

Astérisque

A. A. BEILINSON

J. BERNSTEIN

PIERRE DELIGNE

Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)

Astérisque, tome 100 (1982)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__100__1_0

© Société mathématique de France, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION

Ces trois volumes (n°100,101,102) réunissent les actes du colloque de Luminy (du 6 au 11 juillet 1981) intitulé Analyse et topologie sur les espaces singuliers. Plusieurs thèmes ont été abordés lors de ce colloque et nous allons les décrire brièvement :

On sait que les complexes de faisceaux de solutions des complexes différentiels linéaires holonomes et réguliers ont une cohomologie analytiquement constructible. Cette correspondance dite de Riemann-Hilbert établit une équivalence entre complexes constructibles et complexes holonomes réguliers. Dans cette correspondance, à un *module* holonome régulier est associé un *complexe* constructible qui a en général plusieurs faisceaux de cohomologie non nuls. Ces complexes constructibles particuliers sont appelés des *faisceaux pervers* et peuvent être caractérisés en termes purement topologiques. Cette caractérisation à son tour, a un sens pour les complexes constructibles de faisceaux étales sur une variété non nécessairement lisse définie sur un corps quelconque, fini par exemple. On a donc une notion de *faisceaux pervers étales* et on démontre que cette catégorie de complexes bien qu'elle ne corresponde plus à des modules différentiels est en fait une nouvelle catégorie abélienne. Un des intérêts de ces faisceaux pervers étales est que les théorèmes généraux de passage de la caractéristique 0 à la caractéristique p par spécialisation, permettent d'obtenir des résultats sur les faisceaux pervers sur le corps des complexes, lorsqu'on sait démontrer ces résultats sur les corps finis. Le *complexe d'intersection* dont l'hypercohomologie est l'*homologie d'intersection* est un faisceau pervers qui se spécialise sur les corps finis en le complexe d'intersection étale. Or, on a sur les corps finis une notion de *pureté* des complexes de faisceaux étales en considérant l'action du Frobenius sur les tiges de la cohomologie. Le résultat fondamental de Gabber est que le *complexe d'intersection est pur*. Il permet en utilisant les théorèmes de Deligne sur le comportement de la pureté par image directe (conjecture de Weil) d'obtenir un théorème de décomposition de l'*image directe* d'un complexe d'intersection en *somme directe* de complexes d'intersections à coefficients locaux. Ce thème de *perversité, complexe d'intersection, pureté* est exposé dans le gros article [1]. C'est le thème principal de ce colloque.

Un thème dérivé est celui des différentes applications de l'homologie d'intersection à l'étude des orbites nilpotentes [3], à la théorie de Morse pour les espaces singuliers [6], et à la cohomologie L^2 des quotients par les groupes arithmétiques [15].

Il semble que l'homologie d'intersection porte dans tous les cas une struc-

INTRODUCTION

ture de Hodge, fait qui serait le pendant du théorème de pureté de Gabber . On ne sait pas le démontrer en général, mais dans [4] on propose une filtration qui devrait être celle de Hodge et dans [5] et [15] on montre que l'interprétation en terme de cohomologie L^2 permet dans certains cas d'obtenir une structure de Hodge.

Ces structures de Hodge sur l'homologie d'intersection devraient pouvoir se décrire directement sur le module holonome qui lui correspond. C'est ce qu'on tente de faire dans [4] . C'est ce qu'on fait dans [11] et [13] pour le module holonome correspondant aux cycles évanescents.

A ce module correspondant aux cycles évanescents est associé un polynôme dit polynôme de *Bernstein* , ou b-fonction dans le cas d'un point singulier isolé. Dans [9] on relie ce polynôme à l'action de la monodromie sur les espaces de cycles évanescents. Enfin les autres conférences se regroupent autour des thèmes : caractéristiques d'Euler Poincaré locales ou globales [10], [7], [2], et cycles évanescents [12] et [14] .

Les Organismes,

B.TEISSIER

Ecole Polytechnique
Département de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex

J.L.VERDIER

Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques
45 rue d'Ulm
75005 Paris

TABLE GÉNÉRALE

VOLUME 1 - ASTÉRISQUE N° 100 (1982)

[1] A.A.BEILINSON, J.BERNSTEIN, P.DELIGNE - *Faisceaux pervers*

Introduction

Sous-catégories abéliennes d'une catégorie triangulée.

- 1.1. Catégories triangulées.
- 1.2. Sous-catégories abéliennes.
- 1.3. t-catégories.
- 1.4. Recollement.

Faisceaux pervers sur les espaces stratifiés et sur les schémas.

- 2.1. Espaces stratifiés.
- 2.2. Schémas.

Compléments.

- 3.1. Catégories dérivée filtrée, filtrations canoniques et filtrations bêtes.
- 3.2. Localisation.
- 3.3. Cohomologie entière.

La perversité autoduale : propriétés géométriques.

- 4.1. Morphismes affines.
- 4.2. Exactitudes et adjonctions.
- 4.3. Objets simples.
- 4.4. Cycles évanescents (estimations supérieures).
- 4.5. Estimations de nombres de Betti.

La perversité autoduale : poids.

- 5.1. Rappels de [1]
- 5.2. Une réciproque.
- 5.3. La filtration par le poids.
- 5.4. Complexes purs.

De \mathbb{F} à \mathbb{C}

- 6.1. Principes.
- 6.2. Exemples.

Index terminologique.

Bibliographie.

TABLE GÉNÉRALE

VOLUME 2-3 - ASTÉRISQUE N° 101-102 (1983)

- [2] J.P BRASSELET, *Existence des classes de Chern en théorie bivariante.*
- [3] W. BORHO et R. MAC PHERSON, *Partial resolutions of nilpotent varieties.*
- [4] J.P BRYLINSKI, *Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge II.*
- [5] J. CHEEGER, *Hodge Theory of complex cones.*
- [6] M. GORESKI et R. MAC PHERSON, *Morse theory and Intersection Homology theory.*
- [7] G. LAUMON, *Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface.*
- [8] G. LUSZTIG, *Singularities, character formulas, weight multiplicities.*
- [9] B. MALGRANGE, *Rapport sur les théorèmes d'indice de Boutet de Monvel et Kashiwara.*
- [10] B. MALGRANGE, *Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence.*
- [11] F. PHAM, *Structures de Hodge mixtes associées à un germe de fonction à point critique isolé.*
- [12] C. SABBABH, *Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents.*
- [13] M. SAITO, *Supplement to "Gauss-Manin system and mixed Hodge structure".*
- [14] J.L VERDIER, *Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée.*
- [15] S. ZUCKER, *Hodge theory and arithmetic groups.*

TABLE DES MATIÈRES

Faisceaux pervers

par A.A. Beilinson, J. Bernstein, et P. Deligne

0.	Introduction.	p. 7
1.	Sous-catégories abéliennes d'une catégorie triangulée.	p.18
1.1.	Catégories triangulées.	
1.2.	Sous-catégories abéliennes.	
1.3.	t-catégories.	
1.4.	Recollement.	
2.	Faisceaux pervers sur les espaces stratifiés et sur les schémas.	p.56
2.1.	Espaces stratifiés.	
2.2.	Schémas.	
3.	Compléments.	p.76
3.1.	Catégorie dérivée filtrée, filtrations canoniques et filtrations bêtes.	
3.2.	Localisation.	
3.3.	Cohomologie entière.	
4.	La perversité auto-duale : propriétés géométriques.	p.101
4.1.	Morphismes affines.	
4.2.	Exactitudes et adjonctions.	
4.3.	Objets simples.	
4.4.	Cycles évanescents (estimations supérieures).	
4.5.	Estimations de nombres de Betti.	
5.	La perversité auto-duale : poids.	p.122
5.1.	Rappels de [1].	
5.2.	Une réciproque.	
5.3.	La filtration par le poids.	
5.4.	Complexes purs.	
6.	De \mathbf{F} à \mathbb{C} .	p.148
6.1.	Principes.	
6.2.	Exemples.	
	Bibliographie	p.167
	Index terminologique	p.169
	Index des notations	p.171

T H È M E S

- a) Perversité, complexe d'intersection, pureté : [1]
- b) Intersection - Applications : [1] - [3] - [6] - [8] - [15]
- c) Intersection et Structure de Hodge : [4] - [5] - [15]
- d) Structure de Hodge sur $R\Psi$: [11] - [13]
- e) $R\Psi$ et χ : [9] - [14] - [2] - [7] - [12] - [10]

O. INTRODUCTION

Il avait été d'abord prévu que O. Gabber soit coauteur du présent article. Il a préféré s'en abstenir, pour ne pas être coresponsable des erreurs ou imprécisions qui s'y trouvent. Il n'en est pas moins responsable de bien des idées que nous exploitons et le lecteur lui est redevable de nombreuses critiques qui, nous l'espérons, ont permis d'améliorer le manuscrit.

Dans [4],[5],[6] , M. Goresky et R. MacPherson ont défini et étudié la cohomologie d'intersection d'espaces convenables X . Dans [4], [5], X est une pseudo-variété PL orientée, i.e. pour X de dimension n , un espace PL admettant un sous-espace PL fermé rare Σ de dimension $\leq n-2$ dont le complément est une variété PL orientée purement de dimension n . L'espace X est muni d'une stratification S , i.e. d'une filtration par des sous-espaces PL fermés X_k ($0 \leq k \leq n$), avec $X_i \supset X_{i-1}$, $X_i - X_{i-1}$ une variété purement de dimension i , et (X, S) équisingulier le long de $X_i - X_{i-1}$. On suppose que $X_{n-1} = X_{n-2}$. Pour chaque perversité p (une suite p_2, \dots, p_n d'entiers, telle que $p_2 = 0$ et que $p_{k+1} = p_k$ ou $p_k + 1$), ils définissent le i ème groupe $I\mathbb{H}_i^p(X)$ d'homologie d'intersection de perversité p de X comme le groupe des cycles singuliers PL de dimension i de X qui intersectent X_{n-k} selon une partie de dimension $i - (k - p_k)$ au plus, modulo une relation d'homologie convenable. Ce groupe est indépendant de S . Pour X normal (= à links connexes) et $p = 0$ (resp. p maximal), ils montrent qu'on obtient les groupes de cohomologie $H^{n-i}(X)$ (resp. d'homologie $H_i(X)$) . Dans [6], les conditions sur X sont affaiblies, et ils prouvent l'invariance topologique des groupes $I\mathbb{H}_i^p(X)$.

Le cas qui nous intéresse le plus est celui où la stratification S peut être prise à strates toutes de dimension paire, et où p est la perversité intermédiaire, donnée avec les notations ci-dessus par $p_{2k} = k-1$ (et $p_{2k+1} = k-1$, ou k , indifféremment). Nous noterons $I\mathbb{H}_i(X)$ les tensorisés avec \mathbb{Q} des groupes obtenus. Ils vérifient la dualité de Poincaré ([4][5]). Après extension des scalaires de \mathbb{Q} à \mathbb{R} , on peut les interpréter comme des groupes de cohomologie L^2 (voir l'exposé de J. Cheeger à cette conférence).

Soit $X(\mathbb{C})$ l'espace topologique (topologie usuelle) sous-jacent à une variété algébrique complexe normale connexe, de dimension com-

plexe n . On peut prendre S à strates algébriques, donc automatiquement de dimension réelle paire. Les groupes d'homologie d'intersection, pour la perversité intermédiaire, sont donc définis. Pour X seulement supposée irréductible, de normalisée \tilde{X} , nous définissons $I\mathbb{H}_1(X(\mathbb{C})) := I\mathbb{H}_1(\tilde{X}(\mathbb{C}))$.

Tensorisés avec \mathbb{C} , ces groupes admettent une description en terme de modules holonomes. Pour la donner, il nous sera commode de travailler avec les modules holonomes algébriques (modules quasi-cohérents à connection intégrable satisfaisant à une condition de finitude convenable). Supposons X plongé dans une variété algébrique Z lisse purement de dimension complexe d . On suppose X fermé dans Z . Soit X° le lieu lisse de X et j le morphisme d'inclusion de X° dans Z . A isomorphisme unique près, il existe alors sur Z un unique module holonome irréductible à support dans X , noté $j_{!*} \mathcal{O}_{X^\circ}$, qui sur X° coïncide avec le module holonome $\underline{H}_{X^\circ}^{d-n}(\mathcal{O})$. Pour X complète, on a

$$I\mathbb{H}_1(X(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{H}^{d+n-1}(Z, \Omega^*(j_{!*} \mathcal{O}_{X^\circ})) .$$

Au membre de droite on prend au choix l'hypercohomologie de Z , muni de la topologie de Zariski, à valeurs dans $\Omega^*(j_{!*} \mathcal{O}_{X^\circ})$, ou l'hypercohomologie de $Z(\mathbb{C})$, muni de sa topologie usuelle, à valeurs dans le complexe de De Rham holomorphe à coefficients dans $j_{!*} \mathcal{O}_{X^\circ}$. Pour X non nécessairement complète, on obtient ainsi la variante des groupes d'homologie d'intersection, obtenue en considérant des chaînes localement finies. Les groupes d'homologie d'intersection proprement dit de $X(\mathbb{C})$ s'obtiennent en prenant l'hypercohomologie à supports compacts de $Z(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\Omega^*(j_{!*} \mathcal{O}_{X^\circ})$.

Les groupes $I\mathbb{H}_1(X(\mathbb{C}))$, non tensorisés avec \mathbb{C} , admettent aussi une description comme groupes d'hypercohomologie. On montre que pour X une variété algébrique irréductible de dimension n , il existe un unique objet \underline{IC} de la catégorie dérivée $D(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, à faisceaux de cohomologie $\underline{H}^i(\underline{IC})$ constructibles et nuls pour $i \notin [-2n, -n]$, vérifiant les trois conditions suivantes.

- (a) Il existe un ouvert de Zariski dense U de X tel que sur $U(\mathbb{C})$ \underline{IC} soit isomorphe au complexe réduit au faisceau constant \mathbb{Q} , placé en degré $-2n$.
- (b) Pour $i > -2n$, la codimension (complexe) du support du faisceau

de cohomologie $\underline{H}^i(\underline{IC})$ est $\geq i-2n+1$.

(c) Toute sous-variété irréductible Z de X , de codimension $c > 0$, admet un ouvert dense V tel que les faisceaux de cohomologie à support $\underline{H}_{V(\mathbb{C})}^i(\underline{IC})$ soient nuls pour $i \leq -2n+c$.

Muni de l'isomorphisme (a), cet objet \underline{IC} est unique à isomorphisme unique près, et on a

$$\mathrm{IH}_i(X(\mathbb{C})) = \mathbb{H}_c^{-i}(X(\mathbb{C}), \underline{IC}) \quad .$$

Il nous sera commode de numéroter autrement les groupes $\mathrm{IH}_i(X(\mathbb{C}))$. Dans la suite de cette introduction, nous poserons

$$\mathrm{IH}'^i(X(\mathbb{C})) := \mathrm{IH}_{n-i}(X(\mathbb{C}))$$

et $\underline{IC}' = \underline{IC}[-n]$, de sorte que

$$\mathrm{IH}'^i(X(\mathbb{C})) = \mathbb{H}_c^i(X(\mathbb{C}), \underline{IC}') \quad .$$

Les groupes $\mathrm{IH}_i(X(\mathbb{C}))$ (resp. $\mathrm{IH}'^i(X(\mathbb{C}))$) ne sont non nuls que pour $i \in [0, 2n]$ (resp. $i \in [-n, n]$). Les conditions (b)(c) se récrivent : toute sous-variété irréductible propre Z de X , de dimension d , admet un ouvert de Zariski dense V tel que

(b') pour $i \geq -d$, $\underline{H}^i(\underline{IC}')$ a une restriction à $V(\mathbb{C})$ nulle ;

(c') pour $i \leq -d$, $\underline{H}_{V(\mathbb{C})}^i(\underline{IC}') = 0$.

Soit X une variété algébrique complexe. Nous définissons un faisceau pervers sur X comme un objet K de la catégorie dérivée $D(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, à faisceaux de cohomologie $\underline{H}^i K$ constructibles et nuls pour $|i|$ assez grand (i.e., $K \in D_c^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$), vérifiant les conditions (b'')(c'') suivantes : toute sous-variété irréductible Z de X , de dimension d , admet un ouvert de Zariski dense V tel que

(b'') pour $i > -d$, $\underline{H}^i(K)|_{V(\mathbb{C})} = 0$;

(c'') pour $i < -d$, $\underline{H}_{V(\mathbb{C})}^i(K) = 0$.

Noter que, pour X irréductible, on n'exclut pas $Z = X$. Pour X irréductible, \underline{IC}' est un faisceau pervers.

La condition (b'') équivaut à

$$\dim \mathrm{Supp} \underline{H}^i K \leq -i$$

(d'où $\underline{H}^i K = 0$ pour $i > 0$). Une condition de ce type avait été intro-

duite par M. Artin dans sa preuve du théorème de dimension cohomologique des variétés affines (SGA 4 XIV §2 à 4).

Des conditions du type (c") sont familières en théorie des faisceaux algébriques cohérents, sous le nom de conditions de profondeur.

Les faisceaux pervers n'étant ni des faisceaux, ni pervers, la terminologie requiert une explication. Le mot "pervers" n'enchanté pas certains de nous. Il vient de "perversité"; dans $IH^p(X)$, la "perversité" p indique de combien on permet aux cycles de dévier de la transversalité à une stratification. Pourquoi "faisceau" ? Si on travaille avec des coefficients complexes (plutôt que rationnels : remplacer $D_C^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ par $D_C^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$), et que X est lisse purement de dimension n , le foncteur $M \longmapsto \Omega^*(M)[n]$ (complexe de De Rham analytique) est une équivalence de la catégorie des modules holonomes (algébriques) à singularités régulières (y compris à l'infini) sur X avec celle des faisceaux pervers sur X . Pour X quelconque, plongé dans Z lisse purement de dimension d (X fermé dans Z), il faut considérer les modules holonomes sur Z à support dans X et le foncteur $M \longmapsto \Omega^*(M)[d][X(\mathbb{C})]$. Les modules holonomes sur X lisse sont des faisceaux (de \mathcal{D}_X -modules), et leurs propriétés suggèrent certaines de celles des faisceaux pervers. Par exemple les suivantes (avec à nouveau \mathbb{Q} comme corps de coefficients).

- Les faisceaux pervers sur X forment une catégorie abélienne.
- Ce sont des objets de nature locale : les catégories des faisceaux pervers sur les ouverts de Zariski U de X forment un champ. Prendre garde qu'il n'en va pas de même pour les catégories dérivées $D_C^b(U(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$.

- Pour $j : U \hookrightarrow X$, de fermé complémentaire $i : F \hookrightarrow X$, on dispose d'un formalisme (foncteurs $j_!, j^*, j_*, i^*, i_*, i^!$) proche de celui des faisceaux usuels. Nous noterons avec p en exposant à gauche les analogues pour les faisceaux pervers des foncteurs $j_!, j^*, j_*, i^*, i_*, i^!$. La règle expérimentale suivante dit quels résultats sur les catégories de faisceaux se généralisent aux faisceaux pervers : l'énoncé dual, obtenu en remplaçant les catégories de faisceaux par leurs opposées, et en échangeant $j_!$ et j_* , ainsi que i^* et $i^!$, doit être vrai. Par exemple :

a) pour F faisceau pervers sur X , on dispose d'une suite exacte

$$0 \rightarrow p_{i_*} p_{i^!} F \rightarrow F \rightarrow p_{j_*} p_{j^*} F$$

(c'est vrai pour les faisceaux usuels, avec pour dual l'exactitude de $j_{!}j^{*}F \longrightarrow F \longrightarrow i_{*}i^{*}F \longrightarrow 0$; par contre, pour les faisceaux pervers, on ne peut pas mettre comme pour les faisceaux usuels un zéro à gauche de cette suite duale);

b) pour F un faisceau pervers sur U , on dispose d'un morphisme naturel $\alpha : Pj_{!}F \longrightarrow Pj_{*}F$. Dans le cas des faisceaux usuels, c'est un monomorphisme. L'énoncé dual : "c'est un épimorphisme" est en général faux et, pour les faisceaux pervers, α n'est en général pas un monomorphisme. Le foncteur $j_{!*} : F \longmapsto \text{Im}(Pj_{!}F \longrightarrow Pj_{*}F)$ (prolongement intermédiaire) nous sera très utile.

Pour X irréductible de dimension n , U un ouvert de Zariski dense lisse et $\mathbb{Q}[n]$ le faisceau pervers sur $U(\mathbb{C})$ défini par le complexe réduit au faisceau constant \mathbb{Q} placé en degré $-n$, on a

$$\underline{IC}'(X) = j_{!*}(\mathbb{Q}[n]) .$$

A certains égards, les faisceaux pervers ont de meilleures propriétés que les faisceaux usuels. En voici des exemples.

- Dans la catégorie abélienne des faisceaux pervers, chaque objet est de longueur finie (cf. l'énoncé analogue pour les modules holonomes).

- Pour $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert affine, le foncteur Pj_{*} est exact.

- La dualité de Verdier sur $D_{\mathbb{C}}^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ transforme faisceaux usuels en faisceaux pervers. Ceci explique la dualité de Poincaré en homologie d'intersection, et est à rapprocher de l'existence d'une bonne dualité pour les modules holonomes sur X lisse.

Tant les faisceaux usuels, constructibles, que les faisceaux pervers forment une sous-catégorie abélienne \mathcal{C} de $D_{\mathbb{C}}^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ et, dans les deux cas, on dispose de foncteurs \underline{H}^i ("faisceaux de cohomologie") de $D_{\mathbb{C}}^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ dans \mathcal{C} , obéissant à un même formalisme (suites exactes longues, dévissage de K en les $\underline{H}^i K[-i], \dots$). La catégorie \mathcal{C} des faisceaux usuels est bien adaptée aux foncteurs d'images inverses, celle des faisceaux pervers à la dualité de Verdier, et à l'étude de certaines images directes (morphisms affines, cycles évanescents, théorème de Lefschetz difficile relatif, ...).

Pour X un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos k , le formalisme des faisceaux pervers se transpose sans difficulté en cohomologie ℓ -adique (ℓ premier à l'exposant caractéristique de k). Il s'agit de remplacer $D_C^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ par la \mathbb{Q}_ℓ -catégorie dérivée $D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$. En particulier, on définit pour X irréductible des groupes d'homologie d'intersection $IH_1(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Pour $k = \mathbb{C}$, ils sont canoniquement isomorphes aux groupes $IH_1(X(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{Q}_\ell$.

Pour un corps de base quelconque, on butte sur l'obstacle qu'il n'y a pas, dans la littérature, de définition utilisable de $D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$. O. Gabber en a une, mais ne l'a pas rédigée. Heureusement, dans le cas des corps finis, qui nous intéresse particulièrement, une définition naïve suffit. Elle suffit parce que, pour tout corps fini, $H^*(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/\ell)$ est fini.

Le résultat principal - plutôt un de ses avatars - est que pour X_0 de type fini sur k fini, tout faisceau pervers mixte simple F_0 sur X_0 est pur. La propriété "mixte" est stable par toutes les opérations usuelles et de ce fait est en pratique toujours vérifiée; "simple" est en tant qu'objet de la catégorie abélienne des faisceaux pervers. Pour X_0 irréductible, le faisceau pervers \underline{IC}' est simple et mixte. Soient q le nombre d'éléments de k , \bar{k} une clôture algébrique de k , $X = X_0 \otimes_k \bar{k}$ et F l'image inverse de F_0 sur X . La conclusion "pur" est une propriété locale qui, si X est complète, assure que, pour un entier w (le poids de F_0), les valeurs propres du Frobenius F^* sur $H^i(X, F)$ sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $q^{(w+i)/2}$.

En dimension un, ce résultat équivaut à [1] 1.8.4. Il a ensuite été obtenu dans des cas particuliers, liés aux variétés de Schubert, par D. Kazhdan et G. Lusztig. La première démonstration générale est due à O. Gabber; elle diffère de celle donnée ici. Le théorème fournit une abondance de complexes purs, et donne par là quelque contenu à l'étude de ceux-ci faite dans [1] § 6.

Passons en revue les paragraphes de ce travail.

Paragraphe 1. Notre référence de base pour les catégories triangulées est J.L. Verdier [10]. Le n°1.1 est consacré à des compléments, motivations et exemples.

Au n° 1.2, nous considérons une catégorie triangulée \mathcal{D} munie d'une sous-catégorie pleine \mathcal{C} , soumise aux axiomes (1.2.0) et (1.2.4 (ii)) (sous-catégorie abélienne admissible). Si A est une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs, et que $\mathcal{D} = D^+(A)$, identifiée à la catégorie des complexes bornés inférieurement d'objets injectifs de A , pris à homotopie près, l'axiome 1.2.0 assure que si X et Y sont dans \mathcal{C} et que $f, g : X \xrightarrow{\sim} Y$ sont des morphismes de complexes homotopes, l'homotopie est unique à homotopie seconde près : deux homotopies H_1, H_2 de f à g sont reliées par une homotopie seconde H' ; celle-ci à son tour est unique à homotopie troisième près, et ainsi de suite. Nous prouvons que \mathcal{C} est abélienne.

Chaque t-structure (1.3.1) sur \mathcal{D} définit une sous-catégorie abélienne admissible (1.2.5) \mathcal{C} de \mathcal{D} (1.3.6), appelée son coeur, et on a une réciproque partielle (1.3.13). Soient A une catégorie abélienne, \mathcal{C} une sous-catégorie abélienne strictement pleine de A , stable par noyaux, conoyaux et extensions, et $D_{\mathcal{C}}(A)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée formée des K tels que les $H^i K$ soient dans \mathcal{C} . La paire de sous-catégories pleines $(D_{\mathcal{C}}^{\leq 0}(A), D_{\mathcal{C}}^{\geq 0}(A))$ de $D_{\mathcal{C}}(A)$ constitue une t-structure sur $D_{\mathcal{C}}(A)$, de coeur \mathcal{C} . Une règle expérimentale, illustrée par le n° 1.3, est que ce qui vaut dans ce cadre vaut pour toutes les t-structures. Par exemple : on dispose de foncteurs de troncation τ , d'un foncteur cohomologique $H^0 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}, \dots$. Exception : en 3.1, nous utilisons des données supplémentaires sur \mathcal{D} pour construire un foncteur naturel $D^b(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$.

Nous étudions aussi comment un foncteur exact T entre t-catégories (= catégories triangulées munies de t-structures) fournit un foncteur P_T entre leurs coeurs, et ses propriétés d'exactitude et d'adjonction.

Au n° 1.4, nous donnons une méthode pour construire des t-structures. Au § 2, elle sera utilisée pour construire des t-structures de coeurs des catégories de faisceaux pervers. En gros, il s'agit, étant donné un espace topologique X , un ouvert $j : U \hookrightarrow X$ et le fermé complémentaire $i : F \hookrightarrow X$, de déduire une t-structure sur $D(X)$ d'une t-structure sur $D(U)$ et d'une sur $D(F)$. Pour $D(U)$ et $D(F)$ munies de translatées de leur t-structure naturelle (1.3.2), la t-structure obtenue est déjà non évidente.

Les besoins de la cohomologie ℓ -adique nous forcent à nous placer

dans un cadre plus abstrait, où sont formalisées les relations entre $D(X)$, $D(U)$ et $D(F)$. C'est dans ce cadre que nous développons le formalisme des foncteurs $j_!, j^*, j_*, i^*, i_*, i^!$ entre catégories de faisceaux pervers, et celui du prolongement intermédiaire $j_{!*}$.

Paragraphe 2. Au n° 2.1, nous considérons un espace stratifié (X, S) et itérons la construction 1.4 pour attacher à chaque fonction de perversité $p : S \rightarrow \mathbb{Z}$ une t -structure sur $D(X)$. Il s'agit de recoller les t -structures naturelles des $D(S)$ (S une strate), traduites de $p(S)$. Au n° 2.2, nous considérons des schémas, et des t -structures déduites par passage à la limite sur des stratifications algébriques de plus en plus fines des t -structures du n° 2.1. Nous traitons aussi du cas ℓ -adique.

Paragraphe 3. Dans ce paragraphe, plus technique, nous donnons quelques compléments. Le lecteur est invité à le sauter en première lecture.

Au n° 3.1, nous exploitons les catégories dérivées filtrées. Elles nous permettent dans certains cas, pour \mathcal{D} une t -catégorie de coeur \mathcal{C} , de définir un foncteur $D^b(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ (3.1.10). Pour qu'il soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que pour chaque $i > 0$ le foncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow (\text{Ab}) : X, Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y[i])$ soit effaçable (3.1.1.6).

Au n° 3.2, nous donnons un critère pour recoller des objets de la catégorie dérivée donnés localement. Sous des hypothèses de nullité de faisceaux $H^i \text{RHom}$ pour $i < 0$, le recollement se fait aussi bien que pour les faisceaux. Ceci s'applique aux faisceaux pervers. Le cas ℓ -adique avait été traité par une autre méthode en 2.2.19.

Au n° 3.3, nous expliquons comment modifier le formalisme de la cohomologie d'intersection quand les coefficients sont \mathbb{Z} (ou \mathbb{Z}_{ℓ}) plutôt que \mathbb{Q} (ou \mathbb{Q}_{ℓ}).

Aux §§ 4 et 5, nous ne considérerons plus que des schémas de type fini sur un corps k (sauf en 4.4) et que la perversité intermédiaire. Au § 4, nous donnons des résultats géométriques : on ne perdrait guère en généralité en supposant k algébriquement clos. Au § 5, k est un corps fini, et les phénomènes étudiés sont arithmétiques (avec des conséquences géométriques après passage à la clôture algébrique de k).

Paragraphe 4. Au n° 4.1, nous énonçons le théorème de M. Artin (SGA 4 XIV 3.1) sur les images directes supérieures par un morphisme affine dans son cadre naturel, celui des faisceaux pervers. En 4.4, un théorème analogue est prouvé pour le foncteur "cycles proches".

Au n° 4.2, on donne des conséquences de 4.1 et de résultats connus, dans le langage des faisceaux pervers et de leur fonctorialité.

Au n° 4.3, on montre que la catégorie des faisceaux pervers est artinienne et noethérienne.

Le n° 4.5 est préliminaire à la preuve du théorème de pureté 5.3.4. C'est une variation sur le thème : "le groupe de cohomologie de dimension moitié est le plus gros et le plus intéressant".

Paragraphe 5 . Soient X_0 un schéma séparé de type fini sur un corps fini k , \bar{k} une clôture algébrique de k et X sur \bar{k} déduit de X_0 par extension du corps des scalaires. Au n°5.1, nous rappelons certaines des définitions et certains des résultats de [1], concernant le formalisme des poids. Nous étudions aussi la relation entre faisceaux pervers sur X_0 et faisceaux pervers sur X munis d'une action de Frobenius.

D'après [1] 3.3.1, 6.2.3, si K_0 dans $D_C^b(X_0, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est de poids $\leq w$, les $H_C^i(X, K)$ sont de poids $\leq w+i$. Pour K_0 un faisceau pervers, le théorème 5.2.1 donne une réciproque de ce résultat, ou plutôt de son dual (H_C^i remplacé par H^i , et \leq par \geq). Il s'agit de tester sur les $H^0(U, K)$, pour U affine étale sur X . Il y a lieu de penser à ce H^0 comme à un groupe de cohomologie de dimension moitié. Pour U affine, il résulte de 4.1.1 que le foncteur $K \mapsto H^0(U, K)$ (K pervers) est exact à droite. On peut rapprocher son rôle de celui des foncteurs "fibre en un point" pour les faisceaux usuels (cf. 4.1.6).

Au n° 5.3, nous déduisons de 5.2.1 que tout sous-quotient d'un faisceau pervers mixte de poids $\leq w$ est encore de poids $\leq w$ (5.3.1), que le prolongement intermédiaire préserve les poids (5.3.2, 5.3.3) et que les faisceaux pervers mixtes simples sont purs (5.3.4). Si K_0 et L_0 sont deux faisceaux pervers sur X_0 , le groupe des classes d'extensions (dans la catégorie abélienne des faisceaux pervers) de K_0 par L_0 est $\text{Hom}(K_0, L_0[1])$, calculé dans la catégorie $D_C^b(X_0)$. Utilisant qu'une valeur propre de Frobenius de poids $\neq 0$ ne peut être

égale à 1, on prouve des nullités d' Ext^1 qui assurent l'existence (et la functorialité) sur tout faisceau pervers mixte d'une filtration par le poids W , croissante, avec Gr_i^W pur de poids i (5.3.5).

Soient K_O dans $D_C^b(X_O, \mathbb{Q}_\ell)$, $H^i K_O$ ses faisceaux de cohomologie (des \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux) et $P^i K_O$ ses faisceaux de cohomologie au sens pervers (des faisceaux pervers). Supposons K_O mixte. Par définition, K_O est de poids $\leq w$ si et seulement si chaque $H^i K_O$ est de poids $\leq w+i$. En 5.4.1, nous prouvons qu'il est de même nécessaire et suffisant que chaque $P^i(K_O)$ soit de poids $\leq w+i$ (5.4.1). Par dualité, "poids $\geq w$ " peut aussi se tester sur les $P^i(K_O)$, alors qu'il ne peut se tester sur les $H^i K_O$.

En 5.4.5 et 5.3.8, nous donnons deux résultats de semi-simplicité. Dans chaque cas, on part de K_O sur X_O , pur, et la conclusion porte sur l'image inverse K de K_O sur X : l'hypothèse est arithmétique, la conclusion géométrique. En 5.4.5, on prouve que K est isomorphe à la somme directe de ses $P^i(K)[-i]$. En 5.3.8, on prouve que chaque $P^i K$ est une somme directe de faisceaux pervers simples. Compte tenu de ce que la pureté est stable par image directe par un morphisme propre, on en déduit des généralisations des théorèmes locaux et globaux des cycles invariants (5.4.7, 5.4.8, amplifiés par 5.4.9). En 5.4.10, on prouve une version relative du théorème de Lefschetz difficile.

Paragraphe 6. Les résultats du § 5 ont des conséquences géométriques pour la cohomologie des schémas de type fini sur la clôture algébrique \mathbb{F} d'un corps fini. Au n° 6.1, nous expliquons des méthodes pour transférer ces résultats de \mathbb{F} à \mathbb{C} . S'il s'agissait d'énoncés élémentaires de théorie des corps algébriquement clos, on pourrait simplement arguer que \mathbb{C} est isomorphe à un ultraproduct de clôtures algébriques de corps finis. Les énoncés qui nous intéressent ne sont toutefois pas, du moins de prime abord, équivalents à des énoncés élémentaires, et il faut utiliser des résultats, de constructibilité notamment, auxquels on peut penser comme exprimant une certaine calculabilité de la cohomologie ℓ -adique.

Au n° 6.2, nous appliquons ces principes. Les résultats essentiels sont 6.2.5, 6.2.8, 6.2.9, 6.2.10.

Signalons que sur les points suivants, qui eussent trouvé leur place dans ces notes, nous avons failli à la tâche.

- La relation entre faisceaux pervers et modules holonomes. Comme indiqué dans cette introduction, elle a joué un rôle heuristique important. L'énoncé essentiel est 4.1.9 (non démontré ici).

- Les foncteurs cycles évanescents (sauf un résultat partiel au n°4.4). Modulo des définitions de catégories dérivées ℓ -adiques utilisables, et des définitions de morphismes "évidents" (i.e., il reste bien du travail à faire), on connaît des démonstrations pour les énoncés suivants .

a) Soit X de type fini sur un trait (S, η, s) , et $R\psi : D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow D_C^b(X_S \times_S S, \mathbb{Q}_\ell)$ le foncteur "cycles proches". Il est t -exact, en particulier induit un foncteur exact entre catégories de faisceaux pervers, et commute à la dualité de Verdier.

b) Si S est l'hensélisé en un point fermé d'une courbe S_1 sur un corps fini, que X/S provient par changement de base de X_1 de type fini sur S_1 et que F_1 est un faisceau pervers mixte sur X_1 , on dispose d'une relation généralisant [1] 1.8.5 entre les filtrations par le poids de F_1 et de $R\psi_\eta(F_1|_{X_\eta})$, et la monodromie.

Au n°6.1, nous n'avons pas non plus exposé comment transférer de \mathbb{F} à \mathbb{C} des conséquences géométriques de b).

Enfin, nous n'avons pas traité de la transformation de Fourier.

0.0. Notations et terminologie.

Le lecteur trouvera à la fin de ce travail un index terminologique et un index des notations, contenant les principaux termes ou notations nouvelles ou non standard utilisées.

Prendre garde qu'à partir de 1.4, nous notons en général simplement $f_*, f^*, f_!, f^!$ les foncteurs entre catégories dérivées de catégories de faisceaux notés d'habitude Rf_*, Rf^* (ou Lf^*), $Rf_!$ et $Rf^!$, les foncteurs de même nom entre catégories de faisceaux ordinaires étant notés avec un o en exposant gauche (ils correspondent à la perversité 0).

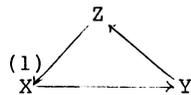
1. SOUS-CATÉGORIES ABÉLIENNES D'UNE CATÉGORIE TRIANGULÉE.

1.1. Catégories triangulées.

Pour la définition et les propriétés fondamentales des catégories triangulées, nous renvoyons à J.L. Verdier [10]. Notre but dans ce numéro est d'expliquer les axiomes de Verdier - spécialement celui de l'octaèdre - et de donner quelques compléments.

1.1.1. Une catégorie triangulée est une catégorie additive \mathcal{D} , munie d'un foncteur de translation $X \mapsto X[1]$ et d'un ensemble de "triangles" $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$, les triangles distingués. On exige que le foncteur de translation soit une auto-équivalence de catégories et que l'ensemble des triangles distingués vérifie les axiomes TR 1 à TR 4 de [10]p3.

Nous noterons $X \mapsto X[n]$ le $n^{\text{ième}}$ itéré du foncteur de translation ($n \in \mathbb{Z}$). Dans les diagrammes, une flèche de degré n sera affectée de (n) . Les triangles distingués seront souvent notés linéairement : $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{(1)}$ (ou simplement (X, Y, Z)) pour



et on omettra de marquer (1) la flèche de degré 1, si cela ne crée pas d'ambiguïté. On pose $\text{Hom}^n(X, Y) := \text{Hom}(X, Y[n])$.

La catégorie opposée \mathcal{D}^{opp} de \mathcal{D} sera munie du foncteur de translation déduit de l'inverse de $X \mapsto X[1]$. Une flèche de degré $n : X \rightarrow Y$ fournit donc dans \mathcal{D}^{opp} une flèche du même degré de Y dans X . Les triangles distingués de \mathcal{D}^{opp} sont les triangles (Z, Y, X) , pour (X, Y, Z) distingué dans \mathcal{D} . Munie de ces triangles, \mathcal{D}^{opp} est triangulée. Ceci permettra des raisonnements par dualité.

Dans une catégorie triangulée, tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ est la base d'un triangle distingué (X, Y, Z) , unique à isomorphisme (en général non unique) près (voir 1.1.10 pour un cas d'unicité). On appellera le 3^{ème} sommet Z le (ou, plus correctement, un) cône de f . Un triangle distingué (X, Y, Z) donne lieu pour tout T à des suites exactes $\text{Hom}(T, X) \rightarrow \text{Hom}(T, Y) \rightarrow \text{Hom}(T, Z)$ et $\text{Hom}(Z, T) \rightarrow \text{Hom}(Y, T) \rightarrow \text{Hom}(X, T)$; les triangles distingués pouvant tourner (TR 2 : $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{d}$ est distingué si et seulement si $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{d} X[1] \xrightarrow{-u[1]}$ l'est), elles se

prolongent en suites exactes longues.

Les axiomes imposés aux catégories triangulées sont motivés par les exemples 1.1.2 à 1.1.5 suivants.

1.1.2. Soient A une catégorie additive, et KA la catégorie suivante : ses objets sont les complexes d'objets de A , et $\text{Hom}_{KA}(K, L)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes de complexes de K dans L . Le translaté $K[1]$ de K est donné par $(K[1])^n = K^{n+1}$, la différentielle étant changée de signe. Si $\mathbb{Z}[1]$ est le complexe de \mathbb{Z} -modules réduit à \mathbb{Z} en degré -1 , c'est, avec les conventions de signes usuelles, $\mathbb{Z}[1] \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Chaque suite exacte courte scindable degré par degré de complexes $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ définit un triangle : on choisit un scindage $s : M \rightarrow L$ (pas un morphisme de complexes), et on définit le morphisme de degré 1 de M dans K comme étant ds -sd. Les triangles distingués sont ceux isomorphes à ceux ainsi obtenus. Le choix de signes fait coïncider avec celui de [10], et diffère de celui de [7] ChI §2 et [8].

Pour tout morphisme de complexes $f : K \rightarrow L$, il existe $f' : K' \rightarrow L'$, isomorphe à f dans KA , tel que chaque $f'^i : K'^i \rightarrow L'^i$ soit un monomorphisme direct : ajouter à L le complexe homotope à zéro "cône" sur K et à f le morphisme évident de K dans son cône. Ceci explique TR 1 : toute flèche est la base d'un triangle distingué.

1.1.3. Dans [10]p.13-19, J.L. Verdier explique comment d'une catégorie triangulée en déduire d'autres par calcul de fractions. Pour A une catégorie abélienne, la catégorie dérivée DA est la catégorie triangulée déduite de KA en inversant les quasi-isomorphismes. Une suite exacte courte de complexes $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ définit un triangle distingué dans DA ([10] p.31).

1.1.4. Plus généralement, soit A une catégorie exacte au sens de (D. Quillen, Higher algebraic K-theory I (p.15-16), dans Algebraic K-theory I, p.77-139, Lecture Notes in Math. 341 (1973)). C'est une catégorie additive, munie d'une classe E de "suites exactes courtes" vérifiant des axiomes convenables. Soit $(A, E) \sim$ la catégorie des foncteurs contravariants exacts à gauche (i.e. transformant suites dans E en suites exactes $0 \rightarrow F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A)$) de A dans la catégorie (Ab) des groupes abéliens. D'après loc. cit., les axiomes imposés à E équivalent à chacune des conditions suivantes :

- (a) il existe un foncteur pleinement fidèle F de A dans une catégorie abélienne, avec FA stable par extensions, tel qu'une suite soit dans E si et seulement si son image par F est exacte courte ;
- (b) le foncteur $A \mapsto h_A$ de A dans $(A, E)^\sim$ est pleinement fidèle, et une suite est dans E si et seulement si son image est exacte courte.

Supposons que tout morphisme de A admette un noyau. Un complexe K d'objets de A sera dit acyclique si les suites $0 \rightarrow \text{Ker}(d^n) \rightarrow K^n \rightarrow \text{Ker}(d^{n+1}) \rightarrow 0$ sont exactes courtes, i.e. si l'image h_K de K dans $(A, E)^\sim$ est acyclique. La sous-catégorie pleine (acycl.) de KA formée des complexes acycliques est épaisse au sens de [10] p.13 . La catégorie dérivée DA est la catégorie $KA/(\text{acycl.})$ déduite de KA en inversant les morphismes dont le cône est acyclique.

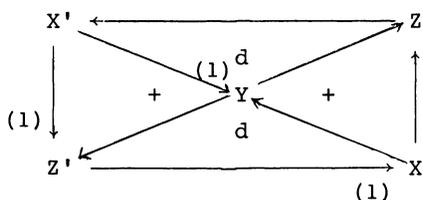
Exemple 1. Soient A une catégorie abélienne et FA la catégorie des objets filtrés de filtration finie de A . Disons qu'une suite $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ d'objets de FA est exacte si $gf = 0$ et que les suites $0 \rightarrow \text{Gr}^n X \rightarrow \text{Gr}^n Y \rightarrow \text{Gr}^n Z \rightarrow 0$ sont exactes dans A . La catégorie DFA est la catégorie dérivée filtrée, déduite de KFA en inversant les quasi-isomorphismes filtrés.

Exemple 2. Soit A la catégorie des espaces de Banach. Les conditions de 1.1.4. sont vérifiées si on prend pour suites exactes courtes les suites $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ qui deviennent exactes quand on oublie la topologie. Elles le sont aussi si on se limite à celles telles que la projection de Y sur Z ait une section continue (non nécessairement linéaire).

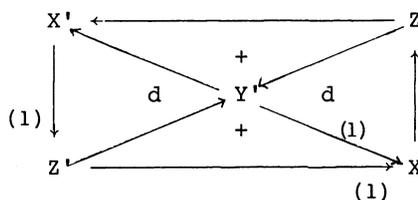
1.1.5. La catégorie homotopique stable (h. stable) est aussi une catégorie triangulée. Comme objets, on prend les paires (X, n) , où X est un CW complexe fini pointé et $n \in \mathbb{Z}$. Le groupe $\text{Hom}((X, n), (Y, m))$ est la limite inductive sur i des groupes de classes d'homotopie d'applications respectant le point-base : $S^{n+i}X \rightarrow S^{m+i}Y$. Le foncteur de translation est $(X, n) \mapsto (X, n+1) \simeq (SX, n)$ et les triangles distingués sont définis à partir des plongements de sous-complexes $X \hookrightarrow Y$ (triangles $X \hookrightarrow Y \rightarrow Y/X \rightarrow SX \dots$).

Le foncteur $H_0 : (X, n) \mapsto H_{-n}(X)$ (homologie réduite) est un foncteur cohomologique ([10] p.10) : (h. stable) \rightarrow (groupes abéliens). La construction "complexe des chaînes réduit" permet de le relever en un foncteur exact ([10] p.4) : (h. stable) \rightarrow D(groupes abéliens).

1.1.6. Le diagramme de l'octaèdre est le suivant :



(calotte supérieure)



(calotte inférieure)

les pourtours de ces deux carrés coïncident ; les triangles marqués + sont supposés commutatifs, ceux marqués d distingués. De plus, on exige que coïncident les deux flèches composées de Y à Y' , via Z ou Z' , et les deux flèches composées de Y' à Y , via X ou X' . Si on néglige le degré des flèches, on voit que ce diagramme admet une symétrie d'ordre 4 : faire un quart de tour, et échanger les calottes supérieures et inférieures (cf. 1.1.14).

L'axiome TR 4 des catégories triangulées affirme que tout diagramme du type "calotte supérieure" peut se compléter en un diagramme de l'octaèdre. Le diagramme "calotte supérieure" consiste pour l'essentiel en deux triangles distingués ayant un sommet en commun (on complète en ajoutant des flèches composées). La position des flèches de degré 1 est imposée, mais on peut la changer en remplaçant des sommets par un translaté, et en utilisant l'axiome TR 2 pour faire tourner les triangles distingués (attention aux signes). Par exemple, un axiome équivalent à TR 4 (modulo TR 1 à TR 3) est :

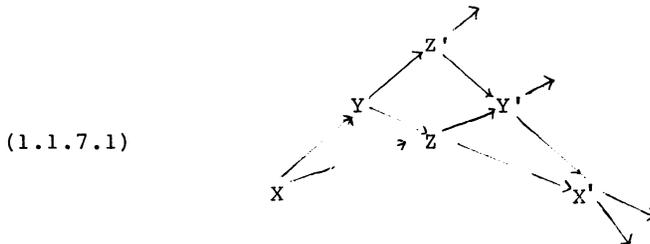
TR 4'. Tout diagramme "calotte inférieure" peut se compléter en un

octaèdre.

A isomorphisme près, se donner un diagramme "calotte supérieure" revient à se donner $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ (bâtir des triangles distingués sur u et v ; ils sont uniques à isomorphisme près). Cela revient aussi à se donner la calotte supérieure, complétée par le triangle distingué (X, Z, Y') . Que la calotte supérieure, complétée par (X, Z, Y') , puisse se compléter en un octaèdre est la formulation de TR 4 donnée dans [10].

1.1.7. Illustrons l'axiome TR 4. Dans le cas de la catégorie triangulée KA de l'exemple 1.1.2., tout complexe filtré K à trois crans $0 = W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset W_2 = K$, de filtration scindable degré par degré définit un octaèdre, de sommets les sous-quotients de K pour la filtration W : pour X, Y, Z, X', Y', Z' , prendre $W_0, W_1, W_2, W_2/W_1, W_2/W_0, W_1/W_0$ (le pourtour X, Z, X', Z' étant donc $Gr_0 K, K, Gr_2 K, Gr_1 K$). L'axiome résulte de ce que toute chaîne $K \rightarrow L \rightarrow M$ de morphismes de complexes est isomorphe dans KA à une chaîne $K' \rightarrow L' \rightarrow M'$ pour laquelle les $K'^i \rightarrow L'^i$ et les $L'^i \rightarrow M'^i$ sont des monomorphismes directs.

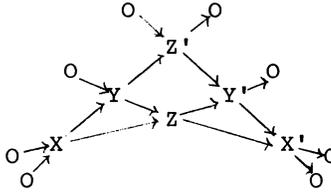
Il est parfois commode de récrire comme suit le diagramme de l'octaèdre :



Cette écriture met en évidence les morphismes de triangles distingués $(X, Y, Z') \rightarrow (X, Z, Y') \rightarrow (Y, Z, X') \rightarrow (Z', Y', X')$ - à cela près que pour chacun de ces morphismes, un des carrés commutatifs correspondants n'est pas en évidence. Une symétrie est par ailleurs rompue, de sorte que le morphisme de triangles distingués $(Z', Y', X') \rightarrow (Z', X[1], Y[1])$ qui complète les précédents n'est pas, lui, en évidence.

1.1.8. On rapprochera (1.1.7.1) du fait que dans une catégorie abélienne, deux monomorphismes composables $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ donnent lieu à un diagramme de suites exactes courtes :

(1.1.8.1)



exprimant que $(Z/X)/(Y/X) = Z/Y$. Les diagrammes (1.1.7.1) et (1.1.8.1) ont entre eux le rapport suivant. Soit un diagramme (1.1.8.1) dans la catégorie abélienne $C(A)$ des complexes d'objets de A . Chaque suite exacte courte dans $C(A)$ définit un triangle distingué dans $D(A)$ ([10] p.31) et les triangles distingués déduits des suites exactes courtes du diagramme (1.1.8.1) forment un octaèdre (1.1.7.1). Voici un cas particulier. Identifions la catégorie abélienne A à une sous-catégorie pleine de $D(A)$, par $A \mapsto$ (le complexe réduit à A en degré 0). Pour toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ de A , il existe alors une et une seule flèche d de degré 1 de C dans A telle que le triangle $A \rightarrow B \rightarrow C \xrightarrow{d}$ soit distingué : l'existence est cas particulier du fait que toute suite exacte courte de complexes détermine un triangle distingué ([10] p.31) et l'unicité résulte de 1.1.10 ci-dessous, et du fait que pour A et B dans A , $\text{Hom}(A, B)$ est nul pour $n < 0$ (pour $n \geq 0$, c'est le $n^{\text{ième}}$ Ext de Yoneda de A par B). Si on part d'un diagramme (1.1.8.1) dans A , et qu'on complète dans $D(A)$ chacune de ses suites exactes courtes en un triangle distingué, on obtient un diagramme (1.1.7.1). C'est une conséquence de TR 4.

Proposition 1.1.9. Soient (X, Y, Z) et (X', Y', Z') deux triangles distingués, et $g : Y \rightarrow Y'$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{d} & \\ f \downarrow & (1) & g \downarrow & (2) & h \downarrow & & \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{d'} & \end{array} \cdot$$

Les conditions suivantes sont équivalentes : (a) $v'gu = 0$, (b) il existe f rendant commutatif le carré (1), (b') il existe h rendant commutatif le carré (2), (c) il existe un morphisme de triangles (f, g, h) . Si ces conditions sont vérifiées, et que $\text{Hom}^{-1}(X, Z') = 0$, le morphisme f (resp. h) de (b) (resp. (b')) est unique.

L'exactitude de la suite $\text{Hom}^{-1}(X, Z') \rightarrow \text{Hom}(X, X') \rightarrow \text{Hom}(X, Y') \rightarrow \text{Hom}(X, Z')$, appliquée à gu dans $\text{Hom}(X, Y')$, montre que (a) \Leftrightarrow (b), avec unicité de f si $\text{Hom}^{-1}(X, Z') = 0$. Que (b) \Rightarrow (c) résulte de TR 2 : si f vérifie (b), il existe h tel que

(f,g,h) soit un morphisme de triangle. La réciproque est triviale. Enfin, un argument dual fournit (a) \Leftrightarrow (b'), et l'unicité de h si $\text{Hom}^{-1}(X,Z') = 0$.

Corollaire 1.1.10. Soit $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{d}$ un triangle distingué. Si $\text{Hom}^{-1}(X,Z) = 0$, alors

- (i) le cône de u est unique à isomorphisme unique près ;
- (ii) d est l'unique morphisme $x : Z \rightarrow X[1]$ tel que le triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{x}$ soit distingué.

Si dans 1.1.9. $X = X'$, $Y = Y'$ et que f,g sont identiques, Z est isomorphe à Z' - d'où $\text{Hom}^{-1}(X,Z') = 0$ - et (i) résulte de l'unicité de h. Pour (ii), on applique 1.1.9. à

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{d} & \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{x} & . \end{array}$$

On a nécessairement $h = \text{Id}_Z$, d'où $d = x$.

Dualement, dans 1.1.10 , le cône de v est unique à isomorphisme unique près.

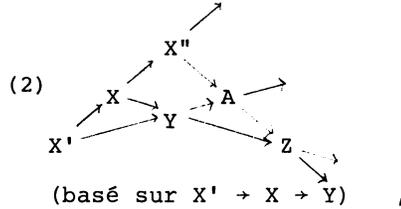
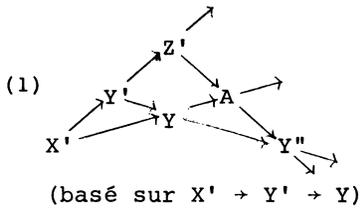
La proposition suivante nous a été signalée par J.L. Verdier.

Proposition 1.1.11. Tout carré commutatif $(X'Y'XY)$ peut se compléter en un diagramme des 9 :

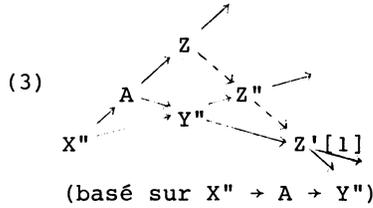
$$\begin{array}{ccccccc} X'[1] & \dashrightarrow & Y'[1] & \dashrightarrow & Z'[1] & \dashrightarrow & X'[2] \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \text{---} & \uparrow \\ X'' & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & Z'' & \longrightarrow & X''[1] \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array} ;$$

dans ce diagramme, les flèches pointillées se déduisent de flèches pleines en appliquant le foncteur de translation, les carrés sont commutatifs, sauf celui marqué - anticommutatif, et les lignes et colonnes en traits pleins sont des triangles distingués.

Choisissons des triangles distingués (X',Y',Z') , (X,Y,Z) , (X',X,X'') , (Y',Y,Y'') , (X',Y,A) de base les côtés du carré commutatif donné, et sa diagonale $X' \rightarrow Y$. L'axiome TR 4 permet de compléter les octaèdres suivants :



puis l'octaèdre



dans lequel le triangle distingué $(A, Y'', Z'[1])$ se déduit par rotation de (Z', A, Y'') dans (1) : on change le signe de la flèche : $Z' \rightarrow A$.

Les triangles distingués requis apparaissent dans ces octaèdres (sauf que (Z', Z, Z'') apparaît sous l'avatar $(Z, Z'', Z'[1])$; on déduit (Z', Z, Z'') de $(Z, Z'', Z'[1])$ en changeant le signe de la flèche $Z' \rightarrow Z$).

Pour prouver les (anti-)commutativités requises, on observe que les flèches de X', Y', Z' dans X, Y, Z constituent le composé des morphismes de triangles $(X', Y', Z') \xrightarrow{(1)} (X', Y, A) \xrightarrow{(2)} (X, Y, Z)$ figurant dans (1) et (2), que celles de X, Y, Z dans X'', Y'', Z'' constituent le composé des morphismes de triangles $(X, Y, Z) \xrightarrow{(2)} (X'', A, Z) \xrightarrow{(3)} (X'', Y'', Z'')$, et que celles de X'', Y'', Z'' dans $X'[1], Y'[1], Z'[1]$ constituent le composé des morphismes de triangles $(X'', Y'', Z'') \xrightarrow{(3)} (A, Y'', Z'[1]) \xrightarrow{(1)} (X'[1], Y'[1], Z'[1])$ où la dernière flèche est déduite par rotation du morphisme de triangles de (1) : $(Z', A, Y'') \rightarrow (Z', X'[1], Y'[1])$. Dans le triangle distingué $(X'[1], Y'[1], Z'[1])$, la flèche de degré 1 diffère par un signe de la translattée de la flèche de degré 1 du triangle (X', Y', Z') , ce qui explique l'anticommutativité du 9^{ème} carré.

Remarque 1.1.12. Un carré de suites exactes de complexes définit un diagramme des 9 dans la catégorie dérivée. L'anti-commutativité du 9^{ème} carré précise l'anticommutativité des cobords correspondants.

Remarque 1.1.13. Dans les catégories triangulées usuelles ($K\mathcal{A}$ pour \mathcal{A} additive, $D\mathcal{A}$ pour \mathcal{A} exacte, la catégorie homotopique stable, ...) tout diagramme du type "calotte supérieure d'un octaèdre" peut se complé-

ter en un octaèdre pour lequel les triangles suivants sont distingués

$$\begin{array}{c}
 Y \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \oplus X[1] \xrightarrow{(1)} Y \quad \text{et} \\
 Y \longrightarrow Z \oplus Z' \longrightarrow Y' \xrightarrow{(1)} Y
 \end{array}$$

(les flèches sont celles de l'octaèdre, sauf respectivement $Y' \rightarrow X[1]$, et $Z' \rightarrow Y'$, qui sont opposées à celles de l'octaèdre). Nous ignorons ce qu'il en est en général. Si ces triangles devenaient utiles, il y aurait peut-être lieu de renforcer l'axiome TR 4 des catégories triangulées en redéfinissant "octaèdre" pour que ces triangles soient distingués par définition des octaèdres.

Remarque 1.1.14. Les diagrammes du triangle et de l'octaèdre admettent la généralisation suivante, dont ils sont les cas particuliers obtenus pour $N = 3$ et $N = 4$. Pour $N \geq 2$, le diagramme consiste en

(a) Pour chaque intervalle I de \mathbb{Z} , avec $0 < \# I < N$, la donnée de $K(I)$.

(b) Pour $I = [a, b[$, et $J = [c, d[$, définissons $I \leq J : \Leftrightarrow (a \leq c \text{ et } b \leq d)$. On donne des flèches $\varphi_{JI} : K(I) \rightarrow K(J)$, pour $I \leq J$, telles que $\varphi_{KJ} \varphi_{JI} = \varphi_{KI}$ et que $\varphi_{II} = \text{Id}$. Pour $I = [a, b[$, $J = [c, d[$ et $b \leq c$, $\varphi_{JI} = 0$.

(c) Pour $I = [a, b[$, définissons $I^* = [b, a+N[$. On donne des isomorphismes $K(I^*) = K(I)[1]$ qui, pour $I \leq J$, rendent commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 K(I)[1] & \xlongequal{\quad} & K(I^*) \\
 \downarrow \varphi_{JI}[1] & & \downarrow \varphi_{J^*I^*} \\
 K(J)[1] & \xlongequal{\quad} & K(J^*) .
 \end{array}$$

(d) Pour $a < b < c < a+N$, le triangle de flèches φ :

$K([a, b[) \rightarrow K([a, c[) \rightarrow K([b, c[) \rightarrow K([b, a+N[) = K([a, b[)[1]$
est distingué.

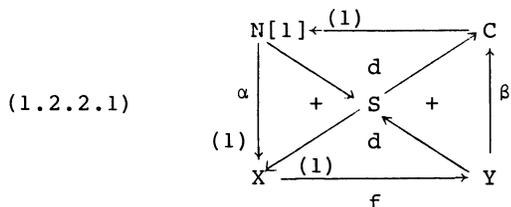
Un complexe filtré à $(N-1)$ crans, de filtration scindable degré par degré, définit un tel diagramme dans KA . Si la filtration W de K est prise croissante, avec $W_0 K = 0$ et $W_{N-1} K = K$ (i.e. $\text{Gr}_i^W K = 0$ pour $i \notin [1, N-1]$), on a $K([a, b[) = W_{b-1} K / W_{a-1} K$ pour $1 \leq a < b \leq N$ et $K(\{0\}) = K[-1]$.

1.2. Sous-catégories abéliennes.

1.2.0. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée et C une sous-catégorie pleine de \mathcal{D} . Nous supposons que $\text{Hom}^i(X, Y) := \text{Hom}(X, Y[i])$ est nul pour $i < 0$ et X, Y dans C .

Exemple 1.2.1. \mathcal{D} est la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne A , et $C = A$, identifiée à une sous-catégorie pleine de \mathcal{D} par le foncteur $A \mapsto (\text{le complexe réduit à } A \text{ en degré } 0)$.

Proposition 1.2.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ dans C . Complétons f un triangle distingué $X \rightarrow Y \rightarrow S \rightarrow$, et supposons que S figure dans un triangle distingué $N[1] \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow$, avec N et C dans C :



(les triangles marqués + sont commutatifs, ceux marqués d sont distingués).

Alors, $\alpha[-1] : N \rightarrow X$ est un noyau de f dans C , et $\beta : Y \rightarrow C$ un conoyau.

Pour Z dans C , la suite exacte longue des Hom fournit grâce à 1.2.0. des suites exactes

$$0 \rightarrow \text{Hom}^{-1}(Z, S) \rightarrow \text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Z, Y) \quad \text{et}$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(Z, N) \rightarrow \text{Hom}^{-1}(Z, S) \rightarrow 0 .$$

Elles montrent que $(N, \alpha[-1])$ est un noyau de f . Un argument dual montre que (C, β) est un conoyau.

Exemple. Pour $A \subset D(A)$ (exemple 1.2.1), le cône S de $f : X \rightarrow Y$ est le complexe $X \xrightarrow{f} Y$ (X en degré -1 , Y en degré 0). Il admet comme sous-complexe $\text{Ker}(f)[1] = H^{-1}(S)[1]$ et le quotient $X/\text{Ker}(f) \rightarrow Y$ s'envoie quasi-isomorphiquement sur $\text{Coker}(f) = H^0(S)$ placé en degré 0 . On a un diagramme (1.2.2.1).

1.2.3. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de C sera dit C -admissible, ou simplement admissible, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur C , s'il est la base d'un diagramme (1.2.2.1). Si f est un monomorphisme, on a d'après 1.2.2. $N = 0$, d'où $S \cong C$, et (1.2.2.1) se réduit à un triangle distingué (X, Y, C) . Si f est un épimorphisme, on a $C = 0$, d'où $N[1] \cong S$, et (1.2.2.1) se réduit à un triangle distingué (N, X, Y) . Réciproquement, pour tout triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{d}$

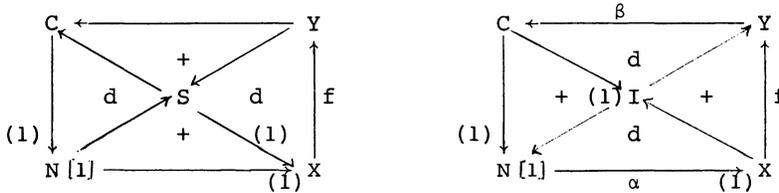
avec X, Y, Z dans C , f et g sont admissibles, f est un noyau de g , et g un conoyau de f . D'après 1.2.0. et 1.1.10, d est déterminé par f et g .

Une suite $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ dans C est une suite exacte courte admissible si elle se déduit d'un triangle distingué en supprimant la flèche de degré 1.

Proposition 1.2.4. Supposons C stable par sommes directes finies. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) C est abélienne, et ses suites exactes courtes sont admissibles.
- (ii) Tout morphisme de C est C -admissible.

Prouvons que (ii) \Rightarrow (i). D'après 1.2.2., tout morphisme de C a un noyau et un conoyau et, pour prouver C abélienne, il reste à vérifier que $\text{Coim}(f) \simeq \text{Im}(f)$. Regardons (1.2.2.1) comme la calotte inférieure d'un octaèdre et appliquons TR 4' (cf. 1.1.7.) pour la compléter en un octaèdre :



D'après 1.2.2., β est un épimorphisme, comme conoyau de f . D'après (1.2.3), le triangle (I, Y, C) étant distingué, I est dans C et est l'image de f . Dualelement, le triangle distingué (N, X, I) , déduit par rotation de l'autre triangle distingué de la calotte supérieure, montre que I est coimage de f . Enfin, d'après 1.2.3., les suites exactes courtes de C sont admissibles.

Prouvons que (i) \Rightarrow (ii). Les noyau N , conoyau C et image I de $f : X \rightarrow Y$ fournissent deux suites exactes courtes $0 \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow I \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow I \rightarrow Y \rightarrow C \rightarrow 0$, soit deux triangles formant le diagramme calotte supérieure ci-dessus. Appliquant TR 4, on en déduit la calotte inférieure : f est admissible.

Définition 1.2.5. Une sous-catégorie pleine C de \mathcal{D} est abélienne admissible si elle vérifie 1.2.0 et les conditions équivalentes de 1.2.4.

1.2.6. Dans une catégorie triangulée \mathcal{D} , on dira parfois qu'un objet Y est extension de Z par X s'il existe un triangle distingué (X, Y, Z) . Une sous-catégorie \mathcal{D}' de \mathcal{D} est stable par extensions si pour tout triangle distingué (X, Y, Z) avec X et Z dans \mathcal{D}' , Y est dans \mathcal{D}' .

1.3. t-catégories.

Définition 1.3.1. Une t-catégorie est une catégorie triangulée \mathcal{D} , munie de deux sous-catégories strictement pleines $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et $\mathcal{D}^{\geq 0}$, telles

que, posant $\mathcal{D}^{\leq n} := \mathcal{D}^{\leq 0}[-n]$ et $\mathcal{D}^{\geq n} := \mathcal{D}^{\geq 0}[-n]$, on ait

(i) Pour X dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et Y dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$, on a $\text{Hom}(X, Y) = 0$.

(ii) On a $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1}$ et $\mathcal{D}^{\geq 0} \supset \mathcal{D}^{\geq 1}$.

(iii) Quel que soit X dans \mathcal{D} , il existe un triangle distingué (A, X, B) avec A dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et B dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$.

On dira aussi que $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D} . Son cœur est la sous-catégorie pleine $\mathcal{C} := \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$.

Exemples 1.3.2. (i) Soit A une catégorie abélienne. La t-structure naturelle sur DA est celle pour laquelle $(DA)^{\leq n}$ (resp. $(DA)^{\geq n}$) est la sous-catégorie des complexes K tels que $H^i K = 0$ pour $i > n$ (resp. $i < n$), i.e. quasi-isomorphes à un complexe K' nul en degrés $> n$

(resp. $< n$). Vérifions 1.3.1.(iii). Pour tout complexe K , le tronqué $\tau_{\leq 0} K$ est le sous-complexe $\dots \rightarrow K^{-1} \rightarrow \text{Ker}(d^0) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ de K .

Prendre garde que dans [7] ce tronqué est noté $\sigma_{\leq 0} K$. Dans [8], il

est noté $t_{0]} K$. Posons $\tau_{\geq 1} K := K / \tau_{\leq 0} K$. On a $\tau_{\leq 0} K \in (DA)^{\leq 0}$,

$\tau_{\geq 1} K \in (DA)^{\geq 1}$ et la suite exacte courte $0 \rightarrow \tau_{\leq 0} K \rightarrow K \rightarrow \tau_{\geq 1} K \rightarrow 0$ fournit le triangle requis. La vérification de 1.3.1(i) et (ii) est laissée au lecteur.

(ii) Si $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D} , pour tout entier n , $(\mathcal{D}^{\leq n}, \mathcal{D}^{\geq n})$ en est une autre. On dira qu'elle se déduit de la première par translation.

(iii) Si $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D} , alors $(\mathcal{D}^{\geq 0\text{opp}}, \mathcal{D}^{\leq 0\text{opp}})$ est une t-structure, dite duale, sur la catégorie triangulée opposée \mathcal{D}^{opp} . Ceci permettra des raisonnements par dualité (un énoncé est dit dual d'un autre s'il s'obtient en appliquant cet autre à la t-catégorie duale).

Soit \mathcal{D} une t-catégorie.

Proposition 1.3.3. (i) L'inclusion de $\mathcal{D}^{\leq n}$ dans \mathcal{D} admet un adjoint à droite $\tau_{\leq n}$, et celle de $\mathcal{D}^{\geq n}$ un adjoint à gauche $\tau_{\geq n}$.

(ii) Quel que soit X dans \mathcal{D} , il existe un unique morphisme

$$d \in \text{Hom}^1(\tau_{\geq 1} X, \tau_{\leq 0} X) \text{ tel que le triangle}$$

$$\tau_{\leq 0} X \longrightarrow X \longrightarrow \tau_{\geq 1} X \xrightarrow{d}$$

soit distingué. A isomorphisme unique près, ce triangle est le seul triangle distingué (A, X, B) avec A dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et B dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$.

Par dualité et translation, il suffit de vérifier (i) pour $\mathcal{D}^{\leq 0}$. Il s'agit pour chaque X dans \mathcal{D} de trouver A dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$, muni de $A \rightarrow X$ (la valeur de $\tau_{\leq 0}$ en X), tel que pour tout T dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ on ait $\text{Hom}(T, A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T, X)$. Soit (A, X, B) un triangle 1.3.1 (iii). La suite exacte longue des Hom et les conditions 1.3.1 (i)(ii) montrent que $\text{Hom}(T, A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T, X)$: on a $A = \tau_{\leq 0} X$. Ceci prouve (i), l'existence d'un triangle distingué $(\tau_{\leq 0} X, X, \tau_{\geq 1} X)$, et le fait que tout triangle distingué 1.3.1 (iii) (A, X, B) est uniquement isomorphe à ce triangle, après oubli de la flèche de degré 1. L'unicité de cette dernière résulte de 1.3.1 (i)(ii) et de 1.1.10 (ii).

1.3.4. Le triangle distingué $(\tau_{\leq 0} X, X, \tau_{\geq 1} X)$ montre que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) $\tau_{\leq 0} X = 0$, i.e. (a') $\text{Hom}(T, X) = 0$ pour tout T dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$; (b) $X \rightarrow \tau_{\geq 1} X$, i.e. (b') X est dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$. L'équivalence (a') \Leftrightarrow (b') s'énonce : $\mathcal{D}^{\geq 1}$ est l'orthogonale à droite de $\mathcal{D}^{\leq 0}$. Elle montre que $\mathcal{D}^{\geq 1}$ est stable par extensions (1.2.6). Dualement, $\tau_{\geq 1} X = 0 \Leftrightarrow X$ est dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$, $\mathcal{D}^{\leq 0}$ est l'orthogonale à gauche de $\mathcal{D}^{\geq 1}$, et est stable par extensions. En particulier, $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et $\mathcal{D}^{\geq 1}$ sont stables par sommes directes finies.

Pour $a \leq b$, on a $\mathcal{D}^{\leq a} \subset \mathcal{D}^{\leq b}$ et il existe donc un et un seul morphisme de $\tau_{\leq a} X$ dans $\tau_{\leq b} X$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq a} X & \longrightarrow & \tau_{\leq b} X \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array} .$$

Il identifie $\tau_{\leq a} X$ à $\tau_{\leq a} \tau_{\leq b} X$. Dualement, on dispose de $\tau_{\geq a} X \rightarrow \tau_{\geq b} X$, identifiant $\tau_{\geq b} X$ à $\tau_{\geq b} \tau_{\geq a} X$.

Pour tout entier a , on écrira $\tau_{>a}$ pour $\tau_{\geq a+1}$ et $\tau_{<a}$ pour $\tau_{\leq a-1}$. On déduit par translation du premier alinéa que $X \in \mathcal{D}^{\leq a}$ équivaut à $\tau_{>a} X = 0$. Soit X dans $\mathcal{D}^{\leq a}$. Si $b > a$, on a donc $\tau_{>b} X = 0$. Si $b \leq a$, on a $\tau_{>a} \tau_{>b} X = \tau_{>a} X = 0$ et donc $\tau_{>b}$ envoie $\mathcal{D}^{\leq a}$ dans elle-même.

Proposition 1.3.5. Soit $a \leq b$. Quel que soit X dans \mathcal{D} , il existe un et un seul morphisme $\tau_{>a} \tau_{\leq b} X \rightarrow \tau_{\leq b} \tau_{>a} X$ rendant commutatif le dia-

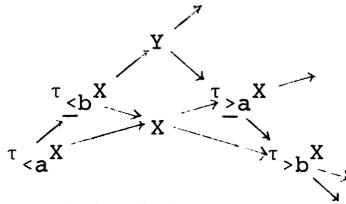
gramme

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq b} X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \tau_{\geq a} X \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ \tau_{\geq a} \tau_{\leq b} X & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq b} \tau_{\geq a} X & . \end{array}$$

C'est un isomorphisme.

La flèche de $\tau_{\leq b} X$ dans $\tau_{\geq a} X \in \mathcal{D}^{\geq a}$ se factorise, de façon unique, par $\tau_{\geq a} \tau_{\leq b} X$. Puisque $\tau_{\leq a} \tau_{\leq b} X$ est dans $\mathcal{D}^{\leq b}$, elle se factorise ensuite, de façon unique, par $\tau_{\leq b} \tau_{\geq a} X$. Appliquons TR 4 à $\tau_{\leq a} X \rightarrow \tau_{\leq b} X \rightarrow X$. On obtient l'octaèdre

(1.3.5.1)



Dans cet octaèdre, Y est à la fois $\tau_{\geq a} \tau_{\leq b} X$ (à cause du triangle distingué $(\tau_{\leq a} X, \tau_{\leq b} X, Y)$, dans lequel $\tau_{\leq a} X = \tau_{\leq a} \tau_{\leq b} X$) et $\tau_{> b} \tau_{\leq a} X$ (à cause de $(Y, \tau_{\geq a} X, \tau_{> b} X)$).

On posera $\tau_{[a,b]} X := \tau_{\geq a} \tau_{\leq b} X \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq b} \tau_{\geq a} X$.

Théorème 1.3.6. Le coeur $\mathcal{C} := \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$ de la t-catégorie \mathcal{D} est une sous-catégorie abélienne admissible de \mathcal{D} , stable par extensions (1.2.5, 1.2.6). Le foncteur $H^0 := \tau_{\geq 0} \tau_{\leq 0}$ de \mathcal{D} dans \mathcal{C} est un foncteur cohomologique.

Exemple. Dans le cas 1.3.2, \mathcal{C} est la catégorie des objets de \mathcal{D} isomorphes à un objet de \mathcal{A} (pour son plongement naturel dans DA), et H^0 s'identifie au foncteur H^0 usuel.

Preuve. Soient X et Y dans \mathcal{C} et $f : X \rightarrow Y$ de cône S . Le triangle distingué $(Y, S, X[1])$ montre que S est dans $\mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq -1}$. Les tronqués $\tau_{\geq 0} S$ et $\tau_{\leq -1} S$ sont donc respectivement dans \mathcal{C} et dans $\mathcal{C}[1]$, et le triangle distingué $(\tau_{\leq -1} S, S, \tau_{\geq 0} S)$ fournit un diagramme (1.2.2.1).

Ceci prouve que \mathcal{C} est abélienne admissible. Que \mathcal{C} soit stable par extensions résulte de 1.3.4.

Il reste à prouver que pour tout triangle distingué (X, Y, Z) , la suite $H^0 X \rightarrow H^0 Y \rightarrow H^0 Z$ est exacte.

Cas 1. Si X, Y et Z sont dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$, la suite $H^0 X \rightarrow H^0 Y \rightarrow H^0 Z \rightarrow 0$ est exacte.

Pour U dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et V dans $\mathcal{D}^{\geq 0}$, on a $H^0 U = \tau_{>0} U$, $H^0 V = \tau_{\leq 0} V$, et $\text{Hom}(H^0 U, H^0 V) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(U, H^0 V) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(U, V)$. Pour T dans \mathcal{C} (et donc dans $\mathcal{D}^{\geq 0}$), la suite exacte longue des Hom fournit

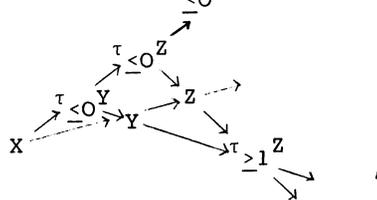
$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}(Z, T) \longrightarrow \text{Hom}(Y, T) \longrightarrow \text{Hom}(X, T) \quad , \text{ soit} \\ 0 &\longrightarrow \text{Hom}(H^0 Z, T) \rightarrow \text{Hom}(H^0 Y, T) \rightarrow \text{Hom}(H^0 X, T) \quad . \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout T , l'exactitude voulue en résulte.

Cas 2. Si X est dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$, la suite $H^0 X \rightarrow H^0 Y \rightarrow H^0 Z \rightarrow 0$ est exacte. Pour T dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$, la suite exacte longue des Hom fournit

$$\text{Hom}(Z, T) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(Y, T) \quad .$$

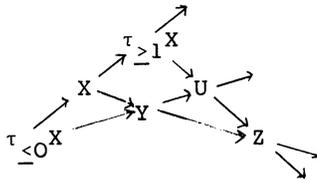
On a donc $\tau_{\geq 1} Y \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq 1} Z$. Appliquant TR 4' (cf. 1.1.7) à $Y \rightarrow Z \rightarrow \tau_{\geq 1} Z$ (ou, si l'on préfère, TR 4 à $X \rightarrow \tau_{\leq 0} Y \rightarrow Y$) :



on obtient un triangle distingué $(X, \tau_{\leq 0} Y, \tau_{\leq 0} Z)$ justiciable du cas 1.

Cas 2* . Dualement, si Z est dans $\mathcal{D}^{\geq 0}$, la suite $0 \rightarrow H^0 X \rightarrow H^0 Y \rightarrow H^0 Z$ est exacte.

Cas général. TR 4 fournit un octaèdre



Le cas 2, appliqué à $(\tau_{\leq 0} X, Y, U)$ fournit une suite exacte $H^0 X \rightarrow H^0 Y \rightarrow H^0 U \rightarrow 0$, et le cas 2*, appliqué à $(U, Z, \tau_{\geq 1} X[1])$ fournit $0 \rightarrow H^0 U \rightarrow H^0 Z$. On en déduit l'exactitude de $H^0 X \rightarrow H^0 Y \rightarrow H^0 Z$.

Nous dirons qu'une t-structure est non dégénérée si l'intersection des $\mathcal{D}^{\leq n}$, et celle des $\mathcal{D}^{\geq n}$, sont réduites aux objets zéros. Posons $H^i X := H^0(X[i])$.

Proposition 1.3.7. Si la t-structure de \mathcal{D} est non-dégénérée, le système des foncteurs H^i est conservatif, et pour que X dans \mathcal{D} appar-

tienne à $\mathcal{D}^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{D}^{\geq 0}$), il faut et il suffit que les $H^i X$ soient nuls pour $i > 0$ (resp. pour $i < 0$).

Soit X dans \mathcal{D} . Montrons que si les $H^i X$ sont tous nuls, alors $X = 0$. Si X est dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$, l'hypothèse $H^0 X = 0$ assure que X est dans $\mathcal{D}^{\leq -1}$; continuant, on trouve que X est dans l'intersection des $\mathcal{D}^{\leq n}$, donc est nul. Dualement, si $X \in \mathcal{D}^{\geq 0}$, alors $X = 0$. Dans le cas général, $\tau_{\leq 0} X$ et $\tau_{\geq 1} X$ ont encore leurs H^i nuls, donc sont nuls, et on conclut par le triangle distingué $(\tau_{\leq 0} X, X, \tau_{\geq 1} X)$.

Si un morphisme $f : X \rightarrow Y$, de cône Z , induit des isomorphismes $H^i(X) \xrightarrow{\sim} H^i(Y)$, la suite exacte longue de cohomologie montre que les $H^i(Z)$ sont nuls : $Z = 0$, et f est un isomorphisme. Enfin, si les $H^i(X)$ sont nuls pour $i > 0$, tous les $H^i(\tau_{>0} X)$ sont nuls, $\tau_{>0} X = 0$ et (1.3.4) X est dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$. Dualement pour $\mathcal{D}^{\geq 0}$.

1.3.8. Le théorème 1.3.6, qui a une t -structure sur \mathcal{D} associe une sous-catégorie abélienne admissible \mathcal{C} de \mathcal{D} admet une réciproque, énoncée ci-dessous (1.3.9). La démonstration nous occupera jusqu'en 1.3.14. Le résultat ne sera pas utilisé dans la suite de ces notes.

1.3.9. Soit \mathcal{D} une catégorie triangulée. Soit $\text{Isom}(\mathcal{D})$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de \mathcal{D} et, pour X dans \mathcal{D} , soit $[X]$ sa classe d'isomorphie. Nous noterons $*$ l'opération suivante, qui à deux parties de $\text{Isom}(\mathcal{D})$ en associe une troisième :

$A * B = \{[X] \mid \text{il existe un triangle distingué } (U, X, V) \text{ avec } [U] \in A \text{ et } [V] \in B\}$.

Lemme 1.3.10. L'opération $*$ est associative.

Preuve. Il suffit de montrer que pour X, Y, Z dans \mathcal{D} , on a

$$(\{[X]\} * \{[Y]\}) * \{[Z]\} = \{[X]\} * (\{[Y]\} * \{[Z]\}) .$$

Pour que $[T]$ appartienne au membre de gauche (resp. de droite), il faut et il suffit que T figure dans un diagramme calotte supérieure (resp. inférieure)

$$\begin{array}{ccc} Z & \xleftarrow{d} & T \\ (1) \searrow & & \nearrow \\ & U & \\ \swarrow & & \searrow \\ Y & \xleftarrow{d} & X \\ & (1) & \end{array} \quad \text{(resp. } \begin{array}{ccc} Z & \xleftarrow{d} & T \\ (1) \downarrow & & \uparrow \\ & V & \\ \downarrow & & \uparrow \\ Y & \xleftarrow{d} & X \\ & (1) & \end{array}) .$$

L'inclusion \subset résulte donc de TR 4, et l'inclusion inverse de TR 4'.

Le lemme 1.3.10 permet de définir le $*$ -produit $A_1 * \dots * A_p$ d'une

suite de parties de Isom (\mathcal{D}), sans devoir préciser comment sont mises les parenthèses. Il nous sera commode de définir le *-produit de la suite vide comme étant $\{[0]\}$.

1.3.11. Exemples. (i) Soient A une sous-catégorie strictement pleine de \mathcal{D} , et EA la plus petite sous-catégorie strictement pleine de \mathcal{D} contenant A , les objets zéros, et stable par extensions. On a

$$(1.3.11.1) \quad [EA] = \bigcup_{q \geq 0} [A] * \dots * [A] \quad (q \text{ facteurs}).$$

(ii) Que tout morphisme de A soit A -admissible (1.2.3) peut se reformuler

$$(1.3.11.2) \quad [A] * [A[1]] \subset [A[1]] * [A] \quad .$$

1.3.12. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie abélienne admissible, stable par extensions, de la catégorie triangulée \mathcal{D} .

Soient \mathcal{D}^b (resp. $\mathcal{D}^{b, \leq 0}$; $\mathcal{D}^{b, \geq 0}$; $\mathcal{D}^{b, I}$, pour I un intervalle de \mathbb{Z}) la plus petite sous-catégorie strictement pleine de \mathcal{D} contenant les $\mathcal{C}[n]$ pour $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $-n \leq 0$; $-n \geq 0$; $-n \in I$) et stable par extensions (1.2.6).

Proposition 1.3.13. Sur \mathcal{D}^b , ($\mathcal{D}^{b, \leq 0}$, $\mathcal{D}^{b, \geq 0}$) est une t-structure non dégénérée. Pour $a \leq b$, on a $\mathcal{D}^{b, [a, b]} = \mathcal{D}^{b, \geq a} \cap \mathcal{D}^{b, \leq b}$. En particulier, $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{b, \geq 0} \cap \mathcal{D}^{b, \leq 0}$.

L'axiome 1.3.1(i) des t-structures résulte de la suite exacte longue des Hom et de 1.2.0. L'axiome 1.3.1(ii) est trivial. Parce que \mathcal{C} est stable par extensions et vérifie 1.3.11(ii), on a, pour tout intervalle $I = [a, b]$ de \mathbb{Z} ($a < b$)

$$(1.3.13.1) \quad [\mathcal{D}^{b, I}] = [\mathcal{C}[-a]] * \dots * [\mathcal{C}[-b]] \quad .$$

Pour $a \leq c < b$, $J = [a, c]$ et $K = [c+1, b]$, on a donc

$$[\mathcal{D}^{b, I}] = [\mathcal{D}^{b, J}] * [\mathcal{D}^{b, K}] \quad .$$

En particulier, si $c = 0$, on trouve que tout objet de $\mathcal{D}^{b, I}$ est extension d'un objet de $\mathcal{D}^{b, K} \subset \mathcal{D}^{b, \geq 1}$ par un objet de $\mathcal{D}^{b, J} \subset \mathcal{D}^{b, \leq 0}$.

Puisque \mathcal{D}^b est la réunion croissante des $\mathcal{D}^{b, I}$, ceci prouve 1.3.1(iii).

D'après (1.3.13.1), si X est dans $\mathcal{D}^{b, I}$, il existe une suite de triangles distingués (X_i, X_{i+1}, A_{i+1}) ($a \leq i < b$) avec X_a dans $\mathcal{C}[-a]$, chaque A_j dans $\mathcal{C}[-j]$, et $X_b = X$. Il est commode de poser $X_{a-1} = 0$, $A_a = X_a$ et de compléter cette suite par un premier triangle

$(X_{a-1}, X_a, A_a) = (0, X_a, X_a)$. Appliquant la suite exacte longue de cohomologie à ces triangles, on prouve par récurrence sur j que, pour tout i , $H^i(X_j)$ est 0 pour $i \notin [a, j]$ et est $A_i[i]$ pour $i \in [a, j]$. En particulier ,

$$[X] \in \{[H^a(X)[-a]]\} * \dots * \{[H^b(X)[-b]]\}$$

(X est extension successive de ses objets de cohomologie, placés en leur degré respectif). De là résulte la non-dégénérescence de la t -structure (si les $H^i X$ sont nuls, X est nul) et le second énoncé de 1.3.13 (si X est dans $\mathcal{D}^{b, \geq a} \cap \mathcal{D}^{b, \leq b}$, ses $H^i X$ sont nuls pour $i \notin [a, b]$ et donc X est dans $\mathcal{D}^{b, [a, b]}$).

Remarque 1.3.14. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée, et \mathcal{C} une sous-catégorie pleine vérifiant 1.2.0 et dont toute flèche est admissible. La preuve de 1.2.4 montre alors que toute flèche de \mathcal{C} a un noyau et un conoyau, que $\text{Im}(f) = \text{Coim}(f)$ et que toute suite exacte courte de \mathcal{C} est admissible. Pour être abélienne, il ne manque à \mathcal{C} que l'existence de sommes directes finies.

Soit \mathcal{C}' la catégorie EC des extensions successives d'objets de \mathcal{C} (1.3.11 (i)). La suite exacte des Hom montre que \mathcal{C}' vérifie encore (1.2.0). Par ailleurs, on déduit de (1.3.11.1) (1.3.11.2) appliqués à \mathcal{C} , et de l'associativité de $*$ que $[\mathcal{C}'] * [\mathcal{C}'[1]] \subset [\mathcal{C}'[1]] * [\mathcal{C}']$, i.e. que tout morphisme de \mathcal{C}' est admissible : \mathcal{C}' est une sous-catégorie abélienne admissible de \mathcal{D} . Lui appliquant 1.3.13 , on obtient que, pour \mathcal{D}^b , $\mathcal{D}^{b, \geq 0}$ et $\mathcal{D}^{b, \leq 0}$ définis comme en 1.3.12 (à partir de \mathcal{C}), $(\mathcal{D}^{b, \leq 0}, \mathcal{D}^{b, \geq 0})$ est une t -structure sur \mathcal{D}^b , de coeur \mathcal{C}' .

La proposition suivante fournit des intermédiaires entre les foncteurs $\tau_{<0}$ et $\tau_{\leq 0}$.

Proposition 1.3.15. Soient K dans \mathcal{D} et une suite exacte courte dans \mathcal{C}

$$0 \rightarrow A \rightarrow H^0 K \rightarrow B \rightarrow 0 .$$

(i) Il existe K' dans $\mathcal{D}^{<0}$, muni de $a : K' \rightarrow K$, tel que pour tout L dans $\mathcal{D}^{<0}$, a identifie $\text{Hom}(L, K')$ au sous-groupe de $\text{Hom}(L, K)$ formé des f tels que $H^0(f)$ se factorise par A . En d'autres termes, dans $\mathcal{D}^{<0}$, K' coreprésente le foncteur $L \mapsto \text{Ker}(\text{Hom}(L, K) \rightarrow \text{Hom}(H^0(L), B))$. Pour qu'un couple (K', a) coreprésente ce foncteur, il faut et il suffit que $(*) K' \in \mathcal{D}^{<0}$, $\tau_{<0} K' \xrightarrow{\sim} \tau_{<0} K$ et $H^0 K' \xrightarrow{\sim} A \subset H^0 K$.

(ii) Dualement, on obtient $b : K \rightarrow K''$ avec $K'' \in \mathcal{D}^{>0}$ et, pour L dans $\mathcal{D}^{>0}$ une suite exacte $0 \rightarrow \text{Hom}(K'', L) \rightarrow \text{Hom}(K, L) \rightarrow \text{Hom}(A, H^0 L)$.

Le couple (K'', b) est caractérisé par $K'' \in \mathcal{D}^{\geq 0}$, $\tau_{>0} K \xrightarrow{\sim} \tau_{>0} K''$ et $H^0 K'' = B$.

(iii) Il existe $d : K'' \xrightarrow{(1)} K'$, unique d'après 1.1.10, tel que (K', K, K'') soit distingué.

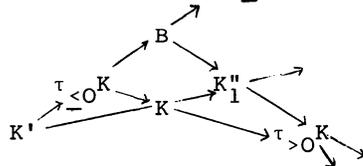
Soient le morphisme composé $\tau_{\leq 0} K \rightarrow H^0 K \rightarrow B$ et K' complétant le triangle distingué $(K', \tau_{\leq 0} K, B)$. Ce triangle montre que K' est dans $\mathcal{D}^{\leq 1}$ et que $H^1 K' = 0$, donc que K' est dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$. Pour L dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$, on a $\text{Hom}^{-1}(L, B) = 0$, d'où une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L, K') \rightarrow \text{Hom}(L, \tau_{\leq 0} K) \rightarrow \text{Hom}(L, B).$$

On a $\text{Hom}(L, \tau_{\leq 0} K) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(L, K)$ et $\text{Hom}(L, B) = \text{Hom}(H^0 L, B)$: la suite se réécrit $0 \rightarrow \text{Hom}(L, K') \rightarrow \text{Hom}(L, K) \rightarrow \text{Hom}(H^0 L, B)$, et K' coreprésente le foncteur (i). Pour L dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$, la propriété universelle de K' montre que $\tau_{<0} K' \xrightarrow{\sim} \tau_{<0} K$. La suite exacte longue de cohomologie de $(K', \tau_{<0} K, B)$ montre que $H^0 K' \xrightarrow{\sim} A$. Réciproquement, si K'_1 vérifie (*), la propriété universelle de K' fournit un morphisme $a : K'_1 \rightarrow K'$ induisant par hypothèse des isomorphismes $\tau_{<0} K'_1 \rightarrow \tau_{<0} K'$ et

$H^0 K'_1 \rightarrow H^0 K'$. Le morphisme u est donc un isomorphisme. Ceci achève la preuve de (i). L'assertion (ii) s'obtient par dualité.

Bâtissons un octaèdre sur $K' \rightarrow \tau_{\leq 0} K \rightarrow K$:



Le triangle $(B, K''_1, \tau_{>0} K)$ est du type 1.3.1 (iii) pour K''_1 . Il montre que K''_1 est dans $\mathcal{D}^{\geq 0}$, avec $H^0 K''_1 = B$ et $\tau_{>0} K \xrightarrow{\sim} \tau_{>0} K''_1$. D'après (ii), K''_1 s'identifie donc à K'' , et (K', K, K'') est le triangle promis en (iii).

1.3.16. Soient \mathcal{D}_i ($i = 1, 2$) deux t-catégories, C_i le coeur de \mathcal{D}_i et notons ϵ le foncteur d'inclusion de C_1 dans \mathcal{D}_1 . Soit $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ un foncteur exact ([10] p.4) de la catégorie triangulée \mathcal{D}_1 dans la catégorie triangulée \mathcal{D}_2 . Nous dirons que T est t-exact à droite si

$T(\mathcal{D}_1^{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\leq 0}$, t-exact à gauche si $T(\mathcal{D}_1^{\geq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\geq 0}$, et t-exact s'il est t-exact à droite et à gauche.

Proposition 1.3.17. (i) Si T est t-exact à gauche (resp. à droite), le foncteur additif ${}^p T := H^0 \circ T \circ \epsilon : C_1 \rightarrow C_2$ est exact à gauche (resp. à droite).

(ii) Pour T t-exact à gauche (resp. à droite) et K dans $\mathcal{D}_1^{\geq 0}$ (resp. $\mathcal{D}_1^{\leq 0}$), on a ${}^P\text{TH}^\circ K \xrightarrow{\sim} H^\circ \text{TK}$ (resp. $H^\circ \text{TK} \xrightarrow{\sim} {}^P\text{TH}^\circ K$).

(iii) Soit (T^*, T_*) une paire de foncteurs exacts adjoints : $T^* : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_1$ et $T_* : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$, adjoint à droite de T_* . Pour que T^* soit t-exact à droite, il faut et il suffit que T_* soit t-exact à gauche, et dans ce cas $({}^P T^*, {}^P T_*)$ forment une paire de foncteurs adjoints $\mathcal{C}_1 \rightleftarrows \mathcal{C}_2$.

(iv) Si $T_1 : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ et $T_2 : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_3$ sont t-exacts à gauche (resp. à droite), $T_2 \circ T_1$ l'est aussi et ${}^P(T_2 \circ T_1) = {}^P T_2 \circ {}^P T_1$.

Si T est t-exact à gauche, pour toute suite exacte courte $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ dans \mathcal{C}_1 , la suite exacte longue de cohomologie du triangle distingué $(T(X), T(Y), T(Z))$ fournit $0 \rightarrow H^\circ T(X) \rightarrow H^\circ T(Y) \rightarrow H^\circ T(Z)$, puisque $T(Z)$ est dans $\mathcal{D}_2^{\geq 0}$. Ceci (resp. l'énoncé dual) prouve (i).

Pour K dans $\mathcal{D}_1^{\geq 0}$, le triangle $(H^\circ K, K, \tau_{>0} K)$ fournit un triangle $(\text{TH}^\circ K, \text{TK}, T\tau_{>0} K)$ avec $T\tau_{>0} K$ dans $\mathcal{D}_2^{\geq 0}$, dont la suite exacte longue de cohomologie fournit $H^\circ T H^\circ K \xrightarrow{\sim} H^\circ \text{TK}$. Ceci (resp. l'énoncé dual) prouve (ii).

Si T_* est t-exact à gauche, pour U dans $\mathcal{D}_1^{\geq 0}$ et V dans $\mathcal{D}_2^{\leq 0}$, on a $\text{Hom}(T^* V, U) = \text{Hom}(V, T_* U) = 0$. Ceci valant pour tout U , on a $\tau_{>0} T^* V = 0$, i. e. $T^* V$ est dans $\mathcal{D}_1^{\leq 0}$: T^* est t-exact à droite. Pour A dans \mathcal{C}_1 et B dans \mathcal{C}_2 , on a alors $H^\circ T^* B = \tau_{\leq 0} T^* B$ et $H^\circ T_* A = \tau_{\leq 0} T_* A$, d'où un isomorphisme fonctoriel $\text{Hom}(H^\circ T^* B, A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T^* B, A) = \text{Hom}(A, T_* B) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}(A, H^\circ T_* B)$. Ceci, complété par dualité, prouve (iii).

Si T_1 et T_2 sont t-exacts à gauche et que $A \in \mathcal{C}_1$, on a $T_1 A_1 \in \mathcal{D}_2^{\geq 0}$ et ${}^P(T_2 \circ T_1)A = H^\circ T_2 T_1 A = H^\circ T_2 H^\circ T_1 A$ par (ii). Ceci, complété par dualité, prouve (iv).

Remarque 1.3.18 (i) Soient $\mathcal{D}_1^+ = \bigcup \mathcal{D}_1^{\geq n}$ et $\mathcal{D}_2^- = \bigcup \mathcal{D}_2^{\leq -n}$. Le résultat (iii) vaut encore pour $T^* : \mathcal{D}_2^- \rightarrow \mathcal{D}_1$ et $T_* : \mathcal{D}_1^+ \rightarrow \mathcal{D}_2$, adjoints en ce sens que fonctoriellement $\text{Hom}(T^* V, U) = \text{Hom}(V, T_* U)$, pour V dans \mathcal{D}_2^- et U dans \mathcal{D}_1^+ . La preuve est la même.

(ii) Pour A dans \mathcal{C}_1 et B dans \mathcal{C}_2 , les flèches d'adjonction pour (T^*, T_*) et $({}^P T^*, {}^P T_*)$ sont liées par les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 T^* P_{T^*} A & \longrightarrow & P_T^* P_{T^*} A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T^* T_* A & \longrightarrow & A
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 B & \longrightarrow & T_* T^* B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P_{T_*} P_T^* B & \longrightarrow & T_* P_T^* B .
 \end{array}$$

1.3.19. Soit $T : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur exact pleinement fidèle entre catégories triangulées. Pour qu'un triangle tr de \mathcal{D}' soit distingué, il suffit que son image $T\text{tr}$ par T le soit : si tr_1 est un triangle distingué de même base que tr , $T\text{tr}$ et $T\text{tr}_1$ sont distingués de même base, donc isomorphes, et tr et tr_1 sont isomorphes.

Supposons \mathcal{D} et \mathcal{D}' munies de t -structures. et que T est t -exact. Pour que X dans \mathcal{D}' soit dans $\mathcal{D}'^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{D}'^{\geq 0}$), il suffit que TX soit dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{D}^{\geq 0}$) : on a $X \in \mathcal{D}'^{\leq 0} \Leftrightarrow \tau_{>0} X = 0$, et T commute à $\tau_{>0}$ (resp. argument dual).

Réciproquement, si \mathcal{D}' est une sous-catégorie triangulée pleine d'une catégorie triangulée \mathcal{D} , et que $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t -structure sur \mathcal{D} , pour que $(\mathcal{D}'^{\leq 0}, \mathcal{D}'^{\geq 0}) := (\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}' \cap \mathcal{D}^{\geq 0})$ soit une t -structure sur \mathcal{D}' , il faut et il suffit que \mathcal{D}' soit stable sous le foncteur $\tau_{<0}$. Si cette condition est remplie, cette t -structure sur \mathcal{D}' s'appelle la t -structure induite. Pour \mathcal{D}' muni de la t -structure induite, le foncteur d'inclusion de \mathcal{D}' dans \mathcal{D} est t -exact : on a $C' = \mathcal{D}' \cap C$, et la restriction à \mathcal{D}' du foncteur $\tau_{\leq p}$, $\tau_{\geq p}$ ou H^p de \mathcal{D} s'identifie au foncteur de même nom de \mathcal{D}' .

1.3.20. Soit $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$ une famille finie de catégories triangulées et $T : \prod \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{D}$ un multifoncteur exact (SGA 4 XVII 1.1.3) des \mathcal{D}_i dans une catégorie triangulée \mathcal{D} . Supposons les \mathcal{D}_i et \mathcal{D} munis de t -structures. On dira que T est t -exact à gauche (resp. à droite) s'il envoie le produit des $\mathcal{D}_i^{\geq 0}$ (resp. $\mathcal{D}_i^{\leq 0}$) dans $\mathcal{D}^{\geq 0}$ (resp. $\mathcal{D}^{\leq 0}$), et t -exact s'il l'est à gauche et à droite. Si T est t -exact à gauche (resp. à droite, resp. -) et qu'on fixe certaines des variables à être un objet donné de $\mathcal{D}_i^{\geq 0}$ (resp. $\mathcal{D}_i^{\leq 0}$, resp. C_i , le coeur de \mathcal{D}_i), le foncteur obtenu en les variables restantes est encore t -exact à gauche (resp. à droite, resp. -). Ceci nous permettra d'appliquer à T des résultats prouvés pour les foncteurs d'une variable. Par exemple :

Soit ε_i l'inclusion de C_i dans \mathcal{D}_i . Posons $P_T = H^0 \circ T_0(\varepsilon_i)_{i \in I}$. Si T est t -exact à gauche (resp. à droite), le multifoncteur additif P_T des C_i dans \mathcal{C} est exact à gauche (resp. à droite).

Supposons T t -exact à gauche. Pour les K_i dans les $\mathcal{D}_i^{\geq 0}$, on a alors

par 1.3.17 (ii) $P_T(H^0 K_i) \xrightarrow{\sim} H^0 T(K_i)$.

Pour K_i quelconque, le morphisme $K_i \rightarrow \tau_{\geq 0} K_i$ fournit un morphisme

$$(1.3.20.1) \quad H^0 T(K_i) \rightarrow H^0 T(\tau_{\geq 0} K_i) \xleftarrow{\sim} P_T(H^0 K_i) .$$

Translatant, on obtient plus généralement, pour $\Sigma n_i = n$, un morphisme

$$(1.3.20.2) \quad H^n T(K_i) \rightarrow P_T(H^{n_i} K_i) .$$

Il y a ici un problème de signes, qui n'apparaît pas si on considère plutôt

$$(1.3.20.3) \quad H^n T(K_i) \rightarrow H^n T((H^{n_i} K_i)[-n_i]) .$$

Pour T t-exact à droite, on a $P_{TH^0} K_i \xleftarrow{\sim} H^0 T K_i$ pour K_i dans $\mathcal{D}_i^{<0}$; les morphismes $\tau_{\leq 0} K_i \rightarrow K_i$ fournissent un morphisme

$P_T(H^0 K_i) \rightarrow H^0 T(K_i)$, et, translatant, des morphismes

$$(1.3.20.4) \quad H^n T((H^{n_i} K_i)[-n_i]) \rightarrow H^n T(K_i) \quad (\text{pour } \Sigma n_i = n) .$$

Pour T t-exact, on dispose et de (1.3.20.3), et de (1.3.20.4) . Appliquant $H^n T$ aux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq n_i} K_i & \longrightarrow & H^{n_i} K_i[-n_i] \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_i & \longrightarrow & \tau_{\geq n_i} K_i \end{array} ,$$

on trouve que le composé (1.3.20.3) ◦ (1.3.20.4) est l'identité. Si $\Sigma n_i = \Sigma m_i = n$ et que $(n_i)_{i \in I} \neq (m_i)_{i \in I}$, il existe i tel que $n_i < m_i$. Le composé $\tau_{\leq n_i} K_i \rightarrow K_i \rightarrow \tau_{\geq m_i} K_i$ est nul, et on en déduit que le composé ((1.3.20.3) pour (m_i)) ◦ ((1.3.20.4) pour (n_i)) est nul.

Proposition 1.3.21. Si T est t-exact et que les K_i sont dans les \mathcal{D}_i^b , les morphismes (1.3.20.3) et (1.3.20.4) définissent des isomorphismes inverse l'un de l'autre

$$(1.3.21.1) \quad H^n T(K_i) \simeq \bigoplus H^n T((H^{n_i} K_i)[-n_i]) \quad (\text{somme pour } \Sigma n_i = n) .$$

On a déjà vu que ces morphismes font du second membre un facteur direct du premier. Les deux membres de 1.3.21.1 sont des foncteurs cohomologiques en chaque K_i (pour le membre de droite, grâce à l'exactitude de P_T) et les morphismes (1.3.20.3) et (1.3.20.4) sont des morphismes de foncteurs cohomologiques. Par dévissage, on se ramène à supposer chaque K_i dans \mathcal{C}_i ; ce cas est trivial.

1.3.22. Exemples de t-structures (ne sera pas utilisé dans la suite de ces notes).

Soit, comme en 1.1.4, \mathcal{A} une catégorie exacte, d'ensemble de suites exactes courtes E . On suppose que tout morphisme $f : A \rightarrow B$ admet un noyau tel que $\text{Ker}(f) \rightarrow A$ figure dans une suite exacte courte $0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow A \rightarrow \text{Coim}(f) \rightarrow 0$. Soit $\mathcal{D}^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{D}^{\geq 0}$) la sous-catégorie de $\mathcal{D} := \text{DA}$ (1.1.4) formée des complexes K tels que les morphismes $\text{Coim}(d^{i-1}) \rightarrow \text{Ker}(d^i)$ soient des isomorphismes pour $i > 0$ (resp. $i < 0$). En terme du plongement $h : A \rightarrow (A, E)^\sim$ (1.1.4), cela signifie que l'image h_K de K dans $((A, E)^\sim)$ est dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{D}^{\geq 0}$). Montrons que $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D} .

(a) Pour K, L dans \mathcal{D} , $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(K, L) = \lim \text{ind} \text{Hom}_{\text{KA}}(K', L')$, la limite étant prise sur les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes $K' \rightarrow K$ et $L \rightarrow L'$. Pour K dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ (resp. L dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$), un système cofinal de K' (resp. L') est obtenu en se limitant à ceux tels que $K'^i = 0$ pour $i > 0$ (resp. $L'^i = 0$ pour $i < 0$): utiliser le quasi-isomorphisme $\tau_{\leq 0} K' \rightarrow K'$ (resp. $L' \rightarrow \tau_{\geq 1} L'$); $\tau_{\leq 0}$ et $\tau_{\geq 1}$ sont comme en 1.3.2(i). Pour de tels K' et L' , tout morphisme de complexes $f : K' \rightarrow L'$ est nul : il est défini par $f^0 : K'^0 \rightarrow L'^0$, vérifiant $df^0 = 0$, et donc nul car $d : L'^0 \rightarrow L'^1$ est un monomorphisme. Ceci vérifie 1.3.1(i). L'axiome 1.3.1(ii) est trivial.

(b) Pour K dans KA , on dispose d'une suite exacte courte de complexes $0 \rightarrow \tau_{\leq 0} K \rightarrow K \rightarrow \tau_{\geq 1} K \rightarrow 0$. Elle définit un triangle distingué dans DA : le cône sur $\tau_{\leq 0} K \rightarrow K$ s'envoie quasi-isomorphiquement sur $\tau_{\geq 1} K$. Ceci vérifie 1.3.1(iii).

On trouve en particulier que le coeur \mathcal{C} de \mathcal{D} est une catégorie abélienne. Les objets de \mathcal{C} peuvent se représenter comme des complexes K de longueur 1 : $K^{-1} \rightarrow K^0$, avec d un monomorphisme. Pour K et L de ce type, un morphisme de complexes $f : K \rightarrow L$ est uniquement déterminé par sa composante $f^0 : K^0 \rightarrow L^0$. Si on identifie K^{-1} et L^{-1} à des sous-objets de K^0 et L^0 , $f^0 : K^0 \rightarrow L^0$ provient d'un morphisme de complexes f si et seulement si $f^0(K^{-1}) \subset L^{-1}$, et f est homotope à zéro si et seulement si $f^0(K^0) \subset L^{-1}$. Que f soit un quasi-isomorphisme signifie l'exactitude de

$$0 \rightarrow K^{-1} \rightarrow K^0 \oplus L^{-1} \rightarrow L^0 \rightarrow 0,$$

i.e. que $K^0 \oplus L^{-1} \rightarrow L^0$ est un épimorphisme admissible, et que le sous-objet K^{-1} de K^0 est le pull-back de L^{-1} par f^0 .

On vérifie facilement que si $K' \xrightarrow{\varphi} K$ est un quasi-isomorphisme

(avec K' concentré en degrés 0 et -1), et que $f\varphi$ est homotope à zéro ($f\varphi(K'^0) \subset L^{-1}$), f l'est aussi. Le groupe $\text{Hom}_C(K, L)$ est la limite inductive, pour $\varphi : K' \rightarrow K$ un quasi-isomorphisme de ce type, des

$$\text{Hom}_{K^A}(K', L) = \{f : K'^0 \rightarrow L^0 \mid f(K'^{-1}) \subset L^{-1}\} / \{f \mid f(K'^0) \subset L^{-1}\}$$

et, dans cette limite inductive, les morphismes de transition sont injectifs.

1.3.23. Exercices. (i) Pour K un complexe d'objets de A , $H^0 K$ dans C est le complexe $\text{Coim}(d^{-1}) \rightarrow \text{Ker}(d^0)$.

(ii) Un foncteur F de A dans une catégorie abélienne N qui transforme suites dans E en suites exactes à droite $FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow 0$ se prolonge uniquement (à isomorphisme unique près) en $F' : C \rightarrow N$, exact à droite. Si F est pleinement fidèle, et transforme suites dans E en suites exactes courtes et monomorphismes en monomorphismes, F' est exact et pleinement fidèle. En particulier, le foncteur composé $C \rightarrow DA \rightarrow D((A, E)^\sim) \xrightarrow{H^0} (A, E)^\sim$ est pleinement fidèle. Il identifie C à la catégorie des quotients dans $(A, E)^\sim$ d'un objet de A par un sous-objet dans A .

(iii) Le foncteur $D^-A \rightarrow D^-C$ (l'exposant $-$ indique qu'on se limite aux complexes bornés supérieurement) est une équivalence [utiliser que tout objet de C est quotient d'un objet de A].

(iv) Soit A une catégorie abélienne. Les hypothèses de 1.3.22 sont vérifiées par FA (1.1.3 ex.2). Soient C la catégorie abélienne correspondante de quotients formels d'objets filtrés et C' la catégorie des suites $\dots \rightarrow A^i \rightarrow A^{i-1} \rightarrow \dots$ avec $A^i = 0$ pour $i \gg 0$ et $A^i \xrightarrow{\sim} A^{i-1}$ pour $i \ll 0$. Montrer que le foncteur $((V^{-1}, F) \rightarrow (V^0, F)) \mapsto (\text{coker}(F^i V^{-1} \rightarrow F^i V^0))$ de C dans C' est une équivalence [appliquer (ii)].

1.3.24. Exemple. Les hypothèses de 1.3.22 sont vérifiées pour A la catégorie des espaces de Banach, si on prend pour suites exactes courtes celles qui le deviennent après oubli de la topologie, i.e., d'après le théorème du graphe fermé, les suites isomorphes aux

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

où A est un sous-espace fermé de B et où $C = B/A$. La catégorie C obtenue est une catégorie de "quotients formels" B/A (pour $A \rightarrow B$ une application linéaire continue injective entre espaces de Banach). Le théorème du graphe fermé assure que si les complexes $K^{-1} \rightarrow K^0$ et $L^{-1} \rightarrow L^0$ définissent des objets de C , un morphisme de complexes $f : K \rightarrow L$ s'identifie à une application linéaire continue $f^0 : K^0 \rightarrow L^0$, telle que ensemblément $f(K^{-1}) \subset L^{-1}$, et que f est homotope à zéro (i.e., nul dans C) si et seulement si, ensemblément, $f(K^0) \subset L^{-1}$.

Des quotients formels similaires ont été considérés par L. Walbroeck (Les quotients de b-espaces, preprint, Bruxelles, 1962).

1.4. Recollement.

1.4.1. Pour X un espace topologique (voire un topos), muni d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O} , nous noterons $D(X, \mathcal{O})$ la catégorie dérivée de la catégorie abélienne $M(X, \mathcal{O})$ des faisceaux de \mathcal{O} -modules à gauche sur X . Comme d'habitude, $D^+(X, \mathcal{O})$ est la sous-catégorie pleine image essentielle de celle des complexes bornés inférieurement.

Soient U une partie ouverte de X , F le fermé complémentaire, j l'inclusion de U dans X , i celle de F dans X et notons encore \mathcal{O} l'image inverse de \mathcal{O} sur U ou sur F . Nous nous proposons de décrire une construction qui, à une t -structure sur $D^+(U, \mathcal{O})$ et une sur $D^+(F, \mathcal{O})$, en attache une sur $D^+(X, \mathcal{O})$.

Les catégories $M(X, \mathcal{O})$, $M(U, \mathcal{O})$ et $M(F, \mathcal{O})$ sont reliées par les foncteurs :

- $j_! : M(U, \mathcal{O}) \rightarrow M(X, \mathcal{O})$: prolongement par 0 (exact) ;
- $j^* : M(X, \mathcal{O}) \rightarrow M(U, \mathcal{O})$: restriction (exact), noté aussi $j^!$;
- $j_* : M(U, \mathcal{O}) \rightarrow M(X, \mathcal{O})$: image directe (exact à gauche) ;
- $i^* : M(X, \mathcal{O}) \rightarrow M(F, \mathcal{O})$: restriction (exact) ;
- $i_* : M(F, \mathcal{O}) \rightarrow M(X, \mathcal{O})$: image directe (exact), noté aussi $i_!$;
- $i^! : M(X, \mathcal{O}) \rightarrow M(F, \mathcal{O})$: sections à support dans F (exact à gauche).

Ils forment deux suites de 3 foncteurs adjoints ($j_!, j^! = j^*, j_*$) et ($i^*, i_* = i_!, i^!$). On a $j^* i_* = 0$, d'où par adjonction $i^* j_! = 0$ et $i^! j_* = 0$. Pour tout faisceau F sur X , les flèches d'adjonction fournissent des suites exactes

$$0 \rightarrow j_! j^* F \rightarrow F \rightarrow i_* i^* F \rightarrow 0$$

(1.4.1.1) et

$$0 \rightarrow i_* i^! F \rightarrow F \rightarrow j_* j^* F$$

(qu'on peut compléter par un 0 à droite pour F injectif):

Pour F sur F (resp. U), elles fournissent des isomorphismes

$$(1.4.1.2) \quad i^* i_* F \xrightarrow{\sim} F \xrightarrow{\sim} i^! i_* F,$$

$$(1.4.1.3) \quad j^* j_* F \xrightarrow{\sim} F \xrightarrow{\sim} j^* j_! F.$$

Pour toute paire de foncteurs adjoints (T^*, T_*) , le morphisme d'adjonction $T^* T_* \rightarrow \text{Id.}$ (resp. $\text{Id.} \rightarrow T_* T^*$) est un isomorphisme si et seulement si T_* (resp. T^*) est pleinement fidèle. Les assertions (1.4.1.2) (1.4.1.3) équivalent donc à : i_* , j_* et $j_!$ sont pleinement fidèles.

1.4.2.0. Quand un foncteur T entre catégories abéliennes est exact, il passe trivialement aux catégories dérivées. Nous noterons souvent

par le même symbole le foncteur, et son extension aux catégories dérivées. Cette extension est à la fois le dérivé gauche LT et le dérivé droit RT de T .

1.4.2.1. Les foncteurs 1.4.1 fournissent par dérivation (à droite) des foncteurs reliant $D^+(X,0)$, $D^+(U,0)$ et $D^+(F,0)$, formant deux suites de 3 foncteurs adjoints $(j_!, j^*, Rj_*)$ et $(i^*, i_*, Ri^!)$. On a $j^* i_* = 0$, d'où par adjonction $i^* j_! = 0$ et $Ri^! Rj_* = 0$. Pour tout K dans $K^+(X,0)$, les suites (1.4.1.1) se dérivent en triangles distingués $(j_! j^* K, K, i_* i^* K)$ et $(i_* Ri^! K, K, Rj_* j^* K)$.

Pour K dans $D^+(F,0)$ (resp. $D^+(U,0)$), (1.4.1.2) (resp. 1.4.1.3) fournit des isomorphismes

$$i^* i_* K \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow{\sim} Ri^! i_* K \quad : \quad i_* \text{ est pleinement fidèle}$$

$$(\text{resp } j^* Rj_* K \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow{\sim} j^* j_! K \quad : \quad j_! \text{ et } Rj_* \text{ sont pleinement fidèles}).$$

En effet, j_* et i_* transforment injectifs en injectifs.

1.4.2.3 Les propriétés énumérées ci-dessus sont tout ce qui nous sera nécessaire pour recoller des t -structures. On les rencontre dans d'autres contextes - par exemple pour des catégories dérivées l -adiques, qui ne rentrent pas stricto sensu dans le cadre 1.4.1. Pour pouvoir couvrir ces cas, nous nous placerons dans un cadre plus général 1.4.3. Dans ce cadre, les catégories de faisceaux n'apparaissent plus (seules apparaissent les catégories triangulées) et nous en profitons pour alléger la notation en écrivant simplement j_* et $i^!$ pour ce qui ci-dessus eût été Rj_* et $Ri^!$.

1.4.3. Soient donc trois catégories triangulées \mathcal{D} , \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F et des foncteurs exacts

$$\mathcal{D}_F \xrightarrow{i_*} \mathcal{D} \xrightarrow{j_!} \mathcal{D}_U .$$

Il est parfois commode de poser $i_! := i_*$ et $j^! := j^*$. On suppose vérifiés (1.4.3.1) à (1.4.3.5) ci-dessous.

(1.4.3.1) i_* admet des adjoints à gauche et à droite exacts. On les note i^* et $i^!$.

(1.4.3.2) $j^!$ admet des adjoints à gauche et à droite exacts. On les note $j_!$ et j^* .

(1.4.3.3) On a $j^* i_* = 0$. Par adjonction, on a donc aussi $i^* j_! = 0$ et $i^! j_* = 0$ et, pour A dans \mathcal{D}_F et B dans \mathcal{D}_U ,

$$\text{Hom}(j_! B, i_* A) = 0 \text{ et } \text{Hom}(i_* A, j_* B) = 0 .$$

(1.4.3.4). Quel que soit K dans \mathcal{D} , il existe $d : i_* i^* K \rightarrow j_! j^* K[1]$ (resp. $\bar{d} : j_* j^* K \rightarrow i_* i^! K[1]$), unique d'après (1.4.3.3) et 1.1.10, tel que le triangle

$$j_! j^* K \rightarrow K \rightarrow i_* i^* K \xrightarrow{d}$$

(resp. $i_* i^! K \rightarrow K \rightarrow j_* j^* K \xrightarrow{\bar{d}}$)

soit distingué.

(1.4.3.5) i_* , $j_!$ et j^* sont pleinement fidèles : les morphismes d'adjonction $i^* i_* \rightarrow \text{Id} \rightarrow i^! i_*$ et $j^* j_* \rightarrow \text{Id} \rightarrow j^* j_!$ sont des isomorphismes.

Ce formalisme est autodual, la dualité échangeant $j_!$ et j_* , ainsi que i^* et $i^!$.

1.4.4. Soit T une catégorie triangulée, munie de deux sous-catégories strictement pleines stables par les translations $X \mapsto X[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$), U et V . On suppose que pour U dans U et V dans V on a $\text{Hom}(U, V) = 0$, et que tout X dans T figure dans un triangle distingué (U, X, V) avec U dans U et V dans V ; (U, V) est alors une t -structure sur T . D'après 1.3.4, V est l'orthogonal à droite de U et U l'orthogonal à gauche de V . En particulier, U et V sont des sous-catégories épaisses ([10]6.2 p.24). Les hypothèses (i) (ii) de [10] 6.4. p.25 sont vérifiées et d'après [10]p.23-26, la projection de T sur T/U a un adjoint à droite pleinement fidèle, d'image V' , et celle de T sur T/V a un adjoint à gauche pleinement fidèle, d'image U' . En d'autres termes, l'inclusion u (resp. v) de U (resp. V) dans T a un adjoint à droite (resp. à gauche) u' (resp. v') et les suites $0 \rightarrow U \xrightarrow{u} T \xrightarrow{v'} V \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow V \xrightarrow{v} T \xrightarrow{u'} U \rightarrow 0$ sont "exactes" en ce que v' (resp. u') identifie V (resp. U) au quotient de T par la sous-catégorie épaisse U (resp. V).

Faisons $T = \mathcal{D}$, et prenons pour (U, V) les paires de sous-catégories $(i_* \mathcal{D}_F, j_* \mathcal{D}_U)$ et $(j_! \mathcal{D}_U, i_* \mathcal{D}_F)$. On obtient la

Proposition 1.4.5. Les suites

$$\begin{aligned} 0 &\leftarrow \mathcal{D}_F \xleftarrow{i^*} \mathcal{D} \xleftarrow{j_!} \mathcal{D}_U \leftarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \mathcal{D}_F \xrightarrow{i_*} \mathcal{D} \xrightarrow{j^*} \mathcal{D}_U \rightarrow 0 \\ 0 &\leftarrow \mathcal{D}_F \xleftarrow{i^!} \mathcal{D} \xleftarrow{j_*} \mathcal{D}_U \leftarrow 0 \end{aligned}$$

sont "exactes" au sens ci-dessus.

1.4.6. a) Le foncteur i_* étant pleinement fidèle, le composé des morphismes d'adjonction $i_* i^! \rightarrow \text{Id} \rightarrow i_* i^*$ est le i_* d'un unique morphisme de foncteurs

$$(1.4.6.1) \quad i^! \longrightarrow i^* .$$

Quand on l'applique à i_*X , et qu'on identifie $i^!i_*X$ et i^*i_*X à X , on obtient l'automorphisme identique de X .

b) Le foncteur j^* étant un foncteur de passage au quotient (il identifie \mathcal{D}_U à une catégorie déduite de \mathcal{D} par calcul de fractions), le composé des morphismes d'adjonction $j_!j^* \rightarrow \text{Id} \rightarrow j_*j^*$ provient d'un unique morphisme de foncteurs

$$(1.4.6.2) \quad j_! \longrightarrow j_*$$

Si on identifie $j^*j_!$ et j^*j_* en foncteur identique, le j^* de (1.4.6.2) est l'automorphisme identique du foncteur identique.

c) Pour X dans \mathcal{D}_U , le cône sur $j_!X \rightarrow j_*X$ est donc annulé par j^* : il est dans $i_*\mathcal{D}_F$. D'après (1.4.3.3) et 1.1.10, le triangle distingué de base $j_!X \rightarrow j_*X$ est unique à isomorphisme unique près - d'où un foncteur $j_*/j_! : \mathcal{D}_U \rightarrow \mathcal{D}_F$, donnant lieu à un triangle distingué fonctoriel

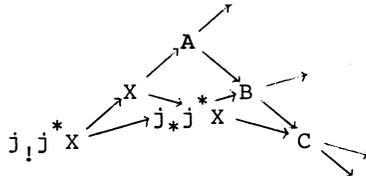
$$(1.4.6.3) \quad (j_!, j_*, i_*(j_*/j_!)).$$

La construction duale fournirait un foncteur $T : \mathcal{D}_U \rightarrow \mathcal{D}_F$, caractérisé par un triangle distingué fonctoriel $(i_*T, j_!, j_*)$. Un triangle de ce type est déduit de (1.4.6.3) par rotation, d'où un isomorphisme $T = (j_*/j_!)[-1]$, tel que le morphisme $i_*T \rightarrow j_!$ soit le $[-1]$ du morphisme de degré 1 de (1.4.6.3): les foncteurs $(j_*/j_!)$ et $(j_*/j_!)[-1]$ se déduisent l'un de l'autre par dualité.

Appliquant à (1.4.6.3) les foncteurs i^* et $i^!$, et utilisant que $i^*j_! = i^!j_* = 0$, on obtient des isomorphismes

$$(1.4.6.4) \quad i^*j_* \xrightarrow{\sim} j_*/j_! \xrightarrow{\sim} i^!j_![1] .$$

1.4.7. Soit X dans \mathcal{D} , et appliquons TR 4 aux morphismes d'adjonction $j_!j^*X \rightarrow X \rightarrow j_*j^*X$. Montrons que l'octaèdre obtenu



est unique à isomorphisme unique près, et fonctoriel en X .

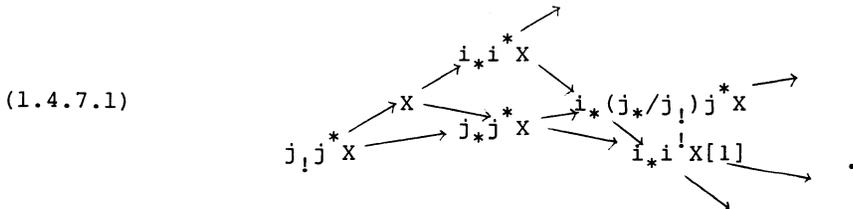
(a) D'après (1.4.3.3), (1.4.3.4) et 1.1.10, il existe un unique isomorphisme $A = i_*i^*X$, qui identifie $X \rightarrow A$ à la flèche d'adjonction. Il

identifie $(j_!j^*X, X, A)$ au triangle distingué $(j_!j^*X, X, i_*i^*X)$ de (1.4.3.4).

(b) Le même argument, appliqué à j_*j^*X , qui a le même j^* que X , identifie B à $i_*i^*j_*j^*X = i_*(j_*/j_!)j^*X$ (1.4.6.4), $j_*j^*X \rightarrow B$ étant la flèche d'adjonction de (i^*, i_*) . D'après 1.1.9, un unique morphisme $A \rightarrow B$ rend commutatif le losange supérieur de l'octaèdre. Le morphisme $A \rightarrow B$, i.e. $i_*i^*X \rightarrow i_*i^*j_*j^*X$, est donc celui déduit de $X \rightarrow j_*j^*X$ par functorialité.

(c) Dualelement, il existe un unique isomorphisme de C avec $i_*i^!X[1]$, identifiant la flèche de degré 1 de (X, j_*j^*X, C) au morphisme d'adjonction $i_*i^!X \rightarrow X$: le triangle (X, j_*j^*X, C) se déduit du triangle (1.4.3.4) $(i_*i^!X, X, j_*j^*X)$ par rotation (TR 2), en changeant le signe de $j_*j^*X \xrightarrow{(1)} i_*i^!X$. Le morphisme $B \rightarrow C$ est l'unique qui rende commutatif le carré $(B, C, j_!j^*X, X)$. Via l'isomorphisme (1.4.6.4) de $j_*/j_!$ avec $i^!j_![1]$, c'est le morphisme $i_*(j_*/j_!)j^*X = i_*i^!j_!j^*X[1] \rightarrow i_*i^!X[1]$ déduit de $j_!j^*X \rightarrow X$ par functorialité.

(d) Ceci détermine tous les sommets, et toutes les flèches de l'octaèdre ($C \xrightarrow{(1)} A$ est le composé $C \xrightarrow{(1)} X \rightarrow A$), et prouve sa functorialité. Si on remplace A, B, C par leurs valeurs, il s'écrit



Le foncteur i_* étant pleinement fidèle, le triangle distingué $(i_*i^*X, i_*(j_*/j_!)j^*X, i_*i^!X[1])$ est le i_* d'un triangle, automatiquement distingué (1.3.19), $(i^*X, (j_*/j_!)j^*X, i^!X[1])$. Le i_* de la flèche d de degré 1 de ce triangle est le composé $i_*i^!X[1] \xrightarrow{(1)} X \rightarrow i_*i^*X$, de sorte que d est (1.4.6.1) pour $X[1]$ (= le transformé par $[1]$ de (1.4.6.1) pour X). Faisant tourner le triangle (TR 2), avec changement de signe de la nouvelle flèche de degré 1 et effaçant i_* (1.3.19), on obtient un triangle distingué functoriel

(1.4.7.2) $(i^!, i^*, (j_*/j_!)j^*)$

de base (1.4.6.1). Dans le cadre 1.4.1, 1.4.2 ce triangle provient de ce que pour tout faisceau flasque F , la suite

$$0 \rightarrow i^!F \rightarrow i^*F \rightarrow i^*j_*j^*F \rightarrow 0$$

est exacte.

Remarque 1.4.8. D'après [10] §2, spécialement p.23-27, les axiomes (1.4.3.1) à (1.4.3.5) équivalent à : " i_* identifie \mathcal{D}_F à une sous-catégorie épaisse de \mathcal{D} , j^* identifie \mathcal{D}_U à $\mathcal{D}/\mathcal{D}_F$, et j^* admet des adjoints à gauche et à droite".

1.4.9. Supposons vérifiées les hypothèses de 1.4.3. et soient

$(\mathcal{D}_U^{\leq 0}, \mathcal{D}_U^{\geq 0})$ une t-structure sur \mathcal{D}_U , et $(\mathcal{D}_F^{\leq 0}, \mathcal{D}_F^{\geq 0})$ une t-structure sur \mathcal{D}_F .

Définissons

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} \mid j^* K \in \mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i^* K \in \mathcal{D}_F^{\leq 0}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} \mid j^* K \in \mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i^* K \in \mathcal{D}_F^{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.4.10. Avec les hypothèses et notations précédentes, $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D} .

On dira qu'elle est déduite de celles de \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F par recollement.

Vérifions les axiomes 1.3.1 (i) (ii) (iii).

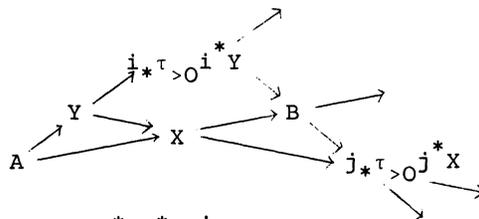
Axiome (i). Soient X dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et Y dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$. Le premier triangle (1.4.3.4) pour X fournit une suite exacte

$$\text{Hom}(i_* i^* X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(j_! j^* X, Y) .$$

On a $\text{Hom}(i_* i^* X, Y) = \text{Hom}(i^* X, i^! Y) = 0$, par 1.3.1 (i) pour \mathcal{D}_F , et $\text{Hom}(j_! j^* X, Y) = \text{Hom}(j^* X, j^* Y) = 0$, par 1.3.1 (i) pour \mathcal{D}_U . L'assertion en résulte.

Axiome (ii). Résulte trivialement de 1.3.1 (ii) pour \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F .

Axiome (iii). Soit X dans \mathcal{D} . Choisissons Y , puis A , donnant lieu à des triangles distingués $(Y, X, j_* \tau_{>0} j^* X)$ et $(A, Y, i_* \tau_{>0} i^* Y)$, et appliquons TR 4 :



Appliquons les foncteurs $j^*, i^*, i^!$ à des triangles distingués de cet octaèdre, selon le schéma suivant, en tenant compte de (1.4.3.3) à (1.4.3.5) :

$$\begin{aligned} j^*(i_* \tau_{>0} i^* Y, B, j_* \tau_{>0} j^* X) &= (0, j^* B, \tau_{>0} j^* X) & \text{d'où } j^* B &\xrightarrow{\sim} \tau_{>0} j^* X , \\ j^*(A, X, B) &= (j^* A, j^* X, \tau_{>0} j^* X) & \text{d'où } j^* A &\simeq \tau_{\leq 0} j^* X , \\ i^*(A, Y, i_* \tau_{>0} i^* Y) &= (i^* A, i^* Y, \tau_{>0} i^* Y) & \text{d'où } i^* A &\simeq \tau_{\leq 0} i^* Y , \end{aligned}$$

$$i^!(i_{*\tau_{>0}}i^*Y, B, j_{*\tau_{>0}}j^*X) = (\tau_{>0}i^*Y, i^!B, 0) \quad \text{d'où } \tau_{>0}i^*Y \xrightarrow{\sim} i^!B .$$

On a donc A dans $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et B dans $\mathcal{D}^{\geq 1}$, et (A, X, B) vérifie (1.3.1) (iii).

Remarque 1.4.11. Pour que la t-structure obtenue sur \mathcal{D} soit non dégénérée, il faut et il suffit que celles données sur \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F le soient.

Nous n'aurons pas à utiliser, dans la suite de ces notes, la réciproque suivante à 1.4.10.

Proposition 1.4.12. Sous les hypothèses et avec les notations de 1.4.3., soit $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ une t-structure sur \mathcal{D} . Les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) $j_!j^*$ est t-exact à droite ;
- (i') j_*j^* est t-exact à gauche ;
- (ii) la t-structure de \mathcal{D} s'obtient par recollement.

L'équivalence (i) \Leftrightarrow (i') résulte de 1.3.17(iii), et (i) (i') équivalent à l'axiome 1.3.1(i) pour $(j^*\mathcal{D}^{\leq 0}, j^*\mathcal{D}^{\geq 0})$. Les triangles distingués $(j_!j^*, \text{Id}, i_*i^!)$ et $(i_*i^!, \text{Id}, j_*j^*)$ montrent respectivement que (i) et (i') impliquent que i_*i^* est t-exact à droite et $i_*i^!$ t-exact à gauche - conditions d'ailleurs équivalentes par 1.3.17 (iii), et signifiant que $(i^*\mathcal{D}^{\leq 0}, i^!\mathcal{D}^{\geq 0})$ vérifie l'axiome 1.3.1 (i).

Il est clair que (ii) \Rightarrow (i), (i') et que les t-structures sur \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F dont celle de \mathcal{D} est le recollement sont $(j^*\mathcal{D}^{\leq 0}, j^*\mathcal{D}^{\geq 0})$, sur \mathcal{D}_U , et celle induite par celle de \mathcal{D} , sur \mathcal{D}_F : $(\mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}^{\geq 0}) = (i^*\mathcal{D}^{\leq 0}, i^!\mathcal{D}^{\geq 0})$. Réciproquement, si (i) (i') sont vérifiées, on vérifie successivement que

(a) $(j^*\mathcal{D}^{\leq 0}, j^*\mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D}_U : 1.3.1 (i) a déjà été vérifié, 1.3.1 (ii) est clair, et 1.3.1 (iii) résulte de ce que j^* est essentiellement surjectif.

(b) $(i^*\mathcal{D}^{\leq 0}, i^!\mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur \mathcal{D}_F : 1.3.1(i) a déjà été vérifié. Seul 1.3.1 (iii) est non trivial : pour X dans \mathcal{D}_F , la t-exactitude de j^* montre que $j^*\tau_{\leq 0}i_*X = \tau_{\leq 0}j^*i_*X = 0$, et que de même $j^*\tau_{>0}i_*X = 0$. Les tronqués $\tau_{\leq 0}i_*X$ et $\tau_{>0}i_*X$ sont donc dans $i_*\mathcal{D}_F$: ils fournissent un triangle $(i^*\tau_{\leq 0}i_*X, X, i^*\tau_{>0}i_*X)$ qui vérifie 1.3.1. (iii).

(c) Le foncteur identique de \mathcal{D} , muni de sa t-structure, dans \mathcal{D} , muni

de la t-structure recollée de $(j^* \mathcal{D}^{\leq 0}, j^* \mathcal{D}^{\geq 0})$ et $(i^* \mathcal{D}^{\leq 0}, i^* \mathcal{D}^{\geq 0})$ est t-exact. D'après 1.3.19, la t-structure est donc obtenue par recollement.

1.4.13. Supposons seulement disposer d'une t-structure sur \mathcal{D}_F , et appliquons 1.4.10 à la t-structure dégénérée $(\mathcal{D}_U, 0)$ sur \mathcal{D}_U , et à la t-structure donnée sur \mathcal{D}_F . Les foncteurs $\tau_{\leq p}$ relatifs à la t-structure obtenue sur \mathcal{D} se noteront $\tau_{\leq p}^F$. Le foncteur $\tau_{\leq p}^F$ est adjoint à droite à l'inclusion de la sous-catégorie pleine $\underline{\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} formée des X tels que $i^* X$ soit dans $\mathcal{D}_F^{\leq p}$. La preuve 1.4.10 de l'axiome 1.3.1 (iii) fournit un triangle distingué $(\tau_{\leq p}^F X, X, i_* \tau_{> p} i^* X)$ (avec les notations de 1.4.10, on a $X = Y$). Les H^p successifs, pour cette t-structure, sont donc les $i_* H^p i^* X$.

Dualement, on définit $\tau_{> p}^F$ en termes de la t-structure dégénérée $(0, \mathcal{D}_U)$ sur \mathcal{D}_U ; c'est l'adjoint à gauche de l'inclusion de $(i^!)^{-1}(\mathcal{D}_F^{\geq p})$ dans \mathcal{D} , on dispose d'un triangle distingué $(i_* \tau_{< p} i^! X, X, \tau_{\geq p}^F X)$, et les H^p sont les $i_* H^p i^! X$.

De même, si on suppose seulement disposer d'une t-structure sur \mathcal{D}_U , et qu'on munit \mathcal{D}_F de la t-structure $(\mathcal{D}_F, 0)$ (resp. $(0, \mathcal{D}_F)$), on définit sur \mathcal{D} une t-structure pour laquelle les foncteurs $\tau_{\leq p}$ (resp. $\tau_{\geq p}$), notés $\tau_{\leq p}^U$ (resp. $\tau_{\geq p}^U$), donnent lieu à des triangles distingués $(\tau_{\leq p}^U X, X, j_* \tau_{> p} j^* X)$ (resp. $(j_! \tau_{< p} j^* X, X, \tau_{\geq p}^U X)$) et pour laquelle les $H^p X$ sont les $j_* H^p j^* X$ (resp. $j_! H^p j^* X$).

La preuve 1.4.10 de l'axiome (iii) montre que $\tau_{\leq 0} = \tau_{\leq 0}^F \tau_{\leq 0}^U$. Translatant et dualisant, on obtient

$$(1.4.13.1) \quad \tau_{\leq p} = \tau_{\leq p}^F \tau_{\leq p}^U \quad \text{et} \quad \tau_{\geq p} = \tau_{\geq p}^F \tau_{\geq p}^U .$$

Dans la situation 1.4.1 et pour la t-structure naturelle de $D^+(F, 0)$, le foncteur $\tau_{\leq p}^F$ se déduit du foncteur de la catégorie des complexes de faisceaux dans elle-même qui à un complexe K associe le sous-complexe qui coïncide avec K sur U , et avec le sous-complexe $\tau_{\leq p} K(1.3.2)$ sur F .

Appelons prolongement d'un objet Y de \mathcal{D}_U un objet X de \mathcal{D} , muni d'un isomorphisme $j^* X \simeq Y$. Un tel isomorphisme fournit par adjonction des morphismes $j_! Y \rightarrow X \rightarrow j_* Y$. Si un prolongement X est isomorphe en tant que prolongement, à $\tau_{\geq p}^F j_! Y$ (resp. $\tau_{\leq p}^F j_* Y$), l'isomorphisme est unique, et on dira simplement que $X = \tau_{\geq p}^F j_! Y$ (resp. $\tau_{\leq p}^F j_* Y$).

Proposition 1.4.14. Soient \mathcal{D}_U et p un entier. Il existe, à isomorphisme unique près, un et un seul prolongement X de Y tel que i^*X soit dans $\mathcal{D}_F^{\leq p-1}$ et $i^!X$ dans $\mathcal{D}_F^{\geq p+1}$. C'est $\tau_{\leq p-1}^F j_* Y$, et $\tau_{\leq p-1}^F j_* Y = \tau_{> p+1}^F j_! Y$.

Soit X un prolongement de Y . Le triangle distingué $(i^*X, (j_*/j_!)Y, i^!X[1])$ dont (1.4.7.2) est déduit par rotation montre que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) i^*X est dans $\mathcal{D}_F^{\leq p-1}$ et $i^!X$ dans $\mathcal{D}_F^{\geq p+1}$, (b) $i^!X[1]$ est le $\tau_{> p}$ de $(j_*/j_!)Y = i^*j_*Y$, (b') i^*X est le $\tau_{\leq p-1}$ de $(j_*/j_!)Y$. Le triangle distingué $(X, j_*Y, i_*i^!X[1])$ de (1.4.7.1) montre que (b) équivaut à ce que X soit $\tau_{\leq p-1}^F j_*Y$. Dualement, (b') équivaut à ce que X soit $\tau_{> p+1}^F j_!Y$.

Remarque 1.4.14.1. Soit \mathcal{D}_m la sous-catégorie pleine de \mathcal{D} formée de des objets X vérifiant les conditions i^*X dans $\mathcal{D}_F^{\leq p-1}$ et $i^!X$ dans $\mathcal{D}_F^{\geq p+1}$ de 1.4.14. Le foncteur j^* induit une équivalence de catégories $\mathcal{D}_m \rightarrow \mathcal{D}_U$. Il admet en effet $\tau_{\leq p-1}^F j_*$ pour quasi-inverse. Nous noterons parfois $P_{j_!}$ ce quasi-inverse.

1.4.15. Soient \mathcal{C} , \mathcal{C}_U et \mathcal{C}_F les coeurs des t-catégories \mathcal{D} , \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F ; \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F sont munies des t-structures données, et \mathcal{D} de la t-structure 1.4.10. Notons ε l'inclusion de \mathcal{C} , \mathcal{C}_U ou \mathcal{C}_F dans \mathcal{D} , \mathcal{D}_U ou \mathcal{D}_F , et pour T l'un des foncteurs $j_!, j^*, j_*, i^*, i_*, i^!$, notons P_T le foncteur $H^0.T \circ \varepsilon$. Par définition de la t-structure de \mathcal{D} , j^* est t-exact, i^* est t-exact à droite, et $i^!$ est t-exact à gauche. Appliquant 1.3.17 (iii), on obtient

Proposition 1.4.16. (i) Les foncteurs $j_!$ et i^* (resp. j^* et i_* , resp. j_* et $i^!$) sont t-exacts à droite (resp. t-exacts, resp. t-exacts à gauche).

(ii) $(P_{j_!}, P_{j^*}, P_{j_*})$ et $(P_{i^*}, P_{i_*}, P_{i^!})$ forment deux suites de 3 foncteurs adjoints.

Proposition 1.4.17. (i) Les composés $P_{j^*} \circ P_{i_*}$, $P_{i^*} \circ P_{j_!}$, $P_{i^!} \circ P_{j_*}$ sont nuls ; pour A dans \mathcal{C}_F et B dans \mathcal{C}_U ,

$$\text{Hom}(P_{j_!} B, P_{i_*} A) = \text{Hom}(P_{i_*} A, P_{j_*} B) = 0 .$$

(ii) Quel que soit A dans \mathcal{C} , les suites

$$P_{j_!} P_{j^*} A \rightarrow A \rightarrow P_{i_*} P_{i^*} A \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow P_{i_*} P_{i^!} A \rightarrow A \rightarrow P_{j_*} P_{j^*} A$$

sont exactes.

(iii) $P_{i_*}, P_{j_!}$ et P_{j^*} sont pleinement fidèles : les morphismes d'adjonction $P_{i^*}P_{i_*} \rightarrow \text{Id} \rightarrow P_{i^!}P_{i_*}$ et $P_{j^*}P_{j_*} \rightarrow \text{Id} \rightarrow P_{j^*}P_{j_!}$ sont des isomorphismes.

Ces assertions résultent respectivement de (1.4.3.3 , 4 et 5) . La vérification est laissée au lecteur (utiliser 1.3.17 (iv)).

Amplification 1.4.17.1. D'après (i) ($P_{j^*}P_{i_*} = 0$) et l'une quelconque des suites exactes (ii), pour que X dans \mathcal{C} soit dans l'image essentielle $\bar{\mathcal{C}}_F$ de P_{i_*} , il faut et il suffit que $P_{j^*}X = 0$. Le foncteur P_{j^*} étant exact , cette image essentielle est une sous-catégorie épaisse (i.e. stable par extensions et sous-quotients) de \mathcal{C} . Si on identifie par le foncteur pleinement fidèle $P_{i_*} : \mathcal{C}_F$ à la sous-catégorie $\bar{\mathcal{C}}_F$ de \mathcal{C} , les adjonctions (P_{i^*}, P_{i_*}) et $(P_{i_*}, P_{i^!})$ ((1.4.16)(ii)) montrent que pour X dans \mathcal{C} , $P_{i^*}X$ est le plus grand quotient de X qui soit dans \mathcal{C}_F , et $P_{i^!}X$ est le plus grand sous-objet de X qui soit dans \mathcal{C}_F .

Proposition 1.4.18. Le foncteur P_{j^*} identifie \mathcal{C}_U au quotient de \mathcal{C} par la sous-catégorie épaisse \mathcal{C}_F (ou, plus correctement, $\bar{\mathcal{C}}_F$; cf.1.4.17.1).

Soit $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{C}_F$ le foncteur de passage au quotient. Le foncteur exact P_{j^*} admet une factorisation $T \circ Q$, et T est fidèle : si f dans $\mathcal{C}/\mathcal{C}_F$ vient de f_1 dans \mathcal{C} , et que f est tué par T , f_1 est tué par P_{j^*} , i.e. $\text{Im}(f_1)$ est dans l'image de \mathcal{C}_F , et f_1 est tué par Q . Puisque $\text{Id} \xrightarrow{\sim} P_{j^*}P_{j_!} = T \circ Q \circ P_{j_!}$, T est surjectif sur les classes d'isomorphie d'objets. Il reste à vérifier que T est pleinement fidèle, donc une équivalence de catégories.

Lemme 1.4.19. Pour tout A dans \mathcal{C} , les suites

$$0 \rightarrow P_{i_*}H^{-1}i^*A \rightarrow P_{j_!}P_{j^*}A \rightarrow A \rightarrow P_{i_*}P_{i^*}A \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow P_{i_*}P_{i^!}A \rightarrow A \rightarrow P_{j_*}P_{j^*}A \rightarrow P_{i_*}H^1i^!A \rightarrow 0$$

sont exactes.

Résulte de (1.4.3.4) et 1.4.16 (i).

Achevons la preuve de 1.4.18. D'après 1.4.19, le noyau et le conoyau de $P_{j_!}P_{j^*}A \rightarrow A$ sont dans l'image de P_{i_*} . Tout objet de $\mathcal{C}/P_{i_*}\mathcal{C}_F$ a donc un représentant dans l'image de $P_{j_!}$. Pour $P_{j_!}X$ et $P_{j_!}Y$ dans cette image,

$$T : \text{Hom}(Q^{P_{j_!}}X, Q^{P_{j_!}}Y) \rightarrow \text{Hom}(TQ^{P_{j_!}}X, TQ^{P_{j_!}}Y) = \text{Hom}(X, Y)$$

admet pour section $Q^{P_{j_!}}$, donc est surjective. Ceci achève la preuve.

1.4.20. Mise en garde. Sous les hypothèses de 1.4.1, lorsque l'on munit $D^+(U, \mathcal{O})$ et $D^+(F, \mathcal{O})$ de leur t -structure naturelle (1.3.2 (i)), la t -structure obtenue sur $D^+(X, \mathcal{O})$ est la t -structure naturelle, et les catégories abéliennes C , C_U et C_F sont $M(X, \mathcal{O})$, $M(U, \mathcal{O})$ et $M(F, \mathcal{O})$. On retrouve la situation 1.4.1.

En général, toutefois, $P_{j_!}$ est exact à droite, mais non exact, P_{i^*} est exact à gauche, mais non exact, et la première suite de 1.4.17(ii)

n'est pas exacte à gauche. Le formalisme 1.4.3. étant auto-dual, seules peuvent être universellement vraies les formules vraies dans le cadre 1.4.1 et dont le dual l'est aussi.

1.4.21. Reprenons les arguments 1.4.6 .

a) Le foncteur P_{i_*} étant pleinement fidèle, le composé des morphismes d'adjonction $P_{i_*} P_{i^!} \rightarrow \text{Id} \rightarrow P_{i_*} P_{i^*}$ est le P_{i_*} d'un unique morphisme de foncteurs

$$(1.4.21.1) \quad P_{i^!} \rightarrow P_{i^*} .$$

Les diagrammes 1.3.18 (ii) pour (i^*, i_*) et $(i_*, i^!)$, et la t -exactitude de i_* fournissent pour A dans C un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} P_{i_*} P_{i^!} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P_{i_*} P_{i^*} A \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ i_* P_{i^!} A & & & & i_* P_{i^*} A \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ i_* i^! A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & i_* i^* A \end{array}$$

d'où résulte que pour A dans C , le morphisme (1.4.21.1) : $P_{i^!} A \rightarrow P_{i^*} A$ est le composé

$$(1.4.21.2) \quad P_{i^!} A \rightarrow i^! A \xrightarrow{(1.4.6.1)} i^* A \rightarrow P_{i^*} A .$$

Quand on applique (1.4.21.1) à $i_* A$ (A dans C_F), on obtient l'automorphisme identique de A .

b) Le foncteur P_{j^*} étant un foncteur de passage au quotient (1.4.18), le composé des morphismes d'adjonction $P_{j_!} P_{j^*} \rightarrow \text{Id} \rightarrow T^{P_{j_*}} P_{j^*}$ provient d'un unique morphisme de foncteurs

$$(1.4.21.3) \quad P_{j_!} \longrightarrow P_{j^*} .$$

Les diagrammes 1.3.18(ii) pour (j^*, j_*) et $(j_!, j^*)$, et la t -exactitude de j^* , fournissent pour A dans C un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 Pj_! Pj^* A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Pj_* Pj^* A \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 Pj_! j^* A & & & & Pj_* j^* A \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 j_! j^* A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & j_* j^* A
 \end{array}$$

d'où résulte que pour B dans C_U , le morphisme (1.4.6.2) de $j_! B$ dans $j_* B$ est le composé

$$(1.4.21.4) \quad j_! B \longrightarrow \tau_{\geq 0} j_! B = Pj_! B \xrightarrow{(1.4.21.3)} Pj_* B = \tau_{\leq 0} j_* B \longrightarrow j_* B .$$

Quand on applique Pj^* à (1.4.21.3), on trouve l'automorphisme identique du foncteur identique. En particulier, pour B dans C_U , le noyau et le conoyau de (1.4.21.3) : $Pj_! B \rightarrow Pj_* B$ sont dans $Pi_* C_F$.

Définition 1.4.22. Le foncteur $j_{!*} : C_U \rightarrow C$ est le foncteur qui à B dans C_U attache l'image de $Pj_! B$ dans $Pj_* B$.

Pour B dans C_U , (1.4.21.4) fournit la factorisation suivante du morphisme (1.4.6.2) de $j_! B$ dans $j_* B$:

$$(1.4.22.1) \quad j_! B \longrightarrow Pj_! B \longrightarrow j_{!*} B \longrightarrow Pj_* B \longrightarrow j_* B .$$

Proposition 1.4.23. Pour B dans C_U , on a

$$\begin{aligned}
 Pj_! B &= \tau_{\geq 0}^F j_! B = \tau_{\leq -2}^F j_* B \\
 j_{!*} B &= \tau_{\geq 1}^F j_! B = \tau_{\leq -1}^F j_* B \\
 Pj_* B &= \tau_{\geq 2}^F j_! B = \tau_{\leq 0}^F j_* B .
 \end{aligned}$$

Plus précisément, $Pj_! B$, muni de l'application $j_! B \rightarrow Pj_! B$, est $\tau_{\geq 0}^F j_! B$, et ainsi de suite.

Puisque $j^* j_! B$ est dans C_U , $j_! B$ est son propre $\tau_{\geq 0}^U$. D'après (1.4.13.1), on a donc $Pj_! B = \tau_{\geq 0} j_! B = \tau_{\geq 0}^F j_! B$; d'après 1.4.14, $\tau_{\geq 0}^F j_! B = \tau_{\leq -2}^F j_* B$. De même, $Pj_* B = \tau_{\geq 2}^F j_! B = \tau_{\leq 0}^F j_* B$.

La détermination 1.4.13 des H^p pour la t-structure définissant les $\tau_{\geq p}^F$ fournit un triangle distingué $(i_* H^0 i^! j_! B, \tau_{\geq 0}^F j_! B, \tau_{\geq 1}^F j_! B)$. Il montre que $\tau_{\geq 1}^F j_! B$ est dans $\mathcal{D}^{[-1, 0]}$. Un argument dual fournit un triangle distingué $(\tau_{\leq -1}^F j_* B, \tau_{\leq 0}^F j_* B, i_* H^0 i^* B)$ qui montre que $\tau_{\leq -1}^F j_* B$ est dans $\mathcal{D}^{[0, 1]}$. Appliquant 1.4.14, on trouve que $\tau_{\geq 1}^F j_! B = \tau_{\leq -1}^F j_* B$ est dans C , et les triangles ci-dessus deviennent des suites exactes courtes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow i_* H^0 i^! j_{!} B \longrightarrow P j_{!} B \longrightarrow \tau_{\geq 1}^F j_{!} B \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \tau_{\leq -1}^F j_{*} B \longrightarrow P j_{*} B \longrightarrow i_* H^0 i^* j_{*} B \longrightarrow 0 \end{aligned} .$$

Elles montrent que $\tau_{\geq 1}^F j_{!} B = \tau_{\leq -1}^F j_{*} B$ est bien l'image $j_{!*} B$ de $P j_{!} B$ dans $P j_{*} B$.

Corollaire 1.4.24. Pour B dans C_U , $j_{!*} B$ est l'unique prolongement de B dans \mathcal{D} tel que $i^* X$ soit dans $\mathcal{D}_F^{\leq -1}$ et que $i^! X$ soit dans $\mathcal{D}_F^{\geq 1}$.

On applique 1.4.14. De même, $P j_{!} B$ (resp. $P j_{*} B$) est l'unique prolongement X tel que $i^* X$ soit dans $\mathcal{D}_F^{\leq -2}$ (resp. $\mathcal{D}_F^{\leq 0}$) et que $i^! X$ soit dans $\mathcal{D}_F^{\geq 0}$ (resp. $\mathcal{D}_F^{\geq 2}$) .

Corollaire 1.4.25. Pour B dans C_U , $j_{!*} B$ est l'unique prolongement X de B dans C sans sous-objet ou quotient non-trivial qui soit dans l'image essentielle \overline{C}_F de C_F par i_* .

Par définition, $j_{!*} B$ est dans $C \subset \mathcal{D}$; pour X dans C un prolongement de B , on a $i^* X \in \mathcal{D}_F^{\leq 0}$, et $i^* X \in \mathcal{D}_F^{\leq -1}$ si et seulement si $P i^* X = 0$. Dualelement, $i^! X$ est dans $\mathcal{D}_F^{\geq 1}$ si et seulement si $P i^! X = 0$. Identifions C_F à \overline{C}_F par i_* . Puisque $P i^* X$ (resp. $P i^! X$) est le plus grand quotient (resp. sous-objet) de X qui soit dans C_F (1.4.17.1) , la caractérisation 1.4.25 de $j_{!*} B$ reformule 1.4.24.

Proposition 1.4.26. Les objets simples de C sont les $P i_* S$, pour S simple dans C_F , et les $j_{!*} S$, pour S simple dans C_U .

Puisque l'image essentielle \overline{C}_F de C_F par $P i_*$ est une sous-catégorie épaisse de C , pour que S dans C soit simple, il faut et il suffit que soit (a) S est dans \overline{C}_F , et simple dans \overline{C}_F ; (b) S a une image simple dans C/\overline{C}_F , et aucun sous-objet ou quotient non-trivial dans \overline{C}_F . Le cas (a) donne les $P i_*$ d'objets simples de C_F . D'après 1.4.25, le cas (b) donne les $j_{!*}$ d'objets simples de C_U .

2. FAISCEAUX PERVERS SUR LES ESPACES STRATIFIÉS ET SUR LES SCHÉMAS.

2.1. Espaces stratifiés.

2.1.1. Soient X un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O} , S une partition finie de X en parties localement fermées (appelées strates) et p une fonction $S \rightarrow \mathbf{Z}$ (appelée la perverseité). Par définition de "partition", les strates sont non vides. On suppose que l'adhérence de chaque strate est réunion de strates. Ces conditions peuvent être relaxées : voir 3.2.19.

Rappelons (0.0) que pour $f : X \rightarrow Y$, nous noterons simplement $f_!, f_*, f^!, f^*$ les foncteurs entre catégories dérivées notés d'habitude $Rf_!, Rf_*, Rf^!, Rf^*$ (ou Lf^*). Pour une raison expliquée en 2.1.7., les foncteurs analogues entre catégories de faisceaux se noteront avec \mathcal{O} en exposant à gauche.

Définition 2.1.2. La sous-catégorie $P_{D \leq 0}(X, \mathcal{O})$ (resp. $P_{D > 0}(X, \mathcal{O})$) de $D(X, \mathcal{O})$ est la sous-catégorie formée des complexes K (resp. K dans $D^+(X, \mathcal{O})$) tels que pour chaque strate S , notant i_S l'inclusion de S dans X , on ait $H^{n, i_S^*} K = 0$ pour $n > p(S)$ (resp. $H^{n, i_S^*} K = 0$ pour $n < p(S)$).

L'exactitude des foncteurs $\mathcal{O}_{i_S^*}$ permet de reformuler la définition de $P_{D \leq 0}(X, \mathcal{O})$: pour que K soit dans $P_{D \leq 0}(X, \mathcal{O})$, il faut et il suffit que la restriction de $H^i K$ à S soit nulle pour $i > p(S)$. Les foncteurs $\tau_{\leq a}$ et $\tau_{\geq a}$, relatifs à la t -structure naturelle, envoient donc $P_{D \leq 0}(X, \mathcal{O})$ dans elle-même.

Si les foncteurs $\mathcal{O}_{i_S^!}$ sont de dimension cohomologique finie, le foncteur $i_S^! : D^+(X, \mathcal{O}) \rightarrow D^+(S, \mathcal{O})$ a une extension naturelle $D(X, \mathcal{O}) \rightarrow D(S, \mathcal{O})$, et la condition " $H^{n, i_S^!} K = 0$ pour $n < p(S)$ " a un sens pour K non nécessairement dans $D^+(X, \mathcal{O})$. Toutefois, elle implique que K est dans $D^+(X, \mathcal{O})$. Plus précisément, si $p \geq a$, elle implique que K est dans $D^{\geq a}(X, \mathcal{O})$: vérifions par récurrence descendante sur la strate S - pour l'ordre $S_1 \subset \bar{S}_2$ - que les $H^i K$ sont nuls sur S pour $i < a$. Pour $i < a$, le triangle $(\tau_{< a} K, K, \tau_{\geq a} K)$ et l'exactitude à gauche de $\mathcal{O}_{i_S^!}$ montrent que $H^{i, i_S^!} \tau_{< a} K \rightarrow H^{i, i_S^!} K$. L'hypothèse de récurrence assure que les $H^j \tau_{< a} K$ sont nuls sur les strates $T \neq S$ telles que $S \subset \bar{T}$, donc que S admet un voisinage dans lequel $H^j \tau_{< a} K$ soit à support dans S . Pour $i < a$, on a donc $H^i K|_S = H^{i, i_S^*} \tau_{< a} K = H^{i, i_S^!} \tau_{< a} K = H^{i, i_S^!} K$, et ce dernier groupe est nul par hypothèse.

Sans hypothèse de dimension cohomologique, le même argument s'applique pour K dans $K^+(X,0)$. Si les entiers a et b sont tels que $a \leq p \leq b$, on a

$$(2.1.2.1) \quad D^{\leq a}(X,0) \subset P_D^{\leq 0}(X,0) \subset D^{\leq b}(X,0)$$

et

$$D^{\geq a}(X,0) \supset P_D^{\geq 0}(X,0) \supset D^{\geq b}(X,0) \quad .$$

On notera $P_D^{+,\leq 0}(X,0)$ l'intersection de $D^+(X,0)$ et $P_D^{\leq 0}(X,0)$. De même avec $+$ remplacé par $-$, b et avec 0 remplacé par n .

Proposition 2.1.3. Pour chaque perversité p , $(P_D^{+,\leq 0}(X,0), P_D^{\geq 0}(X,0))$ est une t-structure sur $D^+(X,0)$.

On procède par récurrence sur le nombre N de strates. Si $N = 0$, on a $X = \emptyset$ et l'assertion est claire. Si $N = 1$, on retrouve la t-structure naturelle, translatée de $p(X)$. Pour $N \geq 2$, soit F un fermé propre de X réunion de strates, et U l'ouvert complémentaire. Prendre par exemple pour F une strate fermée. L'hypothèse de récurrence s'applique à F et à U , munis des stratifications induites, et fournit des t-structures sur $D^+(U,0)$ et $D^+(F,0)$. La t-structure voulue sur $D^+(X,0)$ s'en déduit par 1.4.10.

Corollaire 2.1.4. $(P_D^{\leq 0}(X,0), P_D^{\geq 0}(X,0))$ est une t-structure sur $D(X,0)$. Elle induit une t-structure sur $D^*(X,0)$ pour $* = +, -, b$.

Soient a et b deux entiers tels que $a \leq p \leq b$. Dans la preuve, $(X,0)$ sera fixe, et nous l'omettons de la notation. Soient K dans $P_D^{\leq 0}$, L dans $P_D^{\geq 0}$, et vérifions que $\text{Hom}(K,L) = 0$. On a $\text{Hom}(\tau_{\leq a} K, L) = 0$ parce que L est dans $D^{\geq a}$. On a $\text{Hom}(\tau_{> a} K, L) = 0$ parce que $\tau_{> a} K$ est dans $P_D^{+,\leq 0}$: on peut appliquer 2.1.3. On conclut par la suite exacte longue des Hom déduite du triangle distingué $(\tau_{\leq a} K, K, \tau_{> a} K)$. Soit enfin K dans D . D'après 2.1.3., il existe un triangle distingué $(U, \tau_{> a} K, V)$ avec U dans $P_D^{+,\leq 0}$ et V dans $P_D^{\geq 0}$. Appliquant TR 4, on obtient deux triangles distingués $(\tau_{\leq a} K, Y, U)$ et (Y, K, V) . Le premier montre que Y est dans $P_D^{\leq 0}$. Le second vérifie 1.3.1 (iii). L'axiome 1.3.1 (ii) étant trivial, on a obtenu une t-structure sur D . On l'appellera la t-structure de perversité p .

Notons P_τ les foncteurs τ correspondants. Puisque $P_D^{\leq 0} \subset D^{\leq b}$ et $P_D^{\geq 0} \subset D^{\geq a}$, la suite exacte longue de cohomologie (usuelle) du triangle distingué $(P_{\tau_{\leq 0}} K, K, P_{\tau_{> 1}} K)$ montre que $H^i P_{\tau_{\leq 0}} K = H^i K$ pour $i < a$. De même, $H^i P_{\tau_{\leq 0}} K \xrightarrow{\sim} H^i K$ pour $i > b$. De là résulte que $P_{\tau_{\leq 0}}$ et $P_{\tau_{\geq 0}}$

respectent D^* ($*$ = +, -, b).

Définition 2.1.5. La catégorie $M(p, X, 0)$ des faisceaux de 0 -modules p -pervers sur X est la catégorie $P_D^{\leq 0}(X, 0) \cap P_D^{\geq 0}(X, 0)$.

C'est une sous-catégorie abélienne admissible de $D^b(X, 0)$.

Proposition 2.1.6. Soient U une partie localement fermée de X , réunion de strates, et j l'inclusion de U dans X . Pour toute perversité p , les foncteurs $j_! : D(U, 0) \rightarrow D(X, 0)$ et $j^* : D(X, 0) \rightarrow D(U, 0)$ sont t -exact à droite.

La vérification, immédiate, est laissée au lecteur.

D'après 1.3.17 (iii), amplifié par 1.3.18 (i), les adjoints à droite $j^!$ et j_* de $j_!$ et j^* sont donc t -exact à gauche.

2.1.7. Notation. Omettons $(X, 0)$ de la notation. Nous écrirons parfois $D^{\leq p}$ (resp. $D^{\geq p}$) au lieu de $P_D^{\leq 0}$ (resp. $P_D^{\geq 0}$). Pour p de valeur constante a , on a $D^{\leq p} = D^{\leq a}$ (au sens de la t -structure naturelle), et $D^{\geq p} = D^{\geq a}$. Pour tout entier n , on a $D^{\leq p+n} = P_D^{\leq n}$ et $D^{\geq p+n} = P_D^{\geq n}$. Enfin, pour $p \leq q$, on a $D^{\leq p} \subset D^{\leq q}$ et $D^{\geq p} \supset D^{\geq q}$. Ceci généralise (2.1.2.1). De même, on écrira $\tau_{\leq p}$ et $\tau_{\geq p}$ pour $P_{\tau_{\leq 0}}$ et $P_{\tau_{\geq 0}}$, et H^p pour le H^0 au sens de la t -structure de perversité p .

Dans la situation 2.1.6, nous noterons simplement $j_!, j^!, j_*$ et j^* les foncteurs entre catégories dérivées, dérivés des foncteurs de même nom entre catégories de faisceaux. On notera avec p en exposant à gauche ceux qui s'en déduisent par passage aux faisceaux p -pervers. Par exemple, pour A dans $M(p, U, 0)$ on pose ${}^p j_! A = \tau_{\geq p} j_! A = H^p(j_! A)$. D'après 1.3.18 (i), $({}^p j_!, {}^p j^!)$ et $({}^p j^*, {}^p j_*)$ sont deux paires de foncteurs adjoints.

Les foncteurs $j_!, j^!, j_*, j^*$ pour les faisceaux usuels se notent avec 0 en exposant à gauche : ils correspondent à la perversité 0 .

Pour A un faisceau p -pervers sur U , $j_! A$ est dans $D^{\leq p}(X, 0)$ et $j_* A$ dans $D^{\geq p}(X, 0)$. Le morphisme naturel $\alpha : j_! A \rightarrow j_* A$ admet donc une factorisation

$$j_! A \rightarrow {}^p j_! A \xrightarrow{\beta} {}^p j_* A \rightarrow j_* A \quad (\beta = {}^p H^0(\alpha)) .$$

On définit le foncteur ${}^p j_{!*}$, ou simplement $j_{!*}$, par

$$j_{!*} A = \text{Im}({}^p j_! A \rightarrow {}^p j_* A) .$$

Pour A un faisceau p-pervers sur X, on définit un morphisme canonique : $Pj^!A \rightarrow Pj^*A$ comme composé $Pj^!A \rightarrow j^!A \rightarrow j^*A \rightarrow Pj^*A$.

Pour $U \xrightarrow{k} V \xrightarrow{j} X$ des parties localement fermées réunion de strates, les formules de transitivité $(jk)_! = j_!k_!$, $(jk)_* = j_*k_*$, $(jk)^! = k^!j^!$, $(jk)^* = k^*j^*$ fournissent (1.3.17 (iv)) des formules analogues pour les faisceaux p-pervers. Appliquons $Pj_!$, $Pj_{!*}$ et Pj_* aux morphismes $Pk_! \rightarrow Pk_{!*} \leftarrow Pk_*$. La chaîne obtenue

$$P(jk)_! = Pj_!Pk_! \rightarrow Pj_!Pk_{!*} \rightarrow Pj_{!*}Pk_{!*} \leftarrow Pj_*Pk_{!*} \leftarrow Pj_*Pk_* = P(jk)_*$$

fournit un isomorphisme de foncteurs

$$(2.1.7.1) \quad P(jk)_{!*} = Pj_{!*}Pk_{!*} \cdot$$

2.1.8. Amplification. Soient U un ouvert de X, réunion de strates, F le fermé complémentaire, et munissons-les des stratifications et perversités induites. La t-structure 2.1.3 sur $D^+(X, 0)$ se déduit alors de celles de $D^+(U, 0)$ et $D^+(F, 0)$ par procédé de 1.4.10. Le formalisme de 1.4. est donc applicable. Soit i l'inclusion de F dans X, et j celle de U. Les foncteurs désignés d'après 2.1.7 par i ou j, affecté de ! ou de *, en exposant ou en indice, et affectés ou non de p en exposant à gauche - ainsi que $j_{!*}$ - coïncident avec les foncteurs notés de même en 1.4.

Proposition 2.1.9. Pour B dans $M(p, U, 0)$, $j_{!*}B$ est l'unique prolongement P de B dans $D(X, 0)$ tel que, pour chaque strate $S \subset F$, notant s son inclusion dans X, on ait $H^{i_s} P = 0$ pour $i \geq p(S)$ et $H^{i_s} P = 0$ pour $i \leq p(S)$.

Plus précisément, il résulte de (1.4.14.) que si \mathcal{D}' est la sous-catégorie de $D(X, 0)$ formée des K tels que $H^{i_s} K = 0$ pour $i \geq p(s)$ et $H^{i_s} K = 0$ pour $i \leq p(S)$ pour toute strate $s : S \rightarrow F$, j^* induit une équivalence $\mathcal{D}' \rightarrow D(U, 0)$. Sa restriction à $\mathcal{D}' \cap M(p, X, 0)$ est une équivalence $\mathcal{D}' \cap M(p, X, 0) \rightarrow M(p, U, 0)$, d'inverse $j_{!*}$.

On caractérise de façon analogue $Pj_!B$ et Pj_*B (cf. 1.4.23, 1.3.14).

2.1.10. Supposons que la perversité p vérifie la condition suivante :

$$(2.1.10.1) \quad \text{Si } S \subset \bar{T}, \text{ alors } p(S) \geq p(T) \cdot$$

Pour chaque n, la réunion F_n (resp. U_n) des strates S telles que $p(S) \geq n$ (resp. $p(S) \leq n$) est alors fermée (resp. ouverte). Notons j_n l'inclusion de U_{n-1} dans U_n .

Proposition 2.1.11. Avec les hypothèses et notations 2.1.10, soient A un faisceau p-pervers sur U_k , a un entier $\geq k$ tel que $p \leq a$, et j l'inclusion de U_k dans $X = U_a$. On a

$$j_{!*}A = \tau_{\leq a-1}j_{a*} \cdots \tau_{\leq k}j_{k+1*}A .$$

Dans cette proposition, les $\tau_{\leq i}$ sont relatifs à la t-structure naturelle. Appliquant (2.1.7.1), on se ramène à vérifier que $(j_{k+1})_{!*}A = \tau_{\leq k}j_{k+1*}A$. Soit $F = U_{k+1} - U_k$. D'après 1.4.23, on a $(j_{k+1})_{!*}A = P_{\tau_{\leq -1}}^F(j_{k+1})_*A$. Sur F , la fonction p est constante, de valeur $k+1$, et $P_{\tau_{\leq -1}}^F$ n'est donc autre que $\tau_{\leq k}^F$ (pour la t-structure naturelle sur F). Puisque sur U_k on a $p \leq k$, A est dans $D^{\leq k}(U, 0)$ (2.1.2.1) et $\tau_{\leq k}(j_{k+1})_*A \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq k}^F(j_{k+1})_*A$.

2.1.12. Expliquons la relation entre nos notations et celle de M. Goresky et R. Mac Pherson [4], [5].

a) Ils travaillent en cohomologie à coefficients dans un corps R (surtout $R = \mathbb{Q}$, ou \mathbb{C}), i.e. ils prennent pour 0 le faisceau constant de valeur R .

b) Leurs strates sont des variétés topologiques, partout d'une même dimension, et les stratifications vérifient des conditions de trivialité locale le long de chaque strate qui assurent que pour $S \xrightarrow{j} X$ une strate et F un faisceau localement constant de R -espaces vectoriels de dimension finie sur S , les restrictions à chaque strate des $R^i j_* F$ sont encore localement constantes de dimension finie. Pour S, T deux strates avec $S \subset \bar{T} - T$, on a $\dim S < \dim T$.

c) X a une strate ouverte dense U_0 de complément de codimension $\dim U_0 - \dim(X - U_0) \geq 2$.

d) La fonction de perversité ne dépend que de la dimension : on dispose de $\bar{p} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ tel que $p(S) = \bar{p}(\dim S)$. La fonction \bar{p} est supposée décroissante (d'où (2.1.10.1)) et ≥ 0 , avec $p(U_0) = 0$.

Soit j l'inclusion de U_0 dans X . L'objet essentiel est l'objet $j_{!*}(R)$ de $D^b(X, R)$. Si on en donne la description 2.1.11, on est amené à utiliser la fonction p' vérifiant encore $p'(U_0) = 0$ qui à chaque strate $S \neq U_0$ attache l'entier $p(S) - 1$: l'opération $j_{!*}$ consiste, partant du faisceau constant R sur $U = U_0$, à successivement adjoindre à U les strates S de dimension $\dim(U_0) - 2$, $\dim(U_0) - 3$, ... et à chaque fois prendre une image directe, tronquée par $\tau_{\leq p'}(S)$. C'est la fonc-

tion p' qu'ils appellent perversité. Du point de vue adopté ici, cela revient à décrire $P_{j_!}^*$ comme étant $P_{j_*}^*$, et conduit à des décalages dans la description des phénomènes de dualité.

Goresky et Mac Pherson supposent aussi que la fonction \bar{p} ne décroît pas trop vite : $\bar{p}(n) - \bar{p}(n+1) = 0$ ou 1 . Le résultat 2.1.14 ci-dessous montre que cela fournit des indépendances de la stratification.

2.1.13. De 2.1.12, gardons les hypothèses suivantes :

- a) \emptyset est le faisceau constant de valeur R , pour R un anneau noethérien à gauche.
- b) Les strates sont des variétés topologiques partout d'une même dimension. Si une strate S est dans l'adhérence d'une strate T , $\dim S < \dim T$.
- c) Pour $j : S \rightarrow X$ une strate, le foncteur \circlearrowright_{j_*} est de dimension cohomologique finie sur la catégorie des faisceaux de R -modules. Pour F un faisceau localement constant de R -modules de type fini sur S , les $R^i j_* F$ sont encore localement constants de type fini sur chaque strate.

Pour U une réunion localement fermée de strates, notons $D_C(U, R)$ - ou $D_S(U, R)$ s'il faut préciser S - la sous-catégorie triangulée pleine de $D(U, R)$ formée des K constructibles tels que les $H^i K$ soient localement constants de type fini sur chaque strate. On définit de même $D_C^*(U, R)$ ($* = +, -, b$). La condition c) assure que pour $j : U \hookrightarrow V$ avec U et V réunions localement fermées de strates, les foncteurs $j_!$, $j^!$, j_* et j^* respectent ces sous-catégories. En effet : le cas des foncteurs $j_!$ et j^* est trivial. Dans le cas où U est réduit à une strate, le cas de j_* se déduit de la suite spectrale $R^p j_* H^q K \Rightarrow H^{p+q} R j_* K$. Le cas général se traite par récurrence sur le nombre de strates dont U est réunion. Si $k : S \hookrightarrow U$ est l'inclusion d'une strate ouverte dans U , et que L est défini par le triangle distingué $(K, k_* k^* K, L)$, L est constructible car $k_* k^* K$ l'est, et à support dans $U' = U - S$. L'hypothèse de récurrence s'applique à l'inclusion de U' dans X , et $j_* L$ est donc constructible. On déduit du triangle $(j_* K, (j k)_* k^* K, j_* L)$ que $j_* K$ l'est. Enfin, le cas de $j^!$ se ramène à celui où j est un plongement fermé et se déduit de celui de k_* , pour k l'inclusion de l'ouvert complémentaire : utiliser le triangle distingué $(j_! j^! K, K, k_* k^* K)$.

Pour $F \subset U$ fermé réunion de strates $\tau_{\leq a}^F$ respecte trivialement $D_C(U, R)$. La preuve de 1.4.10 montre alors que pour chaque perversité p , $\tau_{\leq p}$ et $\tau_{\geq p}$ respectent $D_C(X, R)$. Les faisceaux p -S-pervers sont les

faisceaux p -pervers dans $D_C(X, R)$.

Soit T une stratification de X qui raffine S , et vérifie encore b) et c).

Proposition 2.1.14. Soient p une perversité sur S , et q une sur T . Supposons que chaque fois qu'une strate S de S contient une strate T de T , on ait

$$p(S) \leq q(T) \leq p(S) + \dim S - \dim T .$$

Alors, la t -structure de perversité q sur $D_T(X, R)$ induit sur $D_S(X, R)$ la t -structure de perversité p .

Il suffit de vérifier que $D_S^{\leq p}(X, R) \subset D_T^{\leq q}(X, R)$ et que $D_S^{\geq p}(X, R) \subset D_T^{\geq q}(X, R)$. La première inclusion résulte aussitôt de ce que $p(S) \leq q(T)$ pour $S \supset T$. Vérifions la seconde. Soient K dans $D_S^{\geq p}(X, R)$, T une strate de T , et S la strate de S contenant T : $T \xrightarrow{i} S \xrightarrow{j} X$. Il s'agit de vérifier que $H^n(j_!)^!K = 0$ pour $n < q(T)$. On a $(j_!)^!K = i^!j^!K$, et on sait déjà que les $H^m(j^!K)$ sont des faisceaux localement constants sur S , nuls pour $m < p(S)$. Soit or_T (resp. or_S) le faisceau d'orientation sur T (resp. S). C'est un faisceau localement isomorphe au faisceau constant \mathbb{Z} . Soit $or = \text{Hom}(or_T, i^*or_S)$ le faisceau d'orientation normale de T dans S , et posons $d = \dim S - \dim T$. Si L est un complexe de faisceaux sur S , dont les faisceaux de cohomologie sont localement constants, on sait que $i^!L \simeq i^*L \otimes_{\mathbb{Z}} or[-d]$. Prenant $L = j^!K$, on trouve que $H^n(i^!j^!K) = 0$ pour $n < p(S)+d$, et on a supposé que $q(T) \leq p(S)+d$.

Corollaire 2.1.15. Tout faisceau p - S -pervers est q - T -pervers et le foncteur d'inclusion est exact. Pour U localement fermé réunion de strates de S , et $j : U \rightarrow X$ le morphisme d'inclusion, les foncteurs $q_{j_!}, q_{j^!}, q_{j_*}, q_{j^*}, q_{j_!}, q_{j_*}, p_{j_!}, p_{j^!}, p_{j_*}, p_{j^*}, p_{j_!}, p_{j_*}$ restreints aux faisceaux p - S -pervers, redonnent les foncteurs $p_{j_!}, p_{j^!}, p_{j_*}, p_{j^*}, p_{j_!}, p_{j_*}$.

2.1.16. Outre les conditions de 2.1.13, supposons que R est un corps commutatif et que X admet une triangulation (localement finie) telle que chaque strate S de S soit réunion de simplexes (ouverts). Par exemple : X algébrique réel muni d'une stratification de Whitney. On dispose alors de la théorie de Verdier de dualité. La dualité de Verdier est un automorphisme involutif de $D_C(X, R)$, et pour $j : U \rightarrow X$ localement fermé réunion de strates, elle échange les foncteurs $j_!$ et j_* , ainsi que $j^!$ et j^* . Si R n'était pas supposé commutatif, elle enverrait $D_C(X, R)$ dans $D_C(X, R^{opp})$.

Pour chaque strate S , de faisceau d'orientation or , et de dimension d , la dualité de Verdier D sur S ($K \mapsto \underline{RHom}(K, R \otimes or[d])$) vérifie pour K dans $D_S(S, R)$

$$H^{iDK} = (H^{-d-i}K)^V \otimes or .$$

Il est essentiel ici que les faisceaux de cohomologie de K soient localement constants de rang fini, et que R soit un corps (un anneau commutatif local artinien, par exemple $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, ferait encore l'affaire, car ayant un module dualisant injectif, I , ($\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ dans le cas de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$) ; la dualité de Verdier à prendre est $K \mapsto \underline{RHom}(K, Ra^!I)$ pour a la projection sur un point).

Appelons perversité duale d'une perversité p la perversité p^* donnée par

$$p^*(S) = -p(S) - \dim(S) .$$

Ce qui précède montre que D échange $D^{>p}$ et $D^{<p^*}$ (ainsi que $D^{<p}$ et $D^{>p^*}$: on a $p = p^{**}$). Elle échange en particulier faisceaux p -pervers et p^* -pervers, et P^{*H^i} et $P^{H^{-i}}$. Pour j l'inclusion d'une partie localement fermée réunion de strates, elle échange $P_{j!}$ et P^*_{j*} , $P_{j!}$ et P^*_{j*} , et $P_{j!}$ avec $P^*_{j!}$.

Dans $D_C(X, R)$, les conditions qui définissent les faisceaux p -pervers peuvent se récrire : pour toute strate $j : S \rightarrow X$, on a

$$H^i j^* K = 0 \text{ pour } i > p(S) \text{ et}$$

$$H^i j^* DK = 0 \text{ pour } i > p^*(S) .$$

Si toutes les strates sont de dimension paire, il existe une perversité autoduale : celle donnée par

$$p_{1/2}(S) = -\frac{1}{2} \dim S .$$

Proposition 2.1.17. Sous les hypothèses 2.1.16, si toutes les strates sont de dimension paire et pour la perversité autoduale $p_{1/2}$, si $j : U \rightarrow X$ est un ouvert de X réunion de strates et que A est un faisceau pervers autodual sur U , alors $j_{!*}A$ est l'unique prolongement autodual P de A (dans $D_C(X, R)$) tel que, pour chaque strate $S \subset X-U$, les $H^i P$ soient nuls sur S pour $i \geq -\frac{1}{2} \dim(S)$.

Que $j_{!*}A$ soit autodual résulte de l'autodualité de A , et de celle de $j_{!*}$. Ceci observé, la proposition est une application immédiate de 2.1.9 et 2.1.16.

Remarque 2.1.18. Si U est orientable et lisse purement de dimension d , on peut prendre pour A le faisceau constant R , placé en degré $-d/2$. Pour ce choix $j_{1*}A$ est le "complexe d'intersection" noté IC' dans l'introduction, et 2.1.17 est la caractérisation de Verdier de IC' .

2.1.19. Soient (X, S, θ) comme en 2.1.1, θ° le faisceau d'anneaux opposé de θ et p, q deux perversités. La proposition suivante donne le comportement, vis-à-vis des perversités, des foncteurs

$$\begin{aligned} \mathbb{L} \\ \otimes : D^-(X, \theta^\circ) \times D^-(X, \theta) &\rightarrow D^-(X, \mathbb{Z}) \quad \text{et} \\ \underline{RHom} : D^-(X, \theta) \times D^+(X, \theta) &\rightarrow D^+(X, \mathbb{Z}) . \end{aligned}$$

Si θ est commutatif, on peut bien sûr remplacer \mathbb{Z} par θ .

Proposition 2.1.20. Le foncteur $\mathbb{L} \otimes$ envoie $D^{\leq p} \times D^{\leq q}$ dans $D^{\leq p+q}$, et le foncteur \underline{RHom} envoie $D^{\leq p} \times D^{\geq q}$ dans $D^{\geq (q-p)}$.

La première assertion est claire, $\mathbb{L} \otimes$ se calculant point par point. Elle est énoncée par souci de symétrie.

Soient K dans $K^{\leq p}$ et L dans $D^{\geq q}$. Un argument de dévissage ramène à supposer que K est la forme $j_{1*}A[-n]$, pour A un faisceau sur une strate S , j l'inclusion de S dans X et $n \leq p(S)$. On a alors

$$\underline{RHom}(j_{1*}A[-n], L) = j_{*}\underline{RHom}(A[-n], j^!L) .$$

Par hypothèse, $j^!L$ est dans $D^{\geq q(S)}(S, \theta)$. Le \underline{RHom} est dans $D^{\geq q(S)-n}(S, \mathbb{Z}) \subset D^{\geq q(S)-p(S)}(S, \mathbb{Z})$, et la t -exactitude à gauche (pour toute perversité) de j_{*} montre enfin que $\underline{RHom}(j_{1*}A[-n], L)$ est dans $D^{\geq q-p}$.

Faisant $p = q$, on trouve :

Corollaire 2.1.21. Pour K dans $D^{\leq p}(X, \theta)$ et L dans $D^{\geq p}(X, \theta)$, on a $H^i \underline{RHom}(K, L) = 0$ pour $i < 0$.

Ce corollaire peut aussi se déduire, par localisation, de ce que $\text{Hom}(K, L[i]) = 0$ pour $i < 0$ (2.1.4).

Corollaire 2.1.22. Pour K dans $D^{\leq p}(X, \theta)$ et L dans $D^{\geq p}(X, \theta)$ le préfaisceau $U \mapsto \text{Hom}_D(U, \theta)(K|U, L|U)$ est un faisceau.

Les $H^i \underline{RHom}(K, L)$ étant nuls pour $i < 0$, la suite spectrale du local au global fournit en effet

$$\text{Hom}_D(U, \theta)(K|U, L|U) = H^0(U, H^0 \underline{RHom}(K, L)) .$$

Munissons chaque ouvert U de X de la stratification induite par S , et de la perversité induite par p . La restriction à U d'un faisceau p -pervers sur X est alors un faisceau p -pervers sur U . On a

Corollaire 2.1.23. Les faisceaux p -pervers sur les ouverts de X forment un champ.

Preuve (Utilisant 3.2 ; une variante est prouvée, indépendamment de 3.2 , en 2.2.19).

D'après 2.1.22, les faisceaux p -pervers forment un préchamp : les morphismes se recollent. Pour recoller les objets, on utilise 3.2.4, dont 2.1.21 assure que les hypothèses sont vérifiées.

2.1.24. Variante. Plutôt que de prendre pour X un espace topologique stratifié, on eut pu aussi bien prendre pour X un topos stratifié. Un cas important est celui où X est le topos étale d'un schéma S , muni d'une stratification.

2.2. Schémas.

2.2.1. A titre de modèle, considérons d'abord le cas d'une variété algébrique complexe. Il s'agit d'appliquer 2.1 au cas suivant :

Espace : L'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points complexes d'un schéma séparé de type fini sur \mathbb{C} , muni de sa topologie usuelle.

Perversité : On ne considérera que des perversités où la perversité $p(S)$ d'une strate ne dépend que de sa dimension. Cette dimension sera toujours paire. La donnée requise est celle d'une fonction encore notée p des entiers ≥ 0 pairs dans \mathbb{Z} . On pose $p^*(n) : -n - p(n)$. C'est la fonction de perversité duale. Nous supposerons que p et p^* sont décroissantes

$$\text{pour } n \leq m, 0 \leq p(n) - p(m) \leq m - n .$$

Stratifications : Rappelons que toute stratification (algébrique) de X admet un raffinement qui est de Whitney (voir J.L. Verdier, stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard - Inv. Math. 36 (1976) 295-312). Les stratifications utilisées seront les stratifications de Whitney (algébriques) à strates équidimensionnelles de X . Elles vérifient les conditions (a)(b)(c) de 2.1.13, qui seules nous importent. Dans la discussion, sur \mathbb{C} , qui suit, nous les appellerons simplement stratifications. Pour chaque stratification S , la perversité p_S de S est définie par

$$p_S(S) = p(2\dim_{\text{alg}} S) = p(\dim_{\text{top}} S) .$$

On écrira simplement $\dim S$ pour la dimension algébrique $\dim_{\text{alg}} S$ de S .

Soit R un anneau noethérien à gauche. La catégorie dérivée constructible $D_{\mathbb{C}}(X(\mathbb{C}), R)$ est la sous-catégorie pleine de $D(X(\mathbb{C}), R)$ formée des complexes K tels que les faisceaux $H^i K$ soient constructibles. La catégorie $D_{\mathbb{C}}^b(X(\mathbb{C}), R) = D^b(X(\mathbb{C}), R) \cap D_{\mathbb{C}}(X(\mathbb{C}), R)$ est la réunion (fil - trante) des sous-catégories $D_S^b(X(\mathbb{C}), R)$ de $D(X(\mathbb{C}), R)$. Sur chaque $D_S^b(X(\mathbb{C}), R)$ la perversité p_S définit une t -structure. D'après 2.1.14 et l'hypothèse faite sur p , pour S de plus en plus fine, ces t -structures s'induisent les unes les autres. Par passage à la limite, elles fournissent la t -structure de perversité p

($D_{\mathbb{C}}^{b, \leq p}(X(\mathbb{C}), R), D_{\mathbb{C}}^{b, \geq p}(X(\mathbb{C}), R)$) sur $D_{\mathbb{C}}^b(X(\mathbb{C}), R)$. A l'imitation de 2.1.4, on en déduit une t -structure sur $D_{\mathbb{C}}(X(\mathbb{C}), R)$: si pour $0 \leq i \leq \dim X, a \leq p(2i) \leq b$, on définit $D_{\mathbb{C}}^{\leq p}(X(\mathbb{C}), R)$ (resp. $D_{\mathbb{C}}^{\geq p}(X(\mathbb{C}), R)$) comme la sous-catégorie de

$D_C(X(\mathbb{C}), R)$ formée des K tels que $H^i K = 0$ pour $i > b$ (resp. $i < a$) et que $\tau_{[a,b]} K$ soit dans $D_C^{b, \leq p}(X(\mathbb{C}), R)$ (resp. $D_C^{b, \geq p}(X(\mathbb{C}), R)$).

Pour $S \subset X$, posons $p(S) = p(2 \dim S)$.

Proposition 2.2.2. Soit K dans $D_C(X(\mathbb{C}), R)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) K est dans $D_C^{\leq p}(X(\mathbb{C}), R)$ (resp. $D_C^{\geq p}(X(\mathbb{C}), R)$).
- (ii) Toute sous-variété irréductible S' de X a un ouvert de Zariski dense S tel que, notant i_S l'inclusion de $S(\mathbb{C})$ dans $X(\mathbb{C})$, on ait $H^{i_S^*} K = 0$ pour $i > p(S)$ (resp. $H^{i_S^!} K = 0$ pour $i < p(S)$).

Si T est une famille finie de parties localement fermées (pour Zariski) lisses équidimensionnelles, de réunion X , et que, pour S dans T , notant i_S l'inclusion de S dans X , les $H^{i_S^*} K$ et les $H^{i_S^!} K$ soient localement constants, elles équivalent encore à

- (iii) Pour tout S dans T , $H^{i_S^*} K = 0$ pour $i > p(S)$ (resp. $H^{i_S^!} K = 0$ pour $i < p(S)$).

Supposons d'abord K dans D_C^b . Pour toute stratification S assez fine, K est alors dans D_S^b . En particulier, il existe T ayant les propriétés imposées, et il suffit de voir que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i). L'implication (ii) \Rightarrow (iii) est triviale. Pour vérifier que (i) \Rightarrow (ii), il suffit de prendre S assez fin pour que K soit dans D_S^b (donc dans $D_S^{b, \leq p}$ (resp. $D_S^{b, \geq p}$)) et que S' soit une adhérence de strate. Prouvons (iii) \Rightarrow (i). Soit S plus fin que T tel que K soit dans D_S^b . L'hypothèse sur p et la preuve de 2.1.4. montrent que K est dans $D_S^{b, \leq p}$ (resp. $D_S^{b, \geq p}$), d'où (i).

Dans le cas général, soient a et b tels que $a \leq p(2i) \leq b$ pour $0 \leq i \leq \dim X$. Si dans (i), (ii) ou (iii) on remplace K par $\tau_{\geq a} K$ (resp. $\tau_{\leq b} K$), on obtient une condition équivalente et il reste à montrer que chacune implique que $H^i K = 0$ pour $i > b$ (resp. $i < a$). Pour (i), c'est dans la définition. Pour (ii) et (iii), on reprend la preuve de (2.1.2.1) qui suit 2.1.2. Pour (iii), on commence par remplacer T par une stratification plus fine. Pour (ii), on prouve par récurrence descendante sur $\dim S'$ que pour chaque sous-variété irréductible S' et chaque $i > b$ (resp. $i < a$), il existe un ouvert dense S de S' tel que $H^i K$ soit nul sur S .

2.2.3. Si U est une partie localement fermée de X , pour toute stratification assez fine, U est réunion de strates. Ceci permet d'appli-

quer 2.1.6 (propriétés d'exactitude de $j_!, j^!, j^*$ et j_*) à l'inclusion j de U dans X . On utilisera les notations $\tau_{\leq p}$, H^p , $Pj_!, \dots$ de 2.1.7, dont les résultats restent valables. Pour U un ouvert (de Zariski) de X , de fermé complémentaire F , la t -structure de perversité p de $D_C(X(\mathbb{C}), R)$ s'obtient par recollement à partir de celles de $D_C(U(\mathbb{C}), R)$ et $D_C(F(\mathbb{C}), R)$. Le formalisme 1.4 est donc applicable, comme en 2.1.8.

En particulier, pour A p -pervers sur U , on (1.4.23)

$$(2.2.3.1) \quad j_!^* A = P\tau_{\leq -1}^F j_* A.$$

Supposons F de dimension $\leq d$ et posons $t = p(2d)$. Puisque $\tau_{< t}^i j_* A$ est dans $P D_C^{< 0}$ et que le triangle $(\tau_{< t}^i j_* A, A, \tau_{\geq t}^i j_* A)$ est distingué, si $\tau_{\geq t}^i j_* A$ est dans $P D_C^{> 0}$, on a $P\tau_{< 0}^i j_* A \xrightarrow{\sim} \tau_{< t}^i j_* A$ et donc $P\tau_{< 0} j_* A \xrightarrow{\sim} \tau_{< t}^F j_* A$. En particulier (par 2.2.2 (iii) appliqué à F et à $T = \{F\}$)

Proposition 2.2.4 . Si F est lisse de dimension d et que les $H^i j_* A$ sont localement constants sur F pour $i \geq t := p(2d)$, on a

$$(2.2.4.1) \quad j_!^* A = \tau_{\leq t-1}^F j_* A.$$

Ceci, joint à la transitivité de $j_!$, est analogue à 2.1.11. De même, sous la même hypothèse sur F et si la locale constance de $H^i j_* A$ vaut pour $i \geq t-1$, (resp. $t+1$), on a respectivement, par 1.4.23,

$$(2.2.4.2) \quad Pj_! A = \tau_{\leq t-2}^F j_* A ;$$

$$(2.2.4.3) \quad Pj_* A = \tau_{\leq t}^F j_* A.$$

Proposition 2.2.5 . Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme quasi-fini, les foncteurs $f_!$ et f^* sont t -exact à droite, et leurs adjoints à droite $f^!$ et f_* sont t -exact à gauche.

Pour K dans D_C , la condition $K \in D_C^{\leq 0}$ équivaut aux bornes

$$p(2 \dim \text{Supp } H^i K) \geq i$$

sur la dimension des supports des $H^i K$. Le foncteur ${}^o f_!$ étant exact, on a $H^i f_! K = {}^o f_! H^i K$, d'où $\text{Supp } H^i f_! K = f(\text{Supp } H^i K)^-$ et

$\dim \text{Supp } H^i f_! K = \dim \text{Supp } H^i K$. De même, $H^i f^* K = {}^o f^* H^i K$, $\text{Supp } H^i f^* K = f^{-1} \text{Supp } H^i K$ et $\dim \text{Supp } H^i f^* K \leq \dim \text{Supp } H^i K$. Ceci prouve la t -exactitude à droite de $f_!$ et f^* . La t -exactitude à gauche de $f^!$ et f_* peut s'en déduire par adjonction (1.3.17 (iii)).

Remarque . Il est essentiel ici que les conditions de perversité soient définies en terme de la dimension - et non de la codimension- des strates (si X et Y ne sont pas de la même dimension).

Corollaire 2.2.6 (i) Si f est fini, $f_! = f_*$ est t-exact.

(ii) Si f est étale, $f^! = f^*$ est t-exact.

2.2.7. Pour f quasi-fini et F p-pervers sur X, $f_!F$ est dans $P_{D^{\leq 0}}$ et f_*F dans $P_{D^{> 0}}$. Le morphisme naturel de $f_!F$ dans f_*F admet donc une factorisation

$$(2.2.7.1) \quad f_!F \rightarrow P_{f_!}F \rightarrow P_{f_*}F \rightarrow f_*F \quad .$$

On pose

$$f_{!,*}F = \text{Im}(P_{f_!}F \rightarrow P_{f_*}F) \quad .$$

2.2.8. Comme en 2.1.20, si les perversités p,q vérifient pour $n \leq m$,

$$(p+q)(n) - (p+q)(m) \leq m - n ,$$

\mathbb{L}
 \otimes envoie $D_C^{-, \leq p} \times D_C^{-, \leq q}$ dans $D_C^{\leq p+q}$, et si q-p est décroissante, $\underline{\text{RHom}}$ envoie $D_C^{-, \leq p} \times D_C^{+, \geq q}$ dans $D_C^{+, \geq (q-p)}$. En particulier, pour K dans $D_C^{\leq p}$ et L dans $D_C^{\geq p}$, les $\underline{H}^i \underline{\text{RHom}}(K,L)$ sont nuls pour $i < 0$, et $U \longmapsto \text{Hom}_{D(U)}(K|U, L|U)$ est un faisceau. Comme en 2.1.23, les faisceaux p-pervers forment un champ.

Si R est un corps commutatif, la dualité de Verdier échange $D^{> p}$ et $D^{\leq p^*}$, $D^{\geq p}$ et $D^{\leq p^*}$, faisceaux p-pervers et p^* -pervers (cf.2.1.16), et P_H^j et P_H^{-j} .

2.2.9. Soit X un schéma de type fini sur un corps k, et soit ℓ un nombre premier, premier à la caractéristique de k. Sur X, nous considérerons exclusivement la topologie étale. Notre but est la définition des \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux pervers sur X. Le cas des faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ -modules étant un peu plus facile, nous commençons par lui.

2.2.10. A cause des phénomènes de ramification sauvage, on ne dispose plus de stratifications jouant le rôle des stratifications de Whitney. Nous aurons à considérer des paires (S,L) où

(a) S est une partition finie de X en parties localement fermées (appelées strates). L'adhérence d'une strate est réunion de strates, et sur \bar{k} chaque strate réduite est lisse, partout de la même dimension.

(b) L est la donnée, pour chaque strate S, d'un ensemble fini $L(S)$ de classes d'isomorphie de faisceaux localement constants de \mathbb{Z}/ℓ -modules

sur S , irréductibles dans la catégorie de tous les faisceaux localement constants de \mathbb{Z}/ℓ -modules.

Un faisceau de \mathbb{Z}/ℓ -modules sera dit (S, L) -constructible si sa restriction à chaque strate S est localement constante et extension itérée (finie) de faisceaux dont la classe d'isomorphie est dans $L(S)$. On note $D_{S, L}^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$ la sous-catégorie pleine de $D^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$ formée des complexes (S, L) -constructibles, i.e. tels que les $H^i K$ soient (S, L) -constructibles. On dit que (S', L') raffine (S, L) si chaque strate S de S est réunion de strates de S' , et que les F dans $L(S)$ sont (S', L') -constructibles (i.e. $(S' | S, L' | (S' | S))$ constructibles).

On impose enfin

(c) Pour S dans S et F dans $L(S)$, si j est l'inclusion de S dans X , les $R^n j_* F$ sont (S, L) -constructibles.

Cette condition assure comme en 2.1.13 que pour $U \xrightarrow{j} V \subset X$ localement fermés et réunions de strates, les foncteurs j_* , $j_!$, j^* , $j^!$ envoient l'un dans l'autre $D_{S, L}^b(U, \mathbb{Z}/\ell)$ et $D_{S, L}^b(V, \mathbb{Z}/\ell)$.

Il résulte du théorème de constructibilité pour Rj_* ([3]1.1.) que pour tout système (S', L') vérifiant (a) (b), il existe (S, L) raffinant (S', L') qui vérifie (a) (b) (c) : si (a) (b) (c) sont vrais pour X remplacé par la réunion des strates de dimension $\geq n$, le théorème de constructibilité permet de raffiner (S, L) en (S', L') , sans toucher aux strates de dimension $\geq n$, et de rendre (a) (b) (c) vrais pour X remplacé par la réunion des strates de dimension $\geq n-1$. On itère cette construction.

2.2.11. Soit p comme dans 2.2.1, définissant les fonctions de perversité $p_S : S \rightarrow \mathbb{Z} : S \mapsto p(2 \dim S)$. Procédant comme précédemment, on déduit de p une t -structure sur $D_{S, L}^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$. Pour (S, L) de plus en plus fin, ces t -structures s'induisent les unes les autres : le théorème de pureté SGA 4 XVI 3.7 fournit l'analogie de 2.1.14. Par passage à la limite on obtient une t -structure $(D_C^{b, \leq p}(X, \mathbb{Z}/\ell), D_C^{b, \geq p}(X, \mathbb{Z}/\ell))$ sur la réunion filtrante $D_C^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$ des $D_{S, L}^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$. On en déduit une t -structure sur $D_C(X, \mathbb{Z}/\ell)$ comme en 2.2.1, et 2.2.2 à 2.2.8 restent valables, avec essentiellement la même démonstration. Le formalisme de dualité en cohomologie étale (SGA 4 XVIII) remplace celui de la dualité de Verdier.

2.2.12. Pour x un point (fermé ou non) de X , si i_x est l'inclusion de x dans X , factorisée en $x \xrightarrow{j} \{x\} \xrightarrow{i} X$, on définit $i_x^! := j^* i^!$. Avec

cette notation, la caractérisation 2.2.2(ii) de $D_C^{\leq p}$ (resp. $D_C^{> p}$) admet la formulation plus élégante suivante.

(ii)* Pour tout point (fermé ou non) x de X , notant $\dim x$ la dimension de $\{x\}^-$, on a $H^i i_x^* K = 0$ pour $i < p(2\dim x)$ (resp. $H^i i_x^! K = 0$ pour $i > p(2\dim x)$).

2.2.13. Pour les faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ^n -modules (ou plus généralement de R -modules, avec R fini sur \mathbb{Z}/ℓ^n), on procède de même. Il est commode de continuer à prendre pour L la donnée, pour chaque strate, d'une famille finie de faisceaux localement constants irréductibles de \mathbb{Z}/ℓ -modules, et de dire que K dans $D^b(X, R)$ est (S, L) -constructible si les $\ell^i H^* K / \ell^{i+1} H^* K$ sont (S, L) -constructibles, en tant que faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ -modules.

2.2.14. Pour les \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux, (resp. \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux, ...) on procède de même, une fois définies des catégories triangulées $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ (resp. $D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell), \dots$) obéissant au formalisme de variance habituel, et une fois définie leur t -structure "naturelle", dont on veut qu'elle fournisse la catégorie abélienne des \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux (resp. \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux, ...) constructibles sur X (SGA 5 VII 1.1.). Dans le cas des corps de base finis ou algébriquement clos (ou plus généralement lorsque pour toute extension finie k' de k les groupes $H^i(\text{Gal}(\bar{k}/k'), \mathbb{Z}/\ell)$ sont finis), une solution est proposée dans [1] 1.1.2 : poser

$$(2.2.14.1) \quad D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell) := 2\text{-lim proj } D_{\text{ctf}}^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$$

(ctf pour "constructible de Tor-dimension finie"). On prend pour foncteurs de transition les foncteurs d'extension de scalaires

$$\begin{array}{c} \mathbb{L} \\ \otimes \\ \mathbb{Z}/\ell^n \end{array} \mathbb{Z}/\ell^m ;$$

la restriction aux objets de Tor-dimension finie est nécessaire pour qu'ils envoient D^b dans D^b .

La proposition suivante, jointe aux théorèmes de finitude de [3] assure que l'on obtient bien une catégorie triangulée.

Proposition 2.2.15. Soit $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système projectif de catégories triangulées. Les foncteurs de transition $T_{m,n} : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{D}_m$ sont supposés exacts. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et K, L dans \mathcal{D}_n , $\text{Hom}(K, L)$ est fini, alors la 2-limite projective \mathcal{D} de \mathcal{D}_n , munie de la famille des triangles T d'images distinguées dans les \mathcal{D}_n , est triangulée.

Soit $u : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{D} , et $u_m : X_n \rightarrow Y_n$ son image dans \mathcal{D}_n . Pour

vérifier que u est la base d'un triangle distingué T (TR1) on choisit pour chaque n un triangle distingué T_n de base u_n . Appliquant TR3 dans les \mathcal{D}_n , on construit des morphismes $T_{n,n+1}(T_{n+1}) \rightarrow T_n$ de base l'automorphisme identique de u_n . Ce sont des isomorphismes. Ils permettent de définir le T requis comme limite projective des T_n .

Soit dans \mathcal{D} deux triangles distingués T, T' et $f: \text{base}(T) \rightarrow \text{base}(T')$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{(1)} \\ f_X \downarrow & & f_Y \downarrow & & & \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \xrightarrow{(1)}. \end{array}$$

Pour chaque n , soient T_n, T'_n et f_n les images de T, T', f dans \mathcal{D}_n , et H_n l'ensemble des morphismes de triangles $T_n \rightarrow T'_n$ qui induisent f_n . Le foncteur $T_{n,n+1}$ envoie H_{n+1} dans H_n , et la limite projective H des H_n est l'ensemble des $k: T \rightarrow T'$ induisant f . Chaque H_n est fini par hypothèse, et non vide d'après TR3 dans \mathcal{D}_n . On a donc $H \neq \emptyset$, et ceci vérifie TR3 dans \mathcal{D} . La vérification de TR4 dans \mathcal{D} est semblable. Celle de TR2 est triviale.

2.2.16. La définition (2.2.14.1) a ceci de bon que le formalisme de variance des $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ s'obtient par simple passage à la limite. La définition de la t -structure naturelle est plus délicate, car les $\tau_{\leq i}$ dans $D_C^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ ne respectent pas la Tor-dimension finie et ne commutent pas aux extensions de scalaires. On définit le foncteur H^i de $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ dans la catégorie abélienne des \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux constructibles en attachant à K , défini par un système de $K_n \in D_C^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$, le \mathbb{Z}_ℓ -faisceau limite projective des $H^i(K_n)$. Nous écrirons $K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^n$ pour K_n . On dispose des suites exactes usuelles

$$(2.2.16.1) \quad 0 \rightarrow H^i(K) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^n \rightarrow H^i(K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow \text{Tor}_1(H^{i+1}(K), \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow 0.$$

Pour n variable, elles forment un système projectif, et le système projectif des Tor_1 est essentiellement nul. On définit $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\leq 0}$ (resp. $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\geq 0}$) par les conditions $H^i K = 0$ pour $i > 0$ (resp. $i < 0$). Pour s'assurer qu'on obtient bien une t -structure, l'essentiel est la construction des opérateurs $\tau_{\leq i}$. Elle est faite dans [1] 1.1.2. Le foncteur H^0 induit une équivalence de catégories $(D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\leq 0} \cap D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\geq 0}) \rightarrow (\mathbb{Z}_\ell\text{-faisceaux constructibles})$.

Les suites exactes (2.2.16.1) montrent que pour que K soit dans $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\leq 0}$, il faut et il suffit que pour un (tout) n , $K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^n$

soit dans $D_C^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)^{\leq 0}$.

Une bonne définition, inconditionnelle, de $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ a été proposée par O. Gabber. Notons $\hat{D}_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ la catégorie triangulée qu'elle fournit. On dispose d'un foncteur conservatif $\hat{D}_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$, bijectif sur l'ensemble des classes d'isomorphie. Pour K, L dans $\hat{D}_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$, de réduction mod ℓ^n K_n et L_n , on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 \text{Hom}(K_n, L_n) \rightarrow \text{Hom}(K, L) \rightarrow \varprojlim \text{Hom}(K_n, L_n) \rightarrow 0.$$

Pour X le spectre d'un corps k , de clôture séparable \bar{k} , V un \mathbb{Z}_ℓ -module de type fini sur lequel $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ agit continûment, et K (resp. L) réduit à \mathbb{Z}_ℓ (resp. V) en degré 0, les $\text{Hom}^i(\mathbb{Z}_\ell, V)$, dans \hat{D}_C^b , sont les $H^i(\text{Gal}(\bar{k}/k), V)$, tels que calculés par le complexe des cochaînes continues. Comme il n'a pas rédigé sa définition, nous sommes obligés de nous limiter au cadre un peu étriqué où 2.2.15 s'applique.

2.2.17. Soit $D_{S,L}^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ la sous-catégorie pleine de $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ formée des K vérifiant les conditions suivantes, dont l'équivalence résulte de (2.2.16.1) : (a) pour tout (resp. un) n , $K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^n$ est dans $D_{S,L}^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$; (b) les $H^i K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell$ sont (S, L) -constructibles. Pour (S, L) variable, D_C^b est la réunion filtrante des $D_{S,L}^b$, et on définit la t -structure de perversité p sur D_C^b par passage à la limite sur (S, L) , comme en 2.2.10, à partir de t -structures sur les $D_{S,L}^b$ obtenues par recollement.

Comme en 2.2.16, pour que K soit dans $P_{D_C^b}^{\leq 0}(X, \mathbb{Z}_\ell)$, il faut et il suffit que sa réduction mod ℓ soit dans $P_{D_C^b}^{\leq 0}(X, \mathbb{Z}/\ell)$.

2.2.18. Rappelons que, par définition,

$$D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell) := D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,$$

et que la catégorie abélienne des \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux constructibles est le \mathbb{Q}_ℓ - \mathfrak{A} de celle des \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux constructibles. La sous-catégorie pleine $D_{S,L}^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ image de $D_{S,L}^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est formée des K tels que chaque $H^i K$ est le $\mathbb{Q}_\ell \otimes$ d'un \mathbb{Z}_ℓ -faisceau (S, L) -constructible, i.e. de réduction mod ℓ (S, L) -constructible. On définit la t -structure de perversité p sur $D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ par passage à la limite sur (S, L) et recollement, comme précédemment. Pour tout intervalle $[a, b]$, le foncteur naturel

$$P_{D_C^b}^{[a,b]}(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell \rightarrow P_{D_C^b}^{[a,b]}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

est une équivalence. En particulier ($a = b = 0$), la catégorie abélien-

ne des \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux pervers se déduit de celle des \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux pervers par $\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

Soient E_λ une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ et \mathcal{O}_λ son anneau de valuation. On peut traiter des \mathcal{O}_λ -faisceaux comme on a traité des \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux, et passer de là aux E_λ -faisceaux par $\otimes_{\mathcal{O}_\ell} E_\lambda$. On peut aussi passer des \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux aux E_λ -faisceaux en observant que le foncteur d'oubli ω induit une équivalence

$$D_C^b(X, E_\lambda) \longrightarrow (\text{catégorie des objets } K \text{ de } D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell), \text{ munis d'un morphisme de } \mathbb{Q}_\ell\text{-algèbres } E_\lambda \longrightarrow \text{End}(K)) .$$

La pleine fidélité résulte de la suite spectrale

$$(2.2.18.1) \quad E_2^{pq} = \text{Ext}_{E_\lambda \otimes E_\lambda}^p(E_\lambda, \text{Hom}^q(\omega K, \omega L)) \Rightarrow \text{Hom}(K, L) ,$$

où $E_2^{pq} = 0$ si $p \neq 0$ (le produit tensoriel $E_\lambda \otimes E_\lambda$ est pris sur \mathbb{Q}_ℓ , et le Hom^q dans $D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$). La surjectivité essentielle résulte de ce que K , muni d'une action de E_λ , est facteur direct de $K \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} E_\lambda$.

La suite spectrale (2.2.18.1) se déduit d'une suite spectrale analogue pour $D_C^b(X, \mathcal{O}_\lambda)$, obtenue par passage à la limite. Si \mathcal{O}_λ est étale sur \mathbb{Z}_ℓ , on a encore $E_2^{pq} = 0$ pour $p \neq 0$, mais non en général. La suite spectrale montre toutefois que le foncteur d'oubli induit un foncteur pleinement fidèle

$$(\mathcal{O}_\lambda\text{-faisceaux pervers}) \longrightarrow (\mathbb{Z}_\ell\text{-faisceaux pervers, munis d'une action de } \mathcal{O}_\lambda) .$$

Nous n'avons pas vérifié que c'est, comme il se doit, une équivalence.

On passe enfin à $D_C^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ par passage à la limite (inductive) sur $E_\lambda \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

2.2.19. Les résultats 2.2.2 à 2.2.8 et 2.2.12 continuent à s'appliquer dans tous ces contextes, avec essentiellement la même démonstration.

La preuve 2.1.23 de ce que les faisceaux pervers forment un champ ne s'applique toutefois plus telle quelle, car 3.2, sur laquelle elle repose a été rédigé en supposant que l'on travaillait à l'intérieur d'une catégorie dérivée d'une catégorie de faisceaux. Voici une autre preuve. On sait déjà, comme en 2.1.23, que les morphismes se recollent, et il s'agit de prouver que si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement étale fini de X , toute famille A_i de faisceaux

pervers sur les U_i munie d'une donnée de recollement provient de A pervers sur X . La donnée de recollement permet, pour chaque $j : V \rightarrow X$ étale, et se factorisant par un U_i , de définir A_V faisceau pervers sur V , et ce de façon compatible aux images inverses $V' \rightarrow V$.

Pour tout morphisme $f : Y \rightarrow X$ et toute sous-variété irréductible localement fermée $i : S' \hookrightarrow X$ de X , donnant lieu à un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} T' & \xleftarrow{i} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xleftarrow{i} & X \end{array} ,$$

on a dans la catégorie dérivée $i^! f_* = f_* i^!$. Si f est quasi-fini, S' admet un ouvert dense S tel que $T = f^{-1}S$ soit fini sur S , et vide ou purement de dimension $\dim(S)$. Il en résulte que f_* envoie alors

$D_C^{>P}(Y, \mathbb{Q}_\ell)$ dans $D_C^{>P}(X, \mathbb{Q}_\ell)$: $Pf_* := H^0 f_* \epsilon$ est un foncteur exact à gauche des faisceaux pervers sur Y dans les faisceaux pervers sur X , ayant $Pf^* := H^0 f^* \epsilon$ pour adjoint à gauche (1.3.17 (iii)).

Soit j_i (resp. j_{ij}) la projection sur X de U_i (resp. de $U_{ij} := U_i \times_X U_j$). Posons

$$A := \text{Ker} \left(\prod_I Pj_{i*} A_{U_i} \rightrightarrows \prod_{I \times I} Pj_{ij*} A_{U_{ij}} \right) .$$

Il suffit de voir que le morphisme $Pj_i^* A \rightarrow A_i = A_{U_i}$ déduit par adjonction de $A \rightarrow j_{i*} A_{U_i}$ est un isomorphisme. Il suffit de le voir après tout changement de base j_j . Les images directes et réciproques considérées commutant à une telle localisation, nous sommes ramenés au cas où l'un des U_j/X admet une section. Dans ce cas, les A_i sont les images inverses d'un A_X , et que $A = A_X$ résulte de l'argument habituel d'homotopie qui montre que deux recouvrements ouverts dont chacun est plus fin que l'autre donnent la même cohomologie de Čech.

3. COMPLÉMENTS.

3.1. Catégories dérivées filtrées, filtrations canoniques, et filtrations bêtes.

3.1.1. Les catégories triangulées usuelles ont les accompagnant une "catégorie dérivée filtrée". Les relations entre la catégorie triangulée de départ et celle-ci n'ont pas encore été axiomatisées. Les foncteurs les plus utiles parmi ceux reliant ces catégories sont considérés en 3.1.2, mais nous ne prétendons pas avoir indiqué toutes les compatibilités auxquelles ils donnent lieu. De ce fait, nous sommes obligés, dans ce n°, de partir d'une catégorie abélienne A , de sa catégorie dérivée DA , et de sa catégorie dérivée filtrée DFA . Modifiant la définition donnée en 1.1.4, nous la définissons ici comme déduite par calcul de fraction de la catégorie des complexes munis d'une filtration finie (et non seulement finie degré par degré). C'est la définition de [8] V § 1,2, où le lecteur trouvera un exposé systématique. De même pour D^* , $* = +, -, b$. On utilisera aussi incidemment la catégorie dérivée bifiltrée DF^2A , qu'on peut considérer comme étant la "catégorie dérivée filtrée" compagnon de la catégorie triangulée DFA .

Si la catégorie abélienne A a assez d'injectifs, D^+A s'identifie à la catégorie des complexes bornés à gauche d'objets injectifs de A , les morphismes de complexes étant pris à homotopie près, et D^+FA (resp. D^+F^2A) s'identifie à la catégorie des complexes bornés à gauche filtrés (resp. bifiltrés) d'objets injectifs de A , la filtration (resp. bifiltration) étant finie et scindable en chaque degré, et les morphismes de complexes filtrés (resp. bifiltrés) étant pris modulo les homotopies compatibles aux filtrations (i.e. modulo les $dH+Hd$, où H , de degré -1 , respecte les filtrations) ([8]V 1.4.7 pour D^+F).

Nos filtrations seront tantôt croissantes, tantôt décroissantes. On passe des unes aux autres en posant $F_i := F^{-i}$.

3.1.2. Travaillons avec des filtrations décroissantes. On dispose des foncteurs suivants reliant DA et DFA .

$$(3.1.2.1) \quad Gr_F^i : DFA \rightarrow DA : (K, F) \mapsto Gr_F^i(K),$$

(3.1.2.2) oubli : $\omega : \text{DFA} \longrightarrow \text{DA} : (K, F) \longmapsto K$,

et plus généralement,

(3.1.2.3) $F^i/F^j : \text{DFA} \longrightarrow \text{DA} : (K, F) \longmapsto F^i K / F^j K \quad (-\infty \leq i \leq j \leq \infty)$.

Fonctorialité. Pour $(i, j) \geq (k, \ell)$ on dispose de $F^i/F^j \rightarrow F^k/F^\ell$, avec transitivité pour $(i, j) \geq (k, \ell) \geq (m, n)$. On dispose aussi de Morphismes de degré 1 : $F^{-\infty}/F^i \xrightarrow{(1)} F^i$ donnant lieu pour $i \geq j$ à des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} F^{-\infty}/F^i & \xrightarrow{(1)} & F^i \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^{-\infty}/F^j & \xrightarrow{(1)} & F^j \end{array} .$$

Pour $i \geq j \geq k$, le triangle $(F^j/F^i, F^k/F^i, F^k/F^j)$ est distingué (flèche de degré 1 : $F^k/F^j \rightarrow F^{-\infty}/F^j \xrightarrow{(1)} F^j \rightarrow F^j/F^i$). Un tel système de triangles distingués est ce que Verdier, inspiré par la construction des suites spectrales dans Cartan-Eilenberg, a appelé un objet spectral de DA.

En sens inverse, on dispose de

(3.1.2.4) filtration triviale : $\text{DA} \longrightarrow \text{DFA} : K \longmapsto (K, \text{Tr})$ avec

$$\text{Gr}_{\text{Tr}}^0 K = K \quad \text{et} \quad \text{Gr}_{\text{Tr}}^i K = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 0 .$$

De DFA dans DFA, on dispose de

(3.1.2.5) $F^0 : \text{DFA} \rightarrow \text{DFA} : (K, F) \mapsto (F^0 K, \text{filtration induite})$, et plus généralement, pour chaque $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ (où $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$), croissant et continu, de

(3.1.2.6) $[\varphi] : \text{DFA} \longrightarrow \text{DFA} : (K, F) \longmapsto ((F^{\varphi(-\infty)}/F^{\varphi(\infty)})(K), F^{\varphi(n)} K / F^{\varphi(\infty)} K)$.

Pour $\varphi(n) = n+p$, c'est $(K, F) \longmapsto (K, F[p])$.

Généralisant l'existence d'un triangle de base donnée et TR4, on a

(3.1.2.7) Quelle que soit la suite de morphismes $\dots \rightarrow K_{n+1} \rightarrow K_n \rightarrow \dots$ ($n \in \mathbb{Z}$) de DA, avec $K_i = 0$ pour $i \gg 0$ et $K_{i+1} \xrightarrow{\sim} K_i$ pour $i \ll 0$, il existe (K, F) dans DFA telle que la suite donnée soit isomorphe à celle des $F^i K$.

On a les mêmes relations entre $\text{DF}^2 A$ et DFA (de deux façons

différentes : par exemple, on a F^i/F^j , et $G^i/G^j : DF^2A \rightarrow DFA$.
On dispose en outre de

(3.1.2.8) filtration diagonale : $DF^2A \rightarrow DFA : (K, F, G) \rightarrow (K, \delta(F, G))$,
avec $\delta(F, G)^p = \sum_{i+j=p} F^i \cap G^j = \bigcap_{i+j=p+1} F^i + G^j$, et

$$(3.1.2.9) \quad Gr_{\delta(F, G)}^p = \bigoplus_{i+j=p} Gr_F^i Gr_G^j .$$

3.1.3. Soit A une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs. Pour K dans DFA et L dans D^+FA , on dispose d'un objet naturel $RHom(K, L)$ dans $DFAb$. Si les composantes de L , supposé borné inférieurement, sont de gradué injectif, $RHom(K, L)$ est l'image dans $DFAb$ du complexe filtré $Hom(K, L)$ donné par la règle habituelle

$$Hom^n(K, L) = \prod_{j-i=n} Hom(K^i, L^j) ;$$

$f = (f_i) \in Hom^n(K, L)$ est dans F^k si $f_i(F^m K^i) \subset F^{m+k} L^{i+n}$ ($\forall i \forall m$).

On a

$$(3.1.3.1) \quad Gr_F^k RHom(K, L) = \prod_{m-n=k} RHom(Gr_F^n K, Gr_F^m L) \quad ([8] \text{ V } 1.4.9)$$

$$(3.1.3.2) \quad Hom_{DA}(\omega K, \omega L) = H^{\omega} RHom(K, L) \quad (\omega = \text{oubli de } F)$$

$$(3.1.3.3) \quad Hom_{DFA}(K, L) = H^{OF} RHom(K, L) \quad ([8] \text{ V } 1.4.6) .$$

Les complexes filtrés $RHom(K, L)$ et $F^{\circ} RHom(K, L)$ fournissent des suites spectrales

$$(3.1.3.4) \quad E_1^{pq} = \prod_{j-i=p} Hom^{p+q}(Gr_F^i K, Gr_F^j L) \Rightarrow Hom_{DA}^{p+q}(\omega K, \omega L) .$$

$$(3.1.3.5) \quad E_1^{pq} = \begin{cases} \text{m\^eme groupe si } p \geq 0 \\ 0 \text{ si } p < 0 \end{cases} \Rightarrow Hom_{DFA}^{p+q}(K, L) .$$

Comparant ces suites spectrales, on obtient (i) ci-dessous.

Proposition 3.1.4. Soient (K, F) , (L, F) comme ci-dessus.

(i) Si $Hom^n(Gr_F^i K, Gr_F^j L) = 0$ lorsque $n = 0$ ou -1 et $i > j$, par exemple si $Hom^n(Gr_F^i K[-i], Gr_F^j L[-j]) = 0$ pour $n < 0$, alors

$$Hom_{DFA}(K, L) \xrightarrow{\sim} Hom_{DA}(\omega K, \omega L) .$$

(ii) Si $\text{Hom}^n(\text{Gr}_F^i K, \text{Gr}_F^j L) = 0$ lorsque $n = 0$ ou 1 et $n+i-j < 0$, par exemple si $\text{Hom}^n(\text{Gr}_F^i K[i], \text{Gr}_F^j L[j]) = 0$ pour $n < 0$, alors

$$\text{Hom}_{\text{DFA}}(K, L) = E_2^{\infty} = \text{Ker}(d_1 : E_1^{\infty} \rightarrow E_1^{10}) .$$

Pour (i), utiliser le triangle $(F^0, \omega, F^{-\infty}/F^0)$ et la suite spectrale

$$\left. \begin{array}{l} E_1^{pq} \quad (\text{si } p < 0) \\ 0 \quad (\text{si } p \geq 0) \end{array} \right\} \Rightarrow H^{p+q} F^{-\infty}/F^0 \text{ RHom}(K, L)$$

pour obtenir la nullité de H^0 et H^{-1} de $F^{-\infty}/F^0$. Pour (ii), utiliser la suite spectrale (3.1.3.5).

3.1.5. Soient A une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs, \mathcal{D} une sous-catégorie triangulée pleine de D^+A , $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ une t-structure sur \mathcal{D} , \mathcal{D}^b la sous-catégorie de \mathcal{D} réunion des $\mathcal{D}^{[a,b]} = \mathcal{D}^{\leq b} \cap \mathcal{D}^{\geq a}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$. Soit \mathcal{D}^b_F (resp. \mathcal{D}^b_F) la sous-catégorie de D^+FA formée des objets de filtration finie (K, F) tels que les $\text{Gr}_F^i K$ soient dans \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}^b).

Pour définir les filtrations canoniques, il est commode de prendre les filtrations croissantes. On dira que (K, T) dans \mathcal{D}^b_F (avec T croissante) est canonique si les $(\text{Gr}_T^i K)[i]$ sont dans \mathcal{C} . Cela revient à demander que les $T_i K$, munis du morphisme naturel $T_i K \rightarrow K$ s'identifient aux $P_{\tau_{\leq i}} K$. On a alors $P_H^i K = (\text{Gr}_T^i K)[i]$.

Proposition 3.1.6 . Le foncteur ω : oubli de la filtration, de la catégorie \mathcal{D}^b_F des complexes filtrés canoniques dans \mathcal{D}^b , est une équivalence de catégories.

Que ω soit pleinement fidèle résulte aussitôt de 3.1.4.(i), et de ce que $\text{Hom}^n(A, B) = 0$ pour $n < 0$ et A, B dans \mathcal{C} . La surjectivité essentielle résulte de (3.1.2.7) appliqué à la suite des $P_{\tau_{\leq i}} K$.

3.1.7. Nous nous proposons de définir un foncteur $D^b(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}^b$. Nous le ferons en identifiant les complexes bornés d'objets de \mathcal{C} à des complexes filtrés particuliers, les complexes filtrés bêtes. Pour les définir, il est commode de prendre les filtrations décroissantes. On dira que (K, F) dans \mathcal{D}^b_F (avec F décroissante) est bête si les

$(\text{Gr}_F^i K)[i]$ sont dans C .

Soit (K, F) dans \mathcal{D}_F^b , et posons $K^i := (\text{Gr}_F^i K)[i]$. Les triangles distingués $(\text{Gr}_F^{i+1}, F^i/F^{i+2}, \text{Gr}_F^i)$ fournissent des morphismes de degré 1 $\text{Gr}_F^i K \xrightarrow{(1)} \text{Gr}_F^{i+1} K$, i.e. des morphismes $d^i : K^i \rightarrow K^{i+1}$. Le morphisme de triangles $(F^{i+1}/F^{i+3}, F^i/F^{i+3}, \text{Gr}_F^i) \rightarrow (\text{Gr}_F^{i+1}, F^i/F^{i+2}, \text{Gr}_F^i)$ montre que le morphisme de degré 1 : $\text{Gr}_F^i K \xrightarrow{(1)} \text{Gr}_F^{i+1} K$ se factorise par F^{i+1}/F^{i+3} , de sorte que $d^{i+1} \circ d^i = 0$. Ceci nous fournit un foncteur $G : \mathcal{D}_F^b \rightarrow C^b(\mathcal{D})$.

Proposition 3.1.8. Le foncteur G induit une équivalence de la catégorie $\mathcal{D}_{F, \text{bête}}^b$ des complexes filtrés bêtes avec $C^b(C)$.

Que G soit pleinement fidèle résulte aussitôt de 3.1.4 (ii) et de ce que $\text{Hom}^n(A, B) = 0$ pour $n < 0$ et A, B dans C : pour K, L dans $\mathcal{D}_{F, \text{bête}}^b$, on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_F}(K, L) = \text{Ker}(\prod \text{Hom}(K^i, L^i) \xrightarrow{d_1} \prod \text{Hom}(K^i, L^{i+1})) ;$$

on a $d_1(f) = df - fd$ (formule dont nous n'avons besoin qu'au signe près, et dont la vérification est laissée au lecteur), et $\text{Hom}_{\mathcal{D}_F}(K, L)$ s'identifie donc au groupe des morphismes de complexes de K^* dans L^* .

Prouvons la surjectivité essentielle. Soit donc $0 \rightarrow K^a \rightarrow \dots \rightarrow K^b \rightarrow 0$ ($a \leq b$) un complexe borné d'objets de C , et cherchons un complexe filtré bête (K, F) dont il soit l'image par G .

lère solution. Ecrivons chaque K^i comme l'image dans D^+A d'un complexe $(K^{i,j}, d^i)$ borné inférieurement d'objets injectifs de A , et réalisons les morphismes $d^i : K^i \rightarrow K^{i+1}$ par des morphismes de complexes $d^{i,j}$.

Tout complexe filtré X du type suivant répond au problème :

$$X^n = \bigoplus_{i+j=n} K^{i,j}$$

$$F^p X^n = \bigoplus_{i+j=n, i \geq p} K^{i,j}$$

$$d = (-i)^i d^i + d^{i+1} r, \text{ avec } r \text{ de filtration } \geq 2, \\ \text{i.e. tel que avec } r F^p \subset F^{p+2}.$$

tel que $f = \text{Gr}(\tilde{f})$.

Notons $F[n]$ la filtration translaturée : $F[n]^i = F^{n+i}$ (3.1.2.6). Le cône (dans $\mathcal{D}F$) sur le morphisme composé

$$(A, F[1]) \xrightarrow{\text{id}_A} (A, F) \xrightarrow{\tilde{f}} (B, F)$$

répond au problème posé.

3.1.9. Nous appellerons "réalisation" le foncteur $\text{real} := \omega G^{-1} : C^b(C) \rightarrow \mathcal{D}^b$ qui à chaque complexe borné K^* d'objets de C associe l'objet de \mathcal{D}^b déduit par oubli de la filtration du complexe bête (K, F) dont K^* est l'image par G :

$$(3.1.9.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{F, \text{bête}}^b & \xrightarrow[G \cong]{} & C^b(C) \\ \omega \searrow & & \swarrow \\ & \mathcal{D} & \end{array} \quad \text{real}$$

Si (K, F) est bête, $(K[1], F[1])$ l'est aussi, avec
 (3.1.9.2) $(\text{Gr}_{F[1]}^i K[1])[i] = (\text{Gr}_F^{i+1} K)[i+1]$.

Les isomorphismes (3.1.9.2) rendent anticommutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} (\text{Gr}_{F[1]}^i K[1])[i] & \xrightarrow{d} & (\text{Gr}_{F[1]}^{i+1} K[1])[i+1] \\ \parallel & \text{---} & \parallel \\ (\text{Gr}_F^{i+1} K)[i+1] & \xrightarrow{d} & (\text{Gr}_F^{i+2} K)[i+2] \end{array} ,$$

i.e. définissent un isomorphisme

$$G(K[1], F[1]) = (GK)[1] ,$$

d'où un isomorphisme

$$(3.1.9.3) \quad \text{real}(K^*[1]) = (\text{real } K^*)[1] .$$

Proposition 3.1.10 . Le foncteur gradué (3.1.9.3) $\text{real} : C^b(C) \rightarrow \mathcal{D}^b$ se factorise par un foncteur exact encore noté $\text{real} : \mathcal{D}^b(C) \rightarrow \mathcal{D}^b$.

Lemme 3.1.11 . $\text{real} : C^b(C) \rightarrow \mathcal{D}^b$ se factorise par $K^b(C)$.

Soient K^* et L^* dans $C^b(C)$, images par G de (K, F) et

(L, F) dans $\mathcal{D}F_{\text{bête}}$. Le lemme résulte du diagramme commutatif suivant, extrait du morphisme de suites spectrales (3.1.3.5) \rightarrow (3.1.3.4) :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}^b} (K^*, L^*) = E_2^{\text{OO}} \text{ de (3.1.3.5)} & \xrightarrow[\text{(3.1.4 (ii))}]{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{D}F} ((K, F), (L, F)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{K}^b} (K^*, L^*) = E_2^{\text{OO}} \text{ de (3.1.3.4)} & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}} (K, L) \end{array}$$

Lemme 3.1.12. Le foncteur $\text{real} : \mathcal{K}^b(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ transforme triangles distingués en triangles distingués.

Soit $f : (K, F) \rightarrow (L, F)$ un morphisme de complexes filtrés dans $\mathcal{D}F$, et soit \tilde{F} la filtration sur le cône $C(f)$ de f pour laquelle $\tilde{F}^i C(f)^m = F^i L^n \oplus F^{i+1} K^{n+1} : (C(f), \tilde{F})$ est le cône de $(K, F[1]) \rightarrow (K, F) \rightarrow (L, F)$. L'isomorphisme naturel $\text{Gr}_F^1 C(F) = \text{Gr}_F^{i+1} K[1] \oplus \text{Gr}_F^i L$ donne lieu à un isomorphisme $\text{GC}(f) = C(G(f))$. En particulier, si (K, F) et (L, F) sont bêtes, $(C(f), F)$ l'est aussi et $C(\omega f) = \omega C(f)$ s'identifie à $\text{real}(C(f))$. Plus précisément, le triangle naturel $(K, L, C(f))$ s'identifie à l'image par real de $(G(K), G(L), C(G(f)))$. Ceci prouve 3.1.12.

Lemme 3.1.13. Soit $\Sigma : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans \mathcal{C} , considérée comme un complexe concentré en degrés 0, 1, 2. On a $\text{real}(\Sigma) = 0$.

On peut représenter Σ par une suite exacte courte Σ^* de complexes $A^* \rightarrow B^* \rightarrow C^*$ d'objets de \mathcal{A} . Traitons Σ^* comme un double complexe (de premier degré valant 0, 1 et 2 sur A^*, B^*, C^*). Le complexe simple associé $\underline{\Sigma}^*$, filtré par le premier degré, est bête, de gradué Σ . On a donc $\underline{\Sigma}^* = \text{real}(\Sigma)$, et on conclut en observant que $\underline{\Sigma}^*$ est acyclique, puisque ses lignes le sont.

3.1.14. Construction d'isomorphismes $H^i = {}^p H^i \cdot \text{real}$.

Soit K^* dans $\mathcal{C}^b(\mathcal{C})$. Le tronqué $\tau_{\leq i} K^*$ est défini par $(\tau_{\leq i} K^*)^j = K^j$ pour $j < i$, $\text{Ker}(d)$ pour $j = i$ et 0 pour $j > i$. Définissons $\tau'_{\leq i} K^*$ par $(\tau'_{\leq i} K^*)^j = K^j$ pour $j \leq i$, $\text{Im } d$ pour $j = i+1$ et 0 pour $j > i+1$. Le cône du morphisme d'inclusion $\tau_{\leq i} K^* \rightarrow \tau'_{\leq i} K^*$ est homotope au complexe $\text{Ker}(d) \rightarrow K^i \rightarrow \text{Im } d$ (degrés $i-1, i, i+1$). D'après 3.1.13, la réalisation de ce dernier

complexe est nulle, et d'après 3.1.12 le morphisme

$$\text{real}(\tau_{\leq i} K^*) \longrightarrow \text{real}(\tau'_{\leq i} K^*)$$

est donc un isomorphisme.

Nous allons construire un isomorphisme entre un cône sur $\text{real}(\tau_{\leq i-1} K^*) \longrightarrow \text{real}(\tau_{\leq i} K^*)$ et $H^i K^*[-i]$. Ceci à la fois prouvera que les $\text{real}(\tau_{\leq i} K^*)$ s'identifient aux $\tau_{\leq i}(\text{real } K^*)$ et identifiera $H^i K^*$ à $P_{H^i} \text{real } K^*$.

On peut remplacer $\tau_{\leq i-1} K^*$ par $\tau'_{\leq i-1} K^*$. Le cône cherché est alors (1.3.12) la réalisation du cône du morphisme $\tau'_{\leq i} K^* \rightarrow \tau_{\leq i} K^*$. Ce cône est homotope au complexe réduit aux degrés $i-1$ et i : $\text{Im}(d^{i-1}) \rightarrow \text{Ker}(d^i)$, i.e. au cône de

$$\text{Im}(d^{i-1})[i] \longrightarrow \text{Ker}(d^i)[i] \quad ,$$

et sa réalisation est un cône sur

$$\text{Im}(d^{i-1})[i] \longrightarrow \text{Ker}(d^i)[i] \quad .$$

Ce cône est unique à isomorphisme unique près (cf. 1.2.3). C'est $H^i K^*[i]$.

3.1.15. Fin de la preuve de 3.1.10. Il reste à prouver que si $f : K^* \rightarrow L^*$ est un quasi-isomorphisme, $\text{real}(f)$ est un isomorphisme dans \mathcal{D}^b . Le système des foncteurs $P_{H^i} : \mathcal{D}^b \rightarrow \mathcal{C}$ étant conservatif (1.3.7), il suffit de vérifier que les $P_{H^i} \text{real}(f)$ sont des isomorphismes ; les isomorphismes 3.1.14 les identifient aux $H^i(f)$, qui sont des isomorphismes par hypothèse.

Proposition 3.1.16 . Pour que le foncteur $\text{real} : \mathcal{D}^b \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^b$ soit une équivalence de catégories, il faut et suffit que, quels que soient A et B dans \mathcal{C} , $n > 0$, et $f \in \text{Hom}(A, B[n])$, il existe dans \mathcal{C} un monomorphisme $B' \hookrightarrow B$ qui efface f .

Pour A fixe, considérons le morphisme de δ -foncteurs $\text{real} : \text{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{C}}(A, B[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[n])$. Les $\text{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{C}}(A, B[n])$ sont les $\text{Ext}^n(A, B)$ de Yoneda, dans \mathcal{C} . Ils sont caractérisés par les propriétés d'être nuls pour $n < 0$, de coïncider avec $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ pour $n = 0$, et d'être effaçables au sens 3.1.16 pour $n > 0$: la condition d'effaçabilité de 3.1.16 équivaut à ce que pour A, B dans \mathcal{C} et

$n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Hom}_{D_C}(A, B[n]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[n]) \quad .$$

Tout objet de $D^b C$ se dévissant en objets de C , elle implique que real est pleinement fidèle.

Il reste à montrer que si real est pleinement fidèle, il est essentiellement surjectif. Prouvons par récurrence sur $\ell = b-a$ que $\mathcal{D}^{[a,b]}$ est dans l'image essentielle. Pour $\ell = 0$, $C[a]$ est en effet dans l'image essentielle. Si $\ell \geq 1$, soit c tel que $a \leq c < b$. Un objet K de $\mathcal{D}^{[a,b]}$ donne lieu à un triangle $(\tau_{<c} K, K, \tau_{>c} K)$ et l'hypothèse de récurrence assure que $\tau_{<c} K$ et $\tau_{>c} K$ sont dans l'image essentielle. Par pleine fidélité, le morphisme $d : \tau_{>c} K \rightarrow (\tau_{<c} K)[1]$ est de la forme $\text{real}(\delta)$, et $K[1]$ est isomorphe à l'image par real d'un cône sur δ .

Remarque 3.1.17. (i) Si $\text{Hom}_{D_C}(A, B[n]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[n])$ pour A, B dans C et $n < N$, on a $\text{Hom}_{D_C}(A, B[N]) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[N])$, et l'image consiste des f tels qu'il existe $A' \twoheadrightarrow A$ et $B \hookrightarrow B'$ tels que f soit d'image nulle dans $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A', B'[N])$.

(ii) On a toujours $\text{Hom}_{D_C}(A, B[n]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[n])$ pour $n \leq 1$: le cas $n \leq 0$ est trivial, et le cas $n = 1$ provient de ce que C est stable par extensions: toute flèche de degré 1 $d : A \xrightarrow{(1)} B$ est la flèche de degré 1 d'un triangle distingué $B \xrightarrow{b} E \xrightarrow{a} A \xrightarrow{d}$, et tant $a : E \twoheadrightarrow A$ que $b : B \hookrightarrow E$ effacent d .

3.2. Localisation.

3.2.1. Soit S un site, annelé par un faisceau d'anneaux \mathcal{O} . On suppose pour simplifier que les limites projectives finies existent dans S , et on note S un objet final. Pour tout $U \in \text{Ob } S$, on note $D(U)$ la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des faisceaux de \mathcal{O} -modules sur U (i.e. sur le site $S|U$). Pour $f : V \rightarrow U$ dans S , on dispose d'un foncteur "image inversé" $f^* : D(U) \rightarrow D(V)$. Pour K dans $D(U)$ et L dans $D(V)$, un f -morphisme de K dans L est un morphisme $f^* K \rightarrow L$.

Les $D(U)$ ne forment en général pas un champs sur S : ni les objets, ni les morphismes de la catégorie dérivée $D(S)$ ne sont de nature locale sur S . On a toutefois la

Proposition 3.2.2 . Soient K dans $D^-(S)$ et L dans $D^+(S)$. Supposons le faisceau $\text{Ext}^i(K,L)$ nul pour $i < 0$. Alors, le préfaisceau $U \mapsto \text{Hom}_{D(U)}(K|U, L|U)$ est un faisceau.

La suite spectrale du local au global

$$E_2^{pq} = H^p(S, \text{Ext}^q(K,L)) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(K,L)$$

fournit un isomorphisme

$$\text{Hom}_{D(S)}(K,L) = H^0(S, \text{Hom}(K,L)) \quad .$$

La même formule vaut avec S remplacé par U quelconque dans S , d'où la proposition

3.2.3. Le but du paragraphe est de compléter ce résultat en montrant que, sous des hypothèses convenables de nullité d' Ext^i négatifs, il suffit de se donner localement un objet de $D^b(S)$ pour se le donner en fait.

Soit C un crible couvrant l'objet final S de S . Appelons objet de $D(S)$ donné C-localement la donnée pour tout U dans C de K_U dans $D(U)$ et pour tout morphisme $v : V \rightarrow U$ entre objets de C d'un v -morphisme $\varphi_v : K_U \rightarrow K_V$ défini par un isomorphisme $\varphi'_v : v^* K_U \xrightarrow{\sim} K_V$. On exige que pour un morphisme composé vw on ait $\varphi_{vw} = \varphi_w \circ \varphi_v$.

Pour K dans $D(S)$, le système de ses restrictions $K|U$ pour U dans C est un objet de $D(S)$ donné C-localement. Réciproquement, on a :

Théorème 3.2.4 . Soit (K_U) un objet de $D(S)$ donné C-localement, avec $H^i K_U = 0$ pour i en dehors d'un intervalle indépendant de U . Supposons que, quel que soit U dans C , on ait, sur U $\text{Ext}^i(K_U, K_U) = 0$ pour $i < 0$. Alors, il existe un objet K de $D^b(S)$ (unique d'après 3.2.2) donnant naissance à (K_U) .

L'assertion d'unicité résulte de 3.2.2. Pour prouver l'existence nous nous inspirerons de la preuve de 3.1.8 et de la théorie de la descente cohomologique (SGA4 VI B, résumé dans [2] § 5).

3.2.5. Version simpliciale du problème . Quitte à changer de site

sans changer de topos, on peut supposer que le crible C est engendré par un objet U de S , couvrant l'objet final. Il revient alors au même de se donner C -localement un objet de $D(S)$, ou de se donner un objet de $D(U)$, et un isomorphisme entre ses deux images réciproques sur $U \times U$ (produit fibré sur S) vérifiant la condition de cocycle usuelle sur $U \times U \times U$.

Soit Δ_n ($n \geq -1$) l'intervalle $[0, n]$ de \mathbb{N} , et considérons le système simplicial des puissances U^{Δ_n} de U , ($n \geq 0$). Seul nous servira le système simplicial strict sous-jacent (on oublie les dégénérescences). Un système simplicial strict d'objets K^n dans les $D(U^{\Delta_n})$ ($n \geq 0$) est la donnée, pour chaque $n \geq 0$, de K^n dans $D(U^{\Delta_n})$, et pour chaque injection croissante $\alpha : \Delta_n \hookrightarrow \Delta_m$ induisant une projection $p(\alpha) : U^{\Delta_m} \longrightarrow U^{\Delta_n}$ - d'un $p(\alpha)$ -morphisme $\varphi(\alpha)$ de K^n dans K^m , i.e. d'un morphisme $\varphi(\alpha)' : p(\alpha)^* K^n \longrightarrow K^m$. On exige que $\varphi(\text{Id}) = \text{Id}$, et que $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha) \circ \varphi(\beta)$ (i.e. $\varphi(\alpha\beta)' = \varphi(\alpha)' \circ p(\alpha)^* \varphi(\beta)'$). Un système simplicial strict est dit cartésien si les $\varphi(\alpha)'$ sont des isomorphismes.

Il revient encore au même de se donner C -localement un objet de $D(S)$, ou de se donner un système simplicial strict cartésien d'objets K^n dans les $D(U^{\Delta_n})$. Il nous faut montrer que si un tel système vérifie

- α) $H^i K^0 = 0$ pour $|i|$ assez grand et
- β) sur U , on a $\text{Ext}^i(K^0, K^0) = 0$ pour $i < 0$,
alors K^* provient par restriction de K dans $D^b(S)$.

La preuve sera donnée en 3.2.18, après quelques préliminaires simpliciaux.

3.2.6. Soient (Δ) la catégorie des ensembles finis $\Delta_n = [0, n]$ ($n \geq -1$) et des injections croissantes entre eux, $(\Delta)^+$ la sous-catégorie des Δ_n ($n \geq 0$), A une catégorie fibrée et cofibrée sur (Δ) , et A^+ son image inverse sur $(\Delta)^+$. Pour $\alpha : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$ une flèche de (Δ) , nous poserons $s(\alpha) = n$ et $b(\alpha) = m$. Notons $A(n)$ la fibre de A au-dessus de Δ_n . Eu égard au cas qui nous intéresse où $A(n)$ est la catégorie des faisceaux de \mathcal{O} -modules sur U^{Δ_n} , quel que soit $\alpha : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, on note $(p(\alpha)^*, p(\alpha)_*)$, ou simplement (α^*, α_*) , la paire de foncteurs adjoints tels que

$$\text{Hom}_\alpha(F, G) = \text{Hom}_{A(m)}(p(\alpha)^* F, G) = \text{Hom}_{A(n)}(F, p(\alpha)_* G).$$

On suppose que les catégories $A(n)$ sont additives, et que les foncteurs $p(\alpha)^*$ et $p(\alpha)_*$ sont additifs.

De la catégorie A sur (Δ) se déduit une série de catégories sur (Δ) , (ou sur $(\Delta)^+$ par restriction) de fibres les catégories $C(A(n))$, $K(A(n)), \dots$. Pour toute catégorie B sur $(\Delta)^+$, $\pi: B \rightarrow (\Delta)^+$, une section de B sur $(\Delta)^+$, ou système simplicial strict d'objets des catégories fibres $B(n)$, est un foncteur $s: (\Delta)^+ \rightarrow B$ tel que $\pi \circ s = \text{Id}$; c'est une famille d'objets $B_n \in \text{Ob } B(n)$ et de flèches $\varphi(\alpha)$ où, pour $\alpha: \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, $\varphi(\alpha)$ est une α -flèche de B_n dans B_m . Il est exigé que $\varphi(\text{Id}_{\Delta_n}) = \text{Id}_{B_n}$ et que $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$. Si B est cofibrée sur $(\Delta)^+$, la donnée des $\varphi(\alpha)$ équivaut à celle d'un morphisme $\varphi(\alpha)': p(\alpha)^*B_n \rightarrow B_m$ dans $B(m)$ et on dit que la section B_* est cartésienne si les $\varphi(\alpha)'$ sont des isomorphismes. Certains préféreraient dire cocartésien.

3.2.7. Soit $\text{tot}(A^+)$ la catégorie additive suivante :

objets : familles $(A^n)_{n \geq 0}$, A^n dans $A(n)$.

flèches : $\text{Hom}((A^n), (B^n)) = \prod_{\alpha} \text{Hom}_{\alpha}(A^{s(\alpha)}, B^{b(\alpha)})$

composition : $((f) \circ (g))_{\alpha} = \sum_{\alpha = \beta\gamma} f_{\beta} \circ g_{\gamma}$.

On identifie A^+ à une sous-catégorie de $\text{tot}(A^+)$ par $(A \text{ dans } A(n)) \mapsto (\text{famille } A^i, \text{ avec } A^n = A \text{ et } A^m = 0 \text{ pour } m \neq n)$.

3.2.8. Décrivons les complexes (K, d) d'objets de $\text{tot}(A^+)$. Par définition, chaque composante K^i de K est une famille $(K^i)^j$ d'objets des $A(j)$. Renombrons-les, en posant

$$K^{n,m} = (K^{n+m})^n.$$

Pour $\alpha: \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, nous noterons $d(\alpha)$ la α -composante de d , un système de α -morphisms $K^{n,p} \rightarrow K^{m,p+n-m+1}$ ou, comme nous dirons, une α -application de degré $n-m+1$ de $K^{n,*}$ dans $K^{m,*}$.

Soit L la filtration décroissante de K donnée par

$$(L^p K)^{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ K^{n,m} & \text{si } p \leq n \end{cases},$$

et posons

$$(K^{n,*}, d^n) = (\text{Gr}_L^n K)[n] .$$

C'est un complexe dans $A(n)$, de composantes les $K^{n,m}$, et de différentielle $(-1)^n d(\text{Id}_{\Delta_n})$. Pour chaque morphisme de face

$\partial_i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$, posons $\partial_i^* = (-1)^i d(\partial_i)$. Les ∂_i^* sont des ∂_i -morphisms de complexes $K^{n,*} \rightarrow K^{n+1,*}$ et, pour $0 \leq i < j \leq n+2$, les $(\partial_j \partial_i)$ -morphisms $\partial_j^* \partial_i^*$ et $\partial_i^* \partial_{j-1}^*$ sont homotopes, une homotopie étant donnée par $\pm d(\partial_j \partial_i)$. Plus généralement, pour chaque $\alpha : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, l'équation $d \circ d = 0$ fournit l'identité

$$(3.2.8.1) \quad \sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta)d(\gamma) = 0 .$$

Notons \sum' une somme où il n'est pas permis aux indices d'être une application identique. Pour $m > n$, l'identité (3.2.8.1) se réécrit

$$(3.2.8.2) \quad \sum'_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta)d(\gamma) = (-1)^{m+1} (d^n d(\alpha) + (-1)^{m-n} d(\alpha) d^n) ,$$

et exprime que la somme au membre de gauche est un α -morphisme de complexes de degré $n-m+1$, homotope à zéro par l'homotopie $(-1)^{m+1} d(\alpha)$.

Réciproquement, un système de complexes $K^{n,*} \in \text{Ob } C(A(n))$ ($n \geq 0$) et d'applications $d(\alpha)$ (α flèche de $(\Delta)^+$), où $d(\alpha)$ est une α -application de degré $s(\alpha)-b(\alpha)+1$ de $K^{s(\alpha),*}$ dans $K^{b(\alpha),*}$, où $d(\text{Id}_{\Delta_n})$ est la différentielle de $K^{n,*}$, au signe $(-1)^n$ près, et où le système des $d(\alpha)$ vérifie (3.2.8.2), provient de (K, d) dans $C(\text{tot } A^+)$. Dans ce langage, un morphisme de complexes $f : K \rightarrow L$ est un système d'applications $f(\alpha)$, (α flèche de $(\Delta)^+$), où $f(\alpha)$ est une α -application de degré $s(\alpha)-b(\alpha)$ de $K^{s(\alpha),*}$ dans $L^{b(\alpha),*}$, et où pour tout α

$$(3.2.8.3) \quad \sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta)f(\gamma) = \sum_{\alpha=\beta\gamma} f(\beta)d(\gamma) .$$

Voici une condition suffisante pour qu'un système simplicial strict (K^n) d'objets des catégories $K(A(n))$ provienne d'un objet de $K(\text{tot } A^+)$.

Proposition 3.2.9 . Si, quels que soient $n, m \geq n+3$ et $\alpha : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, morphisme dans $(\Delta)^+$, on a $\text{Hom}^1(p(\alpha)^* K^n, K^m) = 0$ pour $i < 0$, alors le système simplicial strict des $K^n \in \text{Ob } K(A(n))$ provient d'un objet de $K(\text{tot } A^+)$.

Réalisons chaque K^n comme un complexe $(K^n, *, d^n)$ et chaque ∂_i^* comme un ∂_i -morphisme de complexes, encore noté $\partial_i^* : K^n, * \rightarrow K^{n+1}, *$. Pour $\text{Id} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$, posons $d(\text{Id}) = (-1)^n d^n$, et pour chaque $\partial_i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$, posons $d(\partial_i) = (-1)^i \partial_i^*$. Par hypothèse, pour $0 \leq i < j \leq n+2$, $\partial_j^* \partial_i^*$ et $\partial_i^* \partial_{j-1}^*$ sont homotopes. Il existe donc $d(\partial_j \partial_i)$ vérifiant (3.2.8.2). Montrons l'existence d'un système de $d(\alpha)$ vérifiant (3.2.8.2) et prolongeant le système des $d(\alpha)$ déjà choisis. On procède inductivement : supposons les $d(\alpha)$ déjà choisis pour $b(\alpha) - s(\alpha) \leq k$ ($k \geq 2$), et construisons les pour $b(\alpha) - s(\alpha) = k+1$. Il suffit de montrer que

(*) La somme $S(\alpha) = \sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta)d(\gamma)$ est un α -morphisme de complexes de degré $-k+1 = s(\alpha) - b(\alpha) + 2$ de $K^{s(\alpha)}$ dans $K^{b(\alpha)}$.

En effet, l'hypothèse assure alors que $S(\alpha)$ est homotope à zéro, i.e. l'existence de $d(\alpha)$ vérifiant (3.2.8.2). Prouvons (*). Soit D la somme des $d(\beta)$ pour $b(\beta) - s(\beta) \leq k$, et exprimons que $(D \circ (D \circ D))(\alpha) = ((D \circ D) \circ D)(\alpha)$. Le membre de gauche I vaut $\sum_{\alpha=\beta\gamma, \beta \neq \alpha} d(\beta)(D \circ D)(\gamma)$. L'hypothèse de récurrence assure que $(D \circ D)(\gamma) = 0$ pour $\gamma \neq \alpha$, de sorte que $I = d(\text{Id})S(\alpha)$. De même, le membre de droite est $S(\alpha)d(\text{Id})$, et donc

$$d(\text{Id})S(\alpha) = S(\alpha)d(\text{Id}) ,$$

ce qui équivaut à (*).

3.2.10. Soit ε_n l'unique application de Δ_{-1} dans Δ_n . Pour tout A dans $A(-1)$, le système des $p(\varepsilon_n)^* A$ est un objet simplicial strict de A^+ , et définit un complexe dans $\text{tot } A^+$. Cette construction s'étend aux complexes : pour tout complexe $K \in \text{Ob } C(A(-1))$, nous noterons $\varepsilon^* K$ le complexe dans $\text{tot } A^+$ défini par le système simplicial strict des $p(\varepsilon_n)^* K$, et pour lequel les $d(\alpha)$ supérieurs (relatifs aux α tels que $b(\alpha) - s(\alpha) > 1$) sont nuls. On gradue ce foncteur par l'isomorphisme

$$\begin{aligned} (-1)^n : (\varepsilon^*(K[1]))^{n,m} &= p(\varepsilon_n)^* K^{m+1} \rightarrow ((\varepsilon^* K)[1])^{n,m} = \\ &= p(\varepsilon_n)^* K^{m+1} . \end{aligned}$$

Pour ce choix, le foncteur encore noté $\varepsilon^* : K(A(-1)) \rightarrow K(\text{tot } A^+)$, déduit de ε^* par passage au quotient, transforme triangles distingués en triangles distingués.

3.2.11. Appelons $C(\text{tot } A^+)^+$ (resp. $K(\text{tot } A^+)^+$) la sous-catégorie pleine de $C(\text{tot } A^+)$ (resp. $K(\text{tot } A^+)$) formée des K tels que, pour M assez petit, on ait $K^{n,m} = 0$ pour $m < M$. Pour K dans $C(\text{tot } A^+)^+$, on note $\epsilon_* K$ le complexe (dans $C^+(A(-1))$) défini par $(\epsilon_* K)^p = \bigoplus_{n+m=p} p(\epsilon_n)_* K^{n,m}$ (la somme est finie) et $d = \sum d(\alpha)$ (on a abusivement noté $d(\alpha)$ le morphisme déduit de $d(\alpha)$ par image directe). On dispose d'un isomorphisme évident $\epsilon_*(K[1]) = (\epsilon_* K)[1]$, et le foncteur de $K(\text{tot } A^+)^+$ dans $K^+(A(-1))$ déduit de ϵ_* par passage au quotient transforme triangles distingués en triangles distingués. Pour K dans $C^+(A(-1))$, le système des morphismes d'adjonction $K^n \rightarrow p(\epsilon_0)_* p(\epsilon_0)^* K^n$ est un morphisme

$$(3.2.11.1) \quad a : K \longrightarrow \epsilon_* \epsilon^* K \quad .$$

Proposition 3.2.12 . Les foncteurs $\epsilon^* : K^+A(-1) \longrightarrow K(\text{tot } A^+)^+$ et $\epsilon_* : K(\text{tot } A^+)^+ \longrightarrow K^+A(-1)$ forment un couple de foncteurs adjoints, avec a (3.2.11.1) pour morphisme d'adjonction.

Pour toute catégorie additive \mathcal{B} , le groupe des homomorphismes de K dans L , dans $K(\mathcal{B})$, est le H^0 du complexe $\text{Hom}(K, L)^\cdot$ de composantes

$$\text{Hom}(K, L)^\cdot = \prod_{m-n=d} \text{Hom}(K^n, L^m)$$

et de différentielle donnée sur $\text{Hom}(K, L)^\cdot$ par $d(f) = d \circ f - (-1)^d f \circ d$. Nous précisons 3.2.12 en montrant que pour K dans $K^+(A(-1))$ et L dans $K(\text{tot } A^+)^+$, le morphisme induit par a :

$$(3.2.12.1) \quad \text{Hom}(\epsilon^* K, L)^\cdot \longrightarrow \text{Hom}(\epsilon_* \epsilon^* K, \epsilon_* L)^\cdot \longrightarrow \text{Hom}(K, \epsilon_* L)^\cdot$$

est un quasi-isomorphisme. Filtrons L par une filtration décroissante de quotients successifs les complexes réduits à un $L^{n,m}$ (par exemple, filtrer L par les $\bigoplus_{n+m > A} L^{n,m}$, et les quotients successifs $\bigoplus_{n+m=A} L^{n,m}$ par les $\bigoplus_{n > B} L^{n, A-n}$; cette deuxième filtration est finie). Sur les complexes Hom^\cdot , on récupère une filtration séparée et complète, et il suffit de montrer que (3.2.12.1) devient un quasi-isomorphisme après passage au gradué : on peut supposer, et on suppose, L concentré en un seul bidegré. Filtrons K par la filtration par les $\sigma_{>n}$. Cette fois, la filtration obtenue sur Hom^\cdot est finie degré par degré, et on se ramène à supposer K concentré en un seul degré. Par translation, on se ramène enfin à supposer K réduit à un objet A en degré 0,

et L réduit à un objet B de $A(n)$, en bidegré $(n,0)$. On a alors

$$\text{Hom}(\varepsilon_* K, L)^d = \prod_{\substack{\alpha: \Delta_{n-d} \rightarrow \Delta_n \\ n-d \geq 0}} \text{Hom}_{\varepsilon_n}(A, B) :$$

le complexe $\text{Hom}(\varepsilon_* K, L)^*$ est le produit tensoriel de $\text{Hom}_{\varepsilon_n}(A, B)$ par le complexe des chaînes non dégénérées du simplexe type Δ_n , décalé de $-n$. Le cône de (3.2.12.1), translaté par $[-1]$, est donné par la même formule, sans la restriction $n-d \geq 0$, et il reste à utiliser que le complexe augmenté des chaînes non dégénérées du simplexe type Δ_n est homotope à zéro.

3.2.13. Bien que cela soit inutile pour la suite, nous allons exhiber un morphisme de complexes représentant le morphisme d'adjonction de $\varepsilon_* \varepsilon_* L$ dans L (3.2.13 et 3.2.14). Un morphisme de complexes \underline{b} de $\varepsilon_* \varepsilon_* L$ dans L est (3.2.8) un système de α -applications de degré $s(\alpha) - b(\alpha)$, $\underline{b}(\alpha) : p(\varepsilon_{S(\alpha)})^*(\varepsilon_* L) \rightarrow L^{b(\alpha),*}$, vérifiant (3.2.8.3). Une α -application de $p(\varepsilon_{S(\alpha)})^*(\varepsilon_* L)$ dans $L^{b(\alpha),*}$ s'identifie à une $\varepsilon_{b(\alpha)}$ -application $b'(\alpha)$ de $\varepsilon_* L$ dans $L^{b(\alpha),*}$. Nous écrivons formellement $\underline{b} = \sum_{\alpha} b'(\alpha) \otimes \alpha$, identifiant ainsi \underline{b} à un élément du produit sur n des groupes

$$\{\varepsilon_n\text{-application de } \varepsilon_* L \text{ dans } L^{n,*}\} \otimes \{\text{chaînes non dégénérées de } \Delta_n\} .$$

A son tour, une ε_n -application b' de degré s de $\varepsilon_* L$ dans $L^{n,*}$ s'identifie à une famille de ε_n -applications

$b'_p : p(\varepsilon_p)_* L^{p,*} \rightarrow L^{n,*}$, de degrés $s+p$. Nous ne considérons que des applications b'_p somme d'applications des types suivants, indexés par $\beta : \Delta_p \rightarrow \Delta_n$: le composé de la ε_p -application naturelle de $\varepsilon_p L^{p,*}$ dans $L^{p,*}$, et d'une β -application $b''(\beta) : L^{p,*} \rightarrow L^{n,*}$. Nous écrivons formellement $b' = \sum b''(\beta)$.

Au total, ceci nous amène à chercher \underline{b} sous la forme

$$\underline{b} = \sum_{\alpha, \beta} b''(\alpha, \beta) \otimes \alpha ,$$

avec α et β de même but, $b''(\alpha, \beta)$ étant un β -morphisme de $L^{s(\beta),*}$ dans $L^{b(\beta),*}$, de degré $s(\alpha) - b(\alpha) + s(\beta) = (s(\beta) - b(\beta)) + s(\alpha)$. Pour chaque factorisation $\beta = \beta_1 \dots \beta_{s(\alpha)}$, on a à sa disposition une β -

application de ce degré : le composé des $d(\beta_i)$.

Nous allons montrer que le système suivant convient :

$$(3.2.13.1) \quad \underline{b} = \sum_{k,m} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} d(\beta_1) \dots d(\beta_k) \otimes (0, \beta_1(0), \beta_1 \beta_2(0), \dots, \beta_1 \dots \beta_k(0)) .$$

La somme porte sur k, m et sur les suites de k applications composables dont le composé a pour but Δ_m . La suite vide ($k = 0$) est permise : pour chaque m , on a un terme $\text{Id}_{L, m, *}(0)$. On a noté (n_0, \dots, n_{k+1}) l'application $i \mapsto n_i$ de Δ_k dans Δ_m ; remplacer par 0 (ou omettre le terme) si cette application n'est pas strictement croissante.

Il s'agit de montrer que \underline{b} est un morphisme de complexes, et que \underline{b} correspond par l'adjonction (3.2.12) :

$$\text{Hom}(\varepsilon_* \varepsilon_* L, L) = \text{Hom}(\varepsilon_* L, \varepsilon_* L)$$

à l'application identique de $\varepsilon_* L$, i.e. que le morphisme de complexes composé

$$\varepsilon_* L \xrightarrow{a} \varepsilon_* \varepsilon_* L \xrightarrow{\varepsilon_* \underline{b}} \varepsilon_* L$$

est homotope à l'identité. On vérifie facilement que ce morphisme est même égal à l'identité : il ne dépend que des composantes $b'(\alpha) \otimes \alpha$ de \underline{b} , pour $\alpha : \Delta_0 \rightarrow \Delta_m$, et ces composantes sont du type $\text{Id}_{L, m, *}(0)$.

3.2.14. \underline{b} est un morphisme de complexes . L'identité à vérifier s'écrit $d\underline{b} = \underline{b}d$, i.e.

$$\begin{aligned} (*) \quad & \sum_{\alpha} \sum_{k, m=s(\alpha)} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} d(\alpha) d(\beta_1) \dots d(\beta_k) \otimes \alpha \circ (0, \beta_1(0), \dots, \beta_1 \dots \beta_k(0)) \\ &= \sum_{k, m} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} (-1)^k \sum_{\alpha} d(\beta_1) \dots d(\beta_k) d(\alpha) \otimes (0, \beta_1(0), \dots, \beta_1 \dots \beta_k(0)) \\ &+ \sum_{k, m} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} \sum_i (-1)^i d(\beta_1) \dots d(\beta_k) \otimes (0, \beta_1(0), \dots, \beta_1 \dots \beta_k(0)) \circ \partial_i . \end{aligned}$$

Les sommes sur $k, m, \beta_1, \dots, \beta_k$ sont comme en (3.2.13.1). La somme sur i va de 0 à k , sauf pour $k = 0$, où elle est vide. On notera que si $\underline{c} = (0, \beta_1(0), \dots, \beta_1 \dots \beta_k(0))$ est une chaîne dégénérée de Δ_m , on a $\sum (-i)^i \underline{c} \circ \partial_i = 0$ mod chaînes dégénérées. Pour vérifier l'identité

(*) , il suffit de montrer que pour chaque $k \geq 0$ (correspondant à k dans les deux premiers termes et à $k-1$ pour le troisième), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta_0, \dots, \beta_k} d(\beta_0) \dots d(\beta_k) \otimes (\beta_0(0), \beta_0 \beta_1(0), \dots, \beta_0 \dots \beta_k(0)) \\ & - (-1)^k \sum_{\beta_0, \dots, \beta_k} d(\beta_0) \dots d(\beta_k) \otimes (0, \beta_0(0), \dots, \beta_0 \dots \beta_{k-1}(0)) = \\ & = \sum_{\beta_0, \dots, \beta_k} \sum_{-1 \leq i \leq k} (-1)^{i+1} d(\beta_0) \dots d(\beta_k) \otimes (0, \beta_0(0), \dots, \beta_0 \dots \beta_i(0)^\wedge, \dots, \beta_0 \dots \beta_k(0)). \end{aligned}$$

Les sommes portent sur les chaînes de $k+1$ morphismes composables, et (n_0, \dots, n_k) désigne une application de Δ_k dans $\Delta_b(\beta_0)$ (et 0 si cette application n'est pas injective). Les termes au membre de gauche correspondent à $i = -1$ et $i = k$ au membre de droite. Pour conclure, il suffit de vérifier que pour chaque $k \geq 0$, chaque i ($-1 < i < k$) et chaque choix de $\beta_0, \dots, \beta_{i-1}$, du composé $\beta = \beta_i \beta_{i+1}$, et de $\beta_{i+2}, \dots, \beta_k$, choix qui suffit à fixer la chaîne $(0, \beta_0(0), \dots, \beta_0 \dots \beta_i(0)^\wedge, \dots, \beta_0 \dots \beta_k(0))$, on a

$$\sum_{\beta_i \beta_{i+1} = \beta} d(\beta_0) \dots d(\beta_k) = 0 .$$

Cela résulte de (3.2.8.1).

3.2.15. Supposons maintenant que les catégories $A(n)$ sont abéliennes, ont assez d'injectifs, et que les foncteurs $p(\alpha)^*$ sont exacts. Les foncteurs $p(\alpha)_*$ transforment donc injectifs en injectifs. Un morphisme $f : K \rightarrow L$ dans $C(\text{tot } A^+)$ sera appelé un quasi-isomorphisme si les $f(\text{Id}_{\Delta_n}) : K^{n,*} \rightarrow L^{n,*}$ sont des quasi-isomorphismes. Cette condition est invariante par homotopie. Elle s'énonce encore : les $\text{Gr}_+^n(f)$ sont des quasi-isomorphismes. La catégorie dérivée $D(\text{tot } A^+)^+$ est la catégorie déduite de $K(\text{tot } A^+)^+$ en inversant les quasi-isomorphismes.

Le foncteur ϵ^* passe trivialement aux catégories dérivées, et définit un foncteur exact

$$\epsilon^* : D^+(A(-1)) \longrightarrow D(\text{tot } A^+)^+ .$$

Le foncteur ϵ_* , lui, se dérive en

$$R\epsilon_* : D(\text{tot } A^+)^+ \longrightarrow D^+(A(-1)) \quad .$$

Pour calculer sa valeur en L dans $C(\text{tot } A^+)^+$, on remplace L par un complexe quasi-isomorphe $L' : L \xrightarrow{\sim} L'$, à composantes bihomogènes injectives, et on prend $\epsilon_* L'$. Il suffit en fait que le complexe quasi-isomorphe L' dans $C(\text{tot } A^+)^+$ vérifie, pour tout n , la condition suivante : $\epsilon_{n*} L'^{n,*} \xrightarrow{\sim} R\epsilon_{n*} L'^{n,*}$ dans $D^+(A(-1))$.

On déduit aussitôt de 3.2.12 que ces foncteurs ϵ^* et $R\epsilon_*$ forment encore une paire de foncteurs adjoints.

3.2.16. Les catégories $D(A(n))$ forment de façon naturelle une catégorie cofibrée sur $(\Delta)^+$. Pour chaque K dans $D(\text{tot } A^+)$, les $\text{Gr}_L^n K$ forment une section de cette catégorie cofibrée sur $(\Delta)^+$. Si K est de la forme $\epsilon^* K_{-1}$, avec $K_{-1} \in \text{Ob } DA(-1)$, cette section est cocartésienne : c'est le système des $p(\epsilon_n)^* K_{-1}$. Vu le contexte où nous sommes, nous dirons cartésien plutôt que cocartésien, et on appellera cartésien un objet K de $D(\text{tot } A^+)$ tel que les $\text{Gr}_L^n K[n]$, munis des ∂_1 -applications définies en 3.2.8, forment une section cartésienne du système des $D(A(n))$, i.e. tels que pour tout i les $H^i(\text{Gr}_L^n K[n])$ soient une section cartésienne de A^+ sur $(\Delta)^+$.

Théorème 3.2.17. Outre les hypothèses de 3.2.6 et 3.2.15, supposons que

a) Le foncteur $A \longmapsto (\epsilon_n^* A)_{n \geq 0}$ est une équivalence de catégories de $A(-1)$ avec la catégorie des sections cartésiennes de A^+ sur $(\Delta)^+$.

b) Pour tout A dans $A(-1)$, identifié à l'objet $A[0]$ de $D^+(A(-1))$, le morphisme d'adjonction

$$A \longrightarrow R\epsilon_* \epsilon^* A$$

est un isomorphisme.

Alors, les foncteurs ϵ^* et $R\epsilon_*$ sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre de $D^+(A(-1))$ avec la catégorie des objets cartésiens de $D(\text{tot } A^+)^+$.

Nous allons vérifier que pour K dans $D^+(A(-1))$ (resp. L un objet cartésien de $D(\text{tot } A^+)^+$, les morphismes d'adjonction respectifs

$$(3.2.17.1) \quad a : K \longrightarrow R\epsilon_* \epsilon^* K$$

$$(3.2.17.2) \quad \underline{b} : \epsilon^* R\epsilon_* L \longrightarrow L$$

sont des isomorphismes. Les objets K (resp. L) tels que (3.2.17.1) (resp. (3.2.17.2)) soit un isomorphisme forment une sous-catégorie triangulée de $D^+(A(-1))$ (resp. $D(\text{tot } A^+)^+$). Par hypothèse, (3.2.17.1) est un isomorphisme pour K de la forme $A[0]$. Par dévissage, c'est donc un isomorphisme pour tout K dans $D^b(A(-1))$. Enfin, pour tout i , $\tau_{\leq i} R\epsilon_* \epsilon^* K$ ne dépend que de $\tau_{\leq i} K$ et (3.2.17.1) est donc un isomorphisme pour tout K dans $D^+(A(-1))$.

Ceci suffit à assurer que ϵ^* est une équivalence de $D^+(A(-1))$ avec son image dans $D(\text{tot } A^+)^+$, et que pour L dans l'image le morphisme d'adjonction (3.2.17.2) est un isomorphisme. En effet, pour $L = \epsilon^* K$, l'isomorphisme $\epsilon^* K \xrightarrow{\sim} L$ correspond par adjonction à un isomorphisme $K \longrightarrow R\epsilon_* L$.

Si L dans $D(\text{tot } A^+)^+$ est cartésien, pour chaque i , la section $H^i_{L^{n,*}}$ de A^+ sur $(\Delta)^+$ est cartésienne, donc provient par hypothèse de h^i dans $A(-1)$. Définissons la filtration canonique de L par $(\tau_{\leq i} L)^{n,*} = \tau_{\leq i} (L^{n,*})$. On dispose alors, dans $D(\text{tot } A^+)^+$, de triangles distingués

$$\rightarrow \tau_{\leq i-1} L \longrightarrow \tau_{\leq i} L \longrightarrow \epsilon^*(h^i[-i]) \longrightarrow .$$

Si $h^i = 0$ pour $|i|$ assez grand, on en conclut par dévissage que (3.2.17.2) est un isomorphisme, i.e. que L est dans l'image de ϵ^* . Enfin, $\tau_{\leq i}(\epsilon^* R\epsilon_* L)$ ne dépend que de $\tau_{\leq i} L$, et de ce que (3.2.17.2) est un isomorphisme pour les $\tau_{\leq i} L$ résulte le cas général.

3.2.18. Preuve de 3.2.4. Avec les notations de 3.2.5, les catégories de faisceaux de \mathcal{O} -modules sur les $U^{\Delta n}$ ($n \geq 1$) sont les fibres d'une catégorie fibrée et cofibrée A sur (Δ) , vérifiant les hypothèses de 3.2.6 et 3.2.15. La catégorie $A(-1)$ est celle des faisceaux de \mathcal{O} -modules sur S . Les hypothèses de 3.2.17 sont également vérifiées : (a) exprime le caractère local des faisceaux, et (b), prouvé dans R. Godement (théorie des faisceaux) ou SGA4 VIB est la source de la suite spec-

trale de Leray pour un recouvrement ouvert.

D'après 3.2.9, le système (K^n) de 3.2.5 provient d'un objet de $D(\text{tot } A^+)^+$; d'après 3.2.17, il provient donc de $D^+(S)$, comme promis.

3.2.19. Application : généralisation de 2.1.4.

Soit X un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O} , S une partition localement finie de X en parties localement fermées et $p : S \rightarrow \mathbb{Z}$ une fonction bornée. Définissons $P_{D^{\leq 0}}(X, \mathcal{O})$ et $P_{D^{\geq 0}}(X, \mathcal{O})$ comme en 2.1.2.

Proposition 3.2.20 . $(P_{D^{\leq 0}}(X, \mathcal{O}), P_{D^{\geq 0}}(X, \mathcal{O}))$ est une t-structure sur $D(X, \mathcal{O})$. Elle induit une t-structure sur $D^*(X, \mathcal{O})$ pour $* = +, -, b$.

Procédant comme en 2.1.4, on se ramène à vérifier que $P_{D^{+\leq 0}}(X, \mathcal{O}) := P_{D^{\leq 0}}(X, \mathcal{O}) \cap D^+(X, \mathcal{O})$ et $P_{D^{\geq 0}}(X, \mathcal{O})$ définissent une t-structure sur $D^+(X, \mathcal{O})$. Supposons d'abord la partition S finie, et prouvons 3.2.20 par induction sur le nombre N de strates. La différence d'avec 2.1.3 est qu'on ne suppose pas chaque adhérence de strate réunion de strates. Pour $N \leq 1$, on obtient un décalé de la t-structure naturelle et 3.2.20 est clair. Pour $N > 1$, chaque point x est contenu dans une strate S et admet un voisinage ouvert U tel que $U \cap S$ soit fermé dans U . Pour $V \subset U$ ouvert, l'hypothèse de récurrence s'applique aux partitions traces de S sur $V-S$ et $V \cap S$, et 1.4.10 montre que $(P_{D^{+\leq 0}}(V, \mathcal{O}), P_{D^{\geq 0}}(V, \mathcal{O}))$ est une t-structure sur $D^+(V, \mathcal{O})$. Pour achever la récurrence, ainsi que pour passer du cas où S est fini au cas général, il reste à vérifier l'assertion suivante

Lemme 3.2.21 . Supposons que X admette un recouvrement ouvert U tel que pour V ouvert dans $U \in U$ $(P_{D^{+\leq 0}}(V, \mathcal{O}), P_{D^{\geq 0}}(V, \mathcal{O}))$ soit une t-structure sur $D^+(V, \mathcal{O})$. Alors $(P_{D^{+\leq 0}}(X, \mathcal{O}), P_{D^{\geq 0}}(X, \mathcal{O}))$ est une t-structure sur $D^+(X, \mathcal{O})$.

Par localisation, on vérifie l'analogue de 2.1.21, et ses corollaires. En particulier, les $C_V = P_{D^{+\leq 0}}(V, \mathcal{O}) \cap P_{D^{\geq 0}}(V, \mathcal{O})$ forment un champ - donc un champ en catégories abéliennes - et C_X est une catégorie abélienne.

L'axiome 1.3.1 (i) des t-structures résulte de 2.1.21, et l'axiome 1.3.1 (ii) est trivial. Prouvons 1.3.1 (iii). Soit K dans

$D^+(X, 0)$. Localement, les $P_{H^n}(K)$ sont définis. Ils se recollent, et fournissent des objets $P_{H^n}(K)$ de C_X . Procédons par récurrence descendante sur N tel que $P_{H^n}(K) = 0$ pour $n < N$. Si $N > 0$, le triangle $(0, K, K)$ convient. On dispose localement d'un morphisme $P_{H^N}(K)[N] \rightarrow K$. D'après 1.2.1, il se globalise. Soit un triangle distingué $(P_{H^N}(K)[N], K, K')$. L'hypothèse de récurrence s'applique à K' d'où, si $N \leq 0$, un morphisme $K' \rightarrow B$ tel que le morphisme composé $K \rightarrow B$ fasse localement de B le $P_{\tau_{>0}}$ de K .

Il figure dans un triangle (A, K, B) . Localement - et donc globalement - A est dans $D^{+\leq 0}(X, 0)$ et B dans $D^{>0}(X, 0)$. Ceci vérifie 1.3.1 (iii).

3.3. Cohomologie entière.

3.3.1. Dans la catégorie dérivée $D(\mathbb{Z})$ de la catégorie des groupes abéliens, le foncteur $D : K \mapsto DK = R\text{Hom}(K, \mathbb{Z})$ induit une autodualité de la sous-catégorie $D_c(\mathbb{Z})$ de $D(\mathbb{Z})$ formée des K tels que les $H^i K$ soient de type fini. Cette autodualité ne préserve pas la t -structure naturelle n : elle échange n et n^* , donnée par

$$n^*_{D^{\leq 0}} = \{K \mid H^i K = 0 \text{ pour } i > 1, \text{ et } H^1 K \text{ est de torsion}\}$$

$$n^*_{D^{>0}} = \{K \mid H^i K = 0 \text{ pour } i < 0, \text{ et } H^0 K \text{ est sans torsion}\}$$

3.3.2. Pour tout espace topologique X , définissons une t -structure n^+ sur $D(X, \mathbb{Z})$ par

$$n^+_{D^{\leq 0}} = \{K \mid H^i K = 0 \text{ pour } i > 1, \text{ et } H^1 K \otimes \mathbb{Q} = 0\}$$

$$n^+_{D^{>0}} = \{K \mid H^i K = 0 \text{ pour } i < 0, \text{ et } H^0 K \text{ est sans torsion}\}$$

Le foncteur $\tau_{<0}$ de cette t -structure se déduit du foncteur de la catégorie des complexes de faisceaux dans elle-même qui à un complexe K attache le sous-complexe K' suivant de K :

$$K'^i = K^i \text{ pour } i \leq 0, \quad K'^i = 0 \text{ pour } i > 1, \text{ et}$$

$$K'^1 = \text{image inverse dans } \text{Ker}(d) \subset K^1 \text{ de la torsion de } H^1 K.$$

3.3.3. Si X est une variété topologique purement de dimension d , les t -structures n (naturelle) et n^+ induisent des t -structures sur la sous-catégorie $D_{\ell C}(X, \mathbb{Z})$ de $D(X, \mathbb{Z})$ formée des K tels que les $H^i K$ soient localement constants de type fini. On déduit de 3.3.1 que, à un décalage de d près, ces t -structures sont échangées par la dualité de Verdier $D : K \mapsto R \text{Hom}(K, \text{or}[-d])$ sur X : celle-ci échange $n_{D \leq 0}$ et $n^+_{D \geq -d}$.

3.3.4. Pour X un espace stratifié comme en 2.1.1, et $0 = \mathbb{Z}$, on définit une t -structure $(P^+_{D \leq 0}(X, \mathbb{Z}), P^+_{D \geq 0}(X, \mathbb{Z}))$ sur $D(X, \mathbb{Z})$ en recollant les t -structures $(n^+_{D \leq p}(S), n^+_{D \geq p}(S))$ des strates. Le formalisme 2.1.3-2.1.11 s'applique (dans 2.1.11, prendre le $\tau_{\leq i}$ au sens n^+).

Si (X, S) vérifie les hypothèses de 2.1.13, cette t -structure en induit une sur $D^+_C(X, \mathbb{Z})$, et 2.1.14 (passage à une stratification plus fine) reste valable. Les t -structures de perversité p et p^+ sur $D^+_C(X, \mathbb{Z})$ se déterminent l'une l'autre. Omettant (X, \mathbb{Z}) de la notation, on a en effet, pour $K \in D^+_C$, les équivalences :

- (i) $K \in P^+_{D \leq 0} \iff K \in P_{D \leq 1}$ et $P_{H^1} K$ de torsion
- (ii) $K \in P^+_{D \geq 0} \iff K \in P_{D \geq 0}$ et $P_{H^0} K$ sans torsion
- (iii) $K \in P_{D \leq 0} \iff K \in P^+_{D \leq 0}$ et $P^+_{H^0} K$ divisible
- (iv) $K \in P_{D \geq 0} \iff K \in P^+_{D \geq -1}$ et $P^+_{H^{-1}} K$ de torsion.

Dans (i)-(iv), de torsion signifie : il existe $n \neq 0$ tel que l'endomorphisme "multiplication par n " est zéro ; sans torsion (resp. divisible) signifie que pour tout $n \neq 0$ c'est un monomorphisme (resp. épimorphisme). De ces équivalences résulte que pour qu'un foncteur exact $T : D^+_C(X, \mathbb{Z}) \rightarrow D^+_C(X', \mathbb{Z})$ soit t -exact à droite pour les t -structures de perversité p , il faut et il suffit qu'il le soit pour celles de perversité p^+ .

Les inclusions $P_{D \leq n} \subset P^+_{D \leq n} \subset P_{D \leq n+1}$ et $P_{D \geq n-1} \subset P^+_{D \geq n} \subset P_{D \geq n}$ sont claires. Pour prouver (i), on vérifie d'abord que $P^+_{D \leq 0}$ est la sous-catégorie de $P_{D \leq 1}$ formée des objets dont l'image dans $P_{D \leq 0}(X, \mathbb{Q})$ est dans $P^+_{D \leq 0}(X, \mathbb{Q})$. On vérifie que (i) \Rightarrow (ii) en utilisant que $D \geq 0$ est l'orthogonale à droite de $D \leq -1$. On procède de façon analogue pour (iv) et (iii).

Pour (X, S) de plus triangulable, par exemple algébrique réel muni d'une stratification de Whitney, la dualité de Verdier échange les t -structures de perversité p et $(p^*)^+$ sur $D_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{Z})$. C'est une conséquence formelle de 3.3.3 et de ce que D échange $i^!$ et i^* , pour i l'inclusion d'une strate.

Tout ce qui précède reste valable pour \mathbb{Z} remplacé par un anneau de Dedekind R .

3.35. Pour X un schéma de type fini sur \mathbb{C} , on peut passer à la limite sur les stratifications algébriques, comme en 2.2.1. Pour X un schéma de type fini sur un corps k , et ℓ premier à la caractéristique de k , on peut en faire de même en \mathbb{Z}_{ℓ} -cohomologie, pour autant qu'on dispose d'une catégorie dérivée convenable (cf. 2.2.14-2.2.16).



4. LA PERVERSITÉ AUTODUALE : PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

4.0. Dans ce paragraphe et le suivant, sauf au n°4.4, consacré aux cycles évanescents, on ne considère que des schémas séparés de type fini sur un corps k , et que la perversité autoduale $p_{1/2}$. Nous travaillerons dans $D_C^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (2.2.12). Pour que cette catégorie soit définie et obéisse au formalisme usuel, il nous faut nous limiter à des corps k tels que, pour toute extension finie k' de k , les $H^i(\text{Gal}(\overline{k}/k'), \mathbb{Z}/\ell)$ soient finis (cf. 2.2.12) - par exemple k fini ou algébriquement clos.

La plupart des résultats vaudraient aussi en \mathbb{Q}_ℓ , \mathbb{Z}_ℓ ou en \mathbb{Z}/ℓ^n , en particulier en \mathbb{Z}/ℓ -cohomologie. On peut aussi remplacer \mathbb{Q}_ℓ par une extension finie E_λ , \mathbb{Z}_ℓ par l'anneau de valuation V_λ correspondant, et \mathbb{Z}/ℓ^n par un quotient fini R de V_λ . Énoncer toutes ces variantes eût abouti à rendre le texte illisible. Nous avons préféré nous limiter à l'une d'entre elles : coefficients $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Les preuves procèdent souvent par réduction au cas des faisceaux de $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -modules, et la réduction est souvent laissée au lecteur. Pour les effectuer, il se rappellera que les foncteurs T de restriction des scalaires (de V_λ à \mathbb{Z}_ℓ) et d'extension des scalaires de V_λ à un quotient fini, par exemple de \mathbb{Z}_ℓ à \mathbb{Z}/ℓ^n , sont conservatifs, et que K est dans $P_D^{<0}$ si et seulement si TK est dans $P_D^{<0}$. Voir aussi 2.2.17, 2.2.18.

Le lecteur qui voudrait utiliser les résultats donnés ici pour d'autres coefficients que $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ devra prendre garde aux difficultés suivantes.

(a) En \mathbb{Z}_ℓ -cohomologie, la perversité autoduale $p_{1/2}$ donne lieu à deux t -structures $[p_{1/2}]$ et $[p_{1/2}^+]$ (3.3), échangées par dualité.

(b) Le théorème 4.3.1 est faux en \mathbb{Z}_ℓ -cohomologie, déjà pour X un point : la catégorie des faisceaux $[p_{1/2}]$ -pervers (resp. $[p_{1/2}^+]$ -pervers) est seulement noethérienne (resp. artinienne).

(c) 4.5 n'a de sens que pour un corps de coefficients.

(d) Les produits tensoriels ont de meilleures propriétés d'exactitude pour un corps de coefficients ; par exemple, 4.2.8 requiert un corps de coefficients.

Rappelons (cf. 2.2.11) que, pour la perversité autoduale $p_{1/2}$, un faisceau pervers sur X est un objet K de $D_C^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ tel que pour tout point (fermé ou non) x de X , posant $\dim(x) = \dim\{x\}^- = \text{deg tr}(k(x)/k)$, et notant i_x l'inclusion de x dans X , on ait

$$(4.0.1) \quad H^i i_x^* K = 0 \quad \text{pour } i > -\dim(x) \text{ et}$$

$$(4.0.2) \quad H^i i_x^! K = 0 \quad \text{pour } i < -\dim(x) \quad .$$

La condition (4.0.1) caractérise $P_{D_C}^{\leq 0}$, et (4.0.2) caractérise $P_{D_C}^{\geq 0}$. La condition (4.0.1) équivaut à ce que pour tout i on ait

$$(4.0.1') \quad \dim \text{Supp } H^i K \leq -i$$

(d'où en particulier $H^i K = 0$ pour $i > 0$).

Exemples : $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[d]$ (ou plus généralement un faisceau lisse, placé en degré $-d$) sur X lisse purement de dimension d , ou un faisceau ponctuel placé en degré cohomologique 0 , sont des faisceaux pervers (cf. 2.2.2).

La perversité $p_{1/2}$ étant autoduale, la dualité de Verdier échange $P_{D_C}^{\geq 0}$ et $P_{D_C}^{\leq 0}$. Elle induit une anti-autoéquivalence de la catégorie des faisceaux pervers.

(4.0.3). Notation. Pour K dans $D_C^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et tout schéma Z au-dessus de X : $u : Z \rightarrow X$, nous écrivons $H^i(Z, K)$ pour le groupe d'hypercohomologie $\mathbb{H}^i(Z, u^* K)$.

4.1. Morphismes affines

Le théorème suivant reformule le théorème SGA4 XIV 3.1 de M. Artin.

Théorème 4.1.1. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme affine, le foncteur
 $\text{Rf}_* : D_C^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow D_C^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est t-exact à droite.

On se ramène à prouver l'énoncé analogue en \mathbb{Z}/ℓ -cohomologie (cf. 4.0).

Si le faisceau F est constructible, l'entier $d(F)$ que M. Artin attache à F est le plus petit entier d tel que F , vu comme objet de la catégorie dérivée, soit dans $P_{D_C}^{\leq d}$. Pour K constructible dans la catégorie dérivée, $d(K) := \sup(i + d(H^i K))$ est de même le plus petit d tel que K soit dans $P_{D_C}^{\leq d}$. Pour que K soit dans $P_{D_C}^{\leq 0}$,

il faut et il suffit que les $H^i K[-i]$ le soient. Pour vérifier que Rf_* envoie $P_{D_C}^{\leq 0}(X)$ dans $P_{D_C}^{\leq 0}(Y)$, il suffit donc de vérifier que pour tout faisceau F avec $d(F) \leq d$, on a $d(R^i f_* F) \leq d-i$. C'est ce qu'affirme SGA4 XIV 3.1.

Par application de la dualité de Verdier, le théorème 4.1.1 se dualise en le

Corollaire 4.1.2. Sous la même hypothèse, $Rf_!$ est t-exact à gauche.

Nous noterons P_{f_*} et $P_{f_!}$ les foncteurs $P_{H^0 Rf_*}$ et $P_{H^0 Rf_!}$ des faisceaux pervers sur X dans les faisceaux pervers sur Y . Le premier est exact à droite, le second à gauche. Pour le composé fg de deux morphismes affines, on a

$$P_{(fg)_*} = P_{f_*} P_{g_*} \text{ et } P_{(fg)_!} = P_{f_!} P_{g_!} \quad (1.3.17) \text{ (iv)}$$

Nous écrirons f_* et $f_!$ pour Rf_* et $Rf_!$.

Corollaire 4.1.3. Si $f : X \rightarrow Y$ est quasi-fini et affine, les foncteurs $f_!$ et f_* sont t-exacts.

En effet, f_* ($:= Rf_*$) est t-exact à gauche (2.2.5) et à droite (4.1.7). Le cas de $f_!$ est dual (2.2.5 et 4.1.2).

Supposons k algébriquement clos. Pour $Y = \text{Spec}(k)$, 4.1.1 fournit le corollaire SGA4 XIV 3.2 :

Corollaire 4.1.4. Pour X affine sur k algébriquement clos, et tout faisceau étale F sur X , $H^i(X, F) = 0$ pour $i > \dim X$.

Plus généralement, on a

Corollaire 4.1.5. Supposons k algébriquement clos. Si K est dans $P_{D_C}^{\leq 0}(X)$ et que $u : Z \rightarrow X$ est un morphisme quasi-fini de source affine, on a $H^i(Z, K) = 0$ pour $i > 0$.

En effet, $u^* K$ est dans $P_{D_C}^{\leq 0}(Z)$ (analogue de 2.2.5) et on applique 4.1.1 à la projection de Z sur $\text{Spec}(k)$.

Ce corollaire admet la réciproque suivante.

Réciproque 4.1.6. Supposons k algébriquement clos, et soit K

dans $D_C^b(X)$. Si, pour tout ouvert de Zariski affine V de X , on a $H^i(V, K) = 0$ pour $i > 0$, alors K est dans $P_D^{\leq 0}(X)$.

Nous vérifierons d'abord le

Lemme 4.1.7. Soient X affine lisse irréductible de dimension $d \geq 1$ sur k algébriquement clos, et F un faisceau lisse sur X . Si $F \neq 0$, il existe un ouvert affine U de X , de la forme $X[1/f]$ ($f \neq 0$), tel que $H^d(U, F) \neq 0$.

Soient $f_1, \dots, f_d \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tels que le sous-schéma S de X défini par les équations $f_i = 0$ soit fini non vide. Si $F \neq 0$, on a $H_S^{2d}(X, F) \simeq (F|_S)(-d) \neq 0$ (pureté), et la suite exacte

$$H^{2d-1}(X-S, F) \rightarrow H_S^{2d}(X, F) \rightarrow H^{2d}(X, F)$$

montre que $H^{2d-1}(X-S, F) \neq 0$. En effet, d'après 4.1.4, $H^{2d}(X, F) = 0$ puisque $2d > d$. Recouvrons $X-S$ par les ouverts $U_i := X[1/f_i]$ et, pour $I \subset [1, d]$, posons $U_I = \bigcap_{i \in I} U_i$. Les U_I sont affines, et dans la suite spectrale de Čech

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|I|=p+1} H^q(U_I, F) \Rightarrow H^{p+q}(X-S, F),$$

on a donc $E_1^{pq} = 0$ pour $q > d$. On a aussi $E_1^{pq} = 0$ pour $p > d-1$. Le terme $E_1^{d-1, d}$ est le seul qui contribue au H^{2d-1} ; il est donc non nul : on a

$$H^d(X[(\prod f_i)^{-1}], F) \neq 0.$$

4.1.8. Preuve de 4.1.6. Soit F_i ($0 \leq i \leq \dim X$) une suite croissante de fermés de X , de dernier terme X . Posons $F_{-1} = \emptyset$. On suppose la suite F_* choisie de telle sorte que $W_i = F_i - F_{i-1}$ (avec la structure réduite) soit lisse purement de dimension i et que les $H^j K$ soient lisses sur les W_i . Prouvons par récurrence descendante sur i que, sur $U_i = X - F_{i-1}$, K est dans $D^{\leq -i}$ (pour la t -structure naturelle).

L'hypothèse de récurrence : " $K|_{U_j}$ est dans $D^{\leq -j}$ pour $j > i$ " est vide pour $i = \dim X$. Elle assure que, sur U_i , $\tau_{\leq -i} K$ est dans $P_D^{\leq 0}$, et que pour $j \geq -i$, $H^j K|_{U_i}$ est un faisceau lisse sur W_i , prolongé par zéro. Pour tout ouvert affine V de U_i , le triangle $(\tau_{\leq -i} K, K, \tau_{> -i} K)$ fournit une suite exacte longue de cohomologie

$$H^j(V, \tau_{\leq -1} K) \longrightarrow H^j(V, K) \longrightarrow H^j(V, \tau_{> -1} K) \longrightarrow \dots$$

D'après 4.1.5, $H^j(V, \tau_{\leq -1} K) = 0$ pour $j > 0$. L'hypothèse $H^j(V, K) = 0$ pour $j > 0$ fournit donc que pour $j > 0$

$$H^j(V, \tau_{> -1} K) = H^j(V \cap W_i, \tau_{> -1} K) = 0 \quad .$$

D'après 4.1.4, le terme E_2 de la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(V \cap W_i, H^q(\tau_{> -1} K)) \Rightarrow H^{p+q}(V \cap W_i, \tau_{> -1} K)$$

est nul pour $p > i$. Si $H^j(\tau_{> -1} K) = 0$ pour $j > q$, on a donc

$$H^i(V \cap W_i, H^q(\tau_{> -1} K)) = H^{i+q}(V \cap W_i, \tau_{> -1} K)$$

(nul si $q > -i$). Posons $L = H^q(\tau_{> -1} K)$. C'est un faisceau lisse sur W_i et il s'agit, de l'hypothèse $H^i(V \cap W_i, L) = 0$ pour tout $V \subset U_i$ affine, de déduire que $L = 0$. C'est clair pour $i = 0$. Supposons donc $i \geq 1$. Si L était non nul, il existerait $V_1 \subset U_i$, affine, tel que $L|_{V_1 \cap W_i}$ soit non nul. D'après 4.1.7 appliqué aux composantes irréductibles de $V_1 \cap W_i$, il existerait $f_1 \in \Gamma(V_1 \cap W_i, 0)$ tel que $H^i(V_1 \cap W_i[1/f_1], L) \neq 0$. Ce f_1 se relève en $f \in \Gamma(V_1, 0)$ et, pour $V = V_1[1/f]$, on a $H^i(V \cap W_i, L) \neq 0$: contradiction.

Remarque 4.1.9. Pour $k = \mathbb{C}$, l'analogue de 4.1.1 en cohomologie complexe est vrai, et peut se déduire de 4.1.1 grâce aux théorèmes de comparaison. En voici une interprétation partielle, en termes de modules holonomes.

Prenons X lisse purement de dimension d . Sur X , il y a identité entre les notions de faisceau (algébrique) quasi-cohérent à connexion intégrable et de \mathcal{D} -module, quasi-cohérent comme \mathcal{O} -module (ou comme \mathcal{D} -module, cela revient au même). A chaque tel faisceau (V, ∇) est associé son complexe de De Rham $\Omega^*(V)$, et, sur $X(\mathbb{C})$, le complexe de De Rham analytique $\Omega^*(V)^{an}$ de composantes les $\Omega^i(V) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^{an}$. On sait que, si le \mathcal{D} -module V est holonome, $\Omega^*(V)[d]^{an}$ est un faisceau pervers, et que le foncteur $V \mapsto \Omega^*(V)[d]^{an}$ induit une équivalence de la catégorie des \mathcal{D} -modules holonomes à singularités régulières (y compris à l'infini) avec celle des faisceaux pervers.

Si $f : X \hookrightarrow Y$ est un plongement ouvert dans Y lisse purement

de dimension d , via cette équivalence, Pf_* correspond au foncteur image directe de faisceaux quasi-cohérents (la connexion suit). Si f est en outre affine, il est exact, comme prévu par 4.1.3.

Corollaire 4.1.10. Soit $j : U \hookrightarrow X$ un plongement ouvert affine, et $i : D \hookrightarrow X$ l'inclusion du fermé complémentaire (par exemple : D un diviseur (de Cartier), $U = X - D$). Rappelons qu'on écrit j_* et $i^!$ pour Rj_* et $Ri^!$.

- (i) Si G est un faisceau pervers sur U , $j_!G$ et j_*G sont pervers.
 (ii) Si F est un faisceau pervers sur X , i^*F est dans $P_D^{[-1,0]}$, et $i^!F$ dans $P_D^{[0,1]}$. On dispose de suites exactes de faisceaux pervers

$$(4.1.10.1) \quad 0 \rightarrow i_*P_H^{-1}i^*F \rightarrow j_!j^*F \rightarrow F \rightarrow i_*P_H^0i^*F \rightarrow 0$$

$$(4.1.10.2) \quad 0 \rightarrow i_*P_H^0i^!F \rightarrow F \rightarrow j_*j^*F \rightarrow i_*P_H^1i^!F \rightarrow 0$$

L'assertion (i) est un cas particulier de 4.1.3. Les suites exactes longues de cohomologie perverse des triangles $(j_!j^*F, F, i_*i^*F)$ et $(i_*i^!F, F, j_*j^*F)$ fournissent (4.1.10.1), (4.1.10.2) et la nullité des $P_H^i i_*i^*F = i_*P_H^i i^*F$ (resp. $P_H^i i_*i^!F = i_*P_H^i i^!F$) pour $i \neq -1, 0$ (resp. $0, 1$) donc (ii).

4.1.11. Prenons dans (4.1.10.1) F de la forme j_*G . On obtient pour les faisceaux de cohomologie perverse de i^*j_*G une suite exacte

$$(4.1.11.1) \quad 0 \rightarrow i_*P_H^{-1}i^*j_*G \rightarrow j_!G \rightarrow j_*G \rightarrow i_*P_H^0i^*j_*G \rightarrow 0$$

Si on applique (4.1.10.2) à $F = j_*G$, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow i_*P_H^0i^!j_*G \rightarrow j_!G \rightarrow j_*G \rightarrow i_*P_H^1i^!j_*G \rightarrow 0$$

qui, via l'isomorphisme (1.4.6.4) de i^*j_*G avec $i^!j_*G[1]$, coïncide avec (4.1.11.1), sauf que la flèche $j_*G \rightarrow i_*P_H^0i^*j_*G$ est changée de signe.

Corollaire 4.1.12 : Sous les hypothèses de 4.1.10, $i^*j_!G[-1]$ et $i^!j_!G[1]$ sont pervers. On a

$$(4.1.12.1) \quad i^*j_!G[-1] = P_H^{-1}i^*j_*G = P_H^0i^!j_!G$$

$$(4.1.12.2) \quad i^!j_!G[1] = P_H^0i^*j_*G = P_H^1i^!j_!G$$

La suite exacte (4.1.11.1) fournit deux suites exactes courtes

$$(4.1.12.3) \quad 0 \longrightarrow i_* \mathcal{P}_H^{-1} i^* j_* G \longrightarrow j_! G \longrightarrow j_{!*} G \longrightarrow 0$$

$$(4.1.12.4) \quad 0 \longrightarrow j_{!*} G \longrightarrow j_* G \longrightarrow i_* \mathcal{P}_H^0 i^* j_* G \longrightarrow 0 \quad .$$

Appliquant i^* et $i^!$ à (4.1.12.3) et (4.1.12.4) respectivement, et utilisant que $i^* j_! = i^! j_* = 0$, on obtient (4.1.12.1) et (4.1.12.2), donc la perversité voulue.

Remarque 4.1.13 : Le triangle fonctoriel $K \mapsto (j_! j^* K, K, i_* i^* K)$ peut se préciser en un foncteur T de $D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ dans $DF_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tel que, avec la notation 3.1.7, GTK soit le complexe $j_! j^* K \rightarrow K$, réduit aux degrés -1 et 0 . On a $\omega TK \xrightarrow{\sim} i_* i^* K$, pour un isomorphisme tel que $K = G^0 TK \rightarrow \omega TK \rightarrow i_* i^* K$ soit la flèche d'adjonction. Pour F pervers, TF est un complexe filtré bête, et on obtient un isomorphisme de $i_* i^* F$ avec l'objet de $D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ défini par le complexe de faisceaux pervers suivant :

$$i_* i^* F = [j_! j^* F \longrightarrow F] \text{ (degrés } -1 \text{ et } 0) .$$

La suite exacte à quatre termes déduite par 3.1.14 de cet isomorphisme coïncide avec (4.1.10.1) où la flèche de connexion serait changée de signe.

De même, $K \mapsto (i_* i^! K, K, j_* j^* K)$ se précise en $K \mapsto TK$, avec $GTK =$ le complexe $K \rightarrow j_* j^* K$, réduits aux degrés 0 et 1 , avec $\omega TK = i_* i^! K$. De là, pour F pervers, un isomorphisme

$$i_* i^! F = [F \rightarrow j_* j^* F] \text{ (degrés } 0 \text{ et } 1)$$

qui fournit (4.1.10.2) aux signes près.

4.2. Exactitudes et adjonctions.

4.2.1. Si $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ est un foncteur exact entre catégories triangulées munies de t -structures, on dit que T est d'amplitude cohomologique $[a, b]$ ($-\infty \leq a \leq b \leq \infty$) si $T\mathcal{D}_1^{<a} \subset \mathcal{D}_2^{<b}$ (pour $b \neq \infty$) et que $T\mathcal{D}_1^{>a} \subset \mathcal{D}_2^{>b}$ (pour $a \neq -\infty$), i.e. si $T[b]$ est t -exact à droite (pour $b \neq \infty$) et que $T[a]$ est t -exact à gauche (pour $a \neq -\infty$). Si T est d'amplitude cohomologique bornée, cela revient à demander que pour A dans $\mathcal{C}_1 = \mathcal{D}_1^{<0} \cap \mathcal{D}_1^{>0}$, les $H^i TA$ soient nuls pour $i \notin [a, b]$.

4.2.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre schémas de type fini séparés sur un corps k . Dans ce n° , nous donnons des estimations de l'amplitude cohomologique des foncteurs usuels, attachés à f , reliant $D_C^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et $D_C^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, et pour la t -structure de perversité $P_{1/2}$.

4.2.3. Si Y est recouvert par des ouverts affines V tels que chaque $f^{-1}V$ soit recouvert par $(d+1)$ ouverts affines, f_* est d'amplitude cohomologique $\leq d$, et $f_!$ d'amplitude cohomologique $\geq -d$.

Les deux énoncés sont duaux. Ils sont locaux sur Y , de sorte qu'on peut supposer Y affine, et X recouvert par $d+1$ ouverts affines. L'assertion pour f_* résulte alors de 4.1.1 et de la suite spectrale de Leray pour un recouvrement ouvert.

4.2.4. Si la dimension des fibres de f est $\leq d$, on a les estimations suivantes pour l'amplitude cohomologique :

$$\begin{array}{ll} f_! : \leq d & f^! : \geq -d \\ f^* : \leq d & f_* : \geq -d \end{array}$$

La dualité échange les deux assertions de chaque diagonale et 1.3.17 (iii), appliqué aux paires de foncteurs adjoints $(f_![d], f^![-d])$, $(f^*[d], f_*[-d])$ montre que les deux assertions dans chaque ligne sont équivalentes. Il suffit donc de considérer f^* , où l'estimation résulte aussitôt de (4.0.1) et de ce que, pour x dans X , $\dim(x) \leq \dim f(x) + d$.

Remarque. Le même résultat vaut en \mathbb{Z}_ℓ -cohomologie, pour les t -structures $P_{1/2}$ et $P_{1/2}^+$. La même démonstration s'applique, si ces deux t -structures sont traitées simultanément. De même pour 4.2.3.

Appliquant 1.3.17 (iii), on obtient les adjonctions suivantes entre foncteurs reliant faisceaux pervers sur X et Y .

Adjonctions $({}^p H_{f_!}^d, {}^p H_{f^!}^{-d})$ et $({}^p H_{f_*}^d, {}^p H_{f^*}^{-d})$.

Deux cas particuliers utiles sont :

f propre : $f_! = f_*$ est d'amplitude cohomologique $[-d, d]$

f lisse de dimension relative d : on a $f^! = f^*[2d](d)$, et

$f^*[d] = f^!-d$ est donc t-exact donnant lieu pour les faisceaux pervers à une suite de 3 foncteurs adjoints $({}^{\text{PH}^d}f_!, (d), {}^{\text{PH}^d}f^*, {}^{\text{PH}^{-d}}f_*)$.

Proposition 4.2.5 .- Si f est lisse de dimension relative d , à fibres géométriques connexes (et donc par définition non vides), le foncteur t-exact $f^*[d]$ induit un foncteur pleinement fidèle des faisceaux pervers sur Y dans les faisceaux pervers sur X .

Dans la preuve, nous utiliserons le foncteur usuel f_* pour les faisceaux. Il sera noté ${}^{\circ}f_*$.

Pour K et L dans $D_C^b(Y, \mathbb{Q}_\ell)$, on a, parce que f est lisse,

$$(4.2.5.1) \quad f^* \text{RHom}(K, L) \xrightarrow{\sim} \text{RHom}(f^*K, f^*L) .$$

Pour f quelconque, on aurait plutôt

$$f^! \text{RHom}(K, L) \xrightarrow{\sim} \text{RHom}(f^*K, f^!L) .$$

Pour K et L pervers, $\text{RHom}(K, L)$ est dans $D_C^{\geq 0}$. De même pour $\text{RHom}(f^*K, f^*L) = \text{RHom}(f^*K[d], f^*L[d])$. Appliquant ${}^{\circ}f_* H^{\circ}$ à (4.2.5.1), on obtient donc

$$(4.2.5.2) \quad {}^{\circ}f_* f^* H^{\circ} \text{RHom}(K, L) \longrightarrow {}^{\circ}f_* H^{\circ} \text{RHom}(f^*K[d], f^*L[d]) .$$

Admettons provisoirement que pour H sur Y on ait

$$(4.2.5.3) \quad H \xrightarrow{\sim} {}^{\circ}f_* f^* H .$$

De (4.2.5.2), on déduit alors par passage aux sections globales que

$$\Gamma H^{\circ} \text{RHom}(K, L) \xrightarrow{\sim} \Gamma H^{\circ} \text{RHom}(f^*K[d], f^*L[d]) .$$

Aux deux membres, RHom est dans $D_C^{\geq 0}$, d'où

$$\Gamma H^{\circ} \text{RHom} = H^{\circ} \Gamma \text{RHom} = H^{\circ} \text{RHom} = \text{Hom} , \text{ et l'assertion.}$$

La preuve de (4.2.5.3) se ramène au cas des faisceaux d'ensembles. Le morphisme f a localement une section ; ceci permet de supposer que f a une section e . Elle fournit une rétraction à $H \longrightarrow f_* f^* H$, et il reste à vérifier que deux sections locales de $f_* f^* H$ qui, en tant que sections de $f^* H$, coïncident sur e , sont égales. Ceci se vérifie fibre par fibre : on est ramené au cas, laissé au lecteur, où Y est un point.

4.2.6. Si u^* est un foncteur exact pleinement fidèle d'une catégorie abélienne A dans une catégorie abélienne B , ayant des adjoints à gauche et à droite $u_!$ et u_* , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) u^* identifie A à une sous-catégorie épaisse (= stable par sous-quotient) de B ;
- (b) pour B dans B , le morphisme d'adjonction $u_! u^* B \rightarrow B$ est un monomorphisme ;
- (b') pour B dans B , le morphisme d'adjonction $B \rightarrow u_* u^* B$ est un épimorphisme.

Elles ne sont pas toujours vérifiées. Exemple : B = catégorie des morphismes $X \rightarrow Y$ dans une catégorie abélienne C ,

A = sous-catégorie (équivalente à C) des isomorphismes $X \xrightarrow{\sim} Y$, u^* = foncteur d'inclusion, $u_!(X \rightarrow Y) = (X \xrightarrow{\sim} X)$, $u_*(X \rightarrow Y) = (Y \xrightarrow{\sim} Y)$. Si elles sont remplies, et qu'on identifie A à une sous-catégorie pleine de B par u^* , chaque objet B de B a un plus grand sous-objet qui soit dans A - à savoir $u_! u^* B$ - et un plus grand quotient qui soit dans A - à savoir $u_* u^* B$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le

Lemme 4.2.6.1 . Si tout objet de A est de longueur finie, et que pour tout objet simple S de A , $u^* S$ est simple, les conditions 4.2.6 (a), (b), (b') sont vérifiées.

Le critère 4.2.6.1 s'applique dans la situation 4.2.5 : on dispose d'une suite de foncteurs adjoints $({}^p H^d f_!(d), {}^p H^d f^*, {}^p H^{-d} f_*)$, l'hypothèse "tout objet de longueur finie" est 4.3.1 (i), et l'image par $f^*[d]$ d'un objet simple $S = j_{!*} l[\dim V]$

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(V) & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \downarrow f & \quad j & \downarrow f \\
 V & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & \quad j &
 \end{array}$$

est $j_{!*}(f^* l[\dim f^{-1}V])$, encore simple : la commutation de $j_{!*}$ au changement de base par f résulte du théorème de changement de base par un morphisme lisse et de la description du type 2.1.11 de $j_{!*}$ déduite de 2.2.4 ; par ailleurs, parce que f est lisse à fibres connexes, l'image inverse sur $f^{-1}V$ d'un système local irréductible sur V est encore irréductible.

Corollaire 4.2.6.2 . Sous les hypothèses de 4.2.5, le foncteur $f^*[d]$ des faisceaux pervers sur Y dans les pervers sur X vérifie les conditions équivalentes (a) (b) (b') de 4.2.6.

Pour F un faisceau pervers sur X , le corollaire permet de parler du plus grand sous-faisceau (resp. faisceau quotient) de F qui provient de Y par image inverse. Ce sous-faisceau (resp. quotient) est le $f^*[d]$ de ${}^pH^{-d}f_*F$ (resp. de ${}^pH^d f_!(d)$).

La démonstration donnée de 4.2.6.2 a l'avantage d'être courte. Elle a le tort de ne pas s'appliquer telle quelle à d'autres perversités que $p_{1/2}$, ou au cas des \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux.

4.2.7. Pour X_1 et X_2 de type fini sur un corps k , soit \boxtimes le produit tensoriel externe $D(X_1) \times D(X_2) \longrightarrow D(X_1 \times X_2)$: $(K, L) \longmapsto pr_1^*K \boxtimes pr_2^*L$. Divers contextes sont possibles : coefficients \mathbb{Z}/ℓ ; coefficients \mathbb{Z}/ℓ^n , en se restreignant à D^- ou à D_{ctf}^b , coefficients \mathbb{Z}_ℓ ou \mathbb{Q}_ℓ , dans D_C^b , pour k convenable (cf. 2.2), Dans tous ces contextes, le produit tensoriel externe commute aux opérations usuelles :

(a) Pour $f : X_1 \rightarrow Y_1$ et $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$, on a

$$f_{1*}K \boxtimes f_{2*}L \xrightarrow{\sim} (f_1 \times f_2)_*(K \boxtimes L) .$$

De même pour $(f_1 \times f_2)!$, $(f_1 \times f_2)^*$ et $(f_1 \times f_2)^\dagger$. En particulier, le complexe dualisant pour $X_1 \times X_2$ est le \boxtimes des complexes dualisants pour X_1 et X_2 .

(b) Pour K_1 et L_1 sur X_1 , et K_2, L_2 sur X_2 , on a, si K_1 et K_2 sont dans D_C^b ,

$$\underline{RHom}(K_1, L_1) \boxtimes \underline{RHom}(K_2, L_2) \xrightarrow{\sim} \underline{RHom}(K_1 \boxtimes K_2, L_1 \boxtimes L_2) .$$

En particulier, le dual de Verdier $D(K \boxtimes L)$ de $K \boxtimes L$ est le \boxtimes des duals de Verdier de K et L . De même, trivialement, avec \boxtimes remplaçant \underline{RHom} .

Pardes arguments standard (cf. [3] §1), ces énoncés se ramènent à (a) pour les images directes. Factorisant (f_1, f_2) en $(f_1, Id) \circ (Id, f_2)$, on peut supposer que f_1 ou f_2 est l'identité. On se ramène par ailleurs au cas de coefficients \mathbb{Z}/ℓ . Dans ce cas, et pour f_1

l'identité, le résultat peut se déduire de l'acyclicité locale universelle de $X_1 \rightarrow \text{Spec}(k)$, pour tout faisceau de coefficients ([3] 2.16).

Proposition 4.2.8 . Pour X_1 et X_2 de type fini sur k , le bifoncteur \boxtimes est t-exact.

Soit K_i dans D_C^b sur X_i ($i = 1, 2$) et T_i une stratification de X_i à strates équidimensionnelles de réduite lisse sur \bar{k} , telle que, pour $i : S \hookrightarrow X_i$ l'inclusion d'une strate, les $H^{n_i} K_i$ et les $H^{n_i} K_i$ soient lisses. Pour que K_1 soit dans $D_C^{\leq 0}$ (resp. $D_C^{\geq 0}$), il faut et suffit alors que pour toute strate $i : S \hookrightarrow X_i$, on ait $H^{n_i} K_i = 0$ pour $n > -\dim S$ (resp. $H^{n_i} K_i = 0$ pour $n < -\dim S$). Appliquant ce critère à $K_1 \boxtimes K_2$ et à la stratification $T_1 \times T_2$ de $X_1 \times X_2$, on obtient 4.2.8 : utiliser 4.2.7. Il est essentiel ici que la fonction de perversité utilisée soit linéaire.

4.2.9. De même, mais plus simplement, pour K une extension de k , X un schéma de type fini sur k , $X_K := X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } K$ et ϵ la projection $X_K \rightarrow X$, le foncteur ϵ^* commute aux opérations usuelles, et est t-exact. Ceci vaut pour toute perversité, ainsi qu'en \mathbb{Z}_ℓ , $\mathbb{Z}/\ell^n, \dots$ -cohomologie.

4.3. Objets simples.

Théorème 4.3.1 (i). La catégorie des faisceaux pervers sur X est artinienne et noethérienne : tout objet est de longueur finie.

(ii) Si $j : V \hookrightarrow X$ est l'inclusion dans X d'une sous-variété irréductible, dont le réduit sur \bar{k} est lisse, et que L est un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau lisse irréductible sur V (correspondant à une représentation ℓ -adique irréductible de $\pi_1(V)$), alors $j_{!*}(L[\dim V])$ est un faisceau pervers simple sur X . Tous les faisceaux pervers simples sont ainsi obtenus.

Ceci ne changeant pas la topologie étale, on peut étendre les scalaires de k à sa clôture parfaite. Supposons donc k parfait. L'hypothèse "réduit sur \bar{k} lisse" peut alors être remplacée par "lisse".

Lemme 4.3.2 . Si L est un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau lisse sur X irréductible et lisse, pour tout ouvert de Zariski non vide $j : U \hookrightarrow X$, le faisceau pervers $F := L[\dim X]$ vérifie $F = j_{!*} j^* F$.

Il faut vérifier (cf. 2.1.9) que pour tout $x \in X-U$, on a $H^i i_x^* F = 0$ pour $i \geq -\dim x$ et $H^i i_x^! F = 0$ pour $i \leq -\dim x$. On a $\dim x < \dim X$, et les nullités requises valent pour $i > -\dim X = -\dim x - (\dim X - \dim x)$ et, par le théorème de pureté cohomologique, pour $i < -\dim X + 2\text{codim } x = -\dim x + (\dim X - \dim x)$ respectivement.

Lemme 4.3.3 . Si L est un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau lisse irréductible sur X irréductible et lisse, le faisceau pervers $F := L[\dim X]$ est simple.

Soit $G \subset F$. Il existe un ouvert de Zariski non-vide $j : U \hookrightarrow X$ de X tel que, sur U , G soit de la forme $M[\dim X]$, pour M un sous-faisceau lisse de L . L'espace X étant normal, la monodromie de L ne change pas par restriction à U , et $L|_U$ est encore irréductible. On a donc $M = 0$ ou $M = L$. Si $M = 0$ (resp. $M = L$), G (resp. F/G) est à support dans le fermé $F = X-U$ de X . Puisque $F = j_{!*} j^* F$ d'après 4.3.2, F n'a pas de sous-objet (resp. quotient) non-trivial à support dans F (1.4.2.5) : on a $G = 0$ (resp. $G = F$) et 4.3.3 en résulte.

4.3.4. Prouvons 4.3.1. Que les faisceaux pervers (ii) soient simples résulte de 4.3.3 et d'une double application de (1.4.2.5) : au plongement ouvert $V \hookrightarrow \bar{V}$, et au plongement fermé $\bar{V} \hookrightarrow X$. Pour achever la démonstration, il reste à vérifier que tout faisceau pervers sur X est extension successive de ces faisceaux pervers simples. Prouvons le par récurrence noethérienne sur X , de façon à pouvoir supposer, par récurrence, que tel est le cas pour les faisceaux pervers à support $Y \neq X$. Tout faisceau pervers F sur X est sur un ouvert irréductible lisse convenable $j : U \hookrightarrow X$ de la forme $L[\dim U]$, avec L un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau lisse. De là résulte (cf. 4.1.11) qu'il se dévise en faisceaux $j_{!*} L'[\dim U]$, L' sous-quotient irréductible de L , et en faisceaux pervers à support dans le complément de U . L'assertion en résulte.

Remarque 4.3.5 (cf. 4.1.9) : sur \mathbb{C} , on sait que la catégorie des \mathcal{D} -modules holonomes est de même artinienne et noethérienne (modules holonomes algébriques, sur une variété algébrique lisse, ou pris au sens analytique, sur une variété analytique compacte).

4.4 Cycles évanescents (estimation supérieure).

Dans ce numéro, nous donnons un résultat partiel sur l'exactitude du foncteur "cycles proches". C'est une version amplifiée de SGA7 I 4.2. Si on le joint au fait, vrai, mais non prouvé dans ces notes, que le foncteur des cycles proches $R\psi_{\bar{\eta}}$ commute à la dualité, il implique la t-exactitude de $R\psi_{\bar{\eta}}$. Le résultat partiel que nous donnons suffira à établir 4.5.5, un point essentiel de notre preuve du théorème de pureté 5.3.4.

4.4.1. Soient (S, η, s) un trait hensélien, $k(\bar{\eta})$ une clôture séparable de $k(\eta)$, et $(\bar{S}, \bar{\eta}, \bar{s})$ le normalisé de S dans $k(\bar{\eta})$: \bar{S} est le spectre d'un anneau de valuation non discrète ; le groupe de la valuation est \mathbb{Q} . Soient $a : X \rightarrow S$ un schéma de type fini sur S , $\bar{X} = X \times_S \bar{S}$ et $X_{\bar{\eta}}$ et $X_{\bar{S}}$ les deux fibres de \bar{X}/\bar{S} :

$$\begin{array}{ccccc}
 X_S & \xleftarrow{i} & \bar{X} & \xleftarrow{j} & X_{\bar{\eta}} \\
 \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow a \\
 \bar{S} & \xleftarrow{i} & \bar{S} & \xleftarrow{j} & \bar{\eta}
 \end{array}$$

Le foncteur $\psi_{\bar{\eta}}$ de la théorie des cycles évanescents est le foncteur $i^* j_* : D(X_{\bar{\eta}}) \rightarrow D(X_{\bar{S}})$. Nous nous proposons de montrer que, pour la perversité $p_{1/2}$ de $X_{\bar{\eta}}/\bar{\eta}$ et $X_{\bar{S}}/\bar{S}$, il envoie $P_{\mathbb{C}}^{\leq 0}$ dans $P_{\mathbb{C}}^{\leq 0}$.

Le cas qui nous intéresse le plus est le cas de la $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -cohomologie. Utilisant que $R\psi$ commute aux opérateurs d'extension et de restriction de l'anneau de coefficients, que ces opérations envoient les unes dans les autres les catégories $P_{\mathbb{C}}^{\leq 0}$, et que, pour K dans $D_{\mathbb{C}}^b(X, \mathbb{Z}_{\ell})$, si $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell$ est dans $P_{\mathbb{C}}^{\leq 0}(X, \mathbb{Z}/\ell)$, alors K est dans $P_{\mathbb{C}}^{\leq 0}(X, \mathbb{Z}_{\ell})$, on ramène successivement le cas de la $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -cohomologie à celui de la E_{λ} -cohomologie (E_{λ} extension finie de \mathbb{Q}_{ℓ}), de la \mathbb{Q}_{ℓ} -cohomologie, de la \mathbb{Z}_{ℓ} -cohomologie et de la \mathbb{Z}/ℓ -cohomologie. Travailler en \mathbb{Z}/ℓ -cohomologie a l'avantage de ne pas requérir le formalisme des \mathbb{Z}_{ℓ} -faisceaux. Le foncteur $\psi_{\bar{\eta}}$ respecte la constructibilité (SGA4 1/2, Th. finitude, 3.2). Il n'est pas nécessaire de le savoir si, pour Y un schéma de type fini sur un corps, on définit directement $P_{\mathbb{C}}^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell)$ à l'imitation de M. Artin (SGA4 XIV 2) : c'est la catégorie des complexes K tels que pour tout point (fermé ou non)

$i_Y : Y \hookrightarrow Y$, on ait $H^i i_Y^* K = 0$ pour $i > -\dim\{Y\}$. On a $D_C(Y, \mathbb{Z}/\ell) \cap P_D^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell) = P_D^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell)$ et si on écrit un faisceau F comme limite inductive de ses sous-faisceaux constructibles F_α , $F[i]$ est dans $P_D^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell)$ si et seulement si chaque $F_\alpha[i]$ est dans $P_D^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell)$.

Proposition 4.4.2. $\psi_{\bar{\eta}}$ envoie $P_D^{\leq 0}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell^n)$ dans $P_D^{\leq 0}(X_{\bar{S}}, \mathbb{Z}/\ell^n)$.

Par dévissage et passage à la limite inductive, il suffit de montrer que si un faisceau constructible F sur $X_{\bar{\eta}}$ a un support de dimension $\leq N$, pour tout point géométrique \bar{x} de $X_{\bar{S}}$, localisé en x , on a $(H^i \psi_{\bar{\eta}} F)_{\bar{x}} = 0$ pour $i > N - \dim\{x\}$.

Lemme 4.4.3. $H^i \psi_{\bar{\eta}} F = 0$ pour $i > N$.

Soit x un point géométrique de $X_{\bar{S}}$. Il suffirait de prendre $x \in X(k(\bar{s}))$. Ecrivons l'ensémlé strict $\bar{X}_{(x)}$ de \bar{X} en x comme limite projective des voisinages étales affines U_α de x dans \bar{X} . On a

$$(H^i \psi_{\bar{\eta}} F)_x = \lim_{\longrightarrow} H^i(U_{\alpha\bar{\eta}}, F).$$

Sous le signe H^i , on peut remplacer $U_{\alpha\bar{\eta}}$ par l'image inverse dans $U_{\alpha\bar{\eta}}$ du support de F , et on conclut par le théorème de dimension cohomologique des schémas affines SGA4 XIV 3.2.

4.4.4. Il sera commode de prouver un énoncé un peu plus général que 4.4.2. Soient S^h l'ensémlé strict de S , de corps des fractions $k(\eta^h) \subset k(\bar{\eta})$, et $k(\eta')$ une quelconque extension de $k(\eta^h)$ dans $k(\bar{\eta})$ contenant toutes les racines d'une uniformisante d'ordre une puissance de ℓ . Remplaçant dans 4.4.1 $k(\bar{\eta})$ par $k(\eta')$, on définit S', X' un foncteur $\psi_{\eta'}$ de $D(X_{\eta'})$ dans $D(X_{\bar{S}})$. Nous prouverons l'analogie de 4.4.2 pour ce foncteur.

Le groupe de Galois $Q = \text{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta'))$ est une limite projective de groupes finis d'ordre premier à ℓ . Le foncteur "invariants sous Q " est donc exact. Pour K' dans $D(X_{\eta'})$, d'image inverse K dans $D(X_{\bar{\eta}})$, on a

$$(4.4.4.1) \quad H^i \psi_{\eta'} K' = (H^i \psi_{\bar{\eta}} K)^Q.$$

La vérification est laissée au lecteur.

L'énoncé analogue dans la catégorie dérivée ne nous sera pas nécessaire.

L'analogue de 4.4.2 pour ψ_η , est conséquence de l'énoncé originel, et de (4.4.4.1). De même, l'analogue de 4.4.3 pour ψ_η , résulte de 4.4.3 et (4.4.4.1).

Soit A lisse sur S et \bar{s}_1 un point géométrique générique de $A_{\bar{S}}$ d'image s_1 dans A_S . Soit S_1 l'hensélisé de A en s_1 . C'est un trait. Soit S_1^h son hensélisé strict (rel. \bar{s}_1). Il s'envoie sur S^h et l'image inverse d'une uniformisante de S^h est une uniformisante de S_1^h . Le produit fibré $S_1' = S' \times_{S^h} S_1^h$ est pour S_1 du type considéré plus haut pour S .

4.4.5. Prouvons 4.4.2 (tel qu'amplifié en 4.4.4). Le problème étant local sur X , on peut supposer, et on suppose, X affine. Soit A_S^d l'espace affine relatif de dimension d sur S . Nous prouverons l'énoncé suivant, dont 4.4.2 résulte formellement : pour tout d , et pour tout morphisme $f : X \rightarrow A_S^d$, si le point géométrique x de $X_{\bar{S}}$ a pour image dans A_S^d le point générique, alors $(H^j_{\psi_\eta}, F)_x = 0$ pour $j > N-d$ (F comme sous 4.4.2).

Appliquons 4.4.4 à A_S^d/S :

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_S^d & \longleftarrow & S_1 & \longleftarrow & S_1^h & \longleftarrow & S_1' \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & S & \longleftarrow & S^h & \longleftarrow & S'
 \end{array} ,$$

soit X_1 le "localisé" $X \times_{A_S^d} S_1$ de X , et X_1' déduit de X_1 par changement de base de S_1 à S_1' :

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xleftarrow{\epsilon} & X_1' \\
 \downarrow & \searrow f & \downarrow \\
 S' & \xleftarrow{\quad} & A_{S'}^d \xleftarrow{\quad} S_1'
 \end{array} .$$

Le morphisme ϵ étant pro-étale, le foncteur ψ_{η_1} , relatif à X'/S' se localise en le foncteur analogue relatif à X_1'/S_1' :

$$\psi_{\eta_1'} \epsilon^* = \epsilon^* \psi_{\eta'} .$$

Pour F fermé dans X_{η_1}' , de dimension $\leq N$, son image inverse dans $(X_1')_{\eta_1'}$ est de dimension $\leq N-d$. De même, si un point x de $X_{\bar{S}}$ est tel que $f(x)$ soit le point générique de A_S^d , i.e. s'il est l'image

d'un point x_1 de $(X_1)_{S_1}^-$, on a $\dim\{x_1\}^- = \dim\{x\}^- - d$. Ce décalage de d , et la relation ci-dessus entre cycles proches pour X'/S' et pour X'_1/S'_1 , nous ramènent alors à 4.4.3 (amplifié par 4.4.4) pour X'_1/S'_1 .

Remarque 4.4.5 : nous avons déduit 4.4.2 du théorème de dimension cohomologique des schémas affines. Cette présentation est artificielle en ce que, dans SGA4 XIV, ce théorème et une forme de 4.4.2 (cachée dans la preuve de SGA4 XIV 4.5) sont démontrés par un récurrence simultanée sur N .

4.5 Estimations de nombres de Betti.

Le but de ce numéro est 4.5.5, utilisé dans la preuve du théorème de pureté 5.3.4.

Proposition 4.5.1 . Soient $(X_a)_{1 \leq a \leq n}$ des courbes projectives et lisses connexes sur k algébriquement clos, X leur produit, et K dans $\mathbb{P}_D^{\leq 0}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Il existe C tel que, quels que soient les revêtements étales connexes \tilde{X}_a des X_a , de degré d_a , notant \tilde{X} le produit des \tilde{X}_a , on ait

- (i) Pour tout i , $\dim H^i(\tilde{X}, K) \leq C \cdot \prod d_a$.
- (ii) Pour $i > 0$, $\dim H^i(\tilde{X}, K) \leq C \cdot \sup_{a \in A} \{ \prod d_a \mid |A| = n-i \}$ (où le sup est égal à zéro pour $i > n$) .

Pour que l'énoncé soit vrai pour K , il suffit qu'il le soit pour les $H^j K[-j]$: on peut supposer K de la forme $F[N]$, pour F un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau dont la dimension du support est $\leq N$. On se ramène du cas des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceaux à celui des \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux, puis des \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux (remplacer \dim par rang). La formule des coefficients universels (la suite exacte

$$0 \rightarrow H^i(X, K) \otimes_{\mathbb{Z}/\ell} \mathbb{Z}/\ell \rightarrow H^i(X, K \otimes_{\mathbb{Z}/\ell} \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \text{Tor}_1(H^{i+1}(X, K), \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow 0$$

montre que $\text{rg } H^i(\tilde{X}, K) \leq \dim_{\mathbb{Z}/\ell} H^i(\tilde{X}, K \otimes_{\mathbb{Z}/\ell} \mathbb{Z}/\ell)$ et nous ramène enfin au cas des faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ -modules. Ceci nous débarrasse du formalisme ℓ -adique.

Soient donc F un faisceau de \mathbb{Z}/ℓ -modules, avec $\dim \text{Supp } F \leq N$, $K = F[N]$, et prouvons 4.5.1 par récurrence sur n .

Le cas $n = 0$ est laissé au lecteur.

Supposons $n \geq 1$, et soit pr la projection de X sur X_1 . Il existe un ouvert non vide $j : U_1 \hookrightarrow X_1$ de X_1 au-dessus duquel K soit localement acyclique, relativement à pr (SGA4 1/2, finitude, 2.13). On le prend $\neq X_1$. Soient encore j l'inclusion dans X de $U = pr^{-1}(U_1)$ et i celle du fermé complémentaire. Dévissant K par le triangle $(j_! j^* K, K, i_* i^* K)$, on se ramène aux deux cas suivants :

- (a) K est de la forme $(j_! F)[N]$, avec F sur U localement acyclique, relativement à pr ;
- (b) K est à support dans $X - U$.

Le cas (b) se ramène à celui où K est à support dans $pr^{-1}(t)$, pour $t \in X_1$ un point fermé convenable. Soient $Y = pr^{-1}(t) \xrightarrow{\sim} \prod_{a \neq 1} X_a$, et $\tilde{Y} = \prod_{a \neq 1} \tilde{X}_a$. On a

$$\dim H^i(\tilde{X}, K) = d_1 \cdot \dim H^i(\tilde{Y}, K)$$

et 4.5.1 résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à Y .

Supposons K de la forme (a). Notons $j : \tilde{U} \hookrightarrow \tilde{X}$ et $j : \tilde{U}_1 \hookrightarrow \tilde{X}_1$ les images inverses de U et U_1 dans \tilde{X} et \tilde{X}_1 , et soit \tilde{pr} la projection de \tilde{X} sur \tilde{X}_1 , ou de \tilde{U} sur \tilde{U}_1 . Le faisceau F restreint à \tilde{U} est encore localement acyclique rel. à \tilde{pr} , et les $R^q \tilde{pr}_* F$ sont donc localement constants sur \tilde{U}_1 .

Soit la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(\tilde{X}_1, R^q \tilde{pr}_* K) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{X}, K) .$$

Puisque $R^q \tilde{pr}_* K = j_! R^{q+N} \tilde{pr}_* F$ est un faisceau localement constant sur \tilde{U}_1 , prolongé par zéro, et qu'on a pris $U_1 \neq X_1$, donc $\tilde{U}_1 \neq \tilde{X}_1$, on a $E_2^{pq} = 0$ pour $p \neq 1, 2$. Il suffit de vérifier les estimations 4.5.1 pour les E_2^{pq} (avec $i = p+q$) ou, ce qui revient au même et nous sera plus commode, pour E_2^{2q} (et $i = q+2$) et pour

$$|\chi(\tilde{X}_1, R^q \tilde{pr}_* K)| = |\dim E_2^{1q} - \dim E_2^{2q}| \quad (\text{et } i = q+1) .$$

Soit t fermé dans U_1 , $\tilde{t} \in \tilde{U}_1$ au-dessus de t , Y et \tilde{Y} comme précédemment et K_1 la restriction de K à $pr^{-1}(t) \xrightarrow{\sim} Y$. Pour t assez général, on a $\dim(\text{Supp } F \cap pr^{-1}(t)) \leq \dim \text{Supp } F - 1$ et $K_1[-1]$

est donc dans $P_{D_C}^{\leq 0}(Y, Z/\ell)$. Le $E_2^{2q} = H_C^2(\tilde{U}_1, R^q \tilde{p}r_* K)$ est donné par les coinvariants de la monodromie sur $(R^q \tilde{p}r_* K)_{\tilde{t}} = H^q(\tilde{Y}, K_1)$:

$$E_2^{2q} = H^q(\tilde{Y}, K_1) \pi_{1*}(\tilde{U}_1, \tilde{t})^{(-1)}$$

d'où $\dim E_2^{2q} \leq \text{rg } R^q \tilde{p}r_* K$. Puisque

$$(4.5.1.1) \quad \text{rg } R^q \tilde{p}r_* K = \dim H^q(\tilde{Y}, K_1) = \dim H^{q+1}(\tilde{Y}, K_1[-1])$$

l'estimation voulue pour E_2^{2q} résulte de l'hypothèse de récurrence.

Parce que \tilde{X}_1 est un revêtement étale de X_1 , qui est propre, ou par la formule d'Euler-Poincaré rappelée plus bas, le $\chi(\tilde{X}_1, R^q \tilde{p}r_* K)$ est d_1 fois le χ analogue pour $X_1 \times \prod_{a \neq 1} \tilde{X}_a \rightarrow X_1$. Ceci nous ramène à montrer que si $d_1 = 1$, i.e. si $\tilde{X}_1 = X_1$ - ce que nous supposerons désormais - on a

$$|\chi(X_1, R^q \tilde{p}r_* K)| \leq \begin{cases} O(\prod_{a \neq 1} d_a) \\ O(\sup_{A \in \mathcal{A}} \{ \prod_{a \in A} d_a \mid \mathcal{A} \in [2, n] \text{ et} \\ |A| = n - (q+1) - 1 \text{ pour } q \geq 0 \}) \end{cases}$$

On a (formule d'Euler-Poincaré, voir [9]) :

$$\chi(X_1, R^q \tilde{p}r_* K) = \chi(U_1) \cdot \text{rg}(R^q \tilde{p}r_* K) - \sum_{x \in X_1 - U_1} \text{Sw}_x(R^q \tilde{p}r_* K)$$

L'estimation (4.5.1.1) du rang de $R^q \tilde{p}r_* K$ - jointe à l'hypothèse de récurrence - suffit pour le premier terme. Pour majorer chacun des conducteurs de Swan $\text{Sw}_x(R^q \tilde{p}r_* K)$, nous appliquerons la théorie des cycles évanescents au trait $(X_{1(x)}, \eta, x)$ hensélisé de X_1 en x et à $X_{(x)} \rightarrow X_{1(x)}$ et $\tilde{X}_{(x)} \rightarrow X_{1(x)}$ déduits de $X \rightarrow X_1$ et $\tilde{X} \rightarrow X_1$ par changement de base. Soit K_1 l'image inverse de K sur $(X_{(x)})_{\eta}$. A nouveau, $K_1[-1]$ est dans $P_{D_C}^{\leq 0}(X_{(x)}, \eta, Z/\ell)$. Le complexe $\psi_{\bar{n}}^{-K_1}[-1]$ sur $X_{(x)} \times \text{pr}^{-1}(x) \rightarrow Y$ est donc dans $P_{D_C}^{\leq 0}(Y, Z/\ell)$ (4.4.2). Le complexe analogue sur $\tilde{X}_{(x)} \times \text{pr}^{-1}(x) \rightarrow \tilde{Y}$ s'en déduit par image inverse. Ces complexes sont munis d'une action du groupe d'inertie $I = \text{Gal}(\bar{n}/n)$, et en particulier du groupe d'inertie sauvage P , donnant lieu à un isomorphisme équivariant

$$(R^q \tilde{p}r_* K)_{\bar{n}} = H^q(\tilde{Y}, \psi_{\bar{n}}^{-K_1}) = H^{q+1}(\tilde{Y}, \psi_{\bar{n}}^{-K_1}[-1])$$

L'action de P sur $\psi_{\bar{n}}^{-K_1}$ se factorise par un quotient fini Q . Il

nous suffirait de savoir que son action sur les $H^i_{\psi_{\eta}^{-1}K_1}$ admet une telle factorisation, mais la preuve s'écrit de façon plus claire en regardant $\psi_{\eta}^{-1}K_1$ comme étant dans $D(Y, \mathbb{Z}/\ell[Q])$. Soit Sw la représentation de Swan de Q . C'est un $\mathbb{Z}/\ell[Q]$ -module projectif, et le conducteur de Swan est

$$Sw_x R^q \tilde{p}_{r_*} K := \dim \text{Hom}_Q(Sw, (R^q \tilde{p}_{r_*} K)_{\eta}^-) ,$$

et

$$\text{Hom}_Q(Sw, (R^q \tilde{p}_{r_*} K)_{\eta}^-) = H^{q+1}(\tilde{Y}, \underline{\text{Hom}}_Q(Sw, \psi_{\eta}^{-1}K_1[-1])) .$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à Y et $\underline{\text{Hom}}_Q(Sw, \psi_{\eta}^{-1}K_1[-1])$, et son application termine la démonstration.

Corollaire 4.5.2 . Pour K dans $D_C^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$, il existe C tel que quels que soient les \tilde{X}_a on ait pour tout i

$$\dim H^i(\tilde{X}, K) \leq C \cdot \prod d_a .$$

On se ramène par décalage à 4.4.1 (i)

Corollaire 4.5.3. Pour K dans $P_{D_C}^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$, il existe C tel que quels que soient les \tilde{X}_a et $i \leq 0$,

$$\dim H^i(\tilde{X}, K) \leq C \cdot \sup_{a \in A} \{ \prod d_a \mid |A| = n - |i| \} .$$

C'est l'énoncé dual de 4.5.1(ii).

Corollaire 4.5.4. Soient $f : U \rightarrow X$ quasi-fini séparé, et K dans $P_{D_C}^{\geq 0}(U, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$. Il existe C tel que, quels que soient les \tilde{X}_a , posant $\tilde{U} = U \times_X \tilde{X}$, on ait pour tout i $\dim H^i(\tilde{U}, K) \leq C \cdot \prod d_a$, et pour $i \leq 0$

$$\dim H^i(\tilde{U}, K) \leq C \cdot \sup_{a \in A} \{ \prod d_a \mid |A| = n - |i| \} .$$

On a $H^*(\tilde{U}, K) = H^*(\tilde{X}, f_* K)$, et on applique 4.5.3 à $f_* K$, dans $P_{D_C}^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ par 2.2.5.

Corollaire 4.5.5 . Soient F un faisceau pervers sur X de type fini sur k et $x \in X$. Il existe un voisinage étale affine U de x et une famille de revêtements étales U_n de U , de degré d_n tendant vers l'infini, tels que pour $i < 0$

$$\dim H^i(U_n, F) \leq o(d_n) .$$

Le problème étant local, on peut supposer X affine. Soit

$f : X \rightarrow \mathbb{A}^d$ un morphisme quasi-fini (par exemple un plongement) de X dans un espace affine, avec $f(x) = 0$. Soit $h : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ un morphisme d'une courbe projective et lisse, de genre $g > 0$, dans \mathbb{P}^1 , étale en $c \in C$ au-dessus de 0 . Soit C' un ouvert contenant c , étale sur \mathbb{P}^1 et tel que $h(C') \subset \mathbb{A}^1$. Soient C_n des revêtements étales connexes de C , de degré d_n tendant vers l'infini (ici sert $g > 0$), C'_n l'image inverse de C' dans C_n , et U (resp. U_n) le produit fibré $X \times_{\mathbb{A}^d} C'^d$ (resp. $X \times_{\mathbb{A}^d} C_n'^d$) :

$$\begin{array}{ccccc}
 U_n & \xrightarrow{f} & C_n'^d & \hookrightarrow & C_n^d \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U & \xrightarrow{f} & C'^d & \hookrightarrow & C^d \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 X & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}^d & & .
 \end{array}$$

Le revêtement étale U_n/U est de degré $d_n = d_n^d$ alors que, d'après 4.5.4, on a, pour $i < 0$,

$$\dim H^i(U_n, F) \leq C \cdot d_n^{d-|i|} .$$

Remarque 4.5.6 : la démonstration montre que pour X de dimension d , on peut prendre les U_n tels que $\dim H^i(U_n, F) \leq O(d_n^{1-|i|/d})$.

5. LA PERVERSITÉ AUTODUALE : POIDS.

Dans ce paragraphe nous complétons les résultats géométriques du paragraphe 4 par des résultats plus arithmétiques. Nous ne considérons que des schémas séparés de type fini sur un corps fini, ou sur la clôture algébrique d'un corps fini, et que la perversité autoduale $P_{1/2}$.

5.0. Notations. Soient p un nombre premier $\neq \ell$, q une puissance de p , \mathbb{F}_q un corps fini à q éléments et \mathbb{F} une clôture algébrique de \mathbb{F}_q .

Comme dans [1] (0.7), nous noterons avec un indice o un objet sur \mathbb{F}_q (un schéma, ou un faisceau sur un schéma). La suppression de cet indice indique l'extension des scalaires de \mathbb{F}_q à \mathbb{F} .

5.1. Rappels de [1].

5.1.1. Soient X_o un schéma de type fini sur \mathbb{F}_q et F_o un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau sur X_o . Sur \mathbb{F} , on dispose du morphisme de Frobenius $Fr_q : X \rightarrow X$ (élévation des coordonnées à la puissance q) et d'un isomorphisme $F_q^* : Fr_q^* F \xrightarrow{\sim} F$ (penser à F_o comme étalé sur X_o , donnant lieu à un diagramme commutatif cartésien de flèches horizontales Fr_q

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \end{array} \quad .$$

Pour chaque entier n , on pose $Fr_{q^n} = (Fr_q)^n$ et on note $F_{q^n}^* : Fr_{q^n}^* F \rightarrow F$ l'isomorphisme déduit de F_q^* par itération. Si X_1/\mathbb{F}_{q^n} est déduit de X_o par extension des scalaires à \mathbb{F}_{q^n} , on a $X_1 \otimes_{\mathbb{F}_{q^n}} \mathbb{F} = X$, et ces morphismes sont ceux de Frobenius, rel. à X_1/\mathbb{F}_{q^n} .

Les points fixes de Fr_{q^n} sont exactement les $x \in X(F)$ définis sur \mathbb{F}_{q^n} . En chacun de ces points fixes, $F_{q^n}^*$ est un automorphisme de F_x .

De même, pour K_o dans $D_C^b(X_o, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, K est muni de

$F_q^* : \text{Fr}_q^* K \xrightarrow{\sim} K$. En particulier, un faisceau pervers F_0 sur X_0 fournit par extension des scalaires de \mathbb{F}_q à \mathbb{F} un faisceau pervers F sur X , muni de $F_q^* : \text{Fr}_q^* F \xrightarrow{\sim} F$.

Proposition 5.1.2. Le foncteur $F_0 \mapsto (F, F_q^*)$ de la catégorie des faisceaux pervers sur X_0 dans celle des faisceaux pervers sur X munis d'un isomorphisme $\text{Fr}_q^* F \xrightarrow{\sim} F$ est pleinement fidèle. La catégorie image essentielle est stable par extensions et par sous-quotients.

Remarque . On peut montrer que pour les \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux pervers, le foncteur analogue est une équivalence de catégories. Pour les coefficients \mathbb{Q}_ℓ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, il n'est pas essentiellement surjectif; déjà pour $X_0 = \text{Spec}(\mathbb{F}_q)$ (un point), l'objet suivant n'est pas dans l'image essentielle : F est \mathbb{Q}_ℓ ; $\sigma : \text{Fr}_q^* \mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$ est la multiplication par u , u n'étant pas une unité ℓ -adique.

Preuve . Soient a la projection de X_0 sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$, et Γ le foncteur "sections globales" sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$. Pour K_0, L_0 dans $D_C^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on a

$$(5.1.2.1) \quad \text{Hom}(K_0, L_0) = H^0 \text{RHom}(K_0, L_0), \text{ et}$$

$$(5.1.2.2) \quad \text{RHom}(K_0, L_0) = R\Gamma \cdot \text{Ra}_* \text{RHom}(K_0, L_0) .$$

Pour M_0 dans $D_C^b(\text{Spec}(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, le foncteur $R\Gamma$ donne lieu à une suite spectrale

$$(5.1.2.3) \quad E_2^{pq} = H^p(\text{Spec } \mathbb{F}_q, H^q M_0) = H^p(\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q), H^q M) \Rightarrow H^{p+q} \text{R}\Gamma M_0 .$$

Cette suite spectrale est obtenue par passages à la limite. La cohomologie galoisienne utilisée $H^p(\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q), \cdot)$ est la cohomologie continue.

Puisque $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) = \tilde{\mathbb{Z}}$, engendré topologiquement par le Frobenius géométrique F (l'inverse du Frobenius arithmétique $\varphi : x \mapsto x^q : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$), les groupes de cohomologie galoisienne considérés sont nuls pour $p \neq 0, 1$; pour $p = 0$, on trouve les invariants de F , pour $p = 1$, les coinvariants, et (5.1.2.3) se ramène à des suites exactes courtes

$$(5.1.2.4) \quad 0 \rightarrow (H^{n-1}M)_F \rightarrow H^n R\Gamma M_O \rightarrow (H^n M)^F \rightarrow 0 \quad .$$

Les \overline{Q}_ℓ -espaces vectoriels sous-jacents aux $H^i Ra_* RHom(K_O, L_O)$ sont simplement les $H^i RHom(K, L) = Hom^i(K, L)$, calculés sur X . Combinant (5.1.2.1) à (5.1.2.4), on obtient des suites exactes courtes

$$(5.1.2.5) \quad 0 \rightarrow (Hom^{i-1}(K, L))_F \rightarrow Hom^i(K_O, L_O) \rightarrow Hom^i(K, L)^F \rightarrow 0 \quad .$$

Faisons $i = 0$. Si K_O et L_O sont pervers, le Hom^{-1} est nul, et on obtient la pleine fidélité annoncée

$$Hom(K_O, L_O) \xrightarrow{\sim} Hom(K, L)^F \quad .$$

Pour $i=1$ et K_O et L_O pervers, $Hom^1(K_O, L_O)$ (resp. $Hom^1(K, L)$) s'identifie par 3.1.17(ii) au groupe des extensions de K_O par L_O (resp. de K par L) dans la catégorie correspondante de faisceaux pervers. On obtient une suite exacte courte

$$0 \rightarrow Hom(K, L)_F \rightarrow Ext^1(K_O, L_O) \rightarrow Ext^1(K, L)^F \rightarrow 0 \quad .$$

Une suite exacte courte analogue vaut pour le Ext^1 dans la catégorie des faisceaux pervers F sur X , munis de $\phi : Fr_q^* F \xrightarrow{\sim} F$: l'oubli de ϕ définit $Ext^1((F, \phi), (G, \phi)) \rightarrow Ext^1(F, G)$, et la classe de l'extension E est dans l'image si et seulement si elle est fixe par ϕ , i.e. si on peut compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Fr_q^* G & \longrightarrow & Fr_q^* E & \longrightarrow & Fr_q^* F \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \downarrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \longrightarrow 0 \quad . \end{array}$$

Le noyau est fourni par les extensions du type $(G \oplus F, \begin{pmatrix} \phi & U\phi \\ 0 & \phi \end{pmatrix})$, de classe déterminée par U modulo les $\phi Fr_q^*(V)\phi^{-1} - V$ pour $V : F \rightarrow G$.

On devrait pouvoir comparer ces deux suites exactes. Nous nous dispenserons de cette vérification en utilisant qu'elles impliquent que $Ext^1(F_O, G_O)$ et $Ext^1((F, \phi), (G, \phi))$ ont la même dimension. La pleine fidélité assure l'injectivité de $Ext^1(F_O, G_O) \rightarrow Ext^1((F, \phi), (G, \phi))$. Cette flèche est donc bijective, et la catégorie image essentielle est donc stable par extensions. La stabilité par sous-quotient résulte du lemme suivant.

Lemme 5.1.3. Soit, pour tout sous-schéma Y_O de X_O , $p(Y_O)$ une sous-catégorie pleine stable par noyaux, conoyaux et extensions de celle des paires (F, ϕ) (F pervers sur Y , $\phi : Fr_q^* F \rightarrow F$).

On suppose que

(a) Pour $j : Y_0 \hookrightarrow Z_0$ un plongement ouvert, ces catégories sont stables par $P_{j!}$, P_{j*} (et donc $P_{j!*$) et P_{j^*} .

(b) Pour $i : Y_0 \hookrightarrow Z_0$ un plongement fermé, i_* est une équivalence de $P(Y_0)$ avec la sous-catégorie de $P(Z_0)$ formée des objets à support dans Y_0 .

(c) Pour Y_0 lisse purement de dimension d et F de la forme $L[d]$ avec L lisse, pour tout sous-quotient lisse stable par ϕ L' de L , $(L'[d], \phi)$ est dans $P(Y_0)$.

Alors, les $P(Y_0)$ sont stables par sous-quotients.

Prouvons la stabilité par sous-objets et par quotients de $P(Y_0)$, par récurrence noethérienne sur \bar{Y}_0 . Soit donc B dans $P(Y_0)$ et A un sous-objet de B . Il faut prouver que A est dans $P(Y_0)$. Le quotient B/A sera dans $P(Y_0)$ par stabilité par conoyaux.

On peut supposer que $Y_0 \neq \emptyset$. Il existe alors un ouvert $j : U_0 \hookrightarrow Y_0$ de Y_0 , non vide, lisse purement d'une dimension d , et sur lequel B et A soient de la forme $(L[d], \phi)$, avec L lisse. D'après (a) et (c), $P_{j!}j^*A$ et $P_{j*}j^*(B/A)$ sont dans $P(Y_0)$, donc aussi $I = \text{Im}(P_{j!}j^*A \rightarrow A \hookrightarrow B)$ et $J = \text{Ker}(B \rightarrow P_{j*}j^*(B/A))$. On a $I \subset A \subset J \subset B$, et J/I est à support dans $Z_0 = Y_0 - U_0$. Le sous-objet A/I de J/I est dans $P(Y_0)$ par (b) et l'hypothèse de récurrence appliquée à Z_0 , et A est dans $P(Y_0)$ comme extension de A/I par I .

Remarque 5.1.4. Si, pour tout sous-schéma Y_0 de X_0 , on se donne une sous-catégorie pleine $P(Y_0)$ de celle des faisceaux pervers sur Y_0 , et que les conditions de 5.1.3 sont remplies par ce système de sous-catégories, les $P(Y_0)$ sont stables par sous-quotients. La même démonstration le montre. On peut aussi le déduire de 5.1.2, 5.1.3. Sous cette forme, le résultat vaut sur un corps de base quelconque (pour autant que les faisceaux pervers soient définis, cf. 2.2.12) et pour une perversité comme en 2.2.1 quelconque (pas seulement pour $P_{1/2}$).

5.1.5. Rappelons ([1] 1.2.1, 1.2.2) qu'un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau F_0 sur X_0

est dit punctuellement pur de poids w ($w \in \mathbb{Z}$) si pour tout n et tout point fixe $x \in X_O(\mathbb{F}_{q^n})$ de $\text{Fr}_{q^n} := \text{Fr}_q^n$ (i.e., tout $x \in X_O(\mathbb{F}_{q^n})$), les valeurs propres de l'automorphisme F_x^* de F_x sont des nombres algébriques dont les conjugués complexes sont tous de valeur absolue $(q^n)^{w/2}$. Rappelons ([1] 1.2.2) que F_O est dit mixte s'il admet une filtration finie de quotients successifs punctuellement purs. Les poids de ceux de ces quotients qui sont non nuls sont les poids punctuels de F .

On définit la catégorie $D_m^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ des complexes mixtes comme la sous-catégorie de $D_C^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ formée des K tels que les faisceaux de cohomologie $H^i K$ soient mixtes.

5.1.6. D'après [1] 6.1, les sous-catégories triangulées $D_m^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ des $D_C^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sont stables par toutes les opérations usuelles ($\text{Rf}_*, \text{Rf}_!, f^*, \text{Rf}^!, \otimes, \text{RHom}$, dualité de Verdier et, en un sens convenable, cycles évanescents). On a aussi stabilité par $\tau_{<i}$ et $\tau_{>i}$, puisque "mixte" se teste sur les faisceaux de cohomologie. Ces opérations sont les seules utilisées pour construire les $P_{\tau_{<i}}$ et les $P_{\tau_{>i}}$, pour p une perversité.

Stabilités 5.1.7. (i) La t-structure de perversité $p_{1/2}$ de $D_C^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ induit une t-structure sur $D_m^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

(ii) Tout sous-quotient d'un faisceau pervers mixte est mixte.

L'assertion (i) résulte de ce que, d'après 5.1.6, D_m^b est stable par les $P_{\tau_{<i}}$ et $P_{\tau_{>i}}$. Elle implique que les faisceaux pervers mixtes forment une sous-catégorie abélienne pleine stable par noyaux, conoyaux et extensions de celle de tous les faisceaux pervers. L'assertion (ii) résulte de 5.1.4, les hypothèses de 5.1.3 étant vérifiées par 5.1.6.

Dans la suite, nous ne considérerons plus que des complexes mixtes. On n'est pas exposé à en rencontrer d'autres, sauf à le faire exprès.

5.1.8. On dit que K dans $D_m^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est de poids $\leq w$ si pour chaque i , les poids punctuels de $H^i K$ sont $\leq w + i$. On note $D_{<w}^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la sous-catégorie correspondante de $D_m^b(X_O, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Noter le décalage en i dans la définition. Sa justification est [1] 6.2.3,

cité plus bas. Il donne :

$$(D_{\leq w}^b)[1] = D_{\leq w+1}^b$$

(et en particulier $D_{\leq w}^b[1] \supset D_{\leq w}^b$, l'inclusion inverse de celle qui apparaît dans l'axiome 1.3.1 (ii) des t-structures).

On dit que K est de poids $\geq w$ si son dual de Verdier DK est de poids $\leq -w$, et on note $D_{\geq w}^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la sous-catégorie correspondante de $D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. On dit que K est pur de poids w s'il est de poids $\leq w$ et $\geq w$. Si X_0 est lisse purement de dimension d et que les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceaux $H^i K$ sont lisses, on a $H^i DK = (H^{-2d-i} K)^\vee(d)$, et K est pur de poids w si et seulement si chaque $H^i K$ est ponctuellement pur de poids $w+i$.

Il résulte de 5.1.15 (iii) ci-dessous que $D_{\leq w}^b \cap D_{> w+1}^b$ est réduit aux objets nuls (appliquer 5.1.15 (iii) à l'application identique de K , vue comme morphisme de degré 1 de K dans $K[-1]$).

Proposition 5.1.9. Soit K dans $D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Pour que K soit de poids $\leq w$ (resp. $\geq w$), il faut et il suffit que pour chaque point fermé x_0 , notant i son inclusion dans X_0 , on ait $i^* K$ (resp. $i^! K$) de poids $\leq w$ (resp. $\geq w$).

La première assertion est triviale; la seconde en est duale.

Remarque 5.1.10. Si X_1 se déduit de X_0 par extension des scalaires de \mathbb{F}_q à \mathbb{F}_{q^n} , et que K_1 est l'image inverse de K_0 sur X_1 , K_1 est mixte (resp. et de poids $\leq w$, $\geq w$) si et seulement si K_0 l'est. Pour parler de poids, il suffit donc de disposer de (X, K) , et d'une façon d'abaisser le corps de définition à \mathbb{F}_{q^n} , pour n assez divisible.

Remarque 5.1.11. La fibre en \mathbb{F}_q d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau constructible sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$ est munie d'une action par transport de structures de $\text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_q)$. Cette construction fournit une équivalence de catégories : $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-faisceaux constructibles sur } \text{Spec}(\mathbb{F}_q)) \rightarrow (\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de } \text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_q))$. Le Frobenius F_q^* est l'action de l'élément de Frobenius

géométrique $F = \varphi^{-1}$, où φ est le Frobenius arithmétique $\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} : x \mapsto x^q$. Nous utiliserons ce dictionnaire pour étendre la terminologie des poids aux vectoriels munis d'une action de $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$.

5.1.12. On peut cumuler 5.1.10 et 5.1.11. Par exemple, pour (X_0, K_0) sur \mathbb{F}_q et $u : Y \rightarrow X$ de type fini, il a un sens de parler des poids de $H^i(Y, K)$ (notation 4.0.3) : u et Y sont définis sur \mathbb{F}_q , pour n assez divisible, d'où une action de $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q^n)$ sur $H^i(Y, u^*K)$. Deux façons de définir u et Y sur \mathbb{F}_q coïncident sur \mathbb{F}_q^m , m multiple assez divisible de n , et les deux actions de Galois obtenues coïncident donc sur le sous-groupe d'indice fini $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q^m)$ de $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q^n)$. Les poids ne dépendent que de cette restriction.

5.1.13. Le théorème principal de [1] ([1] 3.3.1, 6.2.3) est que, si $f : X_0 \rightarrow Y_0$ est un morphisme séparé de schémas de type fini sur \mathbb{F}_q , le foncteur $Rf_!$ envoie $D_{\leq w}^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans $D_{\leq w}^b(Y_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Il est clair que f^* respecte $D_{\leq w}^b$, et que \otimes envoie $D_{\leq w}^b, D_{\leq w'}$, dans $D_{\leq w+w'}^b$. Invoquant la dualité, on obtient la table de stabilités suivante (on écrit $f_!, f^!$ pour $Rf_!, Rf^!$).

Stabilités 5.1.14.

- (i) $f_!, f^*$ respectent $D_{\leq w}^b$;
- (i*) $f^!, f_*$ respectent $D_{\geq w}^b$;
- (ii) \otimes envoie $D_{\leq w}^b \times D_{\leq w'}^b$, dans $D_{\leq w+w'}^b$;
- (ii*) $R\text{Hom}$ envoie $D_{\leq w}^b \times D_{\geq w'}^b$, dans $D_{\geq -w+w'}^b$;
- (iii) D échange $D_{\leq w}^b$ et $D_{\geq -w}^b$.

Le produit tensoriel externe $\boxtimes := \text{pr}_1^* \otimes \text{pr}_2^*$: $D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \times D_m^b(Y_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow D_m^b(X_0 \times Y_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ envoie, d'après (i*) et (ii), $D_{\leq w}^b \times D_{\leq w'}$ dans $D_{\leq w+w'}^b$. A l'aide de 5.1.9, on vérifie facilement la réciproque

$$(5.1.14.1) \quad \inf\{w \mid K_0 \boxtimes L_0 \in D_{\leq w}^b\} = \inf\{w' \mid K_0 \in D_{\leq w'}^b\} + \inf\{w'' \mid L_0 \in D_{\leq w''}^b\} .$$

On sait que \boxtimes commute à la dualité (SGA 5 III 1.1.7 implique que

le complexe dualisant de $X_0 \times Y_0$ est le \boxtimes de ceux de X_0 et Y_0 , et SGA 5 III 2.2.4 (commutation de $\underline{R}\text{Hom}$ et \boxtimes) permet d'en conclure la commutation à la dualité). Dualisant (5.1.14.1), on trouve

$$(5.1.14.1^*) \quad \sup\{w \mid K_0 \boxtimes L_0 \in D_{\geq w}^b\} = \sup\{w' \mid K_0 \in D_{\geq w'}^b\} + \sup\{w'' \mid L_0 \in D_{\geq w''}^b\}.$$

Proposition 5.1.15. Soient K_0 et L_0 dans $D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Supposons que, pour un entier w , K_0 soit dans $D_{\leq w}^b$ et L_0 dans $D_{> w}^b$. Alors

- (i) $\text{Ra}_* \underline{R}\text{Hom}(K_0, L_0)$ est dans $D_{> 0}^b(\text{Spec}(\mathbb{F}_q))$.
- (ii) $\text{Hom}^i(K_0, L_0) = 0$ pour $i > 0$

Pour K_0 dans $D_{< w}^b$ et L_0 dans $D_{> w}^b$, donc $\text{Ra}_* \underline{R}\text{Hom}(K, L)$ dans $D_{> 0}^b$, on a encore

- (iii) $\text{Hom}^i(K, L)^F = 0$ pour $i > 0$. En particulier, pour $i > 0$, le morphisme $\text{Hom}^i(K_0, L_0) \rightarrow \text{Hom}^i(K, L)$ est nul.

L'assertion (i) résulte de 5.1.14. Elle implique que $\text{Hom}^i(K, L)$ est de poids $> i$, donc de poids > 0 pour $i \geq 0$. On a donc $\text{Hom}^i(K, L)_F = \text{Hom}^i(K, L)^F = 0$ pour $i \geq 0$, et on applique (5.1.2.5). De même pour (iii).

5.2. Une réciproque.

Théorème 5.2.1. Pour que le faisceau pervers mixte F_0 sur X_0 soit de poids $\geq w$, il faut et il suffit que pour tout U_0 affine étale sur X_0 , le $H^0(U, F)$ (notation 4.0.3) soit de poids $\geq w$.

Que la condition soit nécessaire résulte de (5.1.14.1*) : pour $u: U_0 \rightarrow X_0$ étale et a la projection sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$, $u^! = u^*$ et a_* préservent $D_{\geq w}^b$. Prouvons qu'elle est suffisante. Elle implique que pour $u: U \rightarrow X$ affine étale, $H^0(U, F)$ est de poids $\geq w$ (au sens 5.1.12). En effet, U et u sont définis sur \mathbb{F}_{q^n} convenable : $U = U_1 \otimes_{\mathbb{F}_{q^n}} \mathbb{F}$. Soit V_0 le schéma sur \mathbb{F}_q déduit de U_1 par restriction des scalaires à la Grothendieck, de \mathbb{F}_{q^n} à \mathbb{F}_q : c'est $U_1 \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{F}_{q^n}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{F}_q)$. On dispose de $v_0: \tilde{V}_0 \rightarrow X_0$, et V_1 , déduit de V_0 par extension des scalaires à \mathbb{F}_{q^n} , est la somme des conjugués par $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ de U_1 . En particulier, $H^0(U, u^*F)$, muni de

son action de $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^n})$, est facteur direct de $H^0(V, v^*F)$.

5.2.2. Preuve pour X lisse connexe de dimension 1.

Ecrivons F_\circ comme extension successive de faisceaux pervers simples : F_\circ admet une filtration finie décroissante F pour laquelle chaque Gr_F^i est de l'un des deux types suivants :

(a) de la forme $({}^0j_*L_\circ)[1]$, pour L_\circ un faisceau lisse irréductible sur un ouvert dense $j : Y_\circ \hookrightarrow X_\circ$; on a $({}^0j_*L_\circ)[1] = j_{!,*}(L_\circ[1])$;

(b) à support ponctuel, et irréductible.

Les faisceaux (a) et (b) sont mixtes ; les faisceaux L_\circ de (a), étant irréductibles, sont même purs (du moins quitte à rétrécir l'ouvert - cf. 5.1.8). D'après [1] ex. 6.2.5(c), les $({}^0j_*L_\circ)[1] = j_{!,*}(L_\circ[1])$ sont purs du même poids. De même, les faisceaux ponctuels (b), étant irréductibles, sont purs.

La filtration F fournit une suitespectrale

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(U, \text{Gr}_F^p F) \Rightarrow H^{p+q}(U, F).$$

Les H^i considérés sont nuls pour $i \neq -1, 0$ et, si r est le rang de $H^{-1}F$ au point générique (la somme des rangs des faisceaux lisses L_\circ en (a) ci-dessus), on a pour U connexe

$$\sum_p \dim H^{-1}(U, \text{Gr}_F^p F) \leq r.$$

On en déduit que, quel que soit U affine connexe, étale sur X_\circ , chaque $H^0(U, \text{Gr}_F^p F)$ admet un quotient naturel, par un sous-espace de dimension $\leq r$, qui soit un sous-quotient de $H^0(U, F)$ et soit donc de poids $\geq w$.

Si $\text{Gr}_F^p F_\circ$ est à support ponctuel, de support un point fermé x_\circ , prenons U tel que $|u^{-1}(x)| > r$, pour $x \in X$ au-dessus de x_\circ . Le $H^0(U, \text{Gr}_F^p F)$ contient alors la somme de $|u^{-1}(x)|$ copies de $(\text{Gr}_F^p F)_x$. Puisque $|u^{-1}(x)| > r$, une de ces copies s'injecte dans le quotient de $H^0(U, \text{Gr}_F^p F)$ de poids $\geq w$, et $\text{Gr}_F^p F$ lui-même est donc

de poids $\geq w$.

Soit \bar{X}_0 la courbe projective lisse connexe dont X_0 est un ouvert dense, et soit de même \bar{U} la complétion projective de $u : U \rightarrow X$ affine étale connexe sur X . Pour étudier les $\text{Gr}_{\mathbb{F}_0}^{\text{PF}}$ du type (a), nous prendrons U sur $Y \subset X$. Soit k l'inclusion de U dans \bar{U} . On a

$$H^1(\bar{U}, {}^0k_*u^*L) \hookrightarrow H^1(U, u^*L) ,$$

et $H^1(\bar{U}, {}^0k_*u^*L) = H^0(\bar{U}, k_{1*}u^*L[1])$ admet donc un quotient, par un sous-espace de dimension $\leq r$, qui soit de poids $\geq w$. Par ailleurs, ce H^0 est purement du poids de $L_0[1]$ ([1] 3.2.3). Pour U convenue (par exemple avec \bar{U} de genre g tel que $2g-2 > r$) , il est de dimension $> r$ (appliquer la formule d'Euler-Poincaré citée en 4.5.1), d'où on conclut que $L_0[1]$ est de poids $\geq w$. Ceci termine la démonstration du théorème pour X lisse connexe de dimension 1 .

Remarque 5.2.3. L'argument qui nous a permis de passer de F aux $\text{Gr}_{\mathbb{F}}^{\text{PF}}$ peut se formaliser comme suit. Soit S la catégorie des $u : U \rightarrow X$, avec U affine connexe et u étale. Pour chaque F pervers sur X , soit $\int F$ le préfaisceau $U \mapsto H^0(U, F)$ sur S . Soit par ailleurs N la catégorie des préfaisceaux de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -espaces vectoriels h sur S tels que $\dim h(U)$ soit borné. C'est une sous-catégorie épaisse de la catégorie $\text{pf}(S)$ des préfaisceaux de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -espaces vectoriels sur S . Avec ces notations, pour X lisse de dimension ≤ 1 , le foncteur $F \mapsto \int F \pmod{N}$ est un foncteur exact

$$(\text{faisceaux pervers sur } X) \longrightarrow \text{pf}(S)/N .$$

Remarque 5.2.4. La méthode de démonstration utilisée dans 5.2.2 permet de prouver le résultat suivant. Soit F_0 un faisceau pervers mixte sur X_0 , et supposons X lisse connexe de dimension 1 . Supposons que pour $u : U \rightarrow X$ étale, avec U affine connexe, la dimension du sous-espace $W^{w-1}H^0(U, F)$ de poids $< w$ de $H^0(U, F)$ soit $o(\text{degré de } U(X))$. Alors, F_0 est de poids $\geq w$. Pour le voir, on prend le U à la fin de la preuve de 5.2.2 de la forme suivante : prendre d'abord U_1 tel que \bar{U}_1 soit de genre > 1 , puis pour U un revêtement de U_1 qui se prolonge en un revêtement étale de \bar{U}_1 .

5.2.5. L'hypothèse " $H^0(U, F)$ de poids $\geq w$ pour tout U_0 affine étale sur X_0 " s'hérite de X_0 à V_0 étale sur X_0 . Pour F'_0 un quotient de F_0 , elle s'hérite de F_0 à F'_0 : les foncteurs $H^0(U,)$ sont en effet exacts à droite (4.1.1). Si $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$ est un morphisme affine, elle s'hérite de (X_0, F_0) à $(Y_0, {}^P\varphi_* F_0)$ (où ${}^P\varphi_* F_0 = {}^P H^0 \varphi_* F_0$). Pour tout V_0 affine, étale sur Y_0 , posant $U_0 = X_0 \times_{Y_0} V_0$, on a en effet (cf. la remarque sous 4.1.2 pour $U_0 \rightarrow V_0 \rightarrow \text{point}$)

$$H^0(V, {}^P\varphi_* F_0) = H^0(U, F_0) \quad .$$

Quant à la conclusion " F_0 de poids $\geq w$ ", il suffit de la vérifier localement (pour la topologie étale - Zariski nous suffit) et si $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$ est un morphisme fini (un plongement fermé nous suffit), elle est vraie pour (X_0, F_0) si et seulement si elle est vraie pour $(Y_0, \varphi_* F_0)$.

On laisse au lecteur le soin de déduire de ceci qu'il suffit de prouver 5.2.1 pour X_0 l'espace affine A_0^n . Nous procéderons par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est trivial, et le cas $n = 1$ a déjà été traité (5.2.2).

5.2.6. Prouvons que si G_0 est un sous-faisceau à support ponctuel de F_0 , il est de poids $\geq w$. Quitte à étendre le corps des scalaires, on se ramène à supposer que le support de G_0 est réduit à $\{0\}$. Soit $u: U \rightarrow A^1$ un morphisme étale, couvrant 0 , avec U lisse connexe de complétion projective et lisse \bar{U} de genre > 1 . Soit \bar{U}_α une famille de revêtements étales connexes de \bar{U} , de degré d_α tendant vers l'infini, et soit U_α l'image inverse de U dans \bar{U}_α . On dispose de $U_\alpha^n \rightarrow A^n$, et on a vu (4.5.4) que

$$\dim H^{-1}(U_\alpha^n, F/G) \leq O(d_\alpha^{n-1}) \quad .$$

Puisque $H^0(U_\alpha^n, G)$ est somme de $(|u^{-1}(0)| \cdot d_\alpha)^n$ copies de la fibre de G en 0 , la suite exacte

$$H^{-1}(U_\alpha^n, F/G) \rightarrow H^0(U_\alpha^n, G) \rightarrow H^0(U_\alpha^n, F)$$

montre que pour d_α assez grand, une au moins de ces copies s'injecte

dans $H^0(U_\alpha^n, F)$. L'assertion en résulte.

5.2.7. Prouvons que, si F n'a pas de sous-faisceau pervers à support ponctuel non trivial, F_0 est de poids $\geq w$. Soit x dans A^n (un point fermé) et i_x l'inclusion de x dans A^n . D'après 5.1.9, il faut montrer que $i_x^! F$ est de poids $\geq w$. Soit H un hyperplan passant par x . Pour H assez général, H ne contient le support d'aucun sous-faisceau pervers simple de F (il n'y en a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie) et, si u est l'inclusion de H dans A^n , $u^! F$ est donc nul. Puisque H est un diviseur, $p_H^i u^! F = 0$ pour $i \neq 0, 1$ (4.1.11 (ii)). Ici, on trouve que $p_H^i u^! F = 0$ pour $i \neq 1$, i.e. que $u^! F[1]$ est pervers.

Changeant de variables (au prix de remplacer \mathbb{F}_q par une extension finie), on peut supposer H est $A^{n-1} \times \{0\} \subset A^n$. Soit pr la projection sur le dernier facteur :

$$\begin{array}{ccc} x \rightarrow H_0 & \xleftarrow{u} & A_0^n \\ \downarrow & & \downarrow pr \\ \{0\} & \xleftarrow{\quad} & A_0^1 \end{array}$$

et $i_{x,H}$ l'inclusion de x dans H . On a $i_x^! = i_{x,H}^! \circ u^!$. Pour conclure, il suffit donc de démontrer que $u^! F_0$ est de poids $\geq w$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à $u^! F_0[1]$ et à $H_0 \sim A_0^{n-1}$. Il s'agit de vérifier que tout V_0 affine, étale sur A_0^{n-1} , $H^1(V, u^! F)$ est de poids $\geq w+1$.

Posons $U_0 = V_0 \times A_0^1$. Soit le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xleftarrow{v} & U_0 \\ \downarrow p & & \downarrow pr \\ \{0\} & \xleftarrow{i} & A_0^1 \end{array} .$$

Si on note encore F_0 l'image inverse de F_0 sur U_0 , $v^! F_0$ est l'image inverse de $u^! F_0$ sur V_0 : $v^! F_0[1]$ est pervers, et il faut montrer que $H^1(V, v^! F)$ est de poids $\geq w+1$.

On a $i^!pr_* = p_*v^!$. Récrivons-le $i^![1] \circ pr_* = p_* \circ v^![1]$. Les foncteurs considérés sont alors tous t -exact à droite (4.1.11(ii) et 4.1.1), et passant au H^0 (1.3.17 (iii)) on obtient

$$(5.2.7.1) \quad H^0(V, v^!F[1]) = H^0(i^!(P_{pr_*}F)[1]) .$$

Puisque $P_{pr_*}F_0$ sur A_0^1 vérifie encore l'hypothèse du théorème (5.2.5), on sait par 5.2.2 que $P_{pr_*}F$ est de poids $\geq w$. Le membre de droite de (5.2.7.1) est donc de poids $\geq w+1$, et $H^1(V, v^!F)$ aussi.

5.2.8. Fin de la preuve de 5.2.1. Soit G le plus grand sous-faisceau pervers de F dont le support est de dimension 0. Il est stable par F_q^* , donc provient d'un sous-faisceau pervers G_0 de F_0 . D'après 5.2.7 et 5.2.5, F_0/G_0 est de poids $\geq w$. D'après 5.2.6, G_0 est de poids $\geq w$. Le faisceau pervers F_0 est donc de poids $\geq w$, comme extension de F_0/G_0 par G_0 .

5.3. La filtration par le poids.

Proposition 5.3.1. Si un faisceau pervers F_0 sur X_0 est mixte de poids $\geq w$ (resp $\leq w$), tout sous-quotient de F_0 est encore mixte de poids $\geq w$ (resp $\leq w$).

On se ramène par torsion au cas où $w = 0$. Soit F_0 de poids ≥ 0 . Si G_0 est un quotient de F_0 , pour tout U_0 affine, étale sur X_0 , $H^0(U, G)$ est un quotient de $H^0(U, F)$, donc est de poids ≥ 0 , et on applique 5.2.1. Si G_0 est un sous-faisceau pervers de F_0 , la suite exacte

$$H^{-1}(U, F/G) \rightarrow H^0(U, G) \rightarrow H^0(U, F)$$

montre de même que G_0 est de poids ≥ -1 . On améliore cette estimation du poids en passant à $X_0 \times X_0$: $G_0 \boxtimes G_0$ est un sous-faisceau de $F_0 \boxtimes F_0$. Il est donc de poids ≥ -1 , et par (5.1.14.1*) G_0 est de poids $\geq -1/2$. Les poids étant entiers, il est même de poids ≥ 0 .

Les assertions respées s'obtiennent par dualité.

Corollaire 5.3.2. Soit $j : U_0 \hookrightarrow X_0$ un plongement affine. Si F_0 est un faisceau pervers mixte de poids $\leq w$ (resp. $\geq w$) sur U_0 , le faisceau pervers $j_{!*}F_0$ est encore mixte de poids $\leq w$ (resp. $\geq w$). En particulier, si F_0 est pur, $j_{!*}F_0$ est pur du même poids.

Première preuve. Supposons F_0 de poids $\leq w$. Puisque j est affine, $j_!F_0$ est pervers (4.1.3). Il est de poids $\leq w$ (5.1.14(i)). D'après 5.3.1, le faisceau pervers $j_{!*}F_0$ est de poids $\leq w$ comme quotient de $j_!F_0$. Ceci, complété par dualité, prouve 5.3.2.

Deuxième preuve. Voici une autre preuve de 5.3.2, généralisé au cas d'un plongement non nécessairement affine. Il suffit de montrer que si F_0 est de poids $\geq w$, $j_{!*}F_0$ l'est aussi. Il suffit par ailleurs de traiter le cas d'un plongement ouvert.

(a) Preuve pour $X_0 - U_0$ fini. Soit $v : V_0 \rightarrow X_0$ étale :

$$\begin{array}{ccc} v^{-1}(U_0) & \xrightarrow{j} & V_0 \\ v \downarrow & & \downarrow v \\ U_0 & \xrightarrow{j} & X_0 \end{array} .$$

On a $v^*j_{!*}F_0 = j_{!*}v^*F_0 = {}^{o_{\tau}}_{\leq -1} j_* v^*F_0$, donc

$$H^0(V, v^*j_{!*}F) \hookrightarrow H^0(V, j_*v^*F) = H^0(v^{-1}(U), v^*F) .$$

Ce dernier groupe étant de poids $\geq w$ (5.1.14 (i*)), la réciproque 5.2.1 montre que $j_{!*}F_0$ est de poids $\geq w$.

(b) Réduction au cas (a) (esquisse). Le problème étant local, on se ramène à supposer X_0 affine. Procédons par récurrence sur sa dimension. Pour toute projection $f : X_0 \rightarrow A_0^1$, il existe un ouvert non vide $V_0 \subset A_0^1$ tel que pour tout point fermé $v_0 \in V_0$, donnant lieu à

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(v_0) \cap U_0 & \xhookrightarrow{i} & U_0 \\
 \downarrow j & & \downarrow j \\
 f^{-1}(v_0) & \xhookrightarrow{i} & X_0
 \end{array}$$

$i^*F_0[-1]$ soit pervers, et $i^*(j_{!*}F_0)[-1] = j_{!*}(i^*F_0[-1])$.
 Pour V_0 plus petit, on a en outre $i^*(j_{!*}F_0)[-2](-1) \xrightarrow{\sim} i^!(j_{!*}F_0)$,
 et l'hypothèse de récurrence appliquée à $f^{-1}(v_0) \cap U_0 \hookrightarrow f^{-1}(v_0)$
 et à $i^*F_0[-1]$ assure que $j_{!*}F_0$ est de poids $\geq w$ sur $f^{-1}(V_0)$.
 Ceci valant pour tout f , $j_{!*}F_0$ est de poids $\geq w$ en dehors d'une
 partie fixée Y_0 de X_0 , et on est ramené au cas (a).

Remarque 5.3.3. Pour tout morphisme quasi-fini f , $f_{!*}$ transforme faisceaux pervers de poids $\geq w$ (resp. $\leq w$) en faisceaux pervers de poids $\geq w$ (resp. $\leq w$), et donc faisceaux purs en faisceaux purs du même poids. On peut le déduire de 5.3.2 (2^e preuve) en factorisant f en (morphisme fini) • (plongement ouvert). Une autre preuve, parallèle à la première preuve de 5.3.2, est donnée en 5.4.3.

Corollaire 5.3.4. Tout faisceau pervers mixte simple F_0 est pur.

Il existe $j : U_0 \hookrightarrow X_0$ lisse connexe de dimension d et un faisceau lisse L_0 sur U_0 tels que $F_0 = j_{!*}(L_0[d])$ (4.3.1). On peut rétrécir U_0 (4.3.2). Le faisceau lisse L_0 étant irréductible, il résulte des définitions qu'on peut le prendre pur (équivalent ici à ponctuellement pur (5.1.8)). On peut prendre U_0 affine, et il ne reste alors qu'à appliquer 5.3.2.

Théorème 5.3.5. Un faisceau pervers mixte admet une unique filtration finie croissante W , la filtration par le poids, telle que $Gr_i^W F_0$ soit pur de poids i . Tout morphisme $f : F_0 \rightarrow G_0$ est strictement compatible aux filtrations par le poids de F_0 et G_0 .

Si les faisceaux pervers simples mixtes (et donc purs) U_0 et V_0 sont de poids u et v , avec $u > v$, $Ext^1(V_0, U_0) = 0$ (5.1.15(ii) pour $i=1$; rappelons que $Ext^1 = Hom_D^1$). Soit S^+ (resp. S^-) l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux pervers mixtes simples

de poids $> i$ (resp. $\leq i$) . Le sous-faisceau $W_i F_0$ de F_0 est fourni par le lemme suivant, appliqué à S^+ et S^- . Combiné à 5.3.1, il fournit aussi l'unicité, et la stricte fonctorialité.

Lemme 5.3.6. Soit A une catégorie abélienne dont tout objet est de longueur finie. Soient (S^+, S^-) une partition en deux classes de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets simples de A , et A^+ (resp. A^-) la sous-catégorie pleine de A formée des X dont les sous-quotients simples sont dans S^+ (resp. S^-) . Supposons que pour U dans S^+ et V dans S^- , on ait $\text{Ext}^1(V, U) = 0$. Alors, tout objet F de A admet un unique sous-objet WF dans A^- , tel que F/WF soit dans A^+ . Pour tout morphisme $f : F \rightarrow G$, on a $f(WF) = f(F) \cap WG$.

Pour X dans A^+ et Y dans A^- , la suite exacte des Ext montre que $\text{Ext}^1(Y, X) = 0$. Les classes S^+ et S^- étant disjointes, on a aussi $\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}(Y, X) = 0$.

Prouvons l'existence de WF par récurrence sur la longueur ℓ de F . Pour $\ell = 0$, $F = 0$ et l'assertion est claire. Si $\ell > 0$, soit S un sous-objet simple de F . L'hypothèse de récurrence s'applique à F/S , d'où l'existence d'un $W(F/S)$. Soit E son image inverse dans F . C'est une extension de $W(F/S)$ par S . Si S est dans S^- , on prend $WF = E$. Si S est dans S^+ , la nullité de $\text{Ext}^1(W(F/S), S)$ montre que l'extension E est triviale, et on prend pour WF un relèvement de $W(F/S)$ dans E .

Prouvons l'unicité. Si les sous-objets W' et W'' de F sont dans A^- , et que F/W' et F/W'' sont dans A^+ , les nullités de $\text{Hom}(W', F/W'')$ et $\text{Hom}(W'', F/W')$ montrent que les morphismes $W' \rightarrow F \rightarrow F/W''$ et $W'' \rightarrow F \rightarrow F/W'$ sont nuls, i.e. que $W' = W''$.

Enfin, pour tout morphisme $f : F \rightarrow G$, tant $f(WF)$ que $f(F) \cap WG$ vérifient la propriété caractéristique de WfF : on a $WfF = fWF = fF \cap WG$.

Corollaire 5.3.7. Pour qu'un faisceau pervers mixte F_0 sur X_0 soit de poids $\leq w$, il faut et il suffit que toute sous-variété irréductible Y_0 de X_0 (de dimension notée d) admette un ouvert dense U_0

tel que $H^{-d}(F_0)|_{U_0}$ soit de poids ponctuels $\leq w-d$.

Preuve. La condition est nécessaire. Prouvons qu'elle est suffisante. Si F_0 n'était pas de poids $\leq w$, d'après 5.3.5, il admettrait un quotient simple G_0 de poids $w_1 > w$. Soient $j : Y_0 \hookrightarrow X_0$ lisse connexe, de dimension d , et L_0 un faisceau lisse sur Y_0 , tels que $G_0 \simeq j_{1*}(L_0[d])$. On peut prendre Y_0 affine, et L_0 ponctuellement pur de poids w_1-d . La suite exacte longue de cohomologie attachée à

$$0 \rightarrow \text{Ker}(F_0 \rightarrow G_0) \rightarrow F_0 \rightarrow G_0 \rightarrow 0$$

fournit, sur un ouvert dense V_0 de Y_0 , un épimorphisme

$$H^{-d}(F_0)|_{V_0} \rightarrow H^{-d}(G_0)|_{V_0} = L_0|_{V_0} .$$

L'hypothèse assure que pour V_0 assez petit, les poids ponctuels de $H^{-d}(F_0)|_{V_0}$ sont $\leq w-d$. Ceux de L_0 le sont donc aussi, d'où $w_1 \leq w$: contradiction.

Théorème 5.3.8. Si F_0/X_0 est un faisceau pervers pur, le faisceau pervers F sur X est somme directe de faisceaux pervers simples, donc de la forme $j_{1*}L[d]$ pour $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion de U lisse connexe purement de dimension d et L un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau lisse irréductible sur U .

La preuve s'obtient en recopiant [1](3.4.1 (iii)). Soit F' la somme dans F des sous-faisceaux pervers simples de F . C'est le plus grand sous-objet semi-simple de F , et il suffit de vérifier que $F' = F$. Le sous-faisceau F' de F est stable par Frobenius. Il provient donc de $F'_0 \subset F_0$ (5.1.2) . Soit $F''_0 = F'_0/F'_0$. La classe de l'extension $0 \rightarrow F'_0 \rightarrow F_0 \rightarrow F''_0 \rightarrow 0$ a une image nulle dans $\text{Ext}^1(F'', F')$ (5.1.15 (iii)) , puisque F'_0 et F''_0 sont purs du même poids (5.3.1). On a donc $F \simeq F' \oplus F''$. Si F'' était non nul, il admettrait un sous-objet simple; ce dernier se relèverait dans F , contredisant la maximalité de F' . On a donc $F'' = 0$, et $F' = F$.

Soit E_n le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$, de fibre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^n$ (base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$) , sur laquelle le Frobenius F agit de façon unipotente

avec un seul bloc de Jordan : $Fe_n = e_n$, et, pour $i < n$, $Fe_i = e_i + e_{i+1}$. C'est un faisceau pur indécomposable de poids 0, non semi-simple si $n > 1$. Notons encore E_n son image inverse sur X_0 .

Proposition 5.3.9. (i) Les faisceaux pervers purs indécomposables sont ceux de la forme $S_0 \otimes E_n$, avec S_0 simple.

(ii) Si S_0 est simple, il existe d et S_1 sur $X_1 := X_0 \otimes \mathbb{F}_{q^d}$, dont S_0 soit l'image directe par $\pi : X_1 \rightarrow X_0$, restant simple sur X , et non isomorphe à ses conjugués sous $\text{Aut}(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q)$.

Soit F_0 un faisceau pervers tel que F soit semi-simple. C'est le cas pour F_0 pur (5.3.8), et pour F_0 simple. Soit A l'ensemble des classes d'isomorphie de constituants simples de F , et écrivons F comme somme de ses constituants isotypiques : $F = \bigoplus F_a$ ($a \in A$). La décomposition de A en orbites fournit une décomposition stable par $F_{q^d}^*$ de F - donc une décomposition de F_0 (5.1.2) : $F_0 = \bigoplus F_{0C}$ (C orbite de $\text{Fr}_{q^d}^*$ dans A). Pour C une orbite à d éléments et $a \in C$, $F_a \subset F_C \subset F$ est stable par $F_{q^d}^* = (F^*)^d$, donc définit un sous-faisceau pervers F_{1a} du faisceau pervers F_{1C} déduit de F_{0C} par image inverse sur $X_1 = X_0 \otimes \mathbb{F}_{q^d}$. Pour π la projection de X_1 sur X_0 , on a $F_{0C} \simeq \pi_* F_{1a}$. Soit G_a simple de classe a , et choisissons un isomorphisme $\phi : F_{q^d}^* G_a \simeq G_a$. On en déduit une action $F_{q^d}^*$ de Frobenius sur $V_a := \text{Hom}(G_a, F_a) = \text{Hom}(G_a, F)$, et l'isomorphisme $F_a \simeq G_a \otimes V_a$ est $F_{q^d}^*$ -équivariant.

Si F_0 est indécomposable, il n'y a qu'une orbite et $(V_a, F_{q^d}^*)$ est indécomposable : $F_{q^d}^*$ agissant sur V_a n'a qu'un seul bloc de Jordan. Changeant l'isomorphisme $\phi : F_{q^d}^* G_a \simeq G_a$, on peut supposer $F_{q^d}^*$ sur V_a unipotent; dans ce cas, (G_a, ϕ) est isomorphe à un sous-objet de $(F_a, F_{q^d}^*)$, donc correspond à un faisceau pervers G_1 sur X_1 , et $F_{1a} \simeq G_1 \otimes E_{\dim(V_a)}$. On utilise ici que l'image inverse sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_{q^d})$ de E_n est isomorphe au faisceau analogue sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_{q^d})$. On obtient

$$F_0 \simeq \pi_*(G_1 \otimes E_n) \simeq \pi_*(G_1) \otimes E_n,$$

et $\pi_*(G_1)$ est simple. Ceci prouve (i).

Pour F_0 simple, il n'y a qu'une orbite, et l'action de F_{cd}^* sur V_a est irréductible : V_a est de dimension 1, et on obtient (ii).

Remarque 5.3.10. Jusqu'à 5.3.8 inclus, les résultats obtenus, et leur démonstration, valent aussi bien en \mathbb{Q}_ℓ - (ou E_λ -) cohomologie. L'assertion 5.3.9 (i) reste vraie en \mathbb{Q}_ℓ - (ou E_λ -) cohomologie, mais l'algèbre linéaire requise pour le déduire de 5.3.8 et 5.1.2 est plus compliquée. L'assertion 5.3.9 (ii) n'est plus vraie telle quelle.

Corollaire 5.3.11. Soient F_0 pervers pur sur X_0 , $j : U_0 \hookrightarrow X_0$ un ouvert et $i : F_0 \hookrightarrow X_0$ le fermé complémentaire. Le faisceau pervers F_0 admet une unique décomposition

$$F_0 = j_{!*}F'_0 \oplus i_*F''_0 :$$

(i) Le morphisme d'adjonction $Pj_! j^*F_0 \rightarrow F_0$ se factorise par le quotient $j_{!*}j^*F_0$ de $Pj_! j^*F_0$, et $F_0 \rightarrow Pj_! j^*F_0$ par le sous-objet $j_{!*}j^*F_0$ de $Pj_! j^*F_0$.

(ii) Le composé des morphismes d'adjonction

$$i_*P_i^!F_0 \rightarrow F_0 \rightarrow i_*P_i^*F_0$$

est un isomorphisme.

L'unicité résulte de ce que $\text{Hom}(j_{!*}F'_0, i_*F''_0) = \text{Hom}(i_*F''_0, j_{!*}F'_0) = 0$. D'après 5.1.2, pour vérifier (i), (ii) et le fait que les flèches de (i) et (ii) sont les injections et projections pour une décomposition du type voulu, il suffit de le vérifier sur X . Par 5.3.8, il suffit de le vérifier pour les constituants simples G de F . Chacun d'eux est de l'une des formes $j_{!*}G'$ ou i_*G'' , ce qui trivialise les assertions.

5.4. Complexes purs.

Soient X_0/\mathbb{F}_q comme en 5.1, et K_0 dans $D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Théorème 5.4.1. Pour que K_O soit de poids $\leq w$ (resp. $\geq w$) , il faut et il suffit que chaque $P_{H^i}K_O$ soit de poids $\leq w+i$ (resp. $\geq w+i$) .

L'assertion respée est duale de l'assertion non respée, à laquelle nous nous limiterons.

Si le triangle (A_O, B_O, C_O) est distingué, et que A_O et C_O sont de poids $\leq w$, B_O l'est aussi. Que la condition soit suffisante en résulte : utiliser les triangles $(P_{\tau_{\leq i-1}}K_O, P_{\tau_{\leq i}}K_O, P_{H^i}K_O[-i])$.

Supposons donc K_O de poids $\leq w$. Nous prouverons par récurrence descendante sur i que $P_{H^i}K_O$ est de poids $\leq w+i$. Pour i grand, le $P_{H^i}K_O$ est nul, et l'assertion triviale. Supposons donc que $P_{H^i}K_O$ est de poids $\leq w+i$ pour $i > n$, de sorte que le tronqué $P_{\tau_{> n}}K_O$ est de poids $\leq w$. Prouvons $P_{H^n}K_O$ de poids $\leq w+n$.

Pour simplifier les notations, nous supposerons que $w = n = 0$; on pourrait se ramener à ce cas par torsion et décalage.

Le triangle distingué $(P_{\tau_{\leq 0}}K_O, K_O, P_{\tau_{> 0}}K_O)$ montre que $P_{\tau_{\leq 0}}K_O$ est de poids ≤ 0 . Le triangle $(P_{\tau_{< 0}}K_O, P_{\tau_{\leq 0}}K_O, P_{H^0}K_O)$ fournit des suites exactes

$$(5.4.1.1) \quad H^{-d}(P_{\tau_{\leq 0}}K_O) \rightarrow H^{-d}(P_{H^0}K_O) \rightarrow H^{-d+1}(P_{\tau_{< 0}}K_O) .$$

Pour Y_O une sous-variété irréductible de dimension d de X_O , il existe un ouvert dense U_O de Y_O tel que la restriction de $H^{-d+1}(P_{\tau_{< 0}}K_O)$ à U_O soit nulle. D'après (5.4.1.1), les poids ponctuels de $H^{-d}(P_{H^0}K_O)$ sont $\leq -d$ sur U_O . D'après 5.3.7, $P_{H^0}K_O$ est de poids ≤ 0 . Ceci achève la démonstration.

Corollaire 5.4.2. Si $f : X_O \rightarrow Y_O$ est un morphisme de type fini, les foncteurs $P_{H^0}f_!$ et $P_{H^0}f^*$ (resp. $P_{H^0}f_*$ et $P_{H^0}f^!$) transforment faisceaux pervers de poids $\leq w$ (resp. $\geq w$) en faisceaux pervers de poids $\leq w$ (resp. $\geq w$) .

Résulte de 5.4.1 et 5.1.14.

Corollaire 5.4.3. Si f est quasi-fini, $f_{!*} = \text{Im}(P_{f_!} \rightarrow P_{f_*})$ transforme faisceau pervers de poids $\geq w$ (resp. $\leq w$) sur X_0 en faisceau pervers de poids $\geq w$ (resp. $\leq w$) sur Y_0 , et en particulier faisceau pervers pur en faisceau pervers pur du même poids.

Grâce à 5.4.2, la première démonstration de 5.3.2 s'applique.

Corollaire 5.4.4. Pour que K_0 dans $D_m^b(X_0, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ soit pur de poids w , il faut et il suffit que chacun de faisceaux pervers $P_{H^i K_0}$ soit pur de poids $w+i$.

Théorème 5.4.5. Si K_0 dans $D_m^b(X_0, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est pur, sur X , K est somme de ses $P_{H^i K}[-i]$.

D'après 5.4.4 et 5.1.15 (iii), la flèche de degré un des triangles distingués $(P_{\tau_{<i} K_0}, P_{\tau_{\leq i} K_0}, (P_{H^i K_0})[-i])$ a une image nulle dans $\text{Ext}^1(P_{H^i K}[-i], P_{\tau_{\leq i} K})$. On a donc

$$P_{\tau_{\leq i} K} \simeq P_{\tau_{<i} K} \oplus P_{H^i K}[-i],$$

et 5.4.5 en résulte.

Combinant 5.4.4, 5.4.5 et 5.3.7, on obtient le

Corollaire 5.4.6. Si K_0 est pur, sur X , K est somme directe de $(j_{!*} L[d])[n]$, pour $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion de U lisse connexe de dimension d , L lisse irréductible sur U et n entier.

Les corollaires suivants de 5.4.6 généralisent respectivement le théorème global et le théorème local des cycles invariants.

Corollaire 5.4.7. Choisissons un point générique géométrique $\bar{\eta}$, localisé en un point générique η , dans chaque composante irréductible de X . Si K_0 est pur, on a pour tout i

$$(5.4.7.1) \quad H^i(X, K) \twoheadrightarrow \prod_{\eta} (H^i K)_{\bar{\eta}}^{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}.$$

Dans (5.4.7.1), le H^i à gauche désigne un groupe d'hypercohomologie. A droite, H^i désigne un faisceau de cohomologie (usuel).

Il suffit de vérifier (5.4.7.1) pour K de la forme $(j_{1*}L[d])[n]$ de 5.4.6. Au plus un des η peut être dans U . Si aucun ne l'est, ou que $i \neq -d-n$, le membre de droite est nul. Pour $\eta \in U$ et $i = -d-n$, on a

$$H^i(j_{1*}L[d][n]) = {}^0j_*L$$

et $H^j = 0$ pour $j < i$, de sorte que 5.4.7 se ramène à

$$H^0(X, {}^0j_*L) \longrightarrow (L_{\bar{\eta}})_{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}.$$

Le membre de gauche s'identifie à $H^0(U, L)$, et la flèche est même un isomorphisme.

Corollaire 5.4.8. Soit x un point géométrique de X (localisé en un point non nécessairement fermé) X_x l'hensélisé strict de X en x et choisissons un point générique géométrique $\bar{\eta}$, localisé en η , dans chaque composante irréductible de X_x . Si $K_{\bar{\eta}}$ est pur, on a pour tout i , pour les faisceaux de cohomologie usuels

$$H^i(X_x, K) = (H^i K)_x \longrightarrow \prod_{\eta} (H^i K)_{\bar{\eta}}^{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}.$$

Procédant comme en 5.4.7, on se ramène à prendre $K = j_{1*}L[d][n]$ et, notant U_x l'image inverse de U dans X_x , à vérifier que pour chaque composante connexe U'_x de U_x

$$H^0(U'_x, L) \longrightarrow (L_{\bar{\eta}})_{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}$$

si $\eta \in U'_x$. Cette flèche est un isomorphisme.

Remarque 5.4.9. Soit $f : Y_{\bar{O}} \rightarrow X_{\bar{O}}$ un morphisme propre, et soit $L_{\bar{O}} \in D_C^b(Y_{\bar{O}}, \bar{\mathbb{Q}}_{\ell})$. Si $L_{\bar{O}}$ est pur, $f_*L_{\bar{O}}$ sur $X_{\bar{O}}$ est également pur. Appliquant 5.4.7 et 5.4.8 à $f_*L_{\bar{O}}$, on trouve que

(a) Pour x point géométrique d'un ouvert U de X sur lequel les $H^i f_*L_{\bar{O}}$ sont lisses, $H^*(Y, L)$ s'envoie sur la partie de $H^*(Y_x, L)$ (où $Y_x = f^{-1}(x)$) fixe par la monodromie (i.e. fixe sous l'action de $\pi_1(U, x)$).

(b) Pour x dans X , et \tilde{x} un point générique géométrique du

localisé strict $X_{(x)}$, $H^*(Y_x, L)$ s'envoie sur la partie de $H^*(Y_x, L)$ fixe par la monodromie locale.

5.4.10. Soit $f : X_0 \rightarrow Y_0$ un morphisme projectif, et $\ell \in H^2(X_0, \mathbb{Q}_\ell(1))$ la première classe de Chern d'un faisceau inversible relativement ample. Quel que soit K_0 dans $D^b(X_0, \mathbb{Q}_\ell)$, ℓ définit un morphisme de K_0 dans $K_0[2](1)$. Itérant, on obtient $\ell^n : K_0 \rightarrow K_0[2n](n)$. Appliquant f_* , on obtient $\ell^n : f_*K_0 \rightarrow f_*K_0[2n](n)$ et des morphismes $P_H^i f_*K_0 \rightarrow P_H^{i+2n} f_*K_0(n)$.

Le théorème suivant est une généralisation au cas relatif de [1] (6.2.13).

Théorème 5.4.10. (Théorème de Lefschetz difficile relatif). Si F_0 est un faisceau pervers pur sur X_0 , pour tout $i > 0$, le morphisme

$$\ell^i : P_H^{-i} f_* F_0 \rightarrow P_H^i f_* F_0(i)$$

est un isomorphisme.

Le problème est local sur Y_0 . Rapetissant Y_0 et remplaçant ℓ par un multiple, on peut supposer et on suppose que f admet une factorisation $X_0 \hookrightarrow \mathbb{P}_0^d \times Y_0 \rightarrow Y_0$, pour $d \geq 0$ convenable, et que ℓ soit la première classe de Chern $\mathcal{O}(1)$.

Preuve pour $i = 1$. Dans le cas où Y_0 est un point, la démonstration de [1] consistait à prendre une section hyperplane assez générale H de X , à regarder ℓ comme le composé d'un morphisme de restriction et d'un morphisme de Gysin :

$$H^{-1}(X, F) \xrightarrow{v^*} H^{-1}(H, F) \xrightarrow{v_!} H^1(X, F)(1) ,$$

à montrer que v^* identifie $H^{-1}(X, F)$ à la partie de $H^{-1}(H, F)$ fixe par la monodromie (quand H varie) et que dualement $v_!$ identifie $H^1(X, F)(1)$ aux coinvariants de la monodromie, et à utiliser la semi-simplicité de la représentation de monodromie pour en déduire que $v_! v^*$ est un isomorphisme. La stratégie sera la même ici, à ceci près qu'on utilisera non pas une section hyperplane, mais la famille universelle de sections hyperplanes.

Soient \check{IP}_0^d l'espace projectif dual de IP_0^d , $Y'_0 = \check{IP}_0^d \times Y_0$, $X'_0 = \check{IP}_0^d \times X_0$ et $H_0 \subset X'_0$ la famille universelle, paramétrée par Y'_0 , de sections hyperplanes de X_0 : la fibre en $(a, y) \in Y'$ de H/Y' est la section hyperplane $X_Y \cap "a"$ de la fibre X_Y en y de X/Y :

$$\begin{array}{ccccc}
 X_0 & \xleftarrow{u} & X'_0 & \xleftarrow{v} & H_0 \\
 f \downarrow & & f \downarrow & \searrow h & \\
 Y_0 & \xleftarrow{u} & Y'_0 & &
 \end{array}$$

Prendre garde que des flèches distinctes sont notées par le même symbole. Le contexte empêchera toute ambiguïté.

Lemme 5.4.11. Soit K dans $P_{D_C}^{>0}(X, \overline{Q}_\ell)$.

- (i) On a $u_* f_* K \xrightarrow{\sim} f_* u_* K$, et donc $(u_* P_H^i f_* K)[d] \xrightarrow{\sim} P_H^{i+d} f_* u_* K$.
- (ii) Pour $i < d-1$, on a $P_H^i f_* u_* K \xrightarrow{\sim} P_H^i h_*(uv)_* K$.
- (iii) On a $P_H^{d-1} f_* u_* K \hookrightarrow P_H^{d-1} h_*(uv)_* K$, et $P_H^{d-1} f_* u_* K$ s'identifie au plus grand sous-faisceau pervers de $P_H^{d-1} h_*(uv)_* K$ qui provient de Y (décrit en 4.2.6).

Les morphismes u sont lisses purement de dimension relative d . De là, la t -exactitude de $u^*[d]$ (4.2.4), et (i). Soit g la projection sur Y' de $U = X' - H$. C'est un morphisme affine, u^*K est dans $P_{D_C}^{\geq d}(X')$, et $g_!(u^*K|U)$ est donc (4.1.2) dans $P_{D_C}^{\geq d}(Y')$. Le triangle $(g_!(u^*K|U), f_* u^*K, h_*(uv)_* K)$ fournit dès lors (ii), et l'assertion d'injectivité de (iii). Pour vérifier (iii), il reste (cf. 4.2.6) à montrer que

$$(5.4.11.1) \quad P_H^{-d} u_* P_H^{d-1} f_* u_* K \xrightarrow{\sim} P_H^{-d} u_* P_H^{d-1} h_*(uv)_* K.$$

Pour $d = 0$, f est un plongement fermé, $H = \emptyset$, et les deux membres sont nuls. Nous supposons $d \geq 1$.

Lemme 5.4.12. Pour $q : Q \rightarrow X$ un fibré projectif de dimension rela-
tive d , η la première classe de Chern de $\mathcal{O}(1)$ et K dans

$D_C^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on a

$$\sum_n^i : \bigoplus_{i=0}^d K[-2i](-i) \xrightarrow{\sim} q_* q^* K .$$

Par passage aux fibres, on se ramène au cas où X est un point. Par dévissage, on se ramène alors au cas $K = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[0]$, et le lemme est la structure connue de la cohomologie de l'espace projectif.

5.4.13. Preuve de (5.4.11.1) ($d \geq 1$). Appliquons 5.4.12 à u et à uv . On a

$$\begin{aligned} u_* f_* u^* K &= f_* u_* u^* K = \bigoplus_{i=0}^d f_* K[-2i](-i) \quad \text{et} \\ u_* h_*(uv)^* K &= f_*(uv)_*(uv)^* K = \bigoplus_{i=0}^{d-1} f_* K[-2i](-i) . \end{aligned}$$

Les deux ne diffèrent que par le facteur direct $f_* K[-2d](-d)$.

Les fibres de f sont de dimension $\leq d$. On a donc $f_* K \in P_{D_C}^{\geq -d}(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (4.2.4) et $P_H^i u_* f_* u^* K \xrightarrow{\sim} P_H^i u_* h_*(uv)^* K$ pour $i \leq d-1$, en particulier pour $i \leq 0$.

Les triangles $(\tau_{<d-1} L, L, \tau_{\leq d-1} L)$ pour $L = f_* u^* K$ et pour $L = h_*(uv)^* K$ fournissent par application de u_* deux triangles et un morphisme de triangles

$$\begin{aligned} (u_* P_{\tau_{<d-1}} f_* u^* K, u_* f_* u^* K, u_* P_{\tau_{\geq d-1}} f_* u^* K) &\longrightarrow \\ (u_* P_{\tau_{<d-1}} h_*(uv)^* K, u_* h_*(uv)^* K, u_* P_{\tau_{\geq d-1}} h_*(uv)^* K) & . \end{aligned}$$

On a d'après (ii) $P_{\tau_{<d-1}} f_* u^* K \xrightarrow{\sim} P_{\tau_{<d-1}} h_*(uv)^* K$. Comparant les suites exactes longues de cohomologie perverse de deux triangles ci-dessus, on obtient

$$P_H^{-1} u_* P_{\tau_{\geq d-1}} f_* u^* K \xrightarrow{\sim} P_H^{-1} u_* P_{\tau_{\geq d-1}} h_*(uv)^* K .$$

Puisque u_* est d'amplitude cohomologique $\geq -d$, on a $P_H^{-1} u_* P_{\tau_{\geq d-1}} = P_H^{-d} u_* P_H^{d-1}$, d'où (5.4.11.1) .

5.4.14. Preuve de 5.4.10 (i=1).

Dualement au morphisme de restriction

$$(u^*P_H^{-i}f_*F)[d] = P_H^{-i}f_*(u^*F[d]) \longrightarrow P_H^{-i+1}h_*((uv)^*F[d-1]),$$

on dispose d'un morphisme de Gysin :

$$P_H^j h_*((uv)^*F[d-1]) \longrightarrow u^*(P_H^{j+1}f_*F)[d](1) ,$$

et leur composé (pour $j = -i+1$) est le $u^*[d]$ de l'application ℓ .

Pour $i = 1$, d'après 5.4.11, $(u^*P_H^{-1}f_*F)[d]$ est le plus grand sous-objet de $P_H^0 h_*((uv)^*F[d-1])$ qui provient de Y . Dualement, $(u^*P_H^1 f_*F)[d](1)$ est le plus grand quotient $P_H^0 h_*((uv)^*F[d-1])$ qui provient de Y . Puisque F_0 et donc (5.1.14) $(uv)^*F_0$, $h_*((uv)^*F_0)$ et donc (5.4.1) $P_H^0 h_*((uv)^*F_0)$ sont purs , $P_H^0 h_*((uv)^*F[d-1])$ est semi-simple (5.3.7) et son plus grand sous-objet qui provient de Y s'envoie isomorphiquement sur son plus grand quotient qui provient de Y : le $u^*[d]$ de ℓ (pour $i = 1$) est un isomorphisme, et donc ℓ lui-même est un isomorphisme.

5.4.15. Preuve de 5.4.10 (fin). On procède par récurrence sur i . Le cas $i = 0$ est trivial, et le cas $i=1$ vient d'être traité. Pour $i \geq 1$, on écrit le $u^*[d]$ de ℓ^{i+1} comme le composé

$$(u^*P_H^{-i-1}f_*F)[d] \rightarrow P_H^{-i}h_*((uv)^*F[d-1]) \xrightarrow{\ell^i} P_H^i h_*((uv)^*F[d-1])(i) \rightarrow$$

$$\text{Gysin} \rightarrow (u^*P_H^{i+1}f_*F)[d](i+1) .$$

La première flèche est un isomorphisme d'après 5.4.11(i) (ii) . La dernière en est duale, et celle du milieu est un isomorphisme, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à h et à $(uv)^*F_0[d-1]$.

6. DE \mathbb{F} À \mathbb{C} .

Notre but dans ce paragraphe est d'expliquer et de justifier des recettes pour déduire d'énoncés vrais sur la clôture algébrique d'un corps fini (tels ceux de 5.3 et 5.4) des énoncés sur \mathbb{C} .

6.1. Principes.

6.1.1. Pour déduire un énoncé géométrique, relatif aux variétés algébriques complexes, d'un énoncé sur \mathbb{F} , on procède en deux étapes, avec pour intermédiaire un énoncé sur \mathbb{C} , mais où la topologie du corps de base \mathbb{C} n'apparaisse pas. S'il s'agit d'énoncés cohomologiques ou homotopiques, on obtient cet énoncé en remplaçant la topologie classique des variétés algébriques complexes par la topologie étale, et les coefficients \mathbb{Z}/ℓ , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{C} par \mathbb{Z}/ℓ , \mathbb{Z}_ℓ , \mathbb{Q}_ℓ , $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. La traduction n'est pas toujours possible:

- La topologie étale ne détecte pas le π_1 , mais (du moins pour une variété normale) seulement son complété pro-fini $\hat{\pi}_1$. Si π_1 est fini, elle détecte les $\hat{\pi}_i = \pi_i \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ ($i > 1$), mais si π_1 est infini, les π_i supérieurs (qui ne sont pas nécessairement de type fini), risquent d'être perdus (cf. Artin-Mazur, Etale homotopy, Springer Lecture Notes in Math. 100).

- La topologie étale n'est raisonnable que pour des coefficients ℓ -adiques. On ne peut prendre pour coefficients ni \mathbb{Z} , ni \mathbb{Q} , ni \mathbb{R} : réseaux entiers, et signatures de formes quadratiques sont perdus.

- La structure de Hodge (ou de Hodge mixte) de la cohomologie est perdue en cohomologie ℓ -adique. Noter toutefois que la définition de la filtration par le poids de $H^*(X, \mathbb{Q})$ est géométrique. Cette filtration admet donc un analogue ℓ -adique. Pour une application, voir 6.2.3.

Par ailleurs, il faut qu'il s'agisse de variétés et d'applications algébriques (et non seulement analytiques) complexes. Par exemple, les résultats de 5.3., 5.4 nous fourniront des théorèmes sur les variétés projectives dont l'analogue pour les variétés kahlériennes n'est pas connu.

6.1.2. Soit X un schéma de type fini sur \mathbb{C} . Reliant l'espace topologique $X(\mathbb{C})$, et la topologie étale de X , on dispose du morphisme de comparaison (un morphisme de topos)

FAISCEAUX PERVERS

$$\varepsilon : X(\mathbb{C}) \longrightarrow X_{\text{et}} \quad .$$

Les résultats essentiels sont les suivants.

(A) Le foncteur ε^* induit une équivalence de la catégorie des faisceaux d'ensembles constructibles sur X_{et} avec la catégorie des faisceaux d'ensembles constructibles sur $X(\mathbb{C})$ (où "constructible" signifie "localement constant et à fibres finies sur chaque strate d'une stratification algébrique"). Variantes :

(A') Pour R un anneau fini, on a une équivalence de catégories $\varepsilon^* : (\text{faisceaux constructibles de } R\text{-modules sur } X_{\text{et}}) \xrightarrow{\sim} (\text{faisceaux constructibles de } R\text{-modules sur } X(\mathbb{C}))$.

(A'') Pour tout nombre premier ℓ , on a une équivalence de catégories $\varepsilon^* : (\mathbb{Z}_\ell\text{-faisceaux constructibles sur } X_{\text{et}}) \xrightarrow{\sim} (\text{faisceaux constructibles de } \mathbb{Z}_\ell\text{-modules sur } X(\mathbb{C}))$.

Pour les \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux, ε^* est seulement pleinement fidèle. Sur une variété normale connexe X , munie d'un point base $x \in X(\mathbb{C})$, un faisceau localement constant F de \mathbb{Q}_ℓ -espaces vectoriels de rang fini est dans l'image essentielle si et seulement si l'action de $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)$ sur F_x stabilise un réseau (= un \mathbb{Z}_ℓ -sous-module de type fini de F_x qui l'engendre). Pour F localement constant sur chaque strate d'une stratification (au sens 2.1) à strates normales connexes S , il faut la même condition sur chaque $F|_S$ ($S \in S$). De même pour les E_λ - et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceaux. Noter toutefois que, les groupes π_1 étant de génération finie, si F est un faisceau constructible d'espaces vectoriels sur \mathbb{Q} , pour presque tout ℓ , $F \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est dans l'image essentielle de ε^* . Plutôt que d'utiliser cette remarque pour ramener l'étude de faisceaux constructibles au cas ℓ -adique, il est souvent plus commode de ramener l'énoncé à démontrer au cas (A'). Pour un exemple, voir 6.2.1.

Des énoncés analogues valent pour les catégories dérivées :

(B') Pour R un anneau fini, on a une équivalence de catégories $\varepsilon^* : D_C^b(X, R) \xrightarrow{\sim} D_C^b(X(\mathbb{C}), R)$. L'indice c est pour: "à faisceaux de cohomologie constructibles".

(B'') On a $\varepsilon^* : D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} D_C^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell)$. A gauche, il s'agit d'une catégorie triangulée définie comme $2\text{-}\lim \text{proj } D_{\text{ctf}}^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ (t.f. := tor-dimension finie). A droite, d'une sous-catégorie de la

catégorie dérivée usuelle.

En \mathbb{Q}_ℓ -cohomologie, à nouveau, on dispose seulement d'un résultat de pleine fidélité. Pour que K soit dans l'image essentielle, il faut et suffit que ses faisceaux de cohomologie le soient. De même pour la E_λ et la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -cohomologie.

Le foncteur ϵ^* commute aux opérations cohomologiques usuelles, du moins tant qu'on se limite aux faisceaux constructibles. Le résultat essentiel est SGA4 XVI 4.1 :

(C) Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas de type fini sur \mathbb{C} , pour tout faisceau constructible de torsion F sur X , on a

$$\epsilon^* R^q f_* F \xrightarrow{\sim} R^q f_* (\epsilon^* F) .$$

Il est essentiel ici de supposer F constructible, comme le montre l'exemple suivant : $X =$ droite affine, $Y =$ Point, $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})_n$.

De ce résultat, on déduit formellement que

(C') En \mathbb{Z}/ℓ^n , \mathbb{Z}_ℓ , \mathbb{Q}_ℓ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ cohomologie, i.e. quand on travaille dans les catégories dérivées constructibles bornées correspondantes, ϵ^* commute aux foncteurs $R^q f_*$, $R^q f_!$, f^* , $R^q f^!$, ainsi qu'aux \otimes^L et $\underline{R}\text{Hom}$.

Preuves . Le résultat-clef est SGA4 XVI 4.1 : théorème de comparaison pour $R^q f_*$. Il vaut aussi pour des faisceaux constructibles d'ensembles (resp. de groupes) si $q = 0$ (resp. $q = 0$ ou 1). Pour les faisceaux d'ensembles localement constants, (A') résulte du théorème de comparaison pour π_0 et π_1 (dédit de SGA4 XVI 4.1, $q = 0, 1$ où on fait $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$). Pour passer de là au cas général, on procède par récurrence noethérienne ; si U est un ouvert dense, assez petit pour que les faisceaux considérés soient localement constants sur U , et F le fermé complémentaire : $U \xleftarrow{j} X \xleftarrow{i} F$, on utilise que la donnée d'un faisceau F sur X équivaut à celle d'un faisceau F_U sur U , d'un faisceau F_F sur F , et d'un morphisme de recollement $F_F \rightarrow i^* j_* F_U$ - ceci tant pour la topologie classique que pour la topologie étale. Puisque l'hypothèse de récurrence s'applique à F , que les faisceaux considérés sont localement constants sur U , et qu'on dispose du théorème de comparaison pour j_* , cela suffit pour conclure.

De (A) on déduit facilement (A') et (A'') .

Les opérations cohomologiques usuelles $(f^*, Rf^!, Rf_*, Rf_!)$, se ramènent à $f_!$ pour f un plongement, et f^*, Rf_* pour tout f :

$Rf_!$: on écrit $f = gh$, avec g propre et h un plongement ouvert. On a $Rf_! = Rg_* h_!$.

$Rf^!$: on écrit $f = gh$, avec g lisse et h un plongement fermé. On a $Rf^! = Rh^! Rg^!$. Le théorème de dualité de Poincaré calcule $Rg^!$ en fonction de g^* : $Rg^! K = g^* K[2d](d)$, pour g purement de dimension relative d . Enfin, si j est l'inclusion de l'ouvert complément de l'image de h , on contrôle $Rh^!$ à l'aide de Rj_* , grâce au triangle $(h_* Rh^!, Id, Rj_* j^!)$. Il n'existe peut-être pas de factorisation $f=gh$ du type voulu, mais il en existe localement, et cela suffit, une fois définie la flèche de comparaison (par exemple en termes de l'isomorphisme de comparaison pour $Rf_!$, et des adjonctions $(Rf_!, Rf^!)$) .

Le cas de $R\text{Hom}(K,L)$ se ramène par dévissage à celui de Rf_* , de $f_!$ pour f un plongement, et à celui où K est un faisceau localement constant, grâce à la formule

$$Rf_* (R\text{Hom}(K, Rf^! L)) = R\text{Hom}(f_! K, L) \quad .$$

6.1.3. On dispose aussi d'un théorème de comparaison en théorie des cycles évanescents. Pour l'énoncé, je renvoie à SGA7 XIV 2.8.

6.1.4. Dans cette première étape : oublié de la topologie de \mathbb{C} , il importe de tenir compte des twists à la Tate :

- Pour X de dimension d , la classe fondamentale est un morphisme $H_{\mathbb{C}}^{2d}(X, \mathbb{Z}/\ell^n(d)) \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^n$.

- Pour X lisse dans Y lisse, purement de codimension d , le morphisme de Gysin est

$$H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n) \longrightarrow H^{i+2d}(Y, \mathbb{Z}/\ell^n(d)) \quad , \quad \dots$$

Pour aider à les reconnaître :

- Ils apparaissent déjà classiquement, du moins modulo 2, si on prend pour \mathbb{C} une clôture algébrique de \mathbb{R} , sans préciser qui est i et qui est $-i$. Posons en effet $\mathbb{Z}(1) = \text{Ker}(\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*) = 2\pi i \mathbb{Z}$. Un choix de i identifie \mathbb{Z} à $\mathbb{Z}(1)$, par $1 \mapsto 2\pi i$, et changer i en $-i$ remplace cet isomorphisme par son opposé. De même, un choix de

i définit une orientation de \mathbb{C} , puis de toute variété lisse, et changer i en $-i$ renverse l'orientation des variétés de dimension impaire. Dès lors, indépendamment du choix de i , le faisceau d'orientation d'une variété lisse X purement de dimension d s'identifie au faisceau constant de valeur $\mathbb{Z}(d) := \mathbb{Z}(1)^{\otimes d}$, et la classe fondamentale envoie $H_{\mathbb{C}}^{2d}(X, \mathbb{Z}(d))$ dans \mathbb{Z} . La classe fondamentale ℓ -adique se déduit de cette classe fondamentale entière, et des isomorphismes déduits de l'exponentielle :

$$\mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n(1) : z \longmapsto \exp(z/n) .$$

- En cohomologie de De Rham, ils correspondent à des $(2\pi i)^d$.
- Mnémotechnique : dans la catégorie dérivée, un twist (d) apparaît souvent accompagné d'un décalage $[2d]$ (exemple : $Rf^!K = f^*K[2d](d)$, pour f lisse de dimension relative d). Noter que l'opération $K \longmapsto K[2d](d)$ préserve les poids.

6.1.5. L'application de l'arsenal qui précède n'est pas toujours automatique. Soit par exemple la définition de la (co)homologie d'intersection en termes de chaînes singulières dont l'intersection, et celle de leur bord, avec les strates d'une stratification convenable n'a pas une dimension trop grande. Elle ne se prête pas, telle quelle, à une traduction en cohomologie étale, mais, une fois qu'on a identifié la cohomologie d'intersection à l'hypercohomologie $\mathbb{H}^*(X, j_{!*}(\mathbb{Q}[d]))$ (j l'inclusion d'un ouvert lisse dense de dimension d), avec pour $j_{!*}$ la description 2.1.11, la traduction est immédiate.

6.1.6. Avant d'aborder la deuxième étape : de \mathbb{C} à \mathbb{R} , pour des énoncés où la topologie de \mathbb{C} n'apparaît pas, et bien que ce ne soit pas logiquement nécessaire, nous allons montrer sur un exemple la méthode suivie pour passer d'une variété sur \mathbb{C} à une qui est définie sur un corps de nombres.

Soit X une variété projective complexe. Elle est définie, dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, par une famille finie d'équations homogènes $P_{\alpha} = 0$. Soient $a_{\alpha\beta}$ les coefficients de P_{α} . Si on traite les $a_{\alpha\beta}$ comme des indéterminées, les P_{α} définissent une famille de variétés projectives, paramétrées par un espace affine S : on a obtenu un morphisme projectif $f : Y \rightarrow S$ dont X est la fibre au point s de S de coordonnées les valeurs originales des $a_{\alpha\beta}$. Ce morphisme $f : Y \rightarrow S$ provient par extension des scalaires de \mathbb{Q} à \mathbb{C} d'un morphisme de

schémas sur \mathbb{Q} . Comme nous dirons, il est défini sur \mathbb{Q} .

Soit $f : Y \rightarrow S$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur \mathbb{Q} . Il existe alors une stratification T de S (définie sur \mathbb{Q}) , telle que, pour chaque strate T , le morphisme $f_T : Y_T \rightarrow T$ déduit de f par restriction à T , soit à fibres "topologiquement localement constantes" - par exemple au sens que $Y_T(\mathbb{C}) \rightarrow T(\mathbb{C})$ est une fibration topologiquement localement triviale. Ceci résulte du théorème d'isotopie de Thom, et de ce que les conditions de Whitney admettent une formulation algébrique (voir J.L. Verdier, *Inventiones* 36 (1976) p. 295-312, cor. 5.1).

Chaque composante connexe de chaque strate admet un point défini sur un corps de nombres. Si $s \in S(\mathbb{C})$, et que t , dans la même composante connexe de la même strate que s , est défini sur un corps de nombre, Y_s et Y_t sont donc homéomorphes. Soit à prouver, par exemple, le théorème de Lefschetz difficile en cohomologie d'intersection pour une variété projective complexe $X = Y_s$, le connaissant pour Y_t . La variété X , munie de la première classe de Chern ℓ de $\mathcal{O}(1)$, sera homéomorphe à (Y_t, ℓ) , d'où l'assertion. Cet argument utilise l'invariance topologique de la cohomologie d'intersection ([6]). On pourrait s'en dispenser en travaillant sur Y , muni d'une stratification convenable.

Souvent, on s'intéresse non pas à une variété X , mais à un morphisme $u : X_1 \rightarrow X_2$. Ici encore, on peut trouver un diagramme défini sur \mathbb{Q} :

$$\begin{array}{ccc}
 Y_1 & \xrightarrow{u} & Y_2 \\
 f_1 \searrow & & \swarrow f_2 \\
 & S &
 \end{array}$$

dont u se déduit par passage aux fibres en $s \in S(\mathbb{C})$. On prendra garde qu'il n'existe en général aucune stratification T de S , telle que le type topologique de $u_t : f_1^{-1}(t) \rightarrow f_2^{-1}(t)$ soit constant pour t dans une composante connexe d'une strate : le type topologique peut varier continûment. Il existe toutefois des stratifications T de S , définies sur \mathbb{Q} , telles que, après changement de base de S à T , le morphisme

$$\begin{array}{ccc}
 u_T : Y_{1T} & \longrightarrow & Y_{2T} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & T &
 \end{array}$$

ait la propriété suivante : quel que soit $T' \rightarrow T$, donnant lieu à un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 Y_{1T'}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{v} & Y_{1T}(\mathbb{C}) \\
 \downarrow u & & \downarrow u \\
 Y_{2T'}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{v} & Y_{2T}(\mathbb{C})
 \end{array} ,$$

et le système local L sur $Y_{1T}(\mathbb{C})$, on a

$$v^* R^q u_* L \xrightarrow{\sim} R^q u_* v^* L .$$

Ce résultat, convenablement amplifié (cf. les réductions en 6.1.2), suffit en pratique.

6.1.7. On trouve dans EGA IV §§ 8,9 des listes de résultats du type suivant. Soient A un anneau (commutatif) limite inductive d'anneaux A_i et supposons pour simplifier A et les A_i noethériens. Tout objet X "de présentation finie" sur $\text{Spec}(A)$ (par exemple : schéma de type fini, morphisme entre tels, faisceau cohérent sur un tel,...) provient d'un objet analogue X_i sur l'un des $\text{Spec}(A_i)$; deux choix de X_i fournissent le même $X_j := X_i \times_{\text{Spec } A_i} \text{Spec } A_j$ pour j assez grand. Pour que $X/\text{Spec } A$ ait une propriété "relative" P , stable par changement de base, il faut et il suffit que $X_j/\text{Spec } A_j$ l'ait pour j grand.

Le cas qui nous intéresse est celui où $A = \mathbb{C}$ est écrit comme limite inductive de ses sous-anneaux de type fini sur \mathbb{Z} .

Variante . Pour tout anneau $A \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Z} il existe $f \neq 0$ dans A tel que $\text{Spec}(A[l/f])$ soit lisse sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Remplaçant l'ensemble ordonné filtrant des sous-anneaux de \mathbb{C} de type fini sur \mathbb{Z} par une partie cofinale I , on a encore $\mathbb{C} = \lim \text{ind } A_i$, pour un système inductif A_i dans lequel les $S_i := \text{Spec}(A_i)$ sont lisses sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

FAISCEAUX PERVERS

On trouve que tout schéma X de type fini sur \mathbb{C} provient d'un X_i/S_i , que si X, Y proviennent de $X_i, Y_i/S_i$, un morphisme (resp. isomorphisme) $f : X \rightarrow Y$ provient de $f_j : X_j \rightarrow Y_j$, $j \geq i$ (on a posé $X_j = X_i \times_{S_i} S_j$, et de même pour Y), et que deux choix de f_j deviennent égaux sur un S_k ($k \geq j$). En ce sens, X_i est "essentiellement unique pour i grand".

De même, une stratification T de X , un faisceau constructible de \mathbb{Z}/ℓ^n -modules, un morphisme entre tels faisceaux, ... proviennent d'objets analogues sur un X_i , i assez grand, et deux choix sur X_i deviennent égaux sur X_j , $j \geq i$ convenable.

Notation. Pour \mathcal{E} un "objet" sur \mathbb{C} , on notera \mathcal{E}_S un "objet" sur $S = \text{Spec}(A)$, $A \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Z} assez grand, dont \mathcal{E} se déduit par extension des scalaires de A à \mathbb{C} , et, pour T sur S , on notera \mathcal{E}_T le pull-back de \mathcal{E}_S sur T . Cette notation est ambiguë (\mathcal{E}_S n'est en général pas unique) mais ce qui précède assurera que cette ambiguïté n'est pas gênante.

Si T est une stratification de X à strates lisses (resp. connexes), quitte à aggrandir S , les strates de T_S sont lisses sur S (resp. à fibres géométriques connexes). Si le faisceau F sur X est localement constant sur chaque strate, quitte à aggrandir S , il en va de même pour F_S sur X_S .

Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas de type fini sur \mathbb{C} et F un faisceau constructible de \mathbb{Z}/ℓ^n -modules sur X . Soient $f_S : X_S \rightarrow Y_S$ et F_S sur X_S , sur $S = \text{Spec}(A)$, comme plus haut. D'après SGA4 1/2 (Th. finitude 1.9), il existe un ouvert non vide $U \subset S$ tel que pour tout morphisme de schémas $q : U' \rightarrow U$, donnant lieu à un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_{U'} & \xrightarrow{g} & X_U \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ Y_{U'} & \xrightarrow{g} & Y_U \end{array},$$

on ait $g^* R^q f_{*} F_U \xrightarrow{\sim} R^q f_{*} g^* F_U$, et que les $R^q f_{*} F_U$ soient constructibles.

Conséquence : (cf. les réductions en 6.1.2). Etant donnés des schémas

X_i de type fini sur \mathbb{C} , des morphismes entre les X_i , en nombre fini, et des faisceaux constructibles de \mathbb{Z}/ℓ^n -modules sur les X_i , en nombre fini, on peut tous les descendre sur $S = \text{Spec}(A)$, $A \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Z} assez grand. Quitte à rétrécir S , on peut supposer que les opérations cohomologiques usuelles (R^*f_* , $R^*f_!$, f^* , $R^*f^!$, \otimes et Tor_p , Ext^p), appliquées un nombre borné de fois aux faisceaux constructibles donnés, fournissent des faisceaux constructibles, et commutent à tout changement de base $S' \rightarrow S$. Si a_i est la projection de X_{iS} sur S , on peut aussi supposer que les R^*a_{i*} , appliqués aux résultats de ces opérations, sont localement constants sur S .

6.1.8. Ce qui précède concerne les faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ^n -modules. Les \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux sont des objets de nature infinie, et ne peuvent pas en général se ramener de \mathbb{C} à S . Par exemple : il existe sur $\mathbb{E}_{m\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, \infty\}$ des \mathbb{Z}_ℓ -faisceaux lisses, de monodromie non quasi-unipotente. Un tel \mathbb{Z}_ℓ -faisceau ne provient pas d'un \mathbb{Z}_ℓ -faisceau sur \mathbb{E}_{mK} , avec $K \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Q} .

Voici une méthode pour contourner cet obstacle. Soient X de type fini sur \mathbb{C} , T une stratification (2.1) de X à strates lisses et connexes, et L la donnée, pour chaque strate $T \in T$, d'une famille finie $L(T)$ de faisceaux lisses irréductibles de \mathbb{Z}/ℓ -modules. Soit (X_S, T_S, L_S) sur $S = \text{Spec}(A)$, $A \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Z} , donnant (X, T, L) par extension des scalaires de A à \mathbb{C} . On suppose S tel que les strates $T \in T_S$ soient lisses sur S à fibres géométriques connexes, que pour F et G de la forme $j_!L$ ($j : T \hookrightarrow X_S$ dans T et L dans $L_S(T)$), les $\text{Ext}^q(F, G)$ soient compatibles aux changements de base $S' \rightarrow S$, et que, pour a la projection sur S , les $R^p a_* \text{Ext}^q(F, G)$ soient localement constants et compatibles aux changements de base. Soit alors $A \subset V \subset \mathbb{C}$, V un anneau de valuation discrète strictement hensélien dont le corps résiduel est une clôture algébrique d'un corps résiduel fini de A . Pour tout point fermé a de $\text{Spec } A$, il existe un tel V tel que le morphisme $\text{Spec } V \rightarrow \text{Spec } A$ envoie sur a le point fermé de $\text{Spec } V$: prendre un "arc analytique", quotient de dimension 1 du complété A_a^\wedge , qui ne soit contenu dans l'image inverse dans $\text{Spec } A_a^\wedge$ d'aucun fermé non trivial de $\text{Spec } A$, normaliser et henséliser strictement. Soient (X_V, T_V, L_V) déduit de (X_S, T_S, L_S) par changement de base, et (X_S, T_S, L_S) la fibre spéciale. Soit le diagramme de schémas

$$X \xrightarrow{u} X_V \xleftarrow{i} X_S \quad .$$

Soit $D_{T,L}^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ la sous-catégorie de $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ formée des K tels que les $H^i K$, réduits mod ℓ et restreints à chaque strate T , soient localement constants et à constituants dans $L(T)$. Soient de même $D_{T,L}^b(X_V, \mathbb{Z}_\ell)$ et $D_{T,L}^b(X_S, \mathbb{Z}_\ell)$.

Lemme 6.1.9. Avec les notations ci-dessus, les foncteurs

$$D_{T,L}^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \xleftarrow{u^*} D_{T,L}^b(X_V, \mathbb{Z}_\ell) \xleftarrow{i^*} D_{T,L}^b(X_S, \mathbb{Z}_\ell)$$

sont des équivalences de catégories.

L'énoncé analogue, avec \mathbb{Z}_ℓ remplacé par \mathbb{Z}/ℓ^n , est conséquence formelle de ce que, pour F et G comme en 6.1.8, les $H^p(-, \underline{\text{Ext}}^q(F, G))$ sont "les mêmes" sur X , X_V et X_S . On vérifie que la tor-dimension finie est préservée, et 6.1.9 résulte, par définition des catégories dérivées ℓ -adiques, de l'énoncé obtenu en remplaçant $D_{T,L}^b(-, \mathbb{Z}_\ell)$ par $D_{T,L}^b(-, \text{t.f.}(\mathbb{Z}/\ell^n))$ (t.f. pour "tor-dimension finie").

6.1.10. Pour (X, T, L) donné, on obtient donc pour tout $S = \text{Spec}(A)$ assez grand et pour tout V ($A \subset V \subset \mathbb{C}$) comme ci-dessus une équivalence de catégories

$$(6.1.10.1) \quad D_{T,L}^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \leftrightarrow D_{T,L}^b(X_S, \mathbb{Z}_\ell) \quad ,$$

reliant \mathbb{C} à la clôture algébrique d'un corps fini.

Le fait que deux choix de T_S , L_S deviennent égaux quand on agrandit S peut se formuler de la façon suivante. Soit V l'ensemble des anneaux de valuations discrètes $V \subset \mathbb{C}$, à corps résiduel la clôture algébrique d'un corps fini. Pour $A \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Z} , soit $V(A)$ l'ensemble des V tels que $A \subset V$. Les $V(A)$ forment un ensemble ordonné filtrant de parties de V (une base de filtre); on s'intéressera à des germes selon le filtre correspondant.

Pour X un schéma de type fini sur \mathbb{C} , déduit de X_S , $S = \text{Spec}(A)$, par extension des scalaires, le germe du système des X_S (s point fermé de $\text{Spec}(V)$ pour $V \in V(A)$) ne dépend que de X (à isomorphisme unique près). De même pour les autres objets "de présenta-

tions finie" considérés. Pour (X, T, L) donné, le germe du système des équivalences de catégories (6.1.10.1) ne dépend de même que de (X, T, L) .

Si T', L' raffine T, L le germe du système d'équivalences (6.1.10.1) pour T, L est bien sûr induit par le germe analogue pour (T', L') , mais, puisqu'il ne s'agit que de germes, on ne peut pas passer à la limite pour en déduire des équivalences $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \leftrightarrow D_C^b(X_S, \mathbb{Z}_\ell)$. On peut seulement affirmer que chaque K dans $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ définit un germe de système d'objets K_S dans les $D_C^b(X_S, \mathbb{Z}_\ell)$.

Si (T, L) est tel que (a) les strates sont lisses et connexes, (b) pour $j : T \hookrightarrow X$ une strate, $L \in L(T)$ et $T' \in T$, les $R^q j_* L|_{T'}$ sont localement constants à constituants dans $L(T')$, on peut prendre S tel que les mêmes propriétés valent sur S , et que les $R^q j_* L$ commutent à tout changement de base $S' \rightarrow S$. Pour toute fonction de perversité p sur T , les équivalences 6.1.9 respectent alors les t -structures de perversité p , et il en va de même pour le germe du système d'équivalences (6.1.10.1).

Utilisant 6.1.7, on peut faire en sorte que les équivalences 6.1.9 (et le germe du système des équivalences (6.1.10.1)) respectent les opérations cohomologiques habituelles. Par exemple, pour $T = \underline{\text{RHom}}$ ou \mathbb{H} , on peut aggrandir chaque (T, L) en un (T', L') tel que T envoie $D_{T, L}^b \times D_{T, L}^b$ dans $D_{T', L'}^b$, puis prendre S tel que pour V comme ci-dessus, les équivalences 6.1.9 respectent le foncteur T . De même, pour $f : X \rightarrow Y$ (ou $Y \rightarrow X$), on trouvera (T', L') sur Y tel que $T = Rf_*$, $Rf_!$ (ou f^* , $Rf^!$) envoie $D_{T, L}^b$ dans $D_{T', L'}^b$, et que les équivalences 6.1.9 commutent aux foncteurs T .

En ce qui concerne $\underline{\text{RHom}}$ et \mathbb{H} , tirant profit de ce que $L(T)$ est un ensemble de classes d'isomorphie de faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ -modules, et que ceux-ci ont une monodromie finie, on peut plus simplement raffiner (T, L) en (T', L') tel que $D_{T', L'}^b$ soit stable par $\underline{\text{RHom}}$ et \mathbb{H} .

Rétrécissant S , on peut aussi supposer que 6.1.10.1, restreint aux faisceaux, respecte :

- la structure des \mathbb{Z}_ℓ -modules fibres de F en les points d'une strate (rang, diviseurs élémentaires de la torsion).

- la lissité de F : on se ramène au cas de faisceaux de \mathbb{Z}/ℓ -modules en observant que pour qu'un \mathbb{Z}_ℓ -faisceau soit lisse, il faut et il suffit que le noyau et le conoyau de $\ell : F \rightarrow F$ le soient.

- Pour F lisse sur X lisse connexe, la monodromie : rétrécir X pour qu'il n'y ait qu'une strate (ceci ne change pas le groupe de monodromie), et passer à un revêtement fini connexe qui trivialise les éléments de $L(X)$. Utiliser alors que, puisque $X \rightarrow X_V$ et $X_S \rightarrow X_V$ induisent des isomorphismes sur $H^1(-, \mathbb{Z}/\ell)$, ces morphismes induisent des épimorphismes sur le pro- ℓ -complété du π_1 . Par ailleurs, du système d'équivalences (6.1.10.1) pour les \mathbb{Z}_ℓ -catégories dérivées, on déduit aussitôt des systèmes analogues pour les \mathbb{Q}_ℓ , E_λ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -catégories dérivées. Pour vérifier, dans le cas des \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux, qu'il préserve la lissité on peut utiliser les faits suivants :

(a) pour que F soit lisse, il faut et il suffit que son image inverse sur le normalisé de X_{red} le soit.

(b) Soit X normal connexe et $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense. Pour que F sur X soit lisse, il faut et il suffit que ses fibres aient toutes la même dimension, que sa restriction à U soit lisse, et que $F \xrightarrow{\sim} j_* j^* F$.

6.2. Exemples.

6.2.1. Dimension cohomologique des schémas affines.

Soit X un schéma affine sur \mathbb{C} , de dimension d . Soit à déduire des résultats analogues en cohomologie ℓ -adique (4.1.4) que pour tout faisceau constructible F de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur $X(\mathbb{C})$, on a $H^i(X(\mathbb{C}), F) = 0$ pour $i > d$. Écrivons simplement X pour $X(\mathbb{C})$. Par dévissage, on se ramène à supposer F de la forme $j_! L$, pour $j : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un sous-schéma connexe et L un système local complexe sur Y . Soit $y \in Y$. Le système local L est défini par une représentation de $\pi_1(Y, y)$ sur $L_y \simeq \mathbb{C}^n$. Le groupe π_1 étant de génération finie, cette représentation se factorise par $\rho_A : \pi_1(Y, y) \rightarrow \text{GL}(n, A)$, avec $A \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Z} : on a $L = L_A \otimes_A \mathbb{C}$ pour L_A un système local de A -modules. Soit $F_A = j_! L_A$. Nous admettrons comme connu que les $H^i(X, F_A)$ sont des A -modules de type fini et que pour tout A -module M , on a

$R\Gamma(X, F_A \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X, F_A) \otimes_A M$. Ces résultats de finitude résultent de ce que, si \bar{X} est une complétion projective de X , $(\bar{X}, \bar{X}-X)$ est triangulable. Si N est le plus grand entier i tel que $H^i(X, F_A) \neq 0$, on a alors $H^N(X, F_A \otimes_A M) = H^N(X, F_A) \otimes_A M$. Prouvons par l'absurde que $N \leq d$. Supposons $N > d$, et prenons M de la forme A/m , pour m un idéal maximal de A , et soit $F_{A/m} = F_A \otimes_A A/m$. Puisque A/m est fini, $F_{A/m}$ est le ϵ^* d'un faisceau $F_{A/m}^{et}$ sur Y_{et} . On a

$$H^N(X, F_A) \otimes_A A/m = H^N(X, F_{A/m}) \xleftarrow[(6.1.2) (C)]{\sim} H^N(X_{et}, F_{A/m}^{et}) = 0,$$

puisque $N > d$. Ceci valant pour tout m , et $H^N(X, F_A)$ étant de type fini, on a $H^N(X, F_A) = 0$: contradiction. Les $H^i(X, F_A)$ sont donc nuls pour $i > d$, et on conclut en utilisant que $H^i(X, F) = H^i(X, F_A) \otimes_A \mathbb{C}$.

Variantes. Plutôt que de dévisser F pour se ramener au cas $F = j_{1!}L$, on aurait pu directement écrire $F = F_A \otimes_A \mathbb{C}$, pour A comme ci-dessus et F_A un faisceau constructible de fibres des A -modules libres.

Remarque. Le résultat obtenu n'est pas satisfaisant : on a $H^i(X, F) = 0$ pour $i > \dim_{\mathbb{C}} X$ dès que X est un espace de Stein, et que F est un faisceau abélien localement constant sur les strates d'une stratification analytique localement finie. Ceci se démontre par une variante convenable de la théorie de Morse.

6.2.2. La filtration par le poids.

Soit X sur \mathbb{C} . Pour obtenir la structure de Hodge mixte de la cohomologie de X , on commence par remplacer X par un schéma simplicial muni d'une compactification convenable $X_* \hookrightarrow \bar{X}_*$ ([3]). Un schéma simplicial est un objet de nature infinie : il comporte une infinité de X_i , et une infinité de flèches. On n'est donc pas assuré de pouvoir en trouver une version sur $S = \text{Spec}(A)$, avec $A \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Z} . Toutefois, pour étudier les $H^i(X)$, pour $i \leq n$, il suffit de disposer des X_i et \bar{X}_i pour $i \leq n+1$, et le tronqué $(X_i)_{i \leq n+1} \hookrightarrow (\bar{X}_i)_{i \leq n+1}$ peut être descendu à S . La filtration par le poids $W_{\mathbb{Q}}$ de $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ est l'aboutissement d'une suite spectrale construite à partir de $X_* \hookrightarrow \bar{X}_*$. La même suite spectrale existe en cohomologie ℓ -adique. La filtration W_{ℓ} de $H^n(X, \mathbb{Q}_{\ell}) = H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_{\ell}$

déduite de $W_{\mathbb{Q}}$ persiste donc sur S : pour $a : X_S \rightarrow S$, on dispose d'une filtration W_{ℓ} de $R^n a_* \mathbb{Q}_{\ell}$ qui, sur \mathbb{C} , donne W_{ℓ} . Rétrécissant S , on peut supposer que les conditions imposées aux X_i et \bar{X}_i ($i \leq n+1$) sur \mathbb{C} persistent sur S (\bar{X}_{iS} propre et lisse sur S , $X_{iS} \subset \bar{X}_{iS}$ complément d'un diviseur à croisements normaux relatifs, surjectivité et propriété de $X_{iS} \rightarrow (\text{cosq}_{i-1} \text{sq}_{i-1}(X_{*S}))_i$) et que la formation de W_{ℓ} (comme aboutissement de telle suite spectrale) commute à tout changement de base. Utilisant la conjecture de Weil, on voit alors qu'en chaque point fermé s de S , W_{ℓ} induit la filtration par le poids de $H^n(X_{s, \mathbb{Q}_{\ell}})$, telle que définie arithmétiquement, en terme des valeurs absolues complexes des valeurs propres de Frobenius. Voici une application.

Proposition 6.2.3 . Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur \mathbb{C} . Supposons que $R^n f_* \mathbb{Q}$ est localement constant, et que pour chaque y dans Y , on a $(R^n f_* \mathbb{Q})_y \xrightarrow{\sim} H^n(X_y, \mathbb{Q})$. Alors, les filtrations par le poids des $H^n(X_y, \mathbb{Q})$ forment une filtration localement constante du système local $R^n f_* \mathbb{Q}$.

Il suffit de prouver 6.2.3 après tensorisation par \mathbb{Q}_{ℓ} , et il s'agit alors de le déduire du théorème [1] 3.4.1 selon lequel si $F_{\mathbb{O}}$ est un \mathbb{Q}_{ℓ} -faisceau lisse localement constant sur un schéma $Y_{\mathbb{O}}$ de type fini sur $\mathbb{F}_{\mathbb{q}}$, et que $F_{\mathbb{O}}$ est mixte, le faisceau $F_{\mathbb{O}}$ admet une filtration W par des sous-faisceaux lisses, telle que $\text{Gr}_i^W F_{\mathbb{O}}$ soit ponctuellement pur de poids i .

La difficulté dans 6.2.3 est que la construction du schéma simplicial compactifié $(X_Y)_*$ qui permet de calculer la filtration par le poids de la cohomologie de $X_Y = f^{-1}(y)$ ne peut pas toujours être faite uniformément en y . Si on ne considère qu'un schéma simplicial tronqué, il existe toutefois une stratification de Y telle que au-dessus de chaque strate T la construction puisse être faite uniformément : existence d'un schéma simplicial tronqué compactifié $X_{*T} \hookrightarrow \bar{X}_{*T}$ augmenté vers X_T , vérifiant les analogues relatifs des conditions imposées à $(X_Y)_*$.

Si $f : X \rightarrow Y$ est descendu en $f_S : X_S \rightarrow Y_S$ sur $S = \text{Spec}(A)$, $A \subset \mathbb{C}$ de type fini sur \mathbb{Z} , l'hypothèse " $R^n f_* \mathbb{Q}_{\ell}$ commute au passage aux fibres" s'hérite de f à f_S , après avoir rétréci S . Il existe en effet une stratification T_S de Y_S telle que, pour Y'_S dans T_S , le morphisme $f'_S : X'_S = f_S^{-1}(Y'_S) \rightarrow Y'_S$ vérifie "la formation

de $Rf'_{S*} \mathbb{Q}_\ell$ commute à tout changement de base". La propriété voulue de f'_S équivaut alors à ce que, pour Y'_S dans \mathcal{T}_S , les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} X'_S & \xrightarrow{c} & X_S \\ \downarrow f'_S & & \downarrow f_S \\ Y'_S & \xrightarrow{u} & Y_S \end{array}$$

donnent lieu à des isomorphismes $u^* R^n f'_{S*} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R^n f_{S*} \mathbb{Q}_\ell$. Ce morphisme étant un isomorphisme sur \mathcal{C} , l'est au-dessus d'un ouvert non vide de S , auquel il suffit de rétrécir S .

Combinant ces arguments, on trouve une stratification \mathcal{T} de Y telle que, après descente à S convenable, chaque $f'_S : X'_S \rightarrow Y'_S$ pour Y'_S dans \mathcal{T}_S vérifie :

- a) $R^n f'_{S*} \mathbb{Q}_\ell$ commute au passage aux fibres ;
- b) $R^n f'_{S*} \mathbb{Q}_\ell$ est un faisceau lisse, et admet une filtration par le poids W , par des sous-faisceaux lisses, qui induise sur chaque $H^n(X_y, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ ($y \in Y'(\mathbb{C})$) la filtration par le poids, et qui induise au-dessus de chaque point fermé de S la filtration par le poids ℓ -adique.

Il reste à observer que, pour S convenable, l'équivalence 6.1.10 est telle que si un faisceau lisse F sur Y est muni sur chaque strate T d'une stratification \mathcal{T} d'une filtration W_T , et que F, W_T correspondent à F', W'_T , pour que les W_T se recollent en une filtration de F par des sous-faisceaux lisses, il faut et il suffit qu'il en aille de même pour F' et les W'_T (les W_T se recollent \iff les flèches de recollement respectent W ; pour la lissité, voir 6.1.10).

Remarque. Nous ne connaissons pas de démonstration de 6.2.3 autre que cette démonstration par voie arithmétique.

6.2.4. Soit F un faisceau pervers simple de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur $X(\mathbb{C})$, X un schéma de type fini sur \mathbb{C} . Nous dirons que F est d'origine géométrique s'il appartient au plus petit ensemble qui

- (a) contient le faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}$ sur $X =$ un point, et qui est stable par les opérations suivantes.

(b) Pour f un morphisme de schémas, prendre les constituants des $P_{H^i T}$, pour $T = Rf_*, Rf_!, Rf^*, Rf^!$.

(c) Prendre les constituants des $P_{H^i}(A \otimes^{\mathbb{L}} B)$, ou des $P_{H^i} R\text{Hom}(A, B)$.

Les sous-catégories des catégories $D_C^b(X, \mathbb{C})$ formées des K tels que les sous-quotients simples des $P_{H^i}(K)$ soient d'origine géométrique sont stables par les opérateurs $f_*, f_!, f^*, f^!, \otimes$ et $R \text{Hom}$. Pour des stabilités qui en résultent, voir . On peut montrer qu'on a aussi stabilité par la construction "cycles évanescents".

Un faisceau pervers F sur $X(\mathbb{C})$ sera dit semi-simple d'origine géométrique s'il est somme directe de faisceaux pervers simples d'origine géométrique. Un complexe K dans $D_C^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ sera dit semi-simple d'origine géométrique s'il est isomorphe à la somme directe de ses $(P_{H^i}(K))[-i]$, et que ses $P_{H^i} K$ sont semi-simples d'origine géométrique.

Par exemple, si $j : U \hookrightarrow X$ est un ouvert de Zariski de X , lisse et connexe de dimension d , et que le système local L sur U a une monodromie finie, $j_{! *}[L[d]]$ est semi-simple d'origine géométrique, car L est facteur direct de $\pi_* \mathbb{C}$, pour $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement fini, et que le faisceau constant \mathbb{C} sur \tilde{X} est image inverse de \mathbb{C} sur (Point).

Théorème 6.2.5 (théorème de décomposition). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre. Si K sur $X(\mathbb{C})$ est semi-simple d'origine géométrique, $f_* K$ sur $Y(\mathbb{C})$ l'est aussi.

Le théorème 6.2.5 équivaut à sa variante, où le corps de coefficients \mathbb{C} est remplacé par le corps isomorphe $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, puis à celle où la topologie classique est remplacée par la topologie étale.

Lemme 6.2.6. Soit F un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau pervers simple d'origine géométrique. Pour $S = \text{Spec}(A)$ assez grand, chaque équivalence

$$D_{T, L}^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longleftrightarrow D_{T, L}^b(X_S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

(6.1.10) transforme F en un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau pervers simple F_S sur X_S vérifiant la condition suivante.

(P) X_S provient par extension des scalaires de X_0/\mathbb{F}_q , et F_S de F_0 , avec F_0 pur.

Que F_S soit pervers simple résulte de 6.1.10. La définition de "d'origine géométrique" étant inductive, il suffit de montrer que la condition (P) est stable par les opérations considérées dans cette définition. Ces opérations commutent aux équivalences considérées. Il reste à savoir que :

- (a) $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur (Point) vérifie (P) .
- (b) Les opérations $P_{H^i T}$ de 6.2.4 transforment F_S vérifiant (P) en G_S déduit de G_O mixte ; les constituants simples de G_O sont purs (5.3.4) et par 6.1.9, 6.1.10 ceux de G_S vérifient (P).
- (c) De même pour \otimes et $RHom$.

6.2.7. Preuve de 6.2.5 . Il suffit de traiter le cas où K est un faisceau pervers F . Appliquons 6.2.6. On trouve que F_S vérifie (P). Appliquons 5.4.5, 5.3.8 . On trouve que $Rf_* F_S$ est somme directe de ses $P_{H^i}[-i]$, et que ceux-ci sont semi-simples. D'après 6.1.10, les mêmes propriétés valent pour $Rf_* F$, et ceci prouve 6.2.5.

Corollaire 6.2.8 (théorème global des cycles invariants). Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre (de schémas de type fini sur \mathbb{C}) et dans $D_C^b(X, \mathbb{C})$. Soit V un ouvert (de Zariski) de Y sur lequel $H^i f_* K$ est localement constant. Si K est semi-simple d'origine géométrique, on a

$$(6.2.8.1) \quad H^i(X, K) \longrightarrow H^0(V, H^i f_* K) \quad .$$

En particulier, pour V connexe et $y \in Y$, posant $X_y = f^{-1}(y)$, $\pi_1(V, y)$ agit sur $(H^i f_* K)_y \xrightarrow{\sim} H^i(X_y, K)$, et (6.2.8.1) se réécrit

$$(6.2.8.2) \quad H^i(X, K) \longrightarrow H^i(X_y, K)^{\pi_1(V, y)} \quad .$$

Corollaire 6.2.9. (théorème local des cycles invariants). Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre, K dans $D_C^b(X, \mathbb{C})$ et $y \in Y$. Soit V un ouvert (de Zariski) de Y , sur lequel $H^i f_* K$ est localement constant. Pour B une boule assez petite de centre y , et j l'inclusion de $B \cap V$ dans B , on a

$$H^0(B \cap V, H^i f_* K) = (j_* j^* H^i f_* K)_y \quad ,$$

et

$$H^0(B, H^i f_* K) \xrightarrow{\sim} (H^i f_* K)_y = H^i(X_y, K) \quad .$$

Si K est semi-simple d'origine géométrique, pour un tel B , on a

$$(6.2.9.1) \quad H^i(X_Y, K) \longrightarrow H^0(B \cap V, H^i_{f_*} K) \quad .$$

Pour $B \cap V$ connexe et $z \in B \cap V$, cela s'écrit encore

$$(6.2.9.2) \quad H^i(X_Y, K) \longrightarrow H^i(X_Z, K)^{\pi_1(B \cap V, z)} \quad .$$

Dans 6.2.9, l'existence de boules B du type indiqué est connue. Ces boules ne sont ici qu'une commodité d'exposition : on pourrait prendre d'autres voisinages formant un système fondamental de voisinages (définis par exemple en terme d'une triangulation). Ceci dit, et compte tenu de 6.2.5, la preuve est la même qu'en 5.4.7-5.4.9.

Théorème 6.2.10 (Lefschetz difficile relatif). Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif, ℓ la première classe de Chern d'un faisceau inversible relativement ample, et F un faisceau pervers semi-simple d'origine géométrique sur X . Pour $i \geq 0$, on a

$$\ell^i : P_H^{-i} f_* F \xrightarrow{\sim} P_H^i f_* F(i)$$

Cet énoncé se déduit de 6.2.6 et de 5.4.10. Un cas particulier utile est celui où Y est réduit à un point. Il fournit le théorème de Lefschetz difficile en cohomologie d'intersection.

Remarque 6.2.11. On aimerait pouvoir, dans les énoncés qui précèdent remplacer "d'origine géométrique" par "de la forme $j_{1*} L[d]$, pour j l'inclusion de Y lisse connexe de dimension d et L le système local sous-jacent à une variation de structures de Hodge polarisable". On aimerait aussi pouvoir remplacer les variétés algébriques par des variétés kahlériennes compactes.

Si f est un morphisme de variétés kahlériennes compactes, nous ne savons démontrer ni que $Rf_* \mathbb{C}$ est somme des $P_H^i Rf_* \mathbb{C}[-i]$, ni que les faisceaux pervers $P_H^i Rf_* \mathbb{C}$ sont semi-simples, ni l'analogue de 6.2.10 pour $Rf_* (\mathbb{C}[\dim X])$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Deligne : La conjecture de Weil II. Publ. Math. IHES 52 (1980), p. 137-252.
- [2] P. Deligne : Théorie de Hodge III. Publ. Math. IHES 44 (1974), p. 5-78.
- [3] P. Deligne : Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ -adique. Dans SGA 4 1/2, p. 233-251.
- [4] M. Goresky et R. MacPherson : La dualité de Poincaré pour les espaces singuliers. CR Acad. Sci. Paris 284 (27 juin 1977), p. 1549-1551.
- [5] M. Goresky and R. MacPherson : Intersection homology theory. Topology 19 (1980), p. 135-162.
- [6] M. Goresky and R. MacPherson : Intersection Homology II. Inv. Math. 72, 1 (1983), p.77-79.
- [7] R. Hartshorne : Residues and duality. Lecture Notes in Math. 20 (1966).
- [8] L. Illusie : Complexe cotangent et déformations. Lecture Notes in Math. 239 (1971) and 283 (1972).
- [9] M. Raynaud : Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes [d'après Šafarevič, Ogg et Grothendieck] . Séminaire Bourbaki 286 (1964/65). New York : Benjamin, 1966.
- [10] J.L. Verdier : Catégories abéliennes, état 0. Dans SGA4 1/2, p. 262-308.

Prendre garde que certaines conventions de signe diffèrent de celles des notes miméographiées originelles.

SIGLES.

SGA : Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, paru, sauf SGA2, aux Lecture Notes in Mathematics.

SGA 4 : LN 269 (I-IV), LN 270 (V-VIII), LN 305 (IX-XIX).

SGA 4 1/2 : LN 569.

SGA 5 : LN 589.

SGA 7 : LN 288 (I-IX), LN 340 (X-XXII).

EGA : Eléments de géométrie algébrique, par A. Grothendieck et J. Dieudonné. EGA 4, 3^e partie = Publ. Math. IHES 28 (1966).

INDEX TERMINOLOGIQUE

Admissible (morphisme) :	1.2.3
(sous-catégorie abélienne) :	1.2.5
(suite exacte courte) :	1.2.3
Amplitude cohomologique :	4.2.1
Cartésien :	3.2.5, 3.2.6
Catégorie : (dérivée) :	1.1.3
(dérivée filtrée, bifiltrée) :	1.1.4 ex. 1 3.1.1
(exacte) :	1.1.4
(triangulée) :	1.1.1
Coeur (d'une t -catégorie) :	1.3.1
Cône :	1.1.1
Constructible (S -) :	2.1.13
((S,L) -) :	2.2.10
Diagramme des 9 :	1.1.11
Distingué (triangle) :	1.1.1
Extension (stable par) :	1.2.6
Filtration (bête) :	3.1.7
(canonique) :	3.1.5
(par le poids) :	5.3.5
Localement (C -) :	3.2.3
Mixte :	5.1.5
Octaèdre :	1.1.6
Origine géométrique :	6.2.4

Pervers (faisceau) :	2.1.5, 2.1.13
amplifié par	2.2.1, 2.2.17; 4.0.1, 4.0.2
Perversité (duale) :	2.1.16
(fonction de) :	2.1.1, 2.2.1
Poids (ponctuels) :	5.1.5
($\leq w, \geq w$) :	5.1.8
amplifié par	5.1.11, 5.1.12
Produit tensoriel externe :	4.2.7
Prolongement :	1.4,13
Pur (ponctuellement) :	5.1.5
(de poids w) :	5.1.8
Réalisation :	3.1.9
Recollement (de t-structure) :	1.4.10
Strate :	2.1.1
t-catégorie :	1.3.1
t-exact :	1.3.16
(multifoncteur) :	1.3.20
t-structure :	1.3.1
(duale) :	1.3.2 (iii)
(induite) :	1.3.19
(naturelle) :	1.3.2
(de perversité p) :	2.1.4
(déduite par translation) :	1.3.2 (ii)
Translation (foncteur de) :	1.1.1.
Tronqué :	1.3.2(i), 1.3.3

INDEX DES NOTATIONS

- \mathcal{D} est une catégorie triangulée. Elle est le plus souvent munie d'une t-structure, de coeur \mathcal{C} .

$\mathcal{D}^{\geq a}, \mathcal{D}^{\leq b}$: 1.3.1 - $\mathcal{D}[a, b] := \mathcal{D}^{\geq a} \cap \mathcal{D}^{\leq b}$ - \mathcal{D}^b : 1.3.12 - $\mathcal{D}_F, \mathcal{D}_F^b$: 3.1.5

- $D(\dots)$ est une catégorie triangulée, dépendant de \dots .

$D(X, \mathcal{O})$: 1.4.1 - D_S : 2.1.13 - D_C : (2.1.13), 2.2.1 - $D_{S, L}$: 2.1.10
 DF, DF^2 : 3.1.1 - $D_C^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$: (2.2.14.1) - $D_C^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$, $D_C^b(X, E_\lambda)$,
 $D_C^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$: 2.2.17.

- p est une perversité (2.1.1, 2.2.1), p^* sa duale - p_S : 2.2.1.

En exposant gauche, p indique un foncteur entre coeurs de t-catégories - P_T : 1.3.17(i) - ou relatif à une t-structure (P_τ, P_{H^i}) .

- τ est un foncteur de troncation.

$\tau_{\geq a}, \tau_{\leq b}$: 1.3.3 - $\tau[a, b]$: 1.3.5 - τ^F, τ^U : 1.4.13.

- Notation diverses : D : dualité de Verdier.

$F[n]$: filtration décalée : 3.1.8.

G : $\mathcal{D}_F^b \rightarrow \mathcal{C}^b(\mathcal{D})$: 3.1.7.

H^0 : 1.3.6.

Hom_α : 3.2.5.

$j_{!,*}$: 1.4.14.1, 1.4.22, 2.1.7.

$M(X, \mathcal{O})$: 1.4.1.

n, n^*, n^+ : 3.3.1.

réal : 3.1.9.

tot A : 3.2.7.

$\delta(F, G)$: 3.1.2.

Δ, Δ^+ : 3.2.6.

\boxtimes : 4.2.7.

ABSTRACT

These volumes contains the notes of the Luminy conference : Analyse et topologie sur les espaces singuliers. The lectures are centered around the following themes : Perverse sheaves, Intersection homology and its applications, Hodge structure on the Intersection Homology and on the vanishing cycles, local and global Euler Poincaré characteristics, Bernstein polynomial.