Astérisque

JACQUES MEYER

Représentation multiplicative des entiers à l'aide de l'ensemble $P + l$ (II)

Astérisque, tome 94 (1982), p. 133-142

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__94__133_0>

REPRÉSENTATION MULTIPLICATIVE DES ENTIERS A L'AIDE DE L'ENSEMBLE $\mathcal{P}+1$ (II)

par

Jacques MEYER

-:-:-:-

1.1. - Un cas particulier de la célèbre conjecture (H) de Schinzel est le suivant :

Etant donné un entier $n \geq 1$, il existe une infinité d'entiers u tels que les nombres $u-1$ et $un-1$ soient simultanément des nombres premiers. Autrement dit :

Tout entier $n \geq 1$ s'écrit d'une infinité de façons sous la forme

$$\text{(I)} \qquad n = \frac{p+1}{q+1}, \quad \text{où } (p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} .$$

En fait Schinzel et Sierpinski [8] ont fait une conjecture un peu plus forte :

Tout nombre rationnel positif r se représente d'une infinité de manières sous la forme :

$$r = \frac{p+1}{q+1}, \quad \text{où } (p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} .$$

On est loin, bien sûr, d'avoir résolu ce problème, mais divers travaux ont permis d'obtenir des résultats concernant la représentation multiplicative des entiers à l'aide de l'ensemble $\mathcal{P}+1$.

Elliott [4] a montré que l'ensemble $\mathcal{F}_1$ des entiers qui admettent une représentation (I) a une densité logarithmique inférieure strictement positive et que l'ensemble $\mathcal{P}+1$ est un ensemble d'unicité pour les fonctions additives, ce qui a pour conséquence (Dress - Volkmann [3], Wolke [10]) que tout entier $n \geq 1$

admet la représentation :

$$n = (p_1+1)^{\alpha_1} (p_2+1)^{\alpha_2} \dots (p_k+1)^{\alpha_k} ,$$

où les α_i $(1 \leq i \leq k)$ sont des nombres rationnels dépendant de n ainsi que l'entier k .

Wirsing [9] a montré qu'il existe deux constantes positives c et c' telles que tout entier $n \geq 1$ admette la représentation :

$$n^a = (p_1+1)^{\varepsilon_1} \dots (p_k+1)^{\varepsilon_k} ,$$

avec les conditions : $a \leq c$, $k \leq c'$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Il précise également la taille des p_i par rapport à celle de n .

Enfin il est montré dans [7] que la densité asymptotique inférieure de $\mathfrak{F}_1$ est supérieure ou égale à $\frac{1}{118,2}$ et que, grâce à des résultats sur les fonctions multiplicatives obtenus par Delange, il existe un entier $\nu \leq 8$ tel que tout entier $n \geq 1$ admette la représentation :

$$n^\nu = (p_1+1)^{a_1} \dots (p_k+1)^{a_k} ,$$

où les a_i $(1 \leq i \leq k)$ sont des entiers relatifs dépendant de n , ainsi que k .

1.2. - On va établir ici les résultats suivants :

. $\underline{d}\, \mathfrak{F}_1 \geq \frac{1}{39,57}$

. $\mathcal{G}$ désignant l'ensemble des nombres entiers $d \geq 1$ qui se représentent sous la forme

$$d = \frac{p_1 + 1}{(p_2+1)(p_3+1)} ,$$

on a la minoration

$$\underline{d}\mathcal{G} \geq \frac{1}{8,88} .$$

. Tout entier $n \geq 1$ se représente d'une infinité de manières sous la forme :

$$n^a = \prod_{i=1}^{4} (p_i+1)^{\varepsilon_i} ,$$

où $1 \leq a \leq 8$ et $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$.

2.1. - v étant un nombre réel strictement positif et M un nombre entier ≥ 1, on désigne pour tout nombre réel $x \geq 1$ et tout entier $d \geq 2$ par $G_d(x,v)$ le nombre de couples $(p,q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ tels que :

$$p+1 = Md(q+1)$$

$$q \leq x^v - 1 .$$

Nous allons évaluer de deux manières distinctes la somme $\sum_{2 \leq d \leq x/M} G_d(x,v)$.

2.2. - $G_d(x,v)$ peut tout d'abord être majoré par la méthode du crible de Selberg ([5], p. 119) :

$$\begin{aligned} G_d(x,v) &\leq \left| \{ q \leq x^v : (Md)q + (Md-1) \text{ premier} \} \right| \\ &\leq 8\alpha_2 \, g(Md) \frac{x^v}{v^2 \operatorname{Log}^2 x} \left[1 + O\left(\frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} x}\right) \right] \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\alpha_2 = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

et défini la fonction g sur les entiers ≥ 2 par

$$g(n) = \prod_{2<p \mid n(n-1)} \frac{p-1}{p-2} .$$

La majoration de $G_d(x,v)$ étant uniforme, on obtient l'inégalité :

$$(1) \quad \sum_{2 \leq d \leq x/M} G_d(x,v) \leq 8\alpha_2 \frac{x^v}{v^2 \operatorname{Log}^2 x} \left[1 + O\left(\frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} x}\right)\right] \sum_{\substack{2 \leq d \leq x/M \\ G_d(x,v) > 0}} g(Md) .$$

2.3. - Par ailleurs nous avons les égalités suivantes :

$$\sum_{2 \leq d \leq x/M} G_d(x,v) = \sum_{q \leq x^v - 1} \sum_{\substack{p \leq x(q+1)-1 \\ p \equiv -1 \, (M(q+1)) \\ p \neq M(q+1)-1}} 1 = \sum_{q \leq x^v - 1} \pi(x(q+1), M(q+1), -1) + R_1(x,v) ,$$

où $R_1(x,v) = O(\pi(x^v))$.

Supposons v strictement inférieur à 1. Le théorème bien connu de Bombieri-Vinogradov ([5], p. 111) permet alors d'écrire :

$$\sum_{2\leq d\leq x/M} G_d(x,v) = \sum_{q\leq x^v-1} \frac{\ell i(x(q+1))}{\varphi(M(q+1))} + R_2(x,v) ,$$

où $R_2(x,v) = O_v\left(\frac{x^{1+v}}{\operatorname{Log}^3 x}\right)$ et φ désigne la fonction d'Euler.

Et l'on obtient la minoration :

$$\sum_{2\leq d\leq x/M} G_d(x,v) \geq \frac{x}{(1+v)\operatorname{Log} x} \sum_{q\leq x^v-1} \frac{q+1}{\varphi(M(q+1))} + O_v\left(\frac{x^{1+v}}{\operatorname{Log}^3 x}\right) .$$

La fonction multiplicative $f : n \longmapsto \frac{\varphi(M)n}{\varphi(Mn)} = \prod_{\substack{p|n \\ p\nmid M}} \frac{p}{p-1}$ a une valeur moyenne sur l'ensemble $\mathcal{P}+1$. Ceci résulte de la convergence de la série $\sum_{p\in\mathcal{P}} (1-f(p))p^{-1}$ et peut se démontrer en utilisant les méthodes de Kataï [6] ou de Deshouillers [2] (bien que les résultats de ces auteurs ne concernent que les fonctions multiplicatives de module au plus égale à 1) :

$$\sum_{q\leq x^v} \frac{(q+1)\,\varphi(M)}{\varphi(M\,(q+1))} = \prod_{p\nmid M} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{x^v}{v\operatorname{Log} x} + o_v\left(\frac{x^v}{\operatorname{Log} x}\right) .$$

On obtient alors la minoration :

$$\sum_{2\leq d\leq x/M} G_d(x,v) \geq \frac{1}{\varphi(M)} \prod_{p\nmid M} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{x^{1+v}}{v(1+v)\operatorname{Log}^2 x} + o_v\left(\frac{x^{1+v}}{\operatorname{Log}^2 x}\right) .$$

Tenant compte de la majoration (1), on arrive à l'inégalité :

$$(2) \qquad \sum_{\substack{2\leq d\leq x/M \\ G_d(x,v)>0}} g(Md) \geq \frac{x}{\varphi(M)} \prod_{p\nmid M} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \frac{v}{1+v} \cdot \frac{1}{8\alpha_2} + o_v(x) .$$

2.4. - Il reste maintenant à majorer l'expression de gauche. Définissons une fonction g_M sur les entiers ≥ 2 par

$$g_M(n) = \prod_{\substack{2<p|n(Mn-1) \\ p\nmid M}} \frac{p-1}{p-2} .$$

Il est clair que pour tout entier ≥ 2 ,

$$g(Mn) = g_M(n) \prod_{2<p|M} \frac{p-1}{p-2}$$

Par conséquent :

$$(3) \quad \sum_{\substack{2\leq d\leq x/M \\ G_d(x,v)>0}} g_M(d) \geq \frac{x}{\varphi(M)} \prod_{2<p|M} \frac{p-2}{p-1} \cdot \prod_{p\nmid M} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \frac{v}{1+v} \cdot \frac{1}{8\alpha_2} + o_v(x) \ .$$

Soient u et u' deux nombres réels supérieurs ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{u}+\frac{1}{u'} = 1$. Appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$(4) \quad \sum_{\substack{2\leq d\leq x/M \\ G_d(x,v)>0}} g_M(d) \leq \Big(\sum_{\substack{2\leq d\leq x/M \\ G_d(x,v)>0}} 1 \Big)^{1/u} \Big(\sum_{2\leq d\leq x/M} g_M(d)^{u'} \Big)^{1/u'} \ .$$

Définissons une fonction fortement multiplicative h par

$$h_M(p) = 1 \qquad \text{si } p|2M \ .$$

$$h_M(p) = \frac{p-1}{p-2} \qquad \text{si } p\nmid 2M \ ,$$

de sorte que

$$\forall\, d\geq 2 \qquad g_M(d) = h_M(d)\, h_M(Md-1) \ .$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\sum_{2\leq d\leq x/M} g_M(d)^{u'} \leq \Big(\sum_{1\leq d\leq x/M} h_M(d)^{2u'} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{1\leq d\leq x/M} h_M(Md-1)^{2u'} \Big)^{1/2} \ .$$

Pour estimer les deux expressions de droite, on va utiliser des théorèmes bien connus sur la valeur moyenne des fonctions mutliplicatives [1] : d'une part,

$$\sum_{1\leq d\leq x/M} h_M(d)^{2u'} = \frac{x}{M} \prod_{p\nmid 2M} \left(1 + \frac{h_M(p)^{2u'}-1}{p}\right) + o(x) \quad ;$$

d'autre part :

$$\sum_{1\le d\le x/M} h_M(Md-1)^{2u'} = \sum_{\substack{n\le x-1\\ n\equiv -1(M)}} h_M(n)^{2u'}$$

$$= \frac{x}{\varphi(M)} \prod_{p\mid M}\left(1-\frac{1}{p}\right) \prod_{p\nmid 2M}\left(1+\frac{h_M(p)^{2u'}-1}{p}\right) + o(x)$$

$$= \frac{x}{M} \prod_{p\nmid 2M}\left(1+\frac{h_M(p)^{2u'}-1}{p}\right) + o(x) \ .$$

Posons, pour tout nombre réel $t \ge \frac{1}{2}$

$$a_M(t) = \prod_{p\nmid 2M}\left(1+\frac{\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{2t}-1}{p}\right) \ ;$$

on obtient alors :

$$(5) \qquad \sum_{2\le d\le x/M} g_M(d)^{u'} \le \frac{x}{M}\, a_M(u') + o(x) \ .$$

Regroupons les inégalités (3), (4), et (5) :

$$\sum_{\substack{2\le d\le x/M\\ G_d(x,v)>0}} 1 \ge x\left(\frac{v}{1+v}\cdot\frac{1}{8\alpha_2}\right)^u \left[\frac{M^{1/u'} \prod_{2<p\mid M}\frac{p-2}{p-1} \prod_{p\nmid M}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\varphi(M)\; a_M(u')^{1/u'}}\right]^u + o(x) \ .$$

Notant $\mathfrak{J}_M$ l'ensemble des nombres entiers $d \ge 1$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$d = \frac{p+1}{M\,(q+1)} \ ,$$

et tenant compte des égalités $(p \ge 3)$:

$$\frac{p-2}{p-1} = \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\left(\frac{p-1}{p}\right)$$

et

$$\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1} = 1+\frac{2}{p\,(p-2)} \ ,$$

on parvient à la minoration :

$$\underline{d}\, \mathfrak{J}_M \ge \left(\frac{v}{1+v}\right)^u \left(\frac{c_M}{4\, a_M(u')^{1/u'}}\right)^u \ .$$

(On note $c_M = \prod_{p\nmid 2M}\left(1+\frac{2}{p(p-2)}\right)$.)

Enfin, comme v est un nombre réel quelconque inférieur à 1 , on a l'inégalité :

$$\underline{d}\,\mathfrak{F}_M \geq \left(\frac{c_M}{8\,a_M(u')^{1/u'}}\right)^u . \tag{6}$$

2.5. - Faisons $M=1$ dans l'inégalité (6). On obtient :

$$\underline{d}\,\mathfrak{F}_1 \geq \left(\frac{c_1}{8\,a_1(u')^{1/u'}}\right)^u .$$

La valeur approchée de $c_1 = \prod_{p>2} (1+\frac{2}{p(p-2)})$ est $2,14069$ (*). Le calcul de $a_1(u')$ est assez délicat pour les valeurs de u proches de 1 , mais le maximum de l'expression de droite de (6), en tant que fonction de u , semble atteint en une valeur voisine de $u = 1,156$.

On obtient alors :

PROPOSITION 1. $\quad \underline{d}\,\mathfrak{F}_1 \geq \frac{1}{39,57}$.

2.6. - Faisons maintenant le choix $M = M_o = 2 \prod_{2 \leq p \leq 19} p$. On trouve

$$\prod_{p>19} (1+\frac{}{p(p-2)}) = 1,022\ldots$$

et

$$\underline{d}\,\mathfrak{F}_{M_o} \geq \frac{1}{8,88}$$

(on a pris $u = u_o = 1,031$) .

Or M_o-1 est un nombre premier. On a ainsi démontré :

PROPOSITION 2. $\quad \underline{d}\,\mathcal{G} \geq \frac{1}{8,88}$.

2.7. - On va maintenant montrer que quels que soient les entiers M_1 et $M_2 \geq 1$, M_1 divise M_2 implique

---

(*) Ce calcul numérique, et tous ceux qui figurent ici, ont été effectués sur ordinateur par A. Laville, de l'Université de Reims.

$$(7) \qquad \left(\frac{c_{M_1}}{a_{M_1}(u'_o)^{1/u'_o}}\right)^{u_o} \leq \left(\frac{c_{M_2}}{a_{M_2}(u'_o)^{1/u'_o}}\right)^{u_o}.$$

Il suffit pour cela de montrer que sous cette hypothèse :

$$1 \leq \prod_{\substack{p \mid M_1 \\ p \nmid 2M_1}} \left(1 + \frac{\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{2u'_o} - 1}{p}\right)^{1/u'_o} \left(1 + \frac{2}{p(p-2)}\right)^{-1}$$

Or il est clair que, pour tout nombre premier p impair, on a l'inégalité

$$\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{2u'_o} \geq \left(1 + \frac{2}{p-2}\right)^{u'_o}.$$

D'autre part il existe un nombre réel $c \in \left]0, \frac{2}{p-2}\right[$ tel que

$$\frac{\left(1 + \frac{2}{p-2}\right)^{u'_o} - 1}{\left(1 + \frac{2}{p(p-2)}\right)^{u'_o} - 1} = p \frac{(1+c)^{u'_o - 1}}{\left(1 + \frac{c}{p}\right)^{u'_o - 1}}.$$

Par conséquent

$$1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{p-2}\right)^{u'_o} - 1}{p} \geq \left(1 + \frac{2}{p(p-2)}\right)^{u'_o};$$

compte tenu de l'inégalité (8), on a alors l'inégalité

$$\left(1 + \frac{\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{2u'_o} - 1}{p}\right)^{1/u'_o} \geq 1 + \frac{2}{p(p-2)}$$

ce qui prouve (7).

L'implication (7) a pour conséquence que si M est un multiple de M_o,

$$\underline{d}\, \mathfrak{F}_M \geq \frac{1}{8,88}.$$

Soit maintenant un entier $n \geq 1$. On considère les ensembles $\mathfrak{F}_{nM_o}, \mathfrak{F}_{n^2M_o}, \ldots, \mathfrak{F}_{n^9M_o}$. Comme pour chaque entier $i = 1, 2, \ldots, 9$, on a la minoration

$$\underline{d}\, \mathfrak{F}_{n^iM_o} \geq \frac{1}{8,88},$$

il est clair qu'il existe deux entiers i et i' vérifiant $1 \leq i < i' \leq 9$ et une infinité d'entiers $d \geq 2$ tels que :

$$d \in \mathfrak{F}_{n^i M_o} \cap \mathfrak{F}_{n^{i'} M_o} .$$

Or chacun de ces nombres d admet les représentations :

$$d = \frac{p+1}{n^i (q+1) M_o} \quad \text{et} \quad d = \frac{p'+1}{n^{i'} (q'+1) M_o} .$$

Donc

$$n^{i'-i} = \frac{(p'+1)(q+1)}{(q'+1)(p+1)} .$$

La proposition suivante exprime ce résultat :

PROPOSITION 3. - Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier a tel que $1 \leq a \leq 8$ et une infinité de représentations de n sous la forme :

$$n^a = \prod_{i=1}^{4} (p_i+1)^{\varepsilon_i} , \quad \text{où} \quad \varepsilon_i = \pm 1 .$$

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[1] H. DELANGE, Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 3ème série, t. 78 (1961), 273-304.

[2] J.-M. DESHOUILLERS, Sur la fonction de répartition de certaines fonctions arithmétiques définies sur l'ensemble des nombres premiers moins un, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 11ème année (1969-70), n° 17, 13p.

[3] F. DRESS et B. VOLKMANN, Ensembles d'unicité pour les fonctions additives ou multiplicatives, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 287 (10 juil. 1978).

[4] P. D. T. A. ELLIOTT, A conjecture of Kataï, Acta Arith. 26 (1974), 11-20.

[5] H. HALBERSTAM and H. E. RICHET, Sieve Methods, London, Academic Press (1974) (London Mathematical Society Monographs, 4).

[6] I. KATAÏ, On distribution of arithmetical functions on the set prime plus one, Compositio Math. 19 (1968), 278-289.

[7] J. MEYER, Représentation multiplicative des entiers à l'aide de l'ensemble $\mathcal{P}+1$, à paraître, Acta Arith. 43, n° 1.

[8] A. SCHINZEL et W. SIERPINSKI, Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers, Acta Arith. 4 (1958), 191-208.

[9] E. WIRSING, Additive functions with restricted growth on the numbers of the forme p+1 , Acta Arith. 37 (1981), 345-357.

[10] D. WOLKE, Bemerkungen über Eindentigkeitsmengen additiver Funktionen, Elements of Math. 33/1 (1978), 14-16.

-:-:-:-

Jacques MEYER
Faculté des Sciences
Moulin de la Housse
F 51062 REIMS CEDEX