hom}(p_T^\#(W), p_S^\#(V)) \otimes (\pi \times I_Y)_* (\mathcal{O})).$$

D'autre part, d'après les hypothèses, on a

$$\begin{aligned} &H^1(S \times T \times Y \ , \underline{Hom}(p_T^\#(W), p_T^\#(V)) \otimes p_{S\times T}^*(F^*)) \\ &\simeq H^1(S \times T, R^1(p_{S\times T})_* (\underline{Hom}(p_T^\#(W), p_S^\#(V))) \otimes F^*)) \\ &= H^1(S \times T, F \otimes F^*) \ . \end{aligned}$$

Comme $p_{S\times T}^*(F^*) \subset (\pi \times I_Y)_*(\mathcal{O})$, I_F définit un élément de $H^1(F \times Y, \underline{Hom}(\pi\,(p_T^\#(W)), \pi^\#(p_S^\#(V))))$. Il suffit de prendre l'extension de $\pi^\#(p_T(W))$ par $\pi^\#(p_S^\#(V))$ définie par cet élément.

Les hypothèses de la Proposition 2 sont vérifiées dans les cas suivants :

(i) Pour tout élément (s,t) de $S \times T$, on a

$$Hom(W_t, V_s) = \{0\} \ .$$

(ii) S et T sont affines.

<u>REMARQUE 1</u> : Il existe des analogues "projectifs" des Propositions 1 et 2 : Les hypothèses de la Proposition 2 étant vérifiées, on note $\mathcal{O}(1)$ le fibré tautologique du fibré en espaces projectifs $P(F)$: pour tout point (s,t) de $S \times T$, et tout point h de $F_{(s,t)}$, on a $\mathcal{O}(1)_h = h^*$. Soient $\pi : P(F) \longrightarrow S \times T$ et $p_{P(F)} : P(F) \times Y \longrightarrow P(F)$ les projections.

Il existe alors un fibré vectoriel E sur $P(F) \times Y$ et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi^{\#}(p_S^{\#}(V)) \boxtimes p_{P(F)}^{*}(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow E \longrightarrow \pi^{\#}(p_T(W)) \longrightarrow 0$$

telle que pour tout point (s,t) de $S \times T$ et tout point h de $P(H^1(Y, \underline{Hom}(W_t,V_s))) = P(F_{(s,t)}$, sa restriction à $\{h\} \times Y$:

$$0 \longrightarrow V_s \boxtimes h^* \longrightarrow E_{(s,t)} \longrightarrow W_t \longrightarrow 0$$

soit associée à l'inclusion $h \hookrightarrow H^1(Y,\underline{Hom}(W_t,V_s))$ (qui est un élément de $H^1(Y,\underline{Hom}(W_t,V_s \boxtimes h^*)))$.

(Démonstration analogue à la précédente.)

<u>REMARQUE 2</u> : On suppose que $S = T$. On note $p_T : T \times Y \longrightarrow T$ la projection. On suppose que $\dim(H^1(Y,\underline{Hom}(W_t,V_t))$ est indépendant du point t de T . On pose

$$F = R^1(p_T)_*(\underline{Hom}(W,V)) \quad ,$$

c'est un fibré vectoriel sur T . On note $\quad : F \longrightarrow T$ la projection. Le résultat suivant se prouve comme la Proposition 2 :

Si pour $i = 1$, 2 on a $h^i(T,p_T{*}(\underline{Hom}(W,V)) \boxtimes F^*) = 0$, il existe un fibré vectoriel E sur $F \times X$ et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi^{\#}(W) \longrightarrow E \longrightarrow \pi^{\#}(V) \longrightarrow 0$$

telle que pour tout point t de T et tout élément h de $F_h = H^1(Y,\underline{Hom}(W_t,V_t))$, sa restriction à $\{h\} \times Y$:

$$0 \longrightarrow W_t \longrightarrow E_h \longrightarrow V_t \longrightarrow 0$$

soit associée à h .

Cet énoncé a bien entendu un analogue "projectif" évident.

Pour finir, la

<u>PROPOSITION 3</u> : *Soient* V *et* W *des fibrés vectoriels simples sur* Y . *On suppose que tout morphisme non nul* $V \longrightarrow W$ *est un isomorphisme. On considère deux extensions de* W *par* V :

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} E \longrightarrow W \longrightarrow 0 \quad et$$
$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{q} F \longrightarrow W \longrightarrow 0 \quad ,$$

auxquelles sont associées respectivement les éléments e *et* f *de* $H^1(Y,\underline{Hom}(W,V))$.

Alors les fibrés E *et* F *sont isomorphes si et seulement si il existe un élément* c *de* k^* *tel que* $e = c.f$.

Il est immédiat que si $e = c.f$, E et F sont isomorphes.

Réciproquement supposons que E et F soient isomorphes. Soit $\rho : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. On peut supposer que la deuxième extension est non triviale. Le morphisme $g = q \circ \rho \circ i : V \longrightarrow W$ est nul où bien c'est un isomorphisme. Si c'est un isomorphisme, $\Psi = \rho \circ i \circ g^{-1} : W \longrightarrow F$ est tel que $q \circ \Psi = I_W$, ce qui entraine que la deuxième extension est triviale. Comme ce n'est pas le cas, on a $g = 0$, et par conséquent ρ induit un isomorphisme $V \longrightarrow V$, qu'on peut supposer être I_V , et un isomorphisme $W \longrightarrow W$, qui est une homothétie de rapport non nul.

On en déduit immédiatement la Proposition 3 .

III.- MORPHISME DE DÉFORMATION INFINITÉSIMALE

(Voir [27], [21]) .

Définitions

Soit r un entier, $r \geq 2$.

Soient S et T des variétés algébriques lisses et E un fibré vectoriel de rang r sur $S \times T$. Il existe un recouvrement ouvert fini $(W_i)_{i \in I}$ de $S \times T$ et un fibré vectoriel F sur T tels que pour tout i dans I il existe un isomorphisme

$$f_i : E\big|_{W_i} \longrightarrow p_T^*(F)\big|_{W_i} ,$$

(p_T désignant la projection $S \times T \longrightarrow T$) .

Pour tous i , j dans I soit

$$\begin{aligned} g_{ij} : W_i \cap W_j &\longrightarrow p_T^*(\underline{\mathrm{End}}(F))\big|_{W_i \cap W_j} \\ y &\longmapsto f_{iy} \circ f_{jy}^{-1} . \end{aligned}$$

C'est un morphisme de variétés algébriques.

On en déduit un morphisme de fibrés vectoriels sur $W_i \cap W_j$

$$dg_{ij} : p_S^*(T_S)\big|_{W_i \cap W_j} \longrightarrow p_T^*(\underline{\mathrm{End}}(F))\big|_{W_i \cap W_j} ,$$

(p_S désignant la projection $S \times T \longrightarrow S$) .

Pour tout ouvert U de S on obtient donc une application linéaire

$$\begin{aligned} \eta_{ij} : H^0(U, T_S|_U) &\longrightarrow H^0(W_i \cap W_j \cap (U \times T), \underline{\mathrm{End}}(E)) \\ s &\longmapsto (y \longrightarrow f_{iy}^{-1} \circ dg_{ijy}(s(y)) \circ f_{jy}) . \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que les η_{ij} satisfont la condition de cocycle

$$\eta_{ik} = \eta_{ij} + \eta_{jk} \quad \text{sur} \quad W_i \cap W_j \cap W_k \cap (U \times T)$$

pour tous i , j , k dans I .

Les η_{ij} définissent donc une application linéaire

$$\eta_U : H^0(U, T_S|_U) \longrightarrow H^1(U \times T, \underline{End}(E)) \quad .$$

Ces applications définissent un morphisme de faisceaux

$$\eta : T_S \longrightarrow R^1 p_{S*}(\underline{End}(E)) \quad ,$$

appelé le *morphisme de déformation infinitésimale de* E , *considéré comme une famille de fibrés vectoriels sur* T *paramétrée par* S .

Evidemment on peut montrer que η est indépendant du choix de $(W_i)_{i\in I}$ et de F .

En chaque point s de S , on a une application linéaire

$$\eta_s : T_{Ss} \longrightarrow H^1(T, \underline{End}(E_s))$$

(E_s désignant la restriction de E à $\{s\} \times T$), appelée *l'application de déformation infinitésimale de* E *au point* s .

Exemple : Si $E = p_T^*(E')$, p_T désignant la projection $S \times T \longrightarrow T$, E' étant un fibré vectoriel sur T , il est aisé de voir que $\eta = 0$.

Propriétés fonctorielles

Soit $f : S \longrightarrow S'$ un morphisme de variétés algébriques lisses, E' un fibré vectoriel sur $S' \times T$. On suppose qu'il existe un fibré en droites L sur S , et un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$\Psi : E \otimes p_S^*(L) \longrightarrow (f \times I_T)^*(E') \quad .$$

Soient η et η' les applications de déformation infinitésimale de E et E'.

Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_{Ss} & \xrightarrow{T(f)_s} & T_{S',f(s)} \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_s} & & \downarrow{\scriptstyle \eta'_{f(s)}} \\ H^1(T, \underline{End}(E_s)) & \xrightarrow{\psi^*} & H^1(T, \underline{End}(E'_{f(s)})) \end{array}$$

est commutatif. On en déduit en particulier la propriété suivante :

η_s est invariant sous l'action de Aut(E) (induite par l'action de Aut(E) sur $H^1(T, End(E_s))$) .

Extensions

1 - Soient E , E" des fibrés vectoriels sur T et soit

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow p_T^*(E) \xrightarrow{\pi} p_T^*(E'') \longrightarrow 0$$

une suite exacte sur $S \times T$. On peut considérer que π est un morphisme

$$S \longrightarrow Hom(E,E'') \quad ,$$

et par conséquent, pour tout élément s de S, on a une application linéaire

$$T(\pi)_s : T_{Ss} \longrightarrow Hom(E,E'') \quad ,$$

définissant une application linéaire

$$f : T_{Ss} \longrightarrow Hom(E'_s,E'') \quad .$$

On a d'autre part un morphisme de liaison

$$\partial : Hom(E'_s,E'') \longrightarrow H^1(T,\underline{End}(E'_s)) \quad .$$

Soit

$$\eta_s : T_{Ss} \longrightarrow H^1(T,\underline{End}(E'_s))$$

l'application de déformation infinitésimale de E' en s.

<u>PROPOSITION 1</u> : *On a* $\eta_s = -\partial \circ f$.

Soit U un ouvert de $Hom(E,E'')$ constitué de morphismes surjectifs et contenant $\pi(s)$. On considère la suite exacte sur $U \times T$

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow p'^*_T(E) \longrightarrow p'_T(E'') \longrightarrow 0$$

(p'_T désignant la projection $U \times T \longrightarrow T$), avec $V = Ker(\rho)$, étant défini par

$$\rho_{u,t}(e) = u_t(e) \quad ,$$

pour tous u dans U, t dans T et e dans E_t.

On a, en notant aussi π le morphisme

$$\pi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

induit par π,

$$\pi = (\pi \times I_T)^*(\rho) \quad ,$$

donc en utilisant les propriétés fonctorielles de η_s, on voit aisément qu'il suffit de montrer que

$$\eta_{\pi(s)} = -\partial' \circ f' \quad ,$$

∂', f', $\eta_{(s)}$ désignant les applications linéaires analogues à ∂, f, η_s correspondant à la suite exacte

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow p'^*_T(E) \longrightarrow p'^*_T(E'') \longrightarrow 0 \quad ,$$

et au point $\pi(s)$ de U.

L'ouvert U peut être choisi de manière qu'il existe un recouvrement ouvert fini $(T_i)_{i \in I}$ de T tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) $V_{\pi(s)}|_{T_i}$ est isomorphe à $\mathcal{O} \otimes k^r$,

(ii) Il existe un morphisme de fibrés vectoriels

$$\sigma_i : E''|_{T_i} \longrightarrow E|_{T_i}$$

tel que pour tout point u de U, $u \circ \sigma_i$ soit un automorphisme de $E''|_{T_i}$, et que

$$\pi(s) \circ \sigma_i = I_{E''|_{T_i}} \quad ,$$

(iii) Si $g : U \longrightarrow \mathrm{End}(E|_{U_i})$

$$u \longmapsto I - \sigma_i \circ (u \circ \sigma_i)^{-1} \circ (u - \pi(s)) \quad ,$$

alors pour tout u dans U , $g(u)$ est un automorphisme de $E|_{U_i}$.

Pour tout u dans U , on pose

$$f_i(u) = g_i(u)\Big|_{V_{\pi(s)}} \quad .$$

On a

$$u \circ f_i = u_{V_{\pi(s)}} - (u \circ \sigma_i) \circ (u \circ \sigma_i)^{-1} \circ (u - \pi(s))\Big|_{V_{\pi(s)}}$$

$$= u\Big|_{V_{\pi(s)}} - u\Big|_{V_{\pi(s)}} = 0 \quad ,$$

donc on peut considérer que f_i est un isomorphisme

$$V|_{U \times T_i} \longrightarrow \mathcal{O} \otimes k^r \quad .$$

Avec les notations précédentes, pour $E = V$, on a

$$g_{ij} = g_i^{-1} \circ f_j \quad ,$$

donc $dg_{ij\pi(s)} : T_{U\pi(s)} = \mathrm{Hom}(E, E'') \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathrm{End}(V_{\pi(s)})$
est donné par

$$dg_{ij\pi(s)} = df_{j\pi(s)} - dg_{i\pi(s)} \circ \pi(s)$$

$(df_{j\pi(s)} : T_{U\pi(s)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_{\pi(s)}, E)$,

$dg_{i\pi(s)} : T_{U\pi(s)} \longrightarrow \mathrm{End}(E)$)

$$= (dg_j - dg_i) \circ \pi(s) \quad .$$

Mais $dg_{i\pi(s)} = - \sigma_i \circ du$, ce qui prouve que $(dg_{ij\pi(s)})$ est l'image par ∂ du cocycle $- du \circ \pi(s)$.

On en déduit immédiatement la Proposition 1 .

Déformation des fibrés vectoriels sur une courbe algébrique

Soit S une variété algébrique irréductible, E un fibré vectoriel sur $S \times X$.

Le degré de E_s est indépendant de s , car S est irréductible. On le note d . Le fibré en droites $\det(E)$ sur $S \times X$ définit un morphisme

$$\Psi : S \longrightarrow J^{(d)} \quad ,$$

associant à un point s de S la classe d'isomorphisme du fibré en droites $\det(E_s)$ sur X .

Le fibré tangent de $J^{(d)}$ est le fibré trivial $\mathcal{O} \otimes H^1(X, \mathcal{O})$. On a donc un morphisme de fibrés vectoriels sur S

$$T(\Psi) : T_S \longrightarrow \mathcal{O}_S \otimes H^1(X, \mathcal{O}) \quad .$$

et en chaque point s de S une application linéaire

$$T(\Psi)_s : T_S \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \quad .$$

On note $\eta_s : T_{Ss} \longrightarrow H^1(X,\underline{\mathrm{End}}(E))$ l'application de déformation infinitésimale de E en s , et Tr_s la trace $\underline{\mathrm{End}}(E_s) \longrightarrow \mathcal{O}$. C'est un morphisme surjectif de fibrés vectoriels sur X , dont le noyau est noté $\underline{\mathrm{Ad}}(E_s)$.

PROPOSITION 2 : *On a*

$$T(\det)_s = H^1(\mathrm{Tr}_s) \circ \eta_s \quad .$$

On admettra le résultat pour le fibré de Poincaré sur $J^{(d)}$, et on montrera que le cas général en découle.

On peut évidemment supposer d aussi grand qu'on le veut, et en utilisant le lemme I.23 , en remplaçant S par un ouvert de S contenant s , on peut supposer qu'on a une suite exacte sur $S \times X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes k^{r-1} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0 \quad ,$$

$\mathcal{L}$ étant un fibré en droites et $r = \mathrm{rg}(E)$.

Soit $(W_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de $S \times X$ tel que pour tout i dans I , on ait un isomorphisme

$$f_i : E|_{W_i} \longrightarrow \mathcal{O} \otimes k^r \quad .$$

On pose $k^r = k^{r-1} \oplus k$. On peut supposer qu'on a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \otimes k^{r-1} \arrow[r] & \mathcal{O} \otimes k^r \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \otimes k^{r-1} \arrow[r] \arrow[u, equal] & E|_{W_i} \arrow[r] \arrow[u, "f_i"'] & \mathcal{L}|_{W_i} \arrow[r] \arrow[u, "c_i"'] & 0
\end{tikzcd} \quad ,$$

c_i étant un isomorphisme. On en déduit immédiatement que $H^1(\mathrm{Tr})_s \circ \eta_s$ n'est autre que l'application de déformation infinitésimale de $\mathcal{L}$ au point s . Pour montrer que c'est $T(\det)_s$ il reste à utiliser les propriétés fonctorielles de l'application de déformation infinitésimale et le fait que la Proposition 2 est vraie pour le fibré de Poincaré sur $J^{(d)}$.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 2.

REMARQUE : pour le fibré de Poincaré sur $J^{(d)}$, la Proposition 2 est une conséquence de la construction de $J^{(d)}$.

Conséquences :

a) Si la classe d'isomorphisme de $\det(E_{s_1})$ est indépendante de s , η_s est à valeurs dans le noyau de $H^1(\mathrm{Tr}_s)$, qui n'est autre que $H^1(X,\underline{\mathrm{Ad}}(E_s))$ si r n'est pas un multiple de $\mathrm{car}(k)$.

b) En utilisant la Proposition 2 le lecteur démontrera aisément les assertions non démontrées au début du Chapitre VI de la première partie, concernant les variétés $U(r,L)$.

1.- M. ARTIN — On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings. J. Algebra 11 (1969). p. 532-563.

2.- M. ARTIN — Lectures on deformations of singularities. Tata Inst. of Fund. Research Lectures Notes 54, (1976).

3.- M.F ATIYAH — Vector bundles on an elliptic curve. Proc. London Math. Soc. 7 (1957), p. 414-452.

4.- U.V DESALE, S. RAMANAN — Classification of vector bundles of rank 2 on hyper-elliptic curves. Invent. Math. 38 (1976), p. 161-185.

5.- C. D'SOUZA — Compactification of generalized jacobians. Proc. Ind. Acad. Sc. 88 (1979), p. 419-457.

6.- A. GROTHENDIECK — Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats (Séminaire Bourbaki 1959/1960, Exp. 190).

7.- IV. Les schémas de Hilbert. (Séminaire Bourbaki 1960/1961, Exp. 221).

8.- Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1). Lectures Notes in Mathematics 224. Springer Verlag (1971).

9.- Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2). Advanced Studies in pure Mathematics. Masson-North Holland (1968)

10.- W.J HABOUSH — Reductive groups are geometrically reductive. Ann. of Math. 102 (1975). p. 67.83.

11.- R. HARTSHORNE — Algebraic Geometry. GTM 52. Springer Verlag (1977).

12.- S. LANG — Algebra. Addison-Wesley (1971).

13.- S.G LANGTON — Valuative criteria for families of vector bundles on algebraic varieties. Ann. of Math. 101 (1975). p. 88-110.

14.- D. LUNA — Slices Etales. Bull. Math. France 33 (1973).

15.- V. MEHTA, C.S SESHADRI — Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures. Math. Ann. 248 (1980).p.205-239.

16.- D. MUMFORD — Geometric Invariant Theory. Springer Verlag (1965).

17.- D. MUMFORD, P.E NEWSTEAD — Periods of a moduli space of bundles on curves. Amer. J. of Math. 90 (1968). P. 1200-1208.

18.- D. MUMFORD, K. SUOMINEN — Introduction to the theory of moduli, in Algebraic Geometry, Oslo 1970. Wolters-Noordhoff (1972). p. 171-222.

19.- M.S NARASIMHAN, S. RAMANAN — Vector bundles on curves, in Algebraic Geometry, Bombay lloquium (1968). p. 335-346.

20.- — Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. of Math. 89 (1969), p. 14-51.

21.- — Deformations of the moduli space of vector bundles over an algebraic curve. Ann. of Math. 101 (1975). p. 391-417.

22.- M.S NARASIMHAN, C.S SESHADRI — Holomorphic vector bundles on a compact Riemann surface. Math. Ann. 155 (1964). p. 69-80.

23.- — Stable and unitary vector bundles on a compact surface. Ann. of Math; 82 (1965). p. 540-567.

24.- P.E NEWSTEAD — Topological properties of some spaces of stable bundles. Topology 6 (1967). p. 241-262.

25.- — Stable bundles of rank 2 and odd degree over a curve of genus 2. Topology 7 (1968).p. 205-215.

26.- — Charasteristic classes of stable bundles of rank 2 over an algebraic curves. Trans. Amer. Math. Soc. 169 (1972). p. 337-345.

27.- Rationality of moduli spaces of stable bundles. Math. Ann. 215 (1975). p. 251-268.

28.- Rationality of moduli spaces of stable bundles, (correction). Math. Ann. 249 (1980). p. 281-282.

29.- Introduction to moduli problems and orbit spaces. Tata Inst. of Fund. Research Lectures Notes 51, (1978).

30.- T. ODA, C.S SESHADRI — Compactifications of the generalised Jacobian variety Trans. Amer. Math. Soc. 253 (1979).

31.- S. RAMANAN — The moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve. Math. Ann. 200 (1973). p. 69-84.

32.- A. RAMANATHAN — Stable principal bundles on a compact Riemann surface-construction of moduli spaces. Ph. D. Thesis, University of Bombay (1976).

33.- P. SAMUEL, O. ZARISKI — Commutative Algebra, Vol.I et II. GTM 28 et 29. Springer Verlag.

34.- C.S SESHADRI — Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. of Math. 85 (1967). p. 303-336.

35.- Mumford's conjecture for GL(2) and applications, in Algebraic Geometry, Bombay Colloquium (1968). p. 347-371.

36.- Moduli of π-vector bundles over an algebraic curve, in Questions on Algebraic Varieties, C.I.M.E, III Ciclo, Varenna (1970), p. 139-260.

37.- Quotient spaces modulo reductive algebraic curves. Ann. of Math. 95 (1972). p. 511-556.

38.- Theory of moduli, in Algebraic Geometry Arcata 1974, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. XXIX (1975). p. 263-304.

39.- Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures. Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977). p. 124-126.

40.- Desingularisation of moduli varieties of vector bundles on curves. Proceedings of the Kyoto conference on Algebraic Geometry (1977). p. 155-184.

41.- A. WEIL Généralisation des fonctions abéliennes. J. Math. Pures et Appl. 17 (1938). p. 47-87.

C.S.SESHADRI
Tata Institute
Fundamental Research
Homi Bhabha Road
Bombay, 5
Inde

J.M.DREZET
Université Paris VII
UER de Mathématiques
Tour 45/55, 5ème étage
75251 Paris Cedex 05
France