Astérisque

P. SCHAPIRA

Une introduction à l’étude des systèmes d’ équations microdifférentielles

Astérisque, tome 89-90 (1981), p. 45-83

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__89-90__45_0>

UNE INTRODUCTION A L' ÉTUDE DES SYSTÈMES D' ÉQUATIONS MICRODIFFÉRENTIELLES

par P. SCHAPIRA (Université Paris-Nord)

INTRODUCTION.

Dès 1961, B. Malgrange [16] remarquait que l'on pouvait traiter les systèmes d'équations aux dérivées partielles (à coefficients constants) avec les outils de la géométrie algébrique, c'est à dire en les interprétant en terme de modules sur l'anneau des opérateurs différentiels. Dans les années 1970, I.N. Bernstein [2], [3] et M. Kashiwara [8] étudiaient sous cet angle les systèmes d'équations à coefficients polynomiaux ou analytiques en ramenant les propriétés de l'anneau filtré non commutatif des opérateurs,à des propriétés de son gradué, anneau commutatif auquel on peut appliquer les méthodes de la géométrie.
Ce sont ces idées, combinées à celles de la "microlocalisation" qui sont traitées dans le chapitre 2 de l'article de M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara [23] et que nous rappelons au paragraphe 2 après avoir développé au paragraphe 1 une théorie purement algébrique des anneaux (ou faisceaux d'anneaux) filtrés à gradués commutatifs, dans l'esprit (et avec certaines techniques) du livre de J.E. Björk [4], en montrant que de nombreuses propriétés de l'anneau se déduisent de celles de son gradué, sous une hypothèse de noethériannité.
Nous rappelons au paragraphe 3 comment on peut utiliser ces résultats pour traiter le problème de Cauchy pour les systèmes différentiels [8] ou microdifférentiels [13], [15], [20].
Le lecteur est invité à consulter les ouvrages cités dans la bibliographie pour des

démonstrations complètes, ou originales, et pour d'autres perspectives sur ce sujet (en particulier [14] et [11]).

I. ANNEAUX ET MODULES FILTRÉS

1.1. Filtrations noethériennes.

Nous désignons dans tout ce paragraphe par A un anneau unitaire, non nécessairement commutatif, filtré sur $\mathbb{Z}$, de gradué commutatif. L'anneau A est donc muni d'une suite de sous-groupes $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ vérifiant:

$$\begin{cases} A_k \subset A_{k+1} \ , \ \bigcup_k A_k = A \ , \ 1 \in A_o \\ A_k \cdot A_\ell \subset A_{k+\ell} , \ [A_k, A_\ell] \subset A_{k+\ell-1} \end{cases}$$

Si $a \in A$, on dit que a est d'ordre $k \in \mathbb{Z}$ si $a \in A_k$, $a \notin A_{k-1}$, et a est d'ordre $-\infty$ si $a \in \bigcap_k A_k$.

On note $gr(A)$ l'anneau gradué associé à A :

$$gr(A) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k/A_{k-1}$$

et si $a \in A$ on note $\sigma(a)$ l'image de a dans $gr(A)$. On dit que $\sigma(a)$ est le "symbole principal" (on dira aussi, quand il n'y aura pas de confusion possible, "symbole") de a. Si a appartient à A_k, on note $\sigma_k(a)$ l'image de a dans A_k/A_{k-1}, et on dit que $\sigma_k(a)$ est le symbole d'ordre k de a. Si a est d'ordre k, b d'ordre ℓ, $\sigma_{k+\ell}(a\cdot b)$ ne dépend que de $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ et définit l'élément $\sigma(a)\cdot\sigma(b)$ de $gr(A)$. De même $\sigma_{k+\ell-1}([a,b])$ ne dépend que de $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ et l'on définit ainsi le "crochet de Poisson" de $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ par:

$$\{\sigma(a), \sigma(b)\} = \sigma_{k+\ell-1}([a,b])$$

et l'on étend ce crochet $\{\ ,\ \}$ à $gr(A)$ par bilinéarité.

Remarquons que pour $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in gr(A)$, on a :

$$\{\bar{a}, \bar{b}\} = -\{\bar{b}, \bar{a}\}$$

$$\{\bar{a}, \bar{b}\,\bar{c}\} = \{\bar{a}, \bar{b}\}\,\bar{c} + \{\bar{a}, \bar{c}\}\,\bar{b}$$

$$\{\bar{a}, \{\bar{b}, \bar{c}\}\} + \{\bar{b}, \{\bar{c}, \bar{a}\}\} + \{\bar{c}, \{\bar{a}, \bar{b}\}\} = 0$$

Un élément $\bar{a} \in gr(A)$ est homogène si $\bar{a} \in A_{k/A_{k-1}}$ pour un $k \in \mathbf{Z}$. Tout élément de $gr(A)$ se décompose donc en somme (finie) d'éléments homogènes. Un idéal gradué $\bar{I}$ de $gr(A)$ est un idéal tel que si $\bar{a} \in \bar{I}$, toutes les composantes homogènes de $\bar{a}$ appartiennent à $\bar{I}$. Le gradué d'un idéal de A est un idéal gradué de $gr(A)$.

Tous les A-modules que nous considérons seront, sauf mention du contraire, des A-modules à gauche.

Soit M un A-module. On appelle filtration sur M la donnée d'une suite de sous-groupes $(M_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ vérifiant:

$$\begin{cases} M_k \subset M_{k+1}\ ,\ \bigcup\limits_k M_k = M \\ A_k\, M_\ell \subset M_{k+\ell} \qquad \forall \ell, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

deux filtrations $(M_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ et $(M'_\ell)_{\ell \in \mathbf{Z}}$ sur M sont dites équivalentes s'il existe un entier $c \geq 0$ tel que:

$$\forall k \in \mathbf{Z}\ ,\quad M_{k-c} \subset M'_k \subset M_{k+c}$$

A un module filtré M on associe le $gr(A)$-module $gr(M) = \bigoplus\limits_{k \in \mathbf{Z}} M_{k/M_{k-1}}$, et l'on définit comme pour l'anneau A , la notion d'ordre et de symbole d'un élément $m \in M$. Les $gr(A)$-modules que nous considèrerons seront gradués.

Si L est un sous-module du module filtré M , les $L_k = L \cap M_k$ définissent la filtration induite de M sur L . De même si N est l'image de M par un morphisme ψ , les $N_k = \psi(M_k)$ définissent la filtration image.

<u>Définition 1.1.</u>: Soit M un A-module filtré. Nous dirons que la filtration est bonne si il existe $m_1,\dots,m_d \in M$, $u_1,\dots,u_d \in \mathbb{Z}$, avec pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$M_k = \sum_{j=1}^{d} A_{k-k_j}\, u_j$$

Remarquons que M est alors un A-module de type fini, que deux bonnes filtrations sur M sont équivalentes, et que inversement si M est de type fini on peut le munir d'une bonne filtration.

<u>Exemple</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$, $\ell_1,\dots,\ell_n \in \mathbb{Z}$. On peut munir A^n de la filtration:

$$(A^n)_k = \bigoplus_j A_{k-\ell_j}\, e_j$$

où $e_j = (0,\dots,1,0,\dots,0) \in A^n$, 1 étant à la j-ième place. L'élément e_j est d'ordre ℓ_j pour cette filtration. Si $\ell_j = 0$ $\forall j$, on dit que A^n est muni de la filtration produit.

Si $a = (a_1,\dots,a_n) \in A^n$, on a donc pour cette filtration produit $\mathrm{ord}(a) = \sup_i \mathrm{ord}(a_i)$, et si a est d'ordre k , $\sigma(a) = (\sigma_k(a_1),\dots,\sigma_k(a_n))$.

<u>Définition 1.2.</u>: Nous dirons que la filtration sur A est noethérienne (à gauche) si:

- $\mathrm{gr}(A)$ est noethérien
- les sous-modules à gauche de A_o^n sont fermés pour la topologie A_{-1}-adique (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
- $A_{-k} = (A_{-1})^k$ pour tout $k > 0$

Remarquons que ces conditions entrainent que les éléments de la forme $1 + a$, $a \in A_{-1}$, sont inversibles dans A_o .

<u>Exemple</u>: L'anneau $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,x}$ des germes d'opérateurs différentiels holomorphes en $x \in \mathbb{C}^n$, filtré par l'ordre des opérateurs, a une filtration noethérienne puisque

$\left(\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,x}\right)_k = 0$ pour $k < 0$ et $= \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ pour $k = 0$, et cet anneau est noethérien.

Proposition 1.3.: On suppose la filtration de A noethérienne. Munissons A^n de la filtration $\bigoplus_j A\, e_j$ pour laquelle e_j est d'ordre ℓ_j, pour des $\ell_j \in \mathbf{Z}$. Soit I un sous-module de A^n, $u_1,\ldots,u_d$ des éléments de I d'ordre $k_1,\ldots,k_d$ dont les symboles $\sigma(u_1),\ldots,\sigma(u_d)$ engendrent $gr(I)$. Alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$

$$I \cap (A^n)_k = \sum_{j=1}^{d} A_{k-k_j}\, u_j$$

En particulier la filtration induite par A^n sur I est bonne.

Démonstration: Posons $I_\ell = I \cap (A^n)_\ell$, et $J_\ell = \sum_{j=1}^{d} A_{\ell-k_j}\, u_j$. Soit $u \in I_\ell$. Alors $\sigma(u) = \sum_j \bar{a}_j\, \sigma(u_j)$, avec $\bar{a}_j \in A_{\ell-k_j}/A_{\ell-k_j-1}$. Choisissons $a_j \in A_{\ell-k_j}$, avec $\sigma(a_j) = \bar{a}_j$

$$u = \sum_j a_j\, u_j + v\,, \qquad v \in I_{\ell-1}$$

On a donc pour tout $\ell \in \mathbf{Z}$

$$J_\ell \subset I_\ell \subset J_\ell + I_{\ell-1}$$

Pour k assez petit I_k est contenu dans $(A_0)^n$, et comme les sous-modules de $(A_0)^n$ sont fermés pour la topologie A_{-1}-adique, on a :

$$\begin{cases} J_k = I_k & \text{pour} \quad k << 0 \\ I_\ell \subset J_\ell + I_k & \forall k \quad \forall \ell \end{cases}$$

et donc $I_\ell = J_\ell \quad \forall \ell$.

Corollaire 1.4.: On suppose la filtration de A noethérienne. Soit M un A-module muni d'une bonne filtration, L un sous-module de M. Alors la filtration induite par M sur L est bonne.

(Remarquons que la filtration image de M par un morphisme ψ , est trivialement bonne).

Démonstration: Soit $u_1,\ldots,u_d$, d'ordres $k_1,\ldots,k_d$, définissant la filtration de M :

$$M_k = \sum_j A_{k-k_j} u_j$$

Munissons A^d de la filtration $(A^d)_k = \bigoplus_j A_{k-k_j} e_j$, et soit ψ le morphisme de A^d sur M définit par $\psi(e_j) = u_j$ et $\tilde{L} = \psi^{-1}(L)$. Munissons $\tilde{L}$ de la filtration induite par A^d : celle-ci est bonne par la proposition 1.3 et la filtration induite par M sur L est la filtration image de $\tilde{L}$ par ψ .

Corollaire 1.5.: On suppose la filtration de A noethérienne. Alors A est noethérien (à gauche) et si M est un A-module muni d'une bonne filtration, on a :

i) M est séparé: $\bigcap_k M_k = \{0\}$

ii) tout sous-module L de M est fermé: $L = \bigcap_k (L + M_k)$

iii) $gr(M)$ est un $gr(A)$-module de type fini, et si $gr(M)$ est libre, M est libre.

Démonstration: Il est clair que A est noethérien, par la proposition 1.3.
Représentons M par une suite exacte:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A^d \xrightarrow[\psi]{} M \longrightarrow 0$$

où $\psi(e_j) = u_j$, $M_k = \sum_j A_{k-k_j} u_j$, et munissons A^d de la filtration $(A^d)_k = \bigoplus_j A_{k-k_j} e_j$ et I de la filtration induite, si bien que la suite

$$0 \longrightarrow gr(I) \longrightarrow gr(A^d) \longrightarrow gr(M) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Alors $I = \bigcap_k (I + (A^d)_k)$ car ces deux sous-modules de A^d ont même gradué et on peut leur appliquer la proposition 1.3. Par suite M est séparé, ainsi que M/L et L est fermé.

Comme $gr(M)$ est l'image de $gr(A^d)$, c'est un $gr(A)$-module de type fini. Supposons qu'il soit libre, et soit $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_r$, d'ordre $\ell_1,\ldots,\ell_r$, une base de $gr(M)$, $v_1,\ldots,v_r$ des éléments de M de symboles $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_r$. Alors si N est le sous-module de M engendré par $v_1,\ldots,v_r$, on a pour tout $k \in \mathbf{Z}$

$$N + M_k = M$$

et par suite $\bigcap_k (N+M_k) = M$, donc $N = M$. Considérons les suites exactes

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A^r \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow gr\ J \longrightarrow gr(A^r) \longrightarrow gr(M) \longrightarrow 0$$

où $(A^r)_k = \bigoplus_j A_{k-\ell_j} e_j$, $M_k = \sum_j A_{k-\ell_j} v_j$.

Alors $gr(J) = 0$ et par suite $J = 0$, donc M est libre.

Corollaire 1.6.: On suppose la filtration de A noethérienne. Soit:

$$(*) \qquad L \xrightarrow[\phi]{} M \xrightarrow[\psi]{} N$$

un complexe de A-modules filtrés $(\phi(L_k) \subset M_k,\ \psi(M_k) \subset N_k,\ \psi \circ \phi = 0)$, la filtration de M étant bonne. Soit:

$$(\bar{*}) \qquad gr(L) \xrightarrow[\bar{\phi}]{} gr(M) \xrightarrow[\bar{\psi}]{} gr(N)$$

le complexe déduit de $(*)$, et supposons la suite $(\bar{*})$ exacte. Alors la suite $(*)$ est exacte.

Démonstration: Soit $u \in M_k$, $\psi(u) = 0$. Soit $\sigma(u)$ l'image de u dans M_k/M_{k-1}:

$$\sigma(u) = \bar{\phi}(\bar{v}), \quad \bar{v} \in L_k/L_{k-1}$$

On choisit $v \in L_k$, $\sigma(v) = \overline{v}$.

$$u = \phi(v) + w , \quad w \in M_{k-1}$$

et par récurrence:

$$u \in \bigcap_k (\phi(L) + M_k)$$

Il reste à appliquer le corollaire 1.5.

<u>Proposition 1.7.</u>: On suppose la filtration de A noethérienne. Soit M et N deux A-modules munis de bonnes filtrations, ψ un morphisme de M dans N respectant les filtrations $(\psi(M_k) \subset N_k \ \forall k \in \mathbb{Z})$, $\overline{\psi}$ le morphisme de $gr(M)$ dans $gr(N)$ associé à ψ . Alors:

$$gr(\mathrm{Ker}\ \psi) \subset \mathrm{Ker}\ \overline{\psi} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\ \overline{\psi} \subset gr(\mathrm{Im}\ \psi)$$

et on a l'équivalence:

$$gr(\mathrm{Ker}\ \psi) = \mathrm{Ker}\ \overline{\psi} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\ \overline{\psi} = gr(\mathrm{Im}\ \psi)$$

<u>Démonstration</u>: Notons σ l'application symbole principal, de M dans $gr(M)$ ou de N dans $gr(N)$.

i) Soit $\overline{a} \in gr(\mathrm{Ker}\ \psi)$ que l'on peut supposer homogène de degré k . Soit $a \in M_k$, $\sigma(a) = \overline{a}$, $\psi(a) = 0$. Alors $\overline{\psi}(\overline{a}) = \sigma(\psi(a)) = 0$.

ii) Soit $\overline{b} \in \mathrm{Im}\ \overline{\psi}$, que l'on peut supposer homogène de degré k . Soit $\overline{a} \in M_{k}/M_{k-1}$, avec $\overline{\psi}(\overline{a}) = \overline{b}$, et soit $a \in M_k$, $\sigma(a) = \overline{a}$. Alors $\overline{b} = \sigma(\psi(a))$.

iii) Supposons que $gr(\mathrm{Ker}\ \psi) = \mathrm{Ker}\ \overline{\psi}$ et soit $\overline{b} \in gr(\mathrm{Im}\ \psi)$ un élément homogène d'ordre k . On a donc $\overline{b} = \sigma(\psi(a))$ pour $a \in M_{k'}$, avec $k' \geq k$. Montrons que l'on peut se ramener à $k' = k$, ce qui entraînera $\overline{b} = \overline{\psi}(\sigma(a))$. Supposons donc $k' > k$, et par suite

$$\overline{\psi}(\sigma(a)) = 0$$

L'hypothèse implique l'existence de $c \in M$, avec $\sigma(c) = \sigma(a)$ et $\psi(c) = 0$. On a donc:

$$\bar{b} = \sigma(\psi(a-c))$$

et $a-c$ est d'ordre $\leq k'-1$.

iv) Supposons que $\operatorname{Im} \bar{\psi} = gr(\operatorname{Im} \psi)$ et soit $\bar{a} \in \operatorname{Ker} \bar{\psi}$, homogène de degré k. Soit $a \in M_k$, avec $\sigma(a) = \bar{a}$. Alors $\psi(a) \in N_{k-1}$, et l'hypothèse implique qu'il existe $a_1 \in M_{k-1}$, avec $\psi(a-a_1) \in N_{k-2}$. On voit par récurrence que:

$$\forall \ell \in Z \quad , \quad \psi(a-a_1-a_2 \ldots -a_\ell) \in N_{k-\ell}$$

pour des $a_j \in M_{k-j}$. Donc:

$$\psi(a-a_1-\ldots-a_r) \in \bigcap_{\ell} \ (\psi(M_{k-r}) + N_\ell)$$

mais ce dernier espace est égal à $\psi(M_{k-r})$ pour $r>>o$ par le corollaire 1.5. appliqué au A_o-module N_{k-r}. Par suite il existe $a_1' \in M_{k-1}$ avec $\psi(a-a_1') = 0$, et $\sigma(a-a_1') = \bar{a}$.

<u>Remarque</u>: Soit I un idéal de A (ou un sous-module de A^n). On appelle base involutive de I des éléments $(u_1,\ldots,u_r) \in I$ dont les symboles engendrent $gr(I)$. On peut traduire le lemme précédent en disant que les $(u_1,\ldots,u_r)$ forment une base involutive si et seulement si toute relation entre les symboles des $(u_j)_j$ provient d'une relation entre les $(u_j)_j$.

1.2. <u>Idéal caractéristique</u>.

Soit M un A-module filtré, $gr(M)$ le $gr(A)$-module associé, I_M l'annulateur de $gr(M)$:

$$I_M = \{\bar{a} \in gr(A) \ ; \ \bar{a}u = 0 \quad \forall u \in gr(M)\}$$

Alors I_M est un idéal gradué ainsi que $\sqrt{I_M}$ sa racine.

Proposition 1.8.: Deux filtrations équivalentes définissent le même idéal $\sqrt{I_M}$.

Démonstration: Soit $\bar{a} \varepsilon \sqrt{I_M}$ un élément homogène. Il existe $q \geq 1$ avec $\bar{a}^q \varepsilon I_M$. Soit $a \varepsilon A_p$ avec $\sigma_p(a) = \bar{a}$

$$\bar{a}^q \varepsilon I_M \Longleftrightarrow a^q M_k \subset M_{k+pq-1} \quad \forall k$$

et donc

$$a^{\ell q} M_k \subset M_{k+p\ell q-\ell}$$

Si $(M'_k)_{k \varepsilon \mathbb{Z}}$ est une filtration équivalente, on aura:

$$a^{\ell q} M'_k \subset M'_{k+p\ell q-1} \quad \forall k$$

pour ℓ assez grand.

Soit M un A-module de type fini. L'idéal $\sqrt{I_M}$ associé à une bonne filtration sur M ne dépend donc que de M .

Définition 1.9.: On note cet idéal Icar(M) et on dit que Icar(M) est l'idéal caractéristique réduit de M .

Proposition 1.10.: On suppose la filtration de A noethérienne.

Soit $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules de type fini.

Alors:

$$\text{Icar}(M) = \text{Icar}(L) \cap \text{Icar}(N)$$

Démonstration: On munit M d'une bonne filtration, N de la filtration image, L de la filtration induite, qui est bonne (corollaire 1.4.). Alors la suite $0 \longrightarrow gr(L) \longrightarrow gr(M) \longrightarrow gr(N) \longrightarrow 0$ est exacte et la proposition en résulte.

Théorème 1.11.: (O. Gabber, [7]). On suppose que gr(A) est une $\mathbb{Q}$-algèbre noethérienne. Soit M un A-module de type fini. Alors Icar(M) est involutif, i.e.:

$$\{\text{Icar}(M), \text{Icar}(M)\} \subset \text{Icar}(M)$$

La démonstration de cet important résultat est assez longue et nous renvoyons le lecteur à [7].

Supposons la filtration de A noethérienne et soit C (resp. $\overline{C}$) une sous-catégorie abélienne de la catégorie $\underline{A}$ des A-modules (resp. grad(A) des gr(A)-modules) de type fini. On suppose que si $M \in Ob(C)$ est muni d'une bonne filtration, $gr(M)$ appartient à $Ob(\overline{C})$. Soit χ une fonction additive sur $\overline{C}$ à valeurs dans un groupe commutatif Γ (cela signifie que χ est une application de $Ob(\overline{C})$ dans Γ qui vérifie: pour toute suite exacte $0 \longrightarrow \overline{L} \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow 0$ dans $\overline{C}$, $\chi(\overline{M}) = \chi(\overline{L}) + \chi(\overline{N})$).

<u>Proposition et définition 1.12.</u>: Dans la situation précédente soit $M \in Ob(C)$ muni d'une bonne filtration. Alors $\chi(gr(M))$ ne dépend que de M et pas de la bonne filtration choisie. On pose:

$$\chi(M) = \chi(gr(M))$$

et la fonction χ ainsi définie sur C est additive.

<u>Démonstration</u>: Soit $(M_k)_k$ et $(M'_k)_k$ deux bonnes filtrations sur M. En remplaçant M_k par $M_k + M'_k$ on peut supposer qu'il existe $\ell \geq 0$

$$M'_k \subset M_k \subset M'_{k+\ell} \quad \forall k$$

a) Supposons $\ell = 1$. On a les suites exactes de A_o-modules:

$$0 \longrightarrow M'_k/M_{k-1} \longrightarrow M_k/M_{k-1} \longrightarrow M_k/M'_k \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_{k-1}/M'_{k-1} \longrightarrow M'_k/M'_{k-1} \longrightarrow M'_k/M_{k-1} \longrightarrow 0$$

Notons $\overline{L}, \overline{N}$ et $\overline{N}_{[-1]}$ respectivement les gr(A)-modules:

$$\overline{L} = \bigoplus_k M'_k/M_{k-1} \ , \quad \overline{N} = \bigoplus_k M_k/M'_k \ ,$$

$$\overline{N}_{[-1]} = \bigoplus_k M_{k-1}/M'_{k-1} \ .$$

On a donc des suites exactes de $gr(A)$-modules:

$$0 \longrightarrow \overline{L} \longrightarrow gr(M) \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \overline{N}_{[-1]} \longrightarrow gr(M') \longrightarrow \overline{L} \longrightarrow 0$$

ce qui prouve $\overline{L}$, $\overline{N}$, $\overline{N}_{[-1]}$ sont des $gr(A)$-modules de type fini. Comme $\overline{N}$ et $\overline{N}_{[-1]}$ sont isomorphes, $\chi(\overline{N}) = \chi(\overline{N}_{[-1]})$, et par suite

$$\chi(gr(M)) = \chi(gr(M')) .$$

b) Posons $\quad M''_k = M_k + M'_{k+1}$

alors $\quad M_k \subset M''_k \subset M_{k+1}$

$$M'_k \subset M''_k \subset M'_{k+\ell}$$

et par récurrence, $\chi(gr(M'')) = \chi(gr(M')) = \chi(gr(M))$.

c) On a vu que si $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ est une suite exacte dans $\underline{A}$, on pouvait munir ces modules de bonnes filtrations si bien que $0 \longrightarrow gr(L) \longrightarrow gr(M) \longrightarrow gr(N) \longrightarrow 0$ soit une suite exacte dans $\underline{gr(A)}$.

Rappelons très brièvement les notions classiques de dimension et multiplicités [24]
Soit B un anneau commutatif unitaire noethérien, q un idéal premier de B , M un B-module de type fini. Alors M/qM est un B/qB-module de longueur finie si et seulement si tout idéal premier qui contient à la fois q et $ann(M)$ est maximal, et cette condition ne dépend que de q et $\sqrt{Ann(M)}$, la racine de $Ann(M)$. Si cette condition est satisfaite la fonction qui à $n \in \mathbb{N}$ associe la longueur du module $M/q^{n+1}M$ prend pour n grand les mêmes valeurs qu'un polynôme, noté $P_q(M)$, le polynôme de Hilbert-Samuel de M relativement à q .
Soit $d = d_q(M)$ le degré de ce polynôme. Alors $d_q(M)$ ne dépend que de q et $\sqrt{Ann\ M}$, et s'appelle la dimension de M (en q) . On conviendra que $d_q(M) = +\infty$ si M/qM n'est pas de longueur finie.
Si $d_q(M) < \infty$, on note $e_q(M)$ le produit par $d!$ du coefficient de plus haut

degré du polynôme $P_q(M)$. C'est un entier positif que l'on appelle la multiplicité de M (en q).

Si $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ est une suite exacte de B-modules de type fini , on a:

$$d_q(M) = \sup(d_q(L),\ d_q(N)) .$$

Soit $\underline{B}(q,d)$ la catégorie des B-modules M de type fini tels que $d_q(M) \leq d$. Alors $\underline{B}(q,d)$ est une catégorie abélienne, et la fonction qui à $M \in Ob(\underline{B}(q,d))$ associe d!-fois le coefficient de degré d du polynôme $P_q(M)$ est additive. En appliquant ces remarques à l'anneau $B = gr(A)$ on peut donc énoncer grâce à la proposition 1.12.:

Proposition 1.13.: On suppose la filtration de A noethérienne.

Soit M un A-module de type fini, q un idéal premier de gr(A) .

a) Supposons M muni d'une bonne filtration. Alors $d_q(gr(M))$ ne dépend que de M et pas de la filtration choisie. On le note $d_q(M)$.

b) Supposons $d_q(M) < \infty$. Alors l'entier $e_q(gr(M))$ ne dépend que de M et pas de la filtration choisie. On le note $e_q(M)$.

c) Soit $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules de type fini. Alors:

$$d_q(M) = \sup(d_q(L), d_q(N))$$

$$e_q(M) = e_q(L,d) + e_q(N,d)$$

où on a posé:

$$e_q(L,d) = \begin{cases} e_q(L) & \text{si } d_q(L) = d_q(M) \\ 0 & \text{si } d_q(L) < d_q(M) \end{cases}$$

et de même pour $e_q(N,d)$.

1.3. Dimension homologique.

Soit B un anneau, non nécessairement commutatif (nous ne considérons pas de filtration sur B). Rappelons que l'on dit qu'un B-module (à gauche) P (resp. I) est projectif (resp. injectif) si le foncteur $\mathrm{Hom}_B(P,\cdot)$ (resp. $\mathrm{Hom}_B(\cdot,I)$) est exact. Les modules libres sont projectifs, et tout module projectif est facteur direct d'un libre.

On appelle résolution projective de M une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longleftarrow M \longleftarrow P_o \longleftarrow P_1 \longleftarrow \cdots$$

par des modules projectifs P_i . De même une résolution injective d'un module N est une suite exacte

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow N \longrightarrow I_o \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots$$

où les I_j sont injectifs.

Tout B-module admet une résolution projective (resp. injective). Si B est noethérien (à gauche) et M de type fini, M admet une résolution par des modules libres (donc projectifs) de type fini.

Soit M et N deux B-modules (à gauche).

Le groupe $\mathrm{Ext}^j_B(M,N)$ peut se calculer en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_B(\cdot,N)$ à la résolution projective (*) de M et en prenant le j-ième groupe de cohomologie obtenue:

$$\mathrm{Ext}^j_B(M,N) = \frac{\mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(P_j,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_{j+1},N)]}{\mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(P_{j-1},N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_j,N)]}$$

$$\mathrm{Ext}^o_B(M,N) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(P_o,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_1,N)] = \mathrm{Hom}_B(M,N)$$

ou encore en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_B(M,\cdot)$ à la résolution injective (**) de N , et en prenant le j-ième groupe de cohomologie obtenu. On en conclut que:

$$\mathrm{Ext}^j_B(M,N) = 0 \quad \forall j > n \;, \quad \forall N \Longleftrightarrow M \text{ admet une résolution projective}$$

de longueur n (i.e. une résolution (*) avec $P_j = 0 \ \forall j > n$)

$$\mathrm{Ext}^j_B(M,N) = 0 \quad \forall j > n \ , \quad \forall M \Longleftrightarrow N \text{ admet une résolution injective de}$$

longueur n .

<u>Lemme 1.14.</u>: On suppose l'anneau B noethérien, et on suppose que tout B-module M de type fini admet une résolution projective de longueur finie par des modules de type fini.

a) Soit M un module de type fini tel que $\mathrm{Ext}^j_B(M,B) = 0$, $\forall j > n$. Alors:

$$\mathrm{Ext}^j_B(M,N) = 0 \ , \quad \forall j > n \ , \quad \forall N$$

b) Supposons que $\mathrm{Ext}^j_B(M,B) = 0$, $\forall j > n$, $\forall M$ de type fini. Alors:

$$\mathrm{Ext}^j_B(M,N) = 0 \ , \quad \forall j > n \ , \quad \forall M \ , \quad \forall N \ .$$

<u>Démonstration</u>:

a) Soit P un module projectif. Il existe Q avec $P \oplus Q = L$, L libre. On en conclut que $\mathrm{Ext}^j_B(M,P) = 0 \quad \forall j > n$, $\forall P$ projectif. Soit maintenant N un module de type fini admettant une résolution projective de longueur r .

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow P_o \longleftarrow \dots \longleftarrow P_r \longleftarrow 0$$

Démontrons par récurrence sur r que $\mathrm{Ext}^j(M,N) = 0 \quad \forall j > n$. Pour $r = 0$, N est projectif. Supposons le résultat démontré pour $r - 1$, et soit N_1 l'image de P_1 dans P_o . Alors $\mathrm{Ext}^j(M,N_1) = 0 \quad \forall j > n$, et on a la suite exacte:

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow P_o \longleftarrow N_1 \longleftarrow 0$$

Appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}(M,\cdot)$ à cette suite exacte. On obtient la suite exacte longue:

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(M,N_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(M,P_o) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(M,N) \longrightarrow \dots$$

et par suite $\mathrm{Ext}^j(M,N) = 0 \quad \forall j > n$.

Dans le cas général écrivons $N = \varinjlim_{\alpha} N_\alpha$, où N_α parcourt la famille des sous-modules de type fini de N . On peut calculer $\mathrm{Ext}^j(M,N)$ en prenant une résolution de M par des modules de type fini, ce qui prouve que:

$$\mathrm{Ext}^j(M,N) = \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Ext}^j(M,N_\alpha)$$

et achève la preuve de a).

b) On a donc $\mathrm{Ext}^j(M,N) = 0 \quad \forall j > n \, , \quad \forall N \, , \quad \forall M$ de type fini. Soit N un B-module. Comme $\mathrm{Ext}^j(M,N) = 0 \quad \forall j > n \, , \quad \forall M$ de type fini, N admet une résolution injective de longueur n , et par suite $\mathrm{Ext}^j(M,N) = 0 \quad \forall M \, , \quad \forall j > n.$

Revenons à la situation antérieure, où A est un anneau filtré. Soit M un A-module filtré. On appelle résolution libre filtrée de M une suite exacte

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow F_o \longleftarrow F_1 \longleftarrow \cdots$$

où les F_i sont des A-modules libres filtrés, les morphismes respectant la filtration, et telle que la suite obtenue en passant au gradué

$$0 \longleftarrow \mathrm{gr}(M) \longleftarrow \mathrm{gr}(F_o) \longleftarrow \mathrm{gr}(F_1) \longleftarrow \cdots$$

soit exacte.

Si M est muni d'une bonne filtration et si la filtration de A est noethérienne, M admet une résolution libre filtrée, puisque si $u_1,\ldots,u_d$ sont des éléments d'ordre $k_1,\ldots,k_d$ de M tels que $M_k = \sum_j A_{k-k_j} u_j$ il suffit de prendre $F_o = A^n$ muni de la filtration pour laquelle e_j est d'ordre k_j . On a alors une suite exacte filtrée:

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow F_o \longleftarrow I \longleftarrow 0$$

et la filtration de I , induite de celle de F_o, étant bonne, on peut recommencer cette opération avec I à la place de M . On construit ainsi de proche en proche les F_i .

<u>Proposition 1.15.</u>: On suppose la filtration de A noethérienne, et aussi que tout

$gr(A)$-module de type fini admet une résolution projective de longueur finie par des $gr(A)$-modules libres de type fini. Alors:

1) Les A-modules projectifs de type fini P sont stablement libres (i.e.: il existe L_o et L_1 libres de type fini avec $P \oplus L_1 = L_o$).
2) Soit M un A-module de type fini tel que $\mathrm{Ext}^j_A(M,A) = 0 \;\forall\; j > n$. Alors M admet une résolution projective de longueur $\sup(1,n)$ par des modules libres de type fini.

<u>Démonstration</u>:

a) Les modules projectifs de type fini sur $gr(A)$ sont stablement libres. En effet soit $\overline{P}$ un tel module, et

$$0 \longleftarrow \overline{P} \longleftarrow \overline{L}_o \longleftarrow \dots \longleftarrow \overline{L_n} \longleftarrow 0$$

une résolution libre de $\overline{P}$. Si $n = 1$, on a $\overline{P} \oplus L_1 = \overline{L}_o$ puisque $\overline{P}$ est projectif. Raisonnons par récurrence sur n et soit $\overline{P}_1$ l'image de la flèche $\overline{L_1} \longrightarrow \overline{L_o}$. Alors $\overline{P}_1$ est projectif et stablement libre d'après l'hypothèse de récurrence. Soit $\overline{L}$ un $gr(A)$-module libre tel que $\overline{P_1} \oplus \overline{L}$ soit libre. La suite:

$$0 \longleftarrow \overline{P} \longleftarrow \overline{L_o} \oplus \overline{L} \longleftarrow \overline{P_1} \oplus \overline{L} \longleftarrow 0$$

est une résolution libre de longueur 1 de $\overline{P}$.

b) Soit M un A-module de type fini, et considérons une résolution libre filtrée de M :

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow L_o \longleftarrow L_1 \longleftarrow \dots$$

$$0 \longleftarrow gr(M) \longleftarrow gr(L_o) \longleftarrow gr(L_1) \longleftarrow \dots$$

et remplaçons L_n par P_n le noyau de la flèche $L_n \longrightarrow L_{n-1}$, et $gr(L_n)$ par $gr(P_n)$ qui est égal par construction au noyau de la flèche $gr(L_n) \longrightarrow gr(L_{n-1})$. Pour n assez grand, $gr(P_n)$ est projectif, donc stablement libre. Soit L un A-module libre de type fini muni d'une bonne filtration tel que $gr(L)$ soit libre et $gr(P_n) \oplus gr(L)$ soit lui aussi libre. Le module $P_n \oplus L$ est libre d'après le corollaire 1.5. iii), et la suite:

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow L_o \longleftarrow \dots L_{n-2} \longleftarrow L_{n-1} \oplus L \longleftarrow P_n \oplus L \longleftarrow 0$$

est une résolution libre de longueur finie de M .

Le raisonnement fait en a) prouve alors que les A-modules projectifs sont stablement libres, et l'assertion 2) en résulte aussitôt.

Soit M un A-module à gauche. Le groupe $Hom_A(M,A)$ est naturellement muni d'une structure de A-module à droite. On le note M^* . Si M est filtré, on définit une filtration sur M^* en posant:

$$M_k^* = \{u \in Hom_A(M,A) \; ; \; u(M_\ell) \subset A_{\ell+k} \quad \forall \ell\}$$

<u>Proposition 1.16.</u>: On suppose la filtration de A noethérienne à droite et à gauche. Soit M un A-module muni d'une bonne filtration, et supposons que $Ext^j_{gr(A)}(gr(M),gr(A)) = 0$ pour un $j \in \mathbb{N}$. Alors $Ext^j_A(M,A) = 0$.

<u>Démonstration</u>: Soit $0 \longleftarrow M \longleftarrow F_o \longleftarrow \dots$ une résolution libre graduée de M , $0 \longleftarrow gr(M) \longleftarrow gr(F_o) \longleftarrow \dots$ la résolution de $gr(M)$ associée. Appliquons la fonction $Hom_A(\cdot,A)$ à la première suite et le foncteur $Hom_{gr(A)}(\cdot,gr(A))$ à la seconde. Le groupe $Ext^j_A(M,A)$ est calculé par le j-ième groupe de cohomologie du complexe de A-module à droite:

$$0 \longrightarrow F_o^* \longrightarrow F_1^* \longrightarrow \dots$$

et de même pour $Ext^j_{gr(A)}(gr\, M, gr(A))$, puisque les $gr\, F_i$ sont des $gr(A)$-modules libres. Il faut donc vérifier que l'exactitude de la suite

$$(gr(F_{i-1}))^* \longrightarrow (gr(F_i))^* \longrightarrow (gr(F_{i+1}))^*$$

entraîne celle de la suite

$$F_{i-1}^* \longrightarrow F_i^* \longrightarrow F_{i+1}^*$$

Mais $(gr(F_i))^*$ est le gradué de F_i^* , et il suffit d'appliquer le corollaire 1.6., la filtration de A étant noethérienne à droite.

1.4. Platitude.

Proposition 1.17.[4] :Soit $A \subset B$ deux anneaux filtrés, la filtration de B induisant celle de A . On suppose:

- les filtrations sur A et sur B sont noethériennes
- $gr(B)$ est plat (resp. fidèlement plat) sur $gr(A)$ (pour la structure graduée)

Alors si I est un sous-module de A^n , $gr(BI) = gr(B)gr(I)$ et B est plat (resp. fidèlement plat) sur A (comme module à droite).

Démonstration:

a) On a l'inclusion évidente $gr(B) \cdot gr(I) \subset gr(B \cdot I)$. Soit $u_1,\dots,u_r$ des générateurs de I dont les symboles engendrent $gr(I)$, $b_1,\dots,b_r \in B$, $v = \sum_j b_j u_j$. Il faut démontrer que $\sigma(v)$ appartient à $gr(B) \cdot gr(I)$. Soit d l'ordre de v , k_j l'ordre de u_j , $d' \in \mathbb{Z}$ tel que les b_j sont d'ordre $\leq d' - k_j$. Si $d' \leq d$, $\sigma(v) = \sum_j \sigma_{d-k_j}(b_j)\sigma(u_j)$ et le résultat est démontré. Supposons donc $d' > d$.

Comme $\sigma_{d'}(v) = 0$ on a:

$$\sum_j \sigma_{d'-k_j}(b_j)\, \sigma(u_j) = 0$$

La platitude de $gr(B)$ sur $gr(A)$ entraîne l'existence de: $\bar{c}_{i,j} \in gr(A)$, $\bar{b}'_i \in gr(B)$, homogènes tels que:

$$\sigma_{d'-k_j}(b_j) = \sum_i \bar{c}_{i,j}\, \bar{b}'_i \ , \quad \sum_j \bar{c}_{i,j}\, \sigma(u_j) = 0$$

choisissons $c_{i,j} \in A$, $b'_i \in B$ de symboles principaux $\bar{c}_{i,j}$ et $\bar{b}'_i$ avec $\sum_j c_{i,j}\, u_j = 0$ (ce qui est possible par la proposition 1.7.)

alors $b_j = \sum_i b'_i\, c_{i,j} + \tilde{b}_j$, $\mathrm{ord}(\tilde{b}_j) < d'-k_j$

et par suite

$$v = \sum_j (\sum_i b'_i \, c_{i,j}) u_j + \sum_j \tilde{b}_j \, u_j$$

b) Munissons $B \otimes_A I$ de la filtration pour laquelle $1 \otimes u_j$ est d'ordre k_j.

On a des morphismes

$$gr(B) \otimes_{gr(A)} \cdot gr(I \longrightarrow gr(B \otimes_A I) \longrightarrow gr(B)$$

La première flèche est injective et le composée surjective, donc par platitude :

$$gr(B \otimes_A I) \simeq gr(B) \cdot gr(I) = gr(BI)$$

On en conclut que $B \otimes_A I \simeq BI$ par le corollaire 1.6.

c) Soit I un idéal de A, tel que $BI = B$. Alors $gr(B) \cdot gr(I) = gr(B)$, et donc $gr(I) = gr(A)$ par fidèle platitude. La filtration de A étant noethérienne, $I = A$.

1.5. Cohérence.

Soit maintenant X un espace topologique, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux filtrés sur X. Le faisceau $\mathcal{A}$ est donc muni d'une suite croissante $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de sous faisceaux en groupes, définissant pour tout $x \in X$ une structure d'anneau filtré sur $\mathcal{A}_x$, l'espace des germes en x de sections de $\mathcal{A}$. Nous supposerons évidemment que $\mathcal{A}_x$ vérifie les conditions énoncées au début de ce paragraphe, et aussi que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout ouvert } \mathcal{U} \text{ de } X \text{, toute section a de } \mathcal{A} \text{ sur } \mathcal{U}, \\ \text{l'application de } \mathcal{U} \text{ dans } \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \text{ qui a } x \in \mathcal{U} \text{ associe } \operatorname{ord}(a_x), \\ \text{l'ordre de } a \text{ dans } \mathcal{A}_x \text{, est localement constante.} \end{array} \right.$$

Nous dirons alors avec [4] que $\mathcal{A}$ vérifie la condition σ. Cette condition assure que σ définit un morphisme de faisceaux de $\mathcal{A}$ sur $gr(\mathcal{A})$. Une filtration sur un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ est la donnée d'une suite croissante $(\mathcal{M}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de sous-$\mathcal{A}_o$-modules de $\mathcal{M}$ vérifiant $\mathcal{A}_k \mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{M}_{k+\ell}$, $\bigcup_k \mathcal{M}_k = \mathcal{M}$. Une filtration est bonne sur $\mathcal{U} \subset X$ s'il existe des sections $u_1,\dots,u_r$ de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{U}$, des entiers $k_1,\dots,k_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathcal{M}_k = \sum_j \mathcal{A}_{k-k_j} u_j$.

Rappelons quelques définitions:

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module (i.e.: un faisceau de $\mathcal{A}$-modules).

- On dit que $\mathcal{M}$ est de type fini sur $\mathcal{U}$ s'il existe une suite exacte sur $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{A}^n|\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}|\mathcal{U} \longrightarrow 0$$

- On dit que $\mathcal{M}$ est de présentation finie sur $\mathcal{U}$ s'il existe une suite exacte

$$\mathcal{A}^m|\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{A}^n|\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}|\mathcal{U} \longrightarrow 0$$

- On dit que $\mathcal{M}$ est cohérent si $\mathcal{M}$ est localement de type fini, et si le noyau de toute suite exacte:

$$\mathcal{A}^n|\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}|\mathcal{U} \longrightarrow 0$$

  est localement de type fini.

- Si $\mathcal{A}$ est lui-même cohérent, les modules cohérents sont donc les modules de présentation finie .

- On dit [11] que $\mathcal{A}$ est un faisceau noethérien si:

  $\mathcal{A}$ est cohérent, $\forall x \in X$ $\mathcal{A}_x$ est un anneau noethérien, toute famille d'idéaux cohérents de $\mathcal{A}$ sur un ouvert $\mathcal{U} \subset X$ est localement stationnaire.

<u>Exemple</u>: Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$ est noethérien.

<u>Proposition 1.18.</u> [4] Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux filtrés vérifiant la condition σ . On suppose que:

- $\forall x$, la filtration sur $\mathcal{A}_x$ est noethérienne
- $gr(\mathcal{A})$ est un faisceau cohérent (resp. noethérien) (pour la structure graduée)

Alors $\mathcal{A}$ est cohérent (resp. noethérien).

<u>Démonstration</u>: Soit ψ un morphisme de $\mathcal{A}^r$ dans $\mathcal{A}^s$, $\mathcal{I} = \operatorname{Ker} \psi$, $\overline{\psi}$ le morphisme associé de $gr(\mathcal{A}^r)$ dans $gr(\mathcal{A}^s)$,

$\overline{J} = \operatorname{Ker} \overline{\psi}$, et soit $x \in X$. Quitte à remplacer ψ par une application ϕ de $\mathcal{A}^r \oplus \mathcal{A}^t$ dans $\mathcal{A}^s$, avec

$\phi(a_1,\ldots,a_r, b_1,\ldots,b_t) = (\psi(a_1,\ldots,a_r) + \sum_j b_j v_j)$; pour des $v_j \in \operatorname{Im}\psi$ choisis tels que $\operatorname{Im}\bar{\psi}$ et les symboles des v_j engendrent $\operatorname{gr}(\operatorname{Im}\psi)$ en x, on peut supposer que $\operatorname{Im}\bar{\psi} = \operatorname{gr}(\operatorname{Im}\psi)$ en x. Alors $\operatorname{gr}(\mathcal{I})_x = \bar{J}_x$ par la proposition 1.7. et comme $\operatorname{gr}(\mathcal{I}) \subset \bar{J}$ et que $\bar{J}$ est cohérent, $\bar{J}_x$ de type fini, on a $\operatorname{gr}(\mathcal{I}) = \bar{J}$ au voisinage de x. Donc $\operatorname{gr}(\mathcal{I})$ est de type fini, et $\mathcal{I}$ aussi par la proposition 1.3. appliquée en tout point d'un voisinage de x. Cette même proposition 1.3. montre que si $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ sont deux idéaux de $\mathcal{A}$ tels que $\operatorname{gr}(\mathcal{I}) = \operatorname{gr}(\mathcal{J})$ alors $\mathcal{I} = \mathcal{J}$. Il en résulte que si $\operatorname{gr}(\mathcal{A})$ est noethérien, $\mathcal{A}$ aussi.

Proposition 1.19.: On fait les hypothèses de la proposition 1.18. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module muni d'une bonne filtration. Alors $\mathcal{M}$ est cohérent si et seulement si $\operatorname{gr}(\mathcal{M})$ est cohérent.

Démonstration: On représente localement $\mathcal{M}$ par une suite exacte

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{A}^n \xrightarrow[\psi]{} \mathcal{M} \to 0$$

où $\mathcal{A}^n$ est muni de la filtration $\bigoplus_j \mathcal{A}_{k-k_j} e_j$, les $(\psi(e_j), k_j)$ définissant la filtration de $\mathcal{M}$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{gr}(\mathcal{I}) \longrightarrow \operatorname{gr}(\mathcal{A}^n) \longrightarrow \operatorname{gr}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

est exacte, et on est ramené à démontrer que si $\mathcal{I}$ est localement de type fini, $\operatorname{gr}(\mathcal{I})$ aussi (la réciproque résultant immédiatement de la proposition 1.3). Soit $u_1,\ldots,u_r$ des générateurs de $\mathcal{I}$ sur un ouvert $\mathcal{U}$, que l'on peut choisir tels que $\sigma(u_1),\ldots,\sigma(u_r)$ engendrent $\operatorname{gr}(\mathcal{I})_x$, pour un $x \in \mathcal{U}$.

Ecrivons les suites exactes:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}^r \xrightarrow[\phi]{} \mathcal{A}^n$$

$$0 \longrightarrow \bar{J} \longrightarrow \operatorname{gr}(\mathcal{A}^r) \xrightarrow[\bar{\phi}]{} \operatorname{gr}(\mathcal{A}^n)$$

où $\phi(a_1,\ldots,a_r) = \sum a_j u_j$.

On a $gr(\mathcal{K}) \subset \overline{J}$ avec égalité en x. Comme $\overline{J}$ est cohérent, et $\overline{J}_x$ de type fini, on a égalité au voisinage de x, ce qui entraîne par la proposition 1.7 que $\mathrm{Im}\,\overline{\phi} = gr(\mathrm{Im}\,\phi)$ au voisinage de x et $gr(\mathcal{I}) = gr(\mathrm{Im}\,\phi)$ est donc cohérent.

<u>Proposition 1.20</u> [11] Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ deux faisceaux cohérents d'anneaux filtrés, la filtration de $\mathcal{B}$ induisant celle de $\mathcal{A}$. On suppose les faisceaux $\mathcal{A}_o$ et $\mathcal{A}$ noethériens, et les $\mathcal{A}_o$-modules $\mathcal{B}_k$ et $\mathcal{A}_k$ cohérents pour $k >> 0$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}$-module cohérent, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module de type fini. Alors $\mathcal{N}$ est $\mathcal{A}$-cohérent.

<u>Démonstration</u>: On peut supposer que $\mathcal{B}\mathcal{N} = \mathcal{M}$, et il suffit de démontrer que si $\mathcal{I}$ est un sous-module de type fini de $\mathcal{B}^N$, $\mathcal{I} \cap \mathcal{A}^N$ est localement de type fini. Soit $u_1,\ldots,u_r$ des générateurs de $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I}_k = \bigcup_{\ell} (\sum_j \mathcal{B}_\ell\, u_j) \cap \mathcal{B}_k^N$$

et cette suite de $\mathcal{A}_o$-modules cohérents est localement stationnaire. Donc $\mathcal{I}_k$ est $\mathcal{A}_o$-cohérent.

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{A}^N = \bigcup_k \mathcal{A}(\mathcal{I}_k \cap \mathcal{A}_k^N)$$

et cette suite de sous-$\mathcal{A}$-modules cohérents de $\mathcal{A}^N$ est localement stationnaire, et définit un $\mathcal{A}$-module cohérent.

II. OPÉRATEURS MICRODIFFÉRENTIELS

2.1. Construction de $\mathscr{E}_X$

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$, X un ouvert de E, $T^*X \simeq X \times E^*$ son fibré cotangent, π la projection de T^*X sur X. On note $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels holomorphes sur X , $\mathcal{O}_{T^*X}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur T^*X , $\mathcal{O}_{T^*X}(j)$, $(j \in \mathbf{Z})$, le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{T^*X}$ des fonctions homogènes de degré j dans la fibre de π , c'est à dire solution de l'équation $\sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} f = jf$. Le gradué de $\mathcal{D}_X$ (pour la filtration par l'ordre) s'identifie par l'opération "symbole principal" à $\bigoplus_{j\geq o} \mathcal{O}_{T^*X}(j)$.

Nous allons construire sur T^*X un faisceau d'anneaux $\mathcal{E}_X$ contenant $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$, et permettant d'inverser les sections de $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ sur les ouverts de T^*X où leur symbole principal ne s'annule pas. On pose pour $\mathcal{U}$ ouvert de T^*X :

$$\hat{\mathcal{E}}_X(m)(\mathcal{U}) = \prod_{j\in\mathbf{Z}, j\leq m} \mathcal{O}_{T^*X}(j)(\mathcal{U})$$

et l'on écrit une section $P \in \mathcal{E}_X(m)(\mathcal{U})$ comme une série formelle:

$$P = \sum_{j\leq m} P_j \quad , \text{ avec } \quad P_j \in \mathcal{O}_{T^*X}(j)(\mathcal{U})$$

On note $\hat{\mathcal{E}}_X(m)$ le faisceau ainsi défini sur T^*X , et $\hat{\mathcal{E}}_X = \bigcup_m \hat{\mathcal{E}}_X(m)$.

On munit $\hat{\mathcal{E}}_X$ d'une structure d'anneau (unitaire, non commutatif) par la formule:

$$P = \sum_{j\leq m} p_j \ , \qquad Q = \sum_{k\leq m'} q_k$$

$$P \circ Q = R = \sum_{\ell\leq m+m'} r_\ell \qquad \text{avec} \qquad r_\ell(x,\xi) = \sum_{i+j-|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p_i \, \partial_x^\alpha q_j$$

que l'on peut écrire:

$$(P \circ Q)(x,\xi) = e^{d_\xi d_y}(P(x,\xi)Q(y,\eta))\Big|_{x=y,\xi=\eta}$$

ce qui montre que cette formule est indépendante du choix d'une base sur E .

Si l'on identifie $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ à un sous-groupe de $\hat{\mathcal{E}}_X$ par l'application:

$$P(x,D_x) \longrightarrow P(x,\xi) = e^{-\langle x,\xi\rangle} P(e^{\langle x,\xi\rangle})$$

on constate que la formule de composition généralise la formule de Leibniz , et fait donc de $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ un sous-anneau de $\hat{\mathcal{E}}_X$.

Remarquons que si l'on identifie X à $T^*_X X$ la section nulle de T^*X, on a un isomorphisme d'anneaux:

$$\mathcal{D}_X \simeq \hat{\mathcal{E}}_X \mid T^*_X X$$

puisqu'une fonction holomorphe, homogène de degré $k < 0$ au voisinage de $T^*_X X$, est nulle.

Le faisceau d'anneaux $\hat{\mathcal{E}}_X$ est filtré par les $\hat{\mathcal{E}}_X(m)$, et son gradué est égal à $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{T^*X}(j)$ que l'on identifie à un sous-faisceau de $\mathcal{O}_{T^*X}$. On note $\mathcal{E}_X(m)(\mathcal{U})$ le sous-groupe de $\hat{\mathcal{E}}_X(m)(\mathcal{U})$ des $P = \sum_{j \leq m} p_j$ vérifiant:

$$\begin{cases} \forall K \text{ compact de } \mathcal{U}, \ \exists\, t > 0 \quad \text{avec} \\ \sum_{j \leq o} |p_j|_K \ t^{-j} / (-j)! < \infty \end{cases}$$

où $|p_j|_K = \sup_K |p_j|$. On dit alors que P est un opérateur microdifférentiel (d'ordre $\leq m$) sur $\mathcal{U}$. On note $\mathcal{E}_X(m)$ le sous-faisceau de $\hat{\mathcal{E}}_X(m)$ ainsi construit, et $\mathcal{E}_X = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_X(m)$. On dit que P est d'ordre m si $P \in \mathcal{E}_X(m)$, $P \notin \mathcal{E}_X(m-1)$ (sur un ouvert connexe), et on appelle symbole principal de P l'image $\sigma(P)$ de P dans $\mathcal{E}_X(m) / \mathcal{E}_X(m-1)$.

Un outil important dans l'étude de $\mathcal{E}_X$ est la quasi-norme de Boutet de Monvel et Kree [5]. Soit K un compact de $\mathcal{U}$, $t \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$. On pose, pour $P \in \hat{\mathcal{E}}_X(m)(\mathcal{U})$:

$$N_m(P,K,t) = \sum_{\substack{k \geq o \\ \alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^n}} \frac{2(2n)^{-k}\, k!}{(|\alpha|+k)!\,(|\beta|+k)!} \left| D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta}\, p_{m-k} \right|_K t^{2k+|\alpha|+|\beta|}$$

et l'on démontre [5]:

<u>Proposition 2.1.</u>: Soit $P \in \hat{\mathcal{E}}_X(m)(\mathcal{U})$. On a l'équivalence:

$P \in \mathcal{E}_X(m)(\mathcal{U}) \Longleftrightarrow \forall K$ compact de $\mathcal{U}$, il existe $t > 0$ avec $N_m(P,K,t) < \infty$.

<u>Proposition 2.2.</u>: Soit $P \in \hat{\mathscr{E}}_X(m)(\mathscr{U})$, $Q \in \hat{\mathscr{E}}_X(m')(\mathscr{U})$. Alors:

$$N_{m+m'}(P \circ Q,K,t) << N_m(P,K,t) \cdot N_{m'}(Q,K,t)$$

où $f(t) << g(t)$ signifie que g est une série majorante de f .

On en déduit évidemment que $\mathscr{E}_X$ est un sous-faisceau d'anneaux de $\hat{\mathscr{E}}_X$, et aussi que si P est un opérateur microdifférentiel dont le symbole principal $\sigma(P)$ est inversible sur un ouvert $\mathscr{U} \subset T^*X$, P est inversible (il existe un unique opérateur microdifférentiel Q sur $\mathscr{U}$, tel que $P \circ Q = Q \circ P = I$).

2.2. <u>Théorèmes de division</u>.

Soit $P \in \mathscr{E}_X$. On note ad_P^k la k-ième puissance de l'application $Q \longrightarrow [P,Q]$ de $\mathscr{E}_X$ dans lui-même. Un opérateur Q s'écrit donc comme un polynôme de degré p en D_1 , à coefficients dans l'anneau des opérateurs indépendants de D_1 si et seulement si $ad_{x_1}^p(Q) = 0$ (et de même en échangeant x_1 et D_1).

On peut alors généraliser aux opérateurs microdifférentiels les théorèmes classiques de division de Späth et Weĭerstrass [23].

<u>Proposition 2.3.</u>: Soit P un opérateur microdifférentiel défini au voisinage de $(x^o,\xi^o) \in T^*X$. On suppose que $\frac{\partial^j}{\partial \xi_1^j}\sigma(P)(x^o,\xi^o)$ est nul pour $j < p$ et non nul pour $j = p$. Alors tout opérateur microdifférentiel Q s'écrit de manière unique au voisinage de (x^o,ξ^o) :

$$\begin{cases} Q = SP + R \\ \operatorname{ord}(R) \leq \operatorname{ord}(Q) \quad , \quad ad_{x_1}^p(R) = 0 \end{cases}$$

<u>Proposition 2.4.</u>: Sous les mêmes hypothèses sur P il existe un opérateur inversible E et un opérateur W tel que:

$$P = EW \ , \quad W = D_1^p + \sum_{j=o}^{p-1} R_j D_1^j \ ,$$

avec $\mathrm{ord}(W) \leq p$, $[x_1, R_j] = 0$.

On a des énoncés analogues en divisant à droite. On obtient $Q = P\tilde{S} + \tilde{R}$, ou $P = \tilde{W}\tilde{E}$. On a aussi des énoncés analogues en inversant les rôles de x_1 et D_1 . Le théorème de division permet de construire les "transformations canoniques quantifiées". Rappelons comment [23], [10].

Soit X et Y deux ouverts d'espaces vectoriels complexes E et F , Λ une variété Lagrangienne conique de $T^*X \times T^*Y$. Notons p_1 (resp. p_2) la projection sur T^*X (resp. T^*Y).

Soit $\mathcal{I}$ un idéal à gauche de $\mathscr{E}_{X\times Y}$ défini au voisinage de Λ , $\overline{\mathcal{I}}$ l'idéal des symboles de $\mathcal{I}$, c'est à dire l'idéal gradué de $\mathcal{I}$, $\mathrm{gr}(\mathcal{I}) \subset \mathrm{gr}(\mathscr{E}_{X\times Y})$ que l'on identifie à l'idéal qu'il engendre dans $\mathcal{O}_{T^*X \times T^*Y}$.

<u>Proposition 2.5.</u>: On suppose que:

a) $\overline{\mathcal{I}}$ coïncide avec l'idéal de définition de la variété Λ

b) p_1 définit un isomorphisme de Λ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X . On a alors:

$$(p_1^{-1}(\mathscr{E}_X|\mathcal{U}) \oplus \mathcal{I})|\Lambda \simeq \mathscr{E}_{X\times Y}|\Lambda$$

Tout élément $Q \in \mathscr{E}_{X\times Y}|\Lambda$ s'écrit donc de manière unique:

$$Q = P + R , \quad P \in \mathscr{E}_X , \quad R \in \mathcal{I}$$

Si l'on suppose maintenant que $\dim E = \dim F$, et que p_2 définit un isomorphisme de Λ sur un ouvert $\mathcal{V}$ de T^*Y , on obtient un isomorphisme sur Λ :

$$p_1^{-1}(\mathscr{E}_X|\mathcal{U}) \oplus \mathcal{I} \simeq p_2^{-1}(\mathscr{E}_Y|\mathcal{V}) \oplus \mathcal{I}$$

Soit ϕ l'application de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$ de graphe Λ , et $\hat{\phi}$ l'application de $\mathscr{E}_X|\mathcal{U}$ sur $\mathscr{E}_Y|\mathcal{V}$ qui à $P \in \mathscr{E}_X$ associe $\hat{\phi}(P) = Q$ l'unique opérateur de $\mathscr{E}_Y$ tel que $P-Q \in \mathcal{I}$. C'est un anti-isomorphisme d'algèbres:

$$\hat{\phi}(P_1 \circ P_2) = \hat{\phi}(P_2) \circ \hat{\phi}(P_1)$$

et de plus:

$$\sigma(\hat{\phi}(P)) = \sigma(P) \circ \phi^{-1}$$

Si l'on prend pour variété Λ le fibré conormal à la diagonale de $X \times X$, et si l'on choisit un idéal $\mathcal{I}$ correspondant, on obtient ainsi un anti-isomorphisme:

$$\hat{a} : \mathscr{E}_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_X^a$$

où a désigne l'application antipodale de T^*X , qui à (x,ξ) associe $(x,-\xi)$, et où $\mathscr{E}_X^a = a^{-1}(\mathscr{E}_X)$. L'application composée $\phi \circ a$ est une transformation canonique de $a^{-1}(\mathcal{U}) \subset T^*X$ sur $\mathcal{V} \subset T^*Y$, et l'on dit que $\hat{\phi} \circ \hat{a}$, qui est alors un isomorphisme d'algèbre de $\mathscr{E}_X|a^{-1}(\mathcal{U})$ sur $\mathscr{E}_Y|\mathcal{V}$, est une transformation canonique quantifiée au dessus de $\phi \circ a$.

2.3. Structure de $\mathscr{E}_X$.

Les théorèmes de division permettent de démontrer le résultat important suivant [23] (cf. aussi [18] pour une démonstration plus directe).

Théorème 2.6.: Soit $x^* \in T^*X$. Alors l'anneau $\mathscr{E}_{X,x^*}(o)$ des germes d'opérateurs microdifférentiels d'ordre ≤ 0 en x^* , est noethérien à droite et à gauche, et les sous-modules (à droite ou à gauche) de $\mathscr{E}_{X,x^*}(o)^N$ sont fermés pour la topologie $\mathscr{E}_{X,x^*}(-1)$-adique.

Avec les définitions introduites au §1, on en conclut:

Corollaire 2.7.: La filtration sur $\mathscr{E}_X$ est noethérienne.

On déduit alors des résultats du §1 (et des résultats bien connus sur $gr(\mathscr{E}_X) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{T^*X}(j))$, les résultats suivants:

a) Le faisceau $\mathscr{E}_X$ est noethérien (et en particulier cohérent) (proposition 1.18).

b) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{E}_X$-module munit d'une bonne filtration. Alors $\mathcal{M}$ est cohérent si et seulement si $gr(\mathcal{M})$ est un $gr(\mathscr{E}_X)$-module cohérent (proposition 1.19).

c) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent munit d'une bonne filtration sur un ouvert $\mathcal{U} \subset T^*X$. Alors $\mathrm{supp}\, \mathcal{M} = \mathrm{supp}(\mathrm{gr}\, \mathcal{M})$ (corollaire 1.5). En particulier $\mathrm{supp}(\mathcal{M})$ est un ensemble analytique fermé conique de $\mathcal{U}$, et le théorème de O. Gabber implique que $\mathrm{supp}(\mathcal{M})$ est involutif pour la structure symplectique de T^*X .

d) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent munit d'une bonne filtration, et soit $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{E}_X \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{M}$. Alors:

$$\mathrm{supp}(\mathrm{gr}\, \mathcal{M}) = \mathrm{supp}(\tilde{\mathcal{M}})$$

De plus $\mathcal{E}_X$ est plat sur $\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)$. (Proposition 1.17).

e) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent (à gauche), $j \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_X)$ est un $\mathcal{E}_X$-module cohérent à droite, et son support est donc de codimension $\leq n$, puisque involutif. D'autre part si $\mathcal{M}$ est munit d'une bonne filtration,

$$\mathrm{supp}(\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_X)) \subset \mathrm{supp}\,(\mathcal{E}xt^j_{\mathrm{gr}\,\mathcal{E}_X}(\mathrm{gr}\,\mathcal{M}, \mathrm{gr}\,\mathcal{E}_X))$$

(Proposition 1.16). Mais si $\mathcal{F}$ est un $\mathrm{gr}(\mathcal{E}_X)$-module gradué cohérent, $\mathrm{codim}(\mathrm{supp}(\mathcal{E}xt^j_{\mathrm{gr}\,\mathcal{E}_X}(\mathcal{F}, \mathrm{gr}\,\mathcal{E}_X))) \geq j$. Par suite:

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_X) = 0 \qquad \forall j > n$$

et tout $\mathcal{E}_X$-module cohérent admet, localement, une résolution projective de longueur $\leq n$ par des $\mathcal{E}_X$-modules <u>libres</u> de type fini (proposition 1.15). (Cette dernière remarque est dûe à E. Andronikof [25]).

III. PROBLÈME DE CAUCHY

3.1. Système induit.

La proposition 2.5. permet d'étendre les définitions et les résultats du §2 au cas où X est une variété analytique complexe, ce que nous supposerons désormais. Soit f une immersion holomorphe de la variété Y dans X. On note $T^*X \underset{X}{\times} Y$ le produit fibré $\{(x,\xi;y) \in T^*X \times Y \; ; \; f(y) = x\}$ et $\overline{\omega}$ et ρ les applications:

$$T^*Y \xleftarrow[\rho]{} T^*X \underset{X}{\times} Y \xrightarrow[\overline{\omega}]{} T^*X$$

$\overline{\omega}((x,\xi;y)) = (x,\xi)$

$\rho((x,\xi;y)) = (y, {}^t f'(y)\xi)$

L'application f fait de $\mathcal{O}_Y$ un $f^{-1}\mathcal{O}_X$-module. Nous identifierons $\mathcal{O}_X$ à $\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ son image inverse sur T^*X, et de même pour $\mathcal{O}_Y$.

<u>Proposition 3.1.</u>: On a des isomorphismes de faisceaux sur $T^*X \underset{X}{\times} Y$:

$$\mathcal{E}xt^j_{\overline{\omega}^{-1}\mathcal{E}_X}\left(\rho^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{\overline{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X} \overline{\omega}^{-1}\mathcal{E}_X,\ \rho^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{\overline{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X} \overline{\omega}^{-1}\mathcal{E}_X\right) \simeq$$

$$\begin{cases} \rho^{-1}\mathcal{E}_Y & \text{pour } j = 0 \\ 0 & \text{pour } j > 0 \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>: Nous ne traiterons que le cas où Y est l'hypersurface de $X = \mathbb{C}^n$ d'équation $\{x_1 = 0\}$, et nous poserons $x = (x_1, x')$.

Le groupe $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{E}_{X/x_1}\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_{X/x_1}\mathcal{E}_X)$ désigne l'ensemble des opérateurs $P(x',D_x) \in \mathcal{E}_{X/x_1}\mathcal{E}_X$ solution de l'équation:

$$P(x',D_x) \circ x_1 = 0 \mod x_1\mathcal{E}_X$$

donc l'ensemble des opérateurs $P(x',D_{x'})$ indépendants de x_1 et D_1. D'autre part $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{E}_X}\left(\mathcal{E}_{X/x_1}\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_{X/x_1}\mathcal{E}_X\right) \simeq \mathcal{E}_{X/\left(x_1\mathcal{E}_X + \mathcal{E}_X x_1\right)} = 0$

<u>Définition 3.2.</u> [23]: Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent à gauche sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X. On dit que f (ou que Y) est non caractéristique pour $\mathcal{M}$

sur $\mathcal{U}$ si l'application ρ est propre (donc finie) sur $\overline{\omega}^{-1}(\operatorname{supp}\mathcal{M})$. On définit alors $\mathcal{M}_Y$, le système induit par $\mathcal{M}$ sur Y par:

$$\mathcal{M}_Y = \rho_*(\rho^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{\overline{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X} \overline{\omega}^{-1}\mathcal{M})$$

Le module $\mathcal{M}_Y$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{E}_Y$-module par la proposition 3.1.

Proposition 3.3. [23]: On suppose Y non caractéristique pour $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{U}$.

Alors:

a) $\mathcal{T}or_j^{\overline{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X}(\rho^{-1}\mathcal{O}_Y, \overline{\omega}^{-1}\mathcal{M}) = 0 \qquad \forall j > 0$

b) $\mathcal{M}_Y$ est $\mathcal{E}_Y$-cohérent

c) $\operatorname{supp}\mathcal{M}_Y \subset \rho(\overline{\omega}^{-1}(\operatorname{supp}\mathcal{M}))$.

Démonstration: En décomposant f, on est ramené à supposer que Y est une hypersurface d'équation $\{x_1 = 0\}$ dans un système de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ sur X. Soit u une section de $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}_X u$ le $\mathcal{E}_X$-module à gauche engendré par u dans $\mathcal{M}$. Comme le support de $\mathcal{E}_X u$ est contenu dans le support de $\mathcal{M}$, Y est non caractéristique pour ce module, et on a vu que le support d'un $\mathcal{E}_X$-module était égal au support de son gradué pour une bonne filtration. Il existe donc (localement sur $T^*X \times_X Y$) un opérateur P de type Weïerstrass en D_1,

$$P = D_1^m + \sum_{o \le j < m} P_j(x, D')D_1^j$$

avec $Pu = 0$.

Si de plus $x_1 u = 0$, on aura $\mathrm{ad}^m_{x_1}(P)(u) = m!u = 0$, ce qui prouve a).

Soit maintenant $u_1, \ldots, u_r$ des générateurs de $\mathcal{M}$ (au voisinage d'un point de $T^*X \underset{X}{\times} Y$), P_j des opérateurs de type Weïerstrass en D_1 , avec $P_j u_j = 0$. Soit $\mathcal{N}_j = \mathcal{E}_X / \mathcal{E}_X \cdot P_j$, $\mathcal{N} = \bigoplus_j \mathcal{N}_j$, ψ le morphisme de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}$ qui à $1 \in \mathcal{E}_X / \mathcal{E}_X \cdot P_j$ associe u_j , $\mathcal{L}$ le noyau de ψ :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

Si P est de type Weïerstrass d'ordre m en D_1 sur $\mathcal{U}$ (i.e.: $\sigma(P)$ s'annule à l'ordre m dans $\mathcal{U}$ dans la direction $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$) on déduit de la proposition 2.3. que $\rho_*(\mathcal{E}_X / x_1 \mathcal{E}_X + \mathcal{E}_X P)$ est isomorphe à $\mathcal{E}_Y^m$. Par suite $\mathcal{N}_Y$ sera de type fini, et $\mathcal{M}_Y$ aussi. Comme Y est non caractéristique pour $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_Y$ sera de type fini, et $\mathcal{M}_Y$ étant de présentation finie, sera cohérent.

L'assertion c) est évidente.

Remarque: On pourrait démontrer facilement la proposition 3.3. pour un $\mathcal{D}_X$-module sans utiliser $\mathcal{E}_X$, à l'aide des outils du §1.

3.2. Le théorème de Cauchy-Kowalevski.

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents sur $\mathcal{U}$ pour lequel Y est non caractéristique. Tout morphisme $\mathcal{E}_X$-linéaire u de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ définit un morphisme

$$1 \otimes u : f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{\bar{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X} \bar{\omega}^{-1}\mathcal{M} \longrightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{\bar{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X} \bar{\omega}^{-1}\mathcal{N}$$

d'où l'on déduit des applications:

$$\bar{\omega}^{-1}\mathscr{E}xt^{j}_{\mathscr{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow \mathscr{E}xt^{j}_{\rho^{-1}\mathscr{E}_X}\left(f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{\bar{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X} \bar{\omega}^{-1}\mathcal{M}, f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{\bar{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X} \bar{\omega}^{-1}\mathcal{M}\right)$$

Supposons que $\mathcal{M}$ soit défini au voisinage de T^*_XX (i,e.: $\mathcal{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent), et prenons $\mathcal{O}_X$ pour $\mathcal{N}$.

<u>Théorème 3.4.</u>: (Cauchy-Kowalevski-Kashiwara [8]). On suppose f non caractéristique pour $\mathcal{M}$. On a alors pour tout j des isomorphismes:

$$f^{-1}\left(\mathscr{E}xt^{j}_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)\right) \simeq \mathscr{E}xt^{j}_{\mathscr{D}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{O}_Y)$$

Le caractère fonctoriel du morphisme de restriction permet de se ramener, comme pour la proposition 3.3., au cas où Y est une hypersurface.

Supposons $\mathcal{M} = \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X.P$, P étant un opérateur d'ordre m . Alors $\mathcal{M}_Y \simeq \mathscr{D}^m_Y$, et il s'agit de démontrer:

$$\begin{cases} \mathscr{E}xt^{0}_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)|_Y \simeq \mathcal{O}^m_Y & \\ \mathscr{E}xt^{j}_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)|_Y = 0 & j > 0 \end{cases}$$

ce qui n'est autre que le théorème usuel de Cauchy-Kowalevski.

Dans le cas général (Y restant une hypersurface), le théorème étant de nature locale, on peut comme pour la proposition 3.3. choisir des générateurs $u_1,\dots,u_r$ de $\mathcal{M}$, trouver des opérateurs P_j vérifiant $P_ju_j = 0$, Y non caractéristique pour P_j , poser $\mathcal{N} = \bigoplus_j \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X.P_j$ et définir $\mathscr{L}$ par la suite exacte:

(*) $$0 \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow[\psi]{} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

Comme Y est non caractéristique pour $\mathscr{L}$, la suite:

($*_Y$) $$0 \longrightarrow \mathscr{L}_Y \longrightarrow \mathcal{N}_Y \longrightarrow \mathcal{M}_Y \longrightarrow 0$$

est exacte par la proposition 3.3. a).

Appliquons le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\cdot\,,\mathcal{O}_X)|_Y$ à la suite (*) et le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\cdot\,,\mathcal{O}_Y)$ à la suite $(*_Y)$. On obtient des suites exactes longues:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_o & \longrightarrow & B_o & \longrightarrow & C_o & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow \cdots & C_n & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_o} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_o} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_o} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{A}_o & \longrightarrow & \tilde{B}_o & \longrightarrow & \tilde{C}_o & \longrightarrow & \tilde{A}_1 & \longrightarrow \cdots & \tilde{C}_n & \longrightarrow & \tilde{A}_{n+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

avec $A_i = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)|Y$, $\tilde{A}_i = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{O}_Y)$, et de même pour B_i et C_i en remplaçant respectivement $\mathcal{M}$ par $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}$.

Toutes les flèches β_n sont des isomorphismes d'après le théorème de Cauchy-Kowalevski. Par suite α_o est injective, et γ_o aussi puisque le module $\mathcal{L}$ vérifie les mêmes hypothèses que $\mathcal{M}$. Donc α_o est un isomorphisme. On démontre ainsi par récurrence que si α_n est un isomorphisme, α_{n+1} aussi.

3.3. <u>Variété 1-microcaractéristique</u>.

Soit V une variété involutive lisse dans $\dot{T}^*X = T^*X - T^*_XX$, et $\mathcal{L}$ un système à caractéristiques simples sur V , [23], c'est à dire localement de la forme $\mathcal{E}_{X/\mathcal{I}}$, l'idéal des symboles de $\mathcal{I}$, gr $\mathcal{I}$, étant l'idéal de définition de V . Par exemple si V est la variété lagrangienne T^*_ZX , le fibré conormal à l'hypersurface Z d'équation $x_n = 0$, le module

$C_{Z|X} = \mathcal{E}_{X/(}\mathcal{E}_XD_1 + \ldots + \mathcal{E}_XD_{n-1} + \mathcal{E}_Xx_n)$ est un système à caractéristiques simples sur V (le faisceau $C_{Z|X}$ est d'ailleurs isomorphe sur $T^*X - T^*_XX$ au quotient par $\mathcal{O}_X$ du faisceau des fonctions à singularités méromorphes ou logarithmiques sur Z).

Pour étudier le problème de Cauchy dans un tel module, il est naturel de considérer avec M. Kashiwara et T. Oshima [12] la sous-algèbre $\mathcal{D}^1_V$ de $\mathcal{E}_X$ engendrée sur

$\mathscr{E}_X(0)$ par les opérateurs $P \in \mathscr{E}_X(1)$ tels que $\sigma_1(P)|V = 0$ (cette algèbre est notée $\mathscr{E}_V$ dans [12] et [11]).

Remarquons que $\mathscr{D}^1_V = \mathscr{E}_X$ en dehors de V et $\mathscr{D}^1_V(k) = \mathscr{E}_X(k)$ pour $k \leq 0$.

Soit $I_V(k)$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{T^*X}(k)$ des fonctions qui s'annulent sur V, et $I^k_V(1)$ la k-ième puissance de $I_V(1)$, avec la convention que $I^k_V(1) = \mathcal{O}_{T^*X}(k)$ pour $k \leq 0$. On a alors un isomorphisme:

$$\mathrm{gr}(\mathscr{D}^1_V) \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} I^k_V(1)$$

et par suite la filtration sur $\mathscr{D}^1_V$ est une filtration noethérienne [12] et $\mathscr{D}^1_V$ est un faisceau noethérien [11].

Soit $T_V T^*X$ le fibré normal à V dans $T(T^*X)$, λ la projection de $T_V T^*X$ sur V. L'espace $T_V T^*X$ est munit de deux actions du groupe $\mathbb{C}^\times$: l'une correspondant à la structure de fibrée sur V, l'autre à la structure fibrée de T^*X sur X (cf. l'exemple ci-dessous). D'autre part si V est lagrangien $T_V T^*X$ est isomorphe à T^*V par l'isomorphisme symplectique de TT^*X sur T^*T^*X, et $T_V T^*X$ est donc muni d'une structure symplectique. On pose: $S_V = \mathrm{gr}(\mathscr{D}^1_V)/\mathcal{O}_{T^*X}(-1)\,\mathrm{gr}(\mathscr{D}^1_V)$ et l'on identifie $\lambda^{-1}(S_V)$ à un sous faisceau de $\mathcal{O}_{T_V T^*X}$. Si P est une section de $\mathscr{D}^1_V$, on note $\sigma^1_V(P)$ l'image de $\sigma(P)$ dans $\lambda^{-1}(S_V)$. Si $P \in \mathscr{D}^1_V(m)$ et $P \notin \mathscr{D}^1_V(m-1)$, $m \geq 0$, $\sigma^1_V(P)$ est la partie d'ordre m du développement de Taylor de $\sigma(P)$ le long de V. Pour $m \leq 0$, $\sigma^1_V(P) = 0$.

<u>Exemple</u>: Soit $(x,t) = (x_1,\dots,x_p\,;\, t_1,\dots,t_q)$ un système de coordonnées sur X, Z la sous-variété d'équation $t = 0$, $V = \dot{T}^*_Z X$ le fibré conormal à Z dans X, privé de la section nulle.

Notons $(x,t\,;\,\xi,\tau)$ les coordonnées sur T^*X, $(x,\tau;\langle\tilde{t},\frac{\partial}{\partial\xi}\rangle+\langle\tilde{\xi},\frac{\partial}{\partial\xi}\rangle) = (x,\tau,\tilde{t},\tilde{\xi})$ les coordonnées sur $T_V T^*X$. Les actions de $\mathbb{C}^\times$ sur $T_V T^*X$ sont décrites par:

$$(x,\tau,\tilde{t},\tilde{\xi}) \longrightarrow (x,\tau,c\tilde{t},c\tilde{\xi})$$
$$(x,\tau,\tilde{t},\tilde{\xi}) \longrightarrow (x,c\tau,\tilde{t},c\tilde{\xi})$$

L'algèbre $\mathscr{D}_V^1$ est engendrée sur $\mathscr{E}_X(0)$ par les opérateurs $t_j D_{t_k}$, D_{x_ℓ} $(j,k = 1,\ldots,q \; ; \; \ell = 1,\ldots,p)$.

Prenons en particulier $q = 1$, et soit $P = (t D_t)^2 + D_{x_1}^2 + D_{x_2}$, et $Q = (t^2 D_t)^2 + D_{x_1}^2 + D_{x_2}$. Alors $\sigma_V^1(P)(x,\tau,\tilde{t},\tilde{\xi}) = \tilde{t}^2 \tau^2 + \tilde{\xi}_1^2$ et $\sigma_V^1(Q)(x,\tau,\tilde{t},\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}_1^2$.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{E}_X$-module cohérent sur $\mathscr{U}$ muni de $\mathscr{M}_o$, sous-$\mathscr{E}_X(o)$-module de type fini qui engendre $\mathscr{M}$. On pose $\tilde{\mathscr{M}}_k = \mathscr{D}_V^1(k)\mathscr{M}_o$, et $\tilde{gr}(\mathscr{M}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathscr{M}}_k / \tilde{\mathscr{M}}_{k-1}$.

<u>Définition et proposition 3.5.</u> [19]: Le support dans T_VT^*X du module $\mathscr{O}_{T_VT^*X} \otimes_{\lambda^{-1}(S_V)} \lambda^{-1}(\tilde{gr}(\mathscr{M})/\mathscr{O}_{T^*X}(-1)\tilde{gr}(\mathscr{M}))$ ne dépend que de $\mathscr{M}$ et pas de $\mathscr{M}_o$. On l'appelle la variété 1-microcaractéristique de $\mathscr{M}$ le long de V et on le note $C_V^1(\mathscr{M})$.

<u>Proposition 3.6.</u> [19]: L'ensemble $C_V^1(\mathscr{M})$ est un espace analytique de T_VT^*X, conique pour les deux actions de $\mathbb{C}^\times$, fermé au dessus de $\mathscr{U}$.

<u>Proposition 3.7.</u> [19]: Soit $0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{M} \to \mathscr{N} \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{E}_X$-modules cohérents. Alors $C_V^1(\mathscr{M}) = C_V^1(\mathscr{L}) \cup C_V^1(\mathscr{N})$.

Remarquons que si V est lagrangien $C_V^1(\mathscr{M})$ est involutif dans T_VT^*X d'après le théorème 1.8. . On pourrait d'ailleurs formuler un théorème dans le cas général (où V est seulement involutif) en utilisant la structure symplectique relative de T_VT^*X.

Si $\mathscr{M}$ est de la forme $\mathscr{E}_X/\mathscr{I}$, pour un idéal cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{E}_X$,

$$C_V^1(\mathscr{M}) = \{(x^*,\theta) \in T_VT^*X \; ; \; \sigma_V^1(P)(x^*,\theta) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{D}_V^1 \cap \mathscr{I}\}$$

Soit maintenant f une application holomorphe de Y dans X, que nous supposerons transverse à V, c'est à dire telle que: $\forall g$ fonction sur T^*X nulle sur $T^*X \times_X \dot{Y}$, avec $dg \neq 0$ (au voisinage de $T^*X \times_X Y$), l'image du champ hamiltonien H_g dans $T_V T^*X$ est non nul. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-module cohérent nous dirons alors comme dans [13] que f (ou que Y) est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ sur V si, pour tout g comme plus haut, l'image de H_g dans $T_V T^*X$ n'appartient pas à $C_V^1(\mathcal{M})$.

<u>Théorème 3.8.</u>: Soit V une variété involutive lisse de $\mathcal{U} \subset T^*X$, f une immersion holomorphe de Y dans X, transverse à V. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent à caractéristiques simples sur V, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent. On suppose f non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ sur V. Alors les morphismes naturels sur $\bar{\omega}^{-1}(\mathcal{U})$:

$$\bar{\omega}^{-1}\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^j_{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y}(\rho^{-1}\mathcal{O}_Y \underset{\bar{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \bar{\omega}^{-1}\mathcal{M}, \rho^{-1}\mathcal{O}_Y \underset{\bar{\omega}^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \bar{\omega}^{-1}\mathcal{L})$$

sont pour tous j, des isomorphismes.

Le théorème précédent a été obtenu par le même schéma de démonstration que le théorème 3.4. par T. Monteiro [20] et par une méthode différente (microlocalisation de $\mathcal{D}_V^1$) par Y. Laurent [15]. Il avait été auparavant démontré par M. Kashiwara et P. Schapira [13] en remplaçant $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}^\infty$, le module engendré par $\mathcal{L}$ sur les opérateurs d'ordre infini, sous une hypothèse plus faible de non microcaractéricité de f. Remarquons que le théorème 3.8. redonne le théorème 3.4. en prenant $V = T_X^*X$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$. Il permet aussi de résoudre le problème de Cauchy quand les données sont des fonctions holomorphes présentant des singularités polaires ou logarithmiques, et de généraliser ainsi les résultats de [6] aux systèmes, sous une hypothèse générale de non microcaractéricité (cf. [13], [15], [20]).

B I B L I O G R A P H I E

[1] L. BANICA, O. STANASILA: Méthodes Algébriques dans la théorie globale des espaces complexes. Gauthier-Villars, 1977.

[2] I.N. BERNSHTEIN: Modules over a ring of differential operators. Study of fundamental solutions of equations with constant coefficients. Funct. An. and its Appl. Vol. 5, 89-101 (1971).

[3] I.N. BERNSHTEIN: The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. Funct. An. and its Appl. Vol. 6, 272-285 (1972).

[4] J.E. BJÖRK: Rings of differential operators. North Holland Math. Library Series. 1979.

[5] L. BOUTET DE MONVEL, P. KREE: Pseudo-differential operators and Gevrey classes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 17, 1, 295-323 (1967).

[6] Y. HAMADA, J. LERAY, C. WAGCHAL: Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples: problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle. J. Math. Pures Appl. 55, 297-352 (1976).

[7] O. GABBER: The integrability of the characteristic variety.Ann.J.Math.103.

[8] M. KASHIWARA: Algebraic study of systems of partial differential equations. Thesis, Univ. of Tokyo (1971) (in japenese).

[9] M. KASHIWARA: b-functions and holonomic systems. Invent. Math. 38, 33-53 (1976).

[10] M. KASHIWARA: Cours à l'Université Paris-Nord. Prépublications 1977.

[11] M. KASHIWARA, T. KAWAÏ: Holonomic systems with regular singularities. Prepint. RIMS 293 (1979).

[12] M. KASHIWARA, T. OSHIMA: Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. Ann. of Maths 106, 145-200 (1977).

[13] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA: Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe. Inventiones Math. 46, 17-38 (1978).

[14] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA: Microhyperbolic systems. Acta. Math. 142, 1-55 (1979).

[15] Y. LAURENT: Deuxième microlocalisation. In lecture Notes in Physics n°126, 77-89 (1980).

[16] B. MALGRANGE: Sur les systèmes différentiels à coefficients constants. Sem. J. Leray. Collège de France 1961-1962.

[17] B. MALGRANGE: L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels. Sem. Bourbaki 522 (1977-78).

[18] B. MALGRANGE, M. LEJEUNE, L. BOUTET DE MONVEL: Séminaire "opérateurs différentiels et microdifférentiels". Grenoble (1975).

[19] T. MONTEIRO-FERNANDÈS: Variété 1-microcaractéristique pour les $\mathscr{E}_X$-modules cohérents. C.R. Acad. Sci. Paris t. 290 Série A, 787-790 (1980).

[20] T. MONTEIRO-FERNANDÈS: Problème de Cauchy microdifférentiel et théorèmes de propagation. C.R. Acad. Sci. Paris t. 290 Série A, 833-836 (1980).

[21] V.P. PALAMODOV: Linear differential operators with constant coefficients, Grundlehen 168, Springer-Verlag.

[22] F. PHAM: Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin. Progress in Math. 2. Birkhäuser (1979).

[23] M. SATO, T. KAWAÏ, M. KASHIWARA: Microfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math. 287, Springer Verlag, 265-529 (1973).

[24] J.P. SERRE: Algèbre locale et multiplicités. Lecture Notes in Math., 11 Springer Verlag, (1965).

[25] E. ANDRONIKOF : Systèmes déterminés et systèmes normaux d'équations aux dérivées partielles. C.R. Acad. Sci. Paris. Serie A, 257-260 (1981).

Pierre SCHAPIRA,
Département de Mathématiques,
C.S.P., Université Paris-Nord,
F-93430 Villetaneuse,
(France).