

Astérisque

GERARDO GONZALEZ-SPRINBERG

L'obstruction locale d'Euler et le théorème de Mac-Pherson

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 7-32

http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__7_0

© Société mathématique de France, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'OBSTRUCTION LOCALE D'EULER ET LE THÉORÈME DE MAC-PHERSON

par Gerardo GONZALEZ-SPRINBERG*

Le sujet de cet exposé est le théorème d'existence de classes de Chern pour les variétés singulières complexes de R. Mac-Pherson [6], et une formule algébrique pour l'obstruction locale d'Euler obtenue par J.L. Verdier et le rédacteur.

Dans cet exposé, X désigne une variété algébrique réduite sur \mathbb{C} . L'homologie utilisée ici est, sauf mention du contraire, l'homologie à support localement fini (de "Borel-Moore") et la cohomologie est à support compact. Si X est un espace compact et Y un sous-espace fermé on a donc $H_*(X, Y) = H_*(X-Y)$ et $H^*(X, Y) = H^*(X-Y)$.

1. Le théorème de Mac-Pherson.

Une fonction α définie sur X à valeurs dans \mathbb{Z} est constructible s'il existe une partition de X en ensembles constructibles X_i telle que α soit constante sur chaque X_i .

Le groupe abélien des fonctions constructibles sur X est noté $C(X)$. Si W est un fermé de X , on note $\mathbb{1}_W$ la fonction caractéristique de W .

1.1. PROPOSITION.- Il existe un unique foncteur covariant F des variétés complexes dans les groupes abéliens tel que $F(X) = C(X)$ et tel que si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre, alors $f_* : C(X) \rightarrow C(Y)$ vérifie :

$$f_*(\mathbb{1}_W)(p) = \chi(f^{-1}(p) \wedge W), \quad \forall p \in Y,$$

pour chaque sous-variété W de X , où χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique.

Démonstration.- Montrons d'abord que les fonctions caractéristiques des sous-

* Chercheur au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

variétés irréductibles de X forment une base sur \mathbb{Z} de $C(X)$. Soient $\alpha \in C(X)$ et $\{W_i\}$, $i = 1, \dots, k$ les composantes irréductibles de dimension maximum du support de α . Pour tout i notons η_i la valeur générale de α sur W_i , on a $\dim(\text{supp}(\alpha - \sum_{i=1}^k \eta_i \mathbb{1}_{W_i})) < \dim(\text{supp}(\alpha))$. D'où par récurrence sur la dimension du support le fait que les fonctions $\mathbb{1}_W$ (où W est irréductible) engendrent $C(X)$. Soient W_i , $1 \leq i \leq m$ des sous-variétés irréductibles deux à deux distinctes et n_i des entiers tels que $\sum_{i=1}^m n_i \mathbb{1}_{W_i} = 0$; en considérant la valeur générale de cette fonction en W_i , on a $n_i = 0$, d'où l'indépendance.

En conséquence, on peut écrire $\alpha = \sum_{i=1}^f n_i \mathbb{1}_{W_i}$ de façon unique, et on a $f_*(\alpha) = \sum_{i=1}^f n_i f_*(\mathbb{1}_{W_i})$, ce qui est uniquement déterminé par la condition sur f_* . On démontre la constructibilité de $f_*(\alpha)$ et la functorialité en utilisant une stratification de Y relative à f [9], l'additivité de χ (cohomologie à support compact) pour un objet stratifié et la multiplicativité de χ pour les fibrations.

1.2. THÉORÈME.- Il existe une transformation naturelle additive c_* de F dans l'homologie telle que si X est lisse, alors on a $c_*(\mathbb{1}_X) = c(X) \cap [X]$, où $c(X)$ est la classe de Chern totale du fibré tangent de X , et $[X]$ est la classe fondamentale d'homologie de X (ou sa classe d'orientation).

En fait, l'énoncé du théorème de Mac-Pherson est plus précis [6], car il donne une construction de c_* comme nous verrons plus tard.

On définit la classe de Chern-MacPherson d'une variété X comme étant $c_*(\mathbb{1}_X)$. Elle habite donc, non pas dans la cohomologie de X (comme c'est le cas pour la classe de Chern usuelle pour X lisse), mais dans l'homologie de X .

1.3. PROPOSITION.- La transformation naturelle c_* est unique.

Démonstration.- Soit $\alpha \in C(X)$. Montrons qu'il existe une famille de variétés lisses X_i , des entiers m_i et des applications propres $g_i : X_i \rightarrow X$ telles que $\alpha = \sum_{i=1}^m m_i g_{i*}(\mathbb{1}_{X_i})$. Soient W_j , $1 \leq j \leq k$, les composantes irréductibles de dimension maximum du support de α . Pour tout j , soit $g_j : X_j \rightarrow W_j$

une résolution de W_j (qui existe par la résolution de singularités de Hironaka), et soit m_j la valeur générale de α sur W_j . Alors on a

$$\dim(\text{supp}(\alpha - \sum_{j=1}^k m_j g_{j*} (\mathbb{1}_{X_j}))) < \dim(\text{supp}(\alpha)) ,$$

et on peut faire une récurrence sur la dimension du support.

En conséquence on a

$$c_*(\alpha) = \sum_i m_i g_{i*} c_*(\mathbb{1}_{X_i}) = \sum_i m_i g_{i*} (c(X_i) \cap [X_i]) ,$$

d'où l'unicité de c_* .

Nous allons présenter maintenant quelques constructions nécessaires pour l'énoncé précis et la démonstration du théorème de Mac-Pherson.

2. Transformé de Nash.

2.1. Soit X irréductible de dimension d , et supposons qu'il existe un plongement dans une variété lisse, $i : X \hookrightarrow N$. Soit $U \subset X$ l'ouvert des points lisses de X . Soient TN le fibré tangent de N et $\text{Grass}_d(i^*TN)$ la grassmannienne des d -plans de la restriction de TN à X . Soit φ la section de $\text{Grass}_d(i^*TN)$ définie naturellement sur U , qui associe à chaque point $u \in U$ son plan tangent.

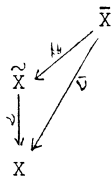
On appelle transformé de Nash de X l'adhérence de l'image de φ dans $\text{Grass}_d(i^*TN)$, et on le note \tilde{X} . Il existe un morphisme canonique $\gamma : \tilde{X} \rightarrow X$, induit par celui de $\text{Grass}_d(i^*TN)$ dans X ; en plus \tilde{X} est muni d'un fibré vectoriel de rang d qu'on va appeler fibré tangent de Nash et noter \tilde{T} qui est obtenu par restriction du fibré tautologique de la grassmannienne. Sur $v^{-1}(U)$, v est un isomorphisme, et $\tilde{T}|_{v^{-1}(U)}$ est isomorphe à $v^*(TU)$ par construction. Donc \tilde{T} est un prolongement du fibré tangent aux points lisses de X . Si X n'est pas plongeable dans une variété lisse, on fait cette construction localement et on recolle les morceaux.

2.2. Nous allons donner une construction plus intrinsèque et globale du transformé de Nash. Soit Ω_X^1 le faisceau des 1-formes différentielles de X et $\pi : \text{Grass}^d(\Omega_X^1) \rightarrow X$ le morphisme canonique de la grassmannienne des quotients localement libres de rang d de Ω_X^1 , dans X . Sur U , Ω_X^1 est localement libre de rang d , donc π est un isomorphisme de $\pi^{-1}(U)$ sur U . Alors, on définit \tilde{X} comme l'adhérence schématique dans $\text{Grass}^d(\Omega_X^1)$ de $\pi^{-1}(U)$. Sur \tilde{X} il existe un faisceau localement libre de rang d (restriction du faisceau tautologique de la grassmannienne) qu'on appelle fibré cotangent de Nash et on le note $\tilde{\Omega}$; c'est un quotient de $\nu^*\Omega_X^1$, où $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ est la restriction de π à \tilde{X} . Le dual de $\tilde{\Omega}$ est \tilde{T} . On peut faire aussi cette construction dans $\mathbb{P}^1(\Omega_X^d)$, car le morphisme de Plücker est un plongement fermé de $\text{Grass}^d(\Omega_X^1)$ dans $\mathbb{P}^1(\Omega_X^d)$. Le transformé de Nash est localement un éclatement (voir [4], [7], [8]).

2.3. Il sera utile dans certains cas de considérer un transformé de Nash "généralisé" \bar{X} qui est une variété munie des deux structures suivantes :

- 1) un morphisme birationnel sur X , $\bar{\nu} : \bar{X} \rightarrow X$.
- 2) un quotient localement libre de rang d , noté $\bar{\Omega}$, de $\bar{\nu}^*(\Omega_X^1)$.

Le transformé de Nash $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ muni de son fibré $\tilde{\Omega}$, qui a été construit en 2.2 a la propriété de minimalité suivante : soit $\bar{\nu} : \bar{X} \rightarrow X$ muni du fibré $\bar{\Omega}$ un transformé de Nash généralisé. Alors, il existe un morphisme $\mu : \bar{X} \rightarrow \tilde{X}$ qui factorise $\bar{\nu}$, tel que $\mu^*(\tilde{\Omega}) = \bar{\Omega}$.



Comme exemple de transformé de Nash généralisé, on peut considérer le normalisé du transformé de Nash minimal \tilde{X} , ou l'éclaté d'un sous-schéma de \tilde{X} , ou encore une résolution de \tilde{X} .

3. La classe de Mather-Chern.

3.1. Pour une variété lisse X , sa classe de Chern $c(X)$ est par définition la classe de Chern du fibré tangent TX . Pour une variété singulière X , il est naturel de considérer comme substitut du fibré tangent (qui n'existe que sur les points lisses), le fibré tangent de Nash \tilde{T} , qui n'est pas sur X , mais sur son transformé de Nash \tilde{X} .

DEFINITION.- La classe $c_M(X)$ de Mather-Chern de X est définie par $c_M(X) = v_*(c(\tilde{T}) \cap [\tilde{X}])$ où $v : \tilde{X} \rightarrow X$ est le transformé de Nash de X et où $[\tilde{X}]$ est la classe fondamentale d'homologie (ou la classe d'orientation) de \tilde{X} .

Remarque.- Si $\bar{v} : \bar{X} \rightarrow X$ est un transformé de Nash généralisé et \bar{T} le dual du fibré $\bar{\Omega}$, alors on a $c_M(X) = \bar{v}_*(c(\bar{T}) \cap [\bar{X}])$. En effet, soit $\mu : \bar{X} \rightarrow \tilde{X}$ le morphisme qui factorise \bar{v} (§2.3). Alors, on a

$$\mu_*(c(\bar{T}) \cap [\bar{X}]) = c(\tilde{T}) \cap [\tilde{X}] .$$

3.2. Soit $\alpha \in C(X)$, alors on peut écrire de façon unique $\alpha = \sum_1^l n_j \Pi_j$ (démonstration de 1.1).

Posons $c_M(\alpha) = \sum_1^l n_j \text{incl}_{j*} c_M(W_j)$, où $\text{incl}_j : W_j \hookrightarrow X$ est l'inclusion canonique. Or cette manière d'associer une classe d'homologie à une fonction constructible n'est pas une transformation naturelle.

Contre-exemple.- Soit $X = \{y^2 z = x^3\} \subset \mathbb{P}^2$ la courbe avec un point de rebroussement. En ce cas \tilde{X} est lisse et c'est l'éclatement de l'idéal jacobien de X .

On a $\tilde{X} \cong \mathbb{P}^1$. Soit $v : \tilde{X} \rightarrow X$ le morphisme de Nash ; on considère la fonction $\mathbb{1}_{\tilde{X}} \in C(\tilde{X})$. On va montrer que $v_* c_M(\mathbb{1}_{\tilde{X}}) \neq c_M v_*(\mathbb{1}_{\tilde{X}})$. On a

$$v_* c_M(\mathbb{1}_{\tilde{X}}) = v_* c_M(\tilde{X}) = v_*(c(T\mathbb{P}^1)) ,$$

or

$$\text{deg}(\Omega_{\mathbb{P}^1}^1) = -2 , \text{ donc } \text{deg } v_* c_M(\mathbb{1}_{\tilde{X}}) = 2 .$$

D'autre part, $\tilde{\Omega}$ est isomorphe à $v^* \Omega_X^1$ modulo la torsion, et la suite exacte

des différentielles fournit

$$0 \longrightarrow v^*\tilde{\Omega}_X^1/\text{Tors} \longrightarrow \tilde{\Omega}_X^1 \longrightarrow \tilde{\Omega}_X^1/X \longrightarrow 0$$

où $\tilde{\Omega}_X^1/X$ est un faisceau concentré au point $v^{-1}(p)$, où p est le point singulier, et de longueur 1. Donc $\deg \tilde{\Omega} = \deg(v^*\tilde{\Omega}_X^1/\text{tors}) = -3$ et par suite $\deg \tilde{T} = 3$. En conséquence,

$$\deg(c_M v_*(\tilde{\Pi}_X)) = \deg(c_M(\tilde{\Pi}_X)) = \deg(c_M(X)) = \deg(v_*(c(\tilde{T}) \cap [\tilde{X}])) = 3.$$

Remarque.- On voit sur cet exemple qu'en général on a $\tilde{\Omega} \neq \tilde{\Omega}_X^1$, même si \tilde{X} est lisse.

4. L'obstruction locale d'Euler.

4.1. Définition de Mac-Pherson ([6], §3).

Supposons X irréductible de dimension d , plongé dans une variété lisse N de dimension n . Soit $v: \tilde{X} \rightarrow X$ le transformé de Nash de X . Soit $p \in X$ et z_1, \dots, z_n des coordonnées locales dans N telles que $z_i(p) = 0$. Soit $\|z\|^2 = \sum z_i \bar{z}_i$; c'est une fonction à valeurs réelles, donc $d\|z\|^2$ est une différentielle \mathbb{R} -linéaire à valeurs réelles. Identifions le fibré \mathbb{R} -vectoriel des différentielles \mathbb{R} -linéaires à valeurs réelles avec le fibré \mathbb{R} -vectoriel sous-jacent au fibré \mathbb{C} -vectoriel des différentielles \mathbb{C} -linéaires à valeurs complexes. Cette identification induit sur le fibré \mathbb{R} -vectoriel sous-jacent à $\tilde{\Omega}$ une orientation qui est $(-1)^d$ fois l'orientation induite par la structure complexe. On considère la section r de $\tilde{\Omega}$ sur \tilde{X} , obtenue par restriction de $v^*d\|z\|^2$.

Soient B_ϵ la boule dans N de centre p et rayon ϵ , et S_ϵ son bord.

PROPOSITION.- Pour $\epsilon \neq 0$ assez petit, r ne s'annule pas sur $v^{-1}S_\epsilon$ (ou sur $v^{-1}(B_\epsilon - p)$).

Démonstration.- Soit $\tilde{X}_p = v^{-1}(p)$ la fibre au-dessus de p dans \tilde{X} , et

soit Z l'ensemble des zéros de r . On a $\tilde{X}_p \subset Z$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \tilde{X}_p \cap \overline{(Z - \tilde{X}_p)}$, où $\overline{(Z - \tilde{X}_p)}$ (adhérence de $Z - \tilde{X}_p$) est sous-analytique réel. Donc, par le lemme de Bruhat-Whitney, il existe une courbe analytique $\tilde{C} : [0, t] \longrightarrow \overline{(Z - \tilde{X}_p)}$ telle que $\tilde{C}(0) = x$ et $\tilde{C}(]0, t]) \subset Z - \tilde{X}_p$.

En projetant sur X , on obtient une courbe analytique C passant par p . Soit S une stratification de Whitney de X . Pour t assez petit non nul, $C(]0, t])$ est entièrement contenue dans une strate de S . Soit $p' \neq p$ un point de la courbe C . Alors la droite sécante pp' est orthogonale à un espace tangent limite $\pi_{p'}$ en p' (i.e. un point de $\tilde{X}_p \cap C$ qui se projette sur p'). Or, par la condition Λ de Whitney, $\pi_{p'}$ contient l'espace tangent à la strate en p' qui lui, contient la droite tangente à C en p' . Donc pp' serait orthogonal à la droite tangente à C en p' pour tout $p' \in C$, $p' \neq p$, ce qui est impossible.

L'obstruction à prolonger r comme section non nulle de $\tilde{\Omega}$ de $v^{-1}S_\epsilon$ à $v^{-1}B_\epsilon$, notée $Eu(\tilde{\Omega}, r)$ est une classe de cohomologie dans

$$H^{2d}(v^{-1}B_\epsilon, v^{-1}S_\epsilon; \mathbb{Z}) = H_C^{2d}(v^{-1}B_\epsilon - v^{-1}S_\epsilon)$$

car pour tout $x \in v^{-1}B_\epsilon$, $\tilde{\Omega}_x$ est un espace vectoriel de dimension (réelle) $2d$ orienté et on a donc canoniquement $\pi_i(\tilde{\Omega}_x - \{0\}) = 0$ pour $i < 2d-1$ et $\pi_{2d-1}(\tilde{\Omega}_x - \{0\}) = \mathbb{Z}$. Soit $[v^{-1}B_\epsilon, v^{-1}S_\epsilon]$ la classe fondamentale d'orientation dans $H_{2d}(v^{-1}B_\epsilon, v^{-1}S_\epsilon) = H_{2d}(v^{-1}B_\epsilon - v^{-1}S_\epsilon)$, image de $[\tilde{X}]$ par la flèche de restriction $H_{2d}(\tilde{X}) \longrightarrow H_{2d}(v^{-1}B_\epsilon - v^{-1}S_\epsilon)$.

DÉFINITION.- Le nombre local d'Euler de X en p , $Eu_p(X)$, est l'évaluation de la classe d'obstruction $Eu(\tilde{\Omega}, r)$ en la classe fondamentale $[v^{-1}B_\epsilon, v^{-1}S_\epsilon]$.

4.2. Résumons, en ayant les données suivantes, $D = (V, \partial V, \mathcal{L}, T, r)$ où ∂V est un sous-espace de V espace compact de dimension réelle $2d$, $\mathcal{L} \in H_{2d}(V, \partial V)$, T est un fibré vectoriel de rang réel $2d$ sur V et r une section de T qui ne s'annule pas sur ∂V , on a une classe d'obstruction bien déterminée

$\text{Eu}(T, r) \in H^{2d}(V, \partial V)$ et un nombre entier $\text{Eu}(D) = \langle \text{Eu}(T, r), \mathcal{O} \rangle$. On vérifie les propriétés suivantes de $\text{Eu}(T, r)$ et de $\text{Eu}(D)$:

1) Ils sont invariants si on remplace r par une section homotopiquement équivalente r' (par une homotopie qui ne s'annule pas sur ∂V).

2) Soient $D_i = (V_i, \partial V_i, \mathcal{O}_i, T_i, r_i)$, $i = 1, 2$ et $\pi : (V_1, \partial V_1) \rightarrow (V_2, \partial V_2)$ tel que $\pi_* \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$, $T_1 = \pi^* T_2$ et $r_1 = \pi^* r_2$. Alors $\pi^* \text{Eu}(T_2, r_2) = \text{Eu}(T_1, r_1)$ et $\text{Eu}(D_1) = \text{Eu}(D_2)$.

3) Si $\partial V = \emptyset$, alors on a $\text{Eu}(V, r) = \text{Eu}(T)$ où $\text{Eu}(T)$ est la classe d'Euler de T .

4) Soient $D_i = (V_i, \partial V_i, \mathcal{O}_i, T_i, r_i)$, $i = 1, 2$ et

$$D = (V_1 \times V_2, (\partial V_1 \times \partial V_2) \cup (\partial V_1 \times V_2), \mathcal{O}, T, r)$$

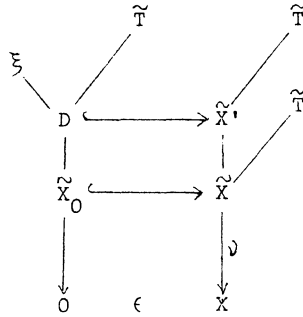
où $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, $T = T_1 \oplus T_2$, $r|_{V_1 \times \partial V_2} = (\bar{r}_1, r_2)$,
 $r|_{\partial V_1 \times V_2} = (r_2, \bar{r}_2)$ avec $\bar{r}_i|_{V_i} = r_i$, $i = 1, 2$.

Alors on a $\text{Eu}(T_1 \oplus T_2, r) = \text{Eu}(T_1, r_1) \times \text{Eu}(T_2, r_2)$ et $\text{Eu}(D) = \text{Eu}(D_1) \cdot \text{Eu}(D_2)$.

5) Soit $(V, \partial V, \mathcal{O}, T, r)$ et $0 \rightarrow N \rightarrow T \xrightarrow{f} Q \rightarrow 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels sur V telle que $f \cdot r$ ne s'annule pas sur ∂V . Alors 1), 2), 3) et 4) impliquent $\text{Eu}(T, r) = \text{Eu}(N) \cup \text{Eu}(Q, f \cdot r)$.

4.3. Une formule algébrique pour $\text{Eu}_p(X)$.

La construction de $\text{Eu}_p(X)$ est locale, - donc on peut supposer $X \subset \mathbb{C}^n$, $0 \in X$. Soient $v : \tilde{X} \rightarrow X$ le transformé de Nash de X , \tilde{T} le fibré tangent de Nash sur \tilde{X} et $\tilde{X}_0 = v^{-1}(0)$ la fibre sur 0 . Soient \tilde{X}' l'éclaté de \tilde{X}_0 dans \tilde{X} , et D le diviseur exceptionnel image inverse de \tilde{X}_0 . Sur D on a deux fibrés vectoriels : la restriction à D de l'image inverse de \tilde{T} (notée aussi \tilde{T}), et le fibré normal à D dans \tilde{X}' , noté ξ .



On pose $d = \dim X$, donc $\dim D = d - 1$.

THÉOREME.-
$$Eu_0(X) = \int_D c_{d-1}(\tilde{T} - \epsilon) \cap [D] \text{ où } c(\tilde{T} - \epsilon) = c(\tilde{T})/c(\epsilon) .$$

Démonstration. a) Soit E l'image inverse par ν

de la restriction à X du fibré tangent (trivial) de \mathbb{C}^n . Le

fibré \tilde{T} peut être considéré comme un sous-fibré de E (§2). Considérons la section "radiale" $P \mapsto \overrightarrow{OP}$, et son image inverse ρ par ν , qui est une section de E sur \tilde{X} . En munissant E d'une forme hermitienne s , on peut projeter ρ sur \tilde{T} et on obtient une section σ_s de \tilde{T} . Alors on a $Eu(\tilde{\Omega}, r) = Eu(\tilde{T}, \sigma_s)$ car la forme s induit un isomorphisme entre les fibrés réels orientés (sous-jacents) \tilde{T} et $\tilde{\Omega}$ qui transforme σ_s en r , l'orientation de $\tilde{\Omega}$ étant celle qui provient de l'identification du cotangent complexe au cotangent réel, et l'orientation de \tilde{T} étant celle qui provient de la structure complexe. On prendra garde au fait que l'orientation de $\tilde{\Omega}$, provenant de la structure complexe, est $(-1)^d$ fois l'orientation ici considérée.

b) Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que σ_s ne s'annule pas sur $\nu^{-1}S_\epsilon$ (proposition du §4.1). On va poser $V = \nu^{-1}B_\epsilon$ et $\partial V = \nu^{-1}S_\epsilon$. Pour calculer $Eu(\tilde{T}, \sigma_s)$ on considère la classe d'obstruction universelle ω de \tilde{T} , définie par la section canonique de $P_{\tilde{T}}^* \tilde{T}$, $v \mapsto (v, v)$, où $v \in \tilde{T}$, et $P_{\tilde{T}} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{X}$ est la projection du fibré \tilde{T} sur \tilde{X} . La classe ω appartient à $H^{2d}(\tilde{T}, \tilde{T}-\tilde{X}) = H_X^{2d}(\tilde{T})$ (en identifiant \tilde{X} avec la section nulle de \tilde{T}), et elle se restreint à une classe dans $H_V^{2d}(\tilde{T}|_V)$ notée aussi ω . La section σ_s de \tilde{T} envoie

la paire $(V, V - \tilde{X}_0)$ dans la paire $(\tilde{T}|_V, \tilde{T}|_{V-V})$, et induit

$$\sigma_S^* : H_V^{2d}(\tilde{T}|_V) \longrightarrow H_{\tilde{X}_0}^{2d}(V) .$$

Si $\epsilon \neq 0$ est assez petit, V est un voisinage de \tilde{X}_0 tel que $V - \tilde{X}_0$ se rétracte sur son bord ∂V . Alors $H_{\tilde{X}_0}^*(V) = H^*(V, V - \tilde{X}_0)$ est isomorphe à $H^*(V, \partial V)$. Considérons $\sigma_S^* \omega \in H_{\tilde{X}_0}^{2d}(V) \cong H^{2d}(V, \partial V)$; ce n'est autre que $\text{Eu}(\tilde{T}, \sigma_S)$, par la propriété universelle de ω . Or on a $H_{\tilde{X}_0}^{2d}(V) \simeq H_{\tilde{X}_0}^{2d}(\tilde{X})$ par excision, donc $\sigma_S^* \omega$ peut être considérée comme appartenant à $H_{\tilde{X}_0}^{2d}(\tilde{X})$.

En conséquence, on a

$$(1) \quad \text{Eu}_0(X) = \text{deg}(\sigma_S^* \omega \cap [V, \partial V]) = \text{deg}(\sigma_S^* \omega \cap [\tilde{X}]) .$$

c) Le pas suivant de la démonstration est de construire une variété au-dessus de \tilde{X} sur laquelle on va avoir une section algébrique de \tilde{T} , car σ_S ne l'est pas. On va scinder le fibré E comme somme de \tilde{T} et d'un fibré supplémentaire, non pas à l'aide d'une forme hermitienne s , mais algébriquement. Plus précisément, considérons la suite exacte de fibrés vectoriels sur

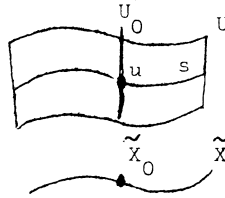
$$\tilde{X} : 0 \longrightarrow \tilde{T} \longrightarrow E \xrightarrow{j} Q \longrightarrow 0, \text{ où } Q = E/\tilde{T}, \text{ rang}(\tilde{T}) = d \text{ et } \text{rang}(E) = n .$$

Dans la grassmannienne $\text{Grass}_{n-d}(E)$ dont la fibre sur $x \in \tilde{X}$ est formée par les sous-espaces de dimension $n - d$ de E_x , considérons l'ouvert U dont la fibre sur $x \in \tilde{X}$ est formée par les sous-espaces supplémentaires à \tilde{T}_x dans E_x , c'est-à-dire les applications a de Q dans E telles que $j \circ a = \text{id}_Q$, ou encore les applications de Q dans \tilde{T} . La variété U est munie d'une projection $p : U \longrightarrow \tilde{X}$ dont les fibres sont des espaces affines de dimension $d(n-d)$ sur \mathbb{C} ; c'est un espace principal homogène. Sur U considérons les images inverses de E , de sa section ρ et de \tilde{T} , par $p : U \longrightarrow \tilde{X}$ (qu'on désignera par les mêmes notations).

Soit S le fibré supplémentaire de \tilde{T} , obtenu par restriction à U du fibré tautologique de la grassmannienne. Soit σ (resp. η) la projection de ρ sur \tilde{T} (resp. S). On a :

$$E = \tilde{T} \oplus S, \quad \rho = \sigma + \eta .$$

Soit $U_0 = p^{-1}(\tilde{X}_0)$.



PROPOSITION.- Soient $u \in U_0$, $\epsilon > 0$, alors il existe un voisinage W de u dans U tel que, pour tout $w \in W$, on ait $\|\eta(w)\| < \epsilon \|\sigma(w)\|$.

Démonstration.

Un point u de U_0 représente un point de \tilde{X}_0 , c'est-à-dire un espace tangent limite à l'origine T , et un espace supplémentaire S dans E . Fixons une forme hermitienne s qui donne cette décomposition de E , i.e. telle que $S = T^\perp$. Alors s induit une section de U qui passe par u . Il suffit de démontrer la proposition sur cette section car U est un espace principal homogène ; et on peut identifier \tilde{X} avec cette section. Donc on est ramené à démontrer sur \tilde{X} l'affirmation suivante : soient $x \in \tilde{X}_0$, $\epsilon > 0$, alors il existe un voisinage \tilde{V} de x dans \tilde{X} , tel que, pour tout $v \in \tilde{V}$, on ait :

$$(*) \quad \|\eta_s(v)\| < \epsilon \|\sigma_s(v)\|$$

où σ_s et η_s sont les composantes de ρ déterminées par s .

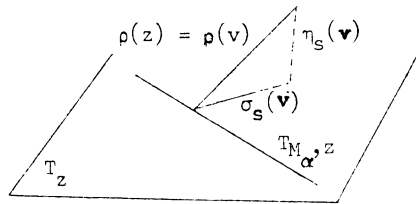
Soit $\{M_\alpha\}$ une stratification de Whitney de X . Alors il suffit de montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans X , tel que pour tout α , et pour tout $z \in M_\alpha \cap V$, on ait $\text{tg}^2(Oz, T_{M_\alpha, z}) < \epsilon^2$, où $T_{M_\alpha, z}$ est l'espace tangent à la strate M_α au point z .

Nous allons le démontrer par l'absurde. Supposons qu'il existe un α tel que pour chaque voisinage V de 0 il existe $z \in M_\alpha \cap V$ tel que $\text{tg}^2(Oz, T_{M_\alpha, z}) \geq \epsilon^2$. Considérons l'ensemble semi-analytique réel $R = \{z \in M_\alpha \mid \text{tg}^2(Oz, T_{M_\alpha, z}) \geq \epsilon^2\}$. Alors 0 appartient à l'adhérence \bar{R} de R . Par le lemme de Bruhat-Whitney, il existe une courbe analytique réelle $C : [0, t] \rightarrow \bar{R}$, telle que $C(0) = 0$ et $C(]0, t]) \subset R$. Donc cette courbe aurait la propriété suivante : en tout point $P \neq 0$, $P \in C$, $\text{tg}^2(OP, \text{tg}_P) \geq \epsilon^2$ ce qui est impossible, car la tangente tend vers 0 quand P tend vers

l'origine. On va montrer que par suite on a $(*)$. En effet, la donnée de $\mathbf{v} \in \tilde{X}$ équivaut à la donnée de $\mathbf{z} = v(\mathbf{v}) \in X$ et d'un espace \tilde{T}_z limite d'espaces tangents aux points lisses voisins. Or, par la condition A de Whitney, on a $\tilde{T}_z \supset T_{M_{\alpha, z}}$, donc on a

$$|\text{tg}(0z, T_{M_{\alpha, z}})| \geq |\text{tg}(0z, \tilde{T}_z)| = \|\eta_s(\mathbf{v})\| / \|\sigma_s(\mathbf{v})\| ,$$

ce qui implique (\spadesuit) .



COROLLAIRE 1 (de la proposition).- L'ensemble U_0 est ouvert et fermé dans l'ensemble Z de zéros de σ .

Démonstration.- En effet, U_0 est l'ensemble de zéros de ρ , et $\rho = 0$ implique $\sigma = 0$. Montrons que U_0 est ouvert, par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite u_i contenue dans $Z - U_0$ qui converge vers $u \in U_0$. Par la proposition précédente, pour i assez grand, $\sigma(u_i) = 0$ implique $\eta(u_i) = 0$. Or $\rho = \sigma + \eta$, donc $\rho(u_i) = 0$, c'est-à-dire $u_i \in U_0$ pour i assez grand et on a une contradiction.

d) Poursuivons la démonstration du théorème. Soit $Z' = Z - U_0$ la réunion des composantes connexes de Z (les zéros de σ) disjointes de U_0 . Posons $W = U - Z'$; c'est un voisinage ouvert de U_0 dans U , par le corollaire 1. Notons aussi p la restriction à W de $p : U \rightarrow \tilde{X}$. Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 U_0 & \hookrightarrow & W_V & \hookrightarrow & W & \longleftarrow & p^* \tilde{T} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \pi \\
 \tilde{X}_0 & \hookrightarrow & V & \hookrightarrow & \tilde{X} & \longleftarrow & \tilde{T}
 \end{array}$$

où $V = \nu^{-1}B_e$ (voir b)), et $W_V = p^{-1}(V)$.

Alors on a des morphismes de paires d'espaces :

$$(W_V, W_V - U_0) \xrightarrow{p} (V, V - \tilde{X}_0) \xrightarrow{\sigma_s} (\tilde{T}, \tilde{T} - \tilde{X})$$

et par suite $p^*\sigma_s^*\omega \in H_{U_0}^{2d}(W_V) \cong H_{U_0}^{2d}(V)$ (par excision).

Donc

$$(2) \quad p^*(\sigma_s^*\omega \cap [\tilde{X}]) = p^*\sigma_s^*\omega \wedge [W] \in H_{2d(n-d)}(U_0) \quad .$$

Par ailleurs, on a des morphismes de paires d'espaces :

$$(W, W - U_0) \xrightarrow{\sigma} (p^*\tilde{T}|_W, p^*\tilde{T}|_W - W) \xrightarrow{\pi} (\hat{T}, \hat{T} - \tilde{X})$$

d'où une classe $\sigma^*\pi^*\omega \in H_{U_0}^{2d}(W)$.

Montrons que $p^*\sigma_s^*\omega = \sigma^*\pi^*\omega$. Notons $s : \tilde{X} \rightarrow U$ la section induite par la forme hermitienne, et $s|_V$ sa restriction à V . La paire $(V, V - \tilde{X}_0)$ est envoyée dans la paire $(W, W - U_0)$ par $s|_V$, ce qui induit l'isomorphisme $(s|_V)^* : H_{U_0}^{2d}(W) \xrightarrow{\sim} H_{\tilde{X}_0}^{2d}(V)$, car on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_{U_0}^{2d}(W) & \xrightarrow{\sim} & H_{U_0}^{2d}(U) \\ \downarrow (s|_V)^* & & \downarrow s^* \\ H_{\tilde{X}_0}^{2d}(V) & \xrightarrow{\sim} & H_{\tilde{X}_0}^{2d}(\tilde{X}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des excisions.

En fait $(s|_V)^*$ est l'inverse de p^* , donc l'égalité $p^*\sigma_s^*\omega = \sigma^*\pi^*\omega$ est équivalente à l'égalité $\sigma_s^*\omega = (s|_V)^*\sigma^*\pi^*\omega$. Or on a $\sigma_s^* = (s|_V)^*\sigma^*\pi^*$ à cause de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\sigma} & p^*\tilde{T} \\ \uparrow s|_V & & \downarrow \pi \\ V & \xrightarrow{\sigma_s} & \tilde{T} \end{array}$$

d'où l'égalité qu'on voulait démontrer.

En conséquence on a :

$$(3) \quad p^* \sigma_S^* \omega \cap [W] = \sigma^* \pi^* \omega \cap [W]$$

et aussi par projection

$$(4) \quad \sigma_* (\sigma^* \pi^* \omega \cap [W]) = \pi^* \omega \cap [\sigma(W)] .$$

Cette dernière classe est donc le cap produit de la classe fondamentale de cohomologie de W avec la classe fondamentale d'homologie de $\sigma(W)$; et on sait que c'est la classe d'homologie associée au cycle intersection $[W \cdot_{\sigma} W]$ dans $A.(W \cap \sigma(W))$ ([1] §VI), où on considère W plongé dans $p^* \tilde{T}$ par la section nulle, et où $A.()$ désigne le groupe de Chow des cycles algébriques modulo équivalence rationnelle (voir [3]). On a donc

$$(5) \quad \pi^* \omega \cap [\sigma(W)] = [W \cdot_{\sigma} W] .$$

e) On dispose d'une formule algébrique pour calculer ce cycle intersection ([2]) :

la variété W plongée dans $p^* \tilde{T}$ par la section nulle est localement intersection complète [11], et son fibré normal est aussi $p^* \tilde{T}$. Le schéma intersection $W \cap \sigma(W)$ est défini par $\sigma = 0$ dans W , on va le noter W_0 . La dimension de W est $d + d(n-d)$ et sa codimension dans $p^* \tilde{T}$ est d .

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\sigma} & p^* \tilde{T} \\ \uparrow & & \uparrow i \\ W_0 & \hookrightarrow & W \end{array}$$

Alors on a

$$(6) \quad [W \cdot_{\sigma} W] = (c(p^* \tilde{T}|_{W_0}) \cap s(W_0, W))_{d(n-d)} ,$$

i.e. la composante de dimension $d(n-d)$ dans $A.(W_0)$ du cap produit de la classe de Chern totale de la restriction de $p^* \tilde{T}$ à W_0 avec la classe de Segre relative de W_0 dans W . Cette dernière classe est définie par $s(W_0, W) = g_* (c(N)^{-1} \cap [\bar{W}_0])$, où $g : \bar{W} \rightarrow W$ est l'éclatement de W de centre W_0 , et où $c(N)$ est la classe de Chern totale du fibré normal N au diviseur $\bar{W}_0 = g^{-1}(W_0)$ dans \bar{W} ([2]).

COROLLAIRE 2 (de la proposition). - Avec les notations précédentes, on a

$$s(W_0, W) = s(U_0, U) .$$

Démonstration. - Soit $I = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ (resp. $J = (\rho_1, \dots, \rho_n)$) l'idéal de défi-

inition de W_0 (resp. U_0), où σ_i (resp. ρ_i) est la i -ème composante de σ (resp. ρ).

Soit $f: \bar{W} \rightarrow W$ le normalisé de l'éclaté de W_0 dans W . Posons $\bar{I} = f^*I = (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n)$ (resp. $\bar{J} = f^*J = (\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_n)$), où $\bar{\sigma}_i = f^*\sigma_i$ (resp. $\bar{\rho}_i = f^*\rho_i$). On va montrer que \bar{I} est égal à \bar{J} . D'une part on a $I \subset J$, car $\sigma = 0$ implique $\rho = 0$; donc on a $I \subset \bar{J}$. D'autre part, puisque $\rho = \sigma + \eta$ et que $\|\eta\| < \epsilon$ dans un voisinage de U_0 , on a $|\rho_i| < (1 + \epsilon) \sum_{j=1}^n |\sigma_j|$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit g un générateur (local) de \bar{I} (qui est inversible). Alors ρ_i/g est une fonction localement bornée pour tout i , donc holomorphe car \bar{W} est normal. Par suite, on a $\bar{J} \subset \bar{I}$, d'où l'égalité.

Par ailleurs, les classes de Segre relatives sont invariantes par morphismes birationnels (prop. 3.2 de [2]). Donc on a

$$s(U_0, W) = f_* s(\bar{U}_0, \bar{W}) = f_* s(\bar{U}_0, W) = s(W_0, W),$$

où $\bar{U}_0 = \bar{W}_0$ est le diviseur défini par $\bar{J} = \bar{I}$. Finalement, comme U_0 est aussi fermé dans U , on a $s(U_0, W) = s(U_0, U)$, d'où le corollaire.

Il résulte du corollaire

$$(7) \quad [W, \sigma, W] = (c(p^*\tilde{T}|_{U_0}) \cap s(U_0, U))_{d(n-d)}.$$

Pour finir la démonstration du théorème remarquons que $s(U_0, U) = p^*s(\tilde{X}_0, \tilde{X})$ et par suite

$$(8) \quad [W, \sigma, W] = p^*(c(\tilde{T}|_{\tilde{X}_0}) \cap s(\tilde{X}_0, \tilde{X}))_0.$$

Comme p^* est un isomorphisme car p est une fibration principale homogène, il résulte des formules (1) à (8) que

$$Eu_0(X) = \deg(c(\tilde{T}|_{\tilde{X}_0}) \cap s(\tilde{X}_0, \tilde{X})).$$

Par définition de la classe de Segre relative, on a $s(\tilde{X}_0, \tilde{X}) = \tilde{\alpha}_*(c(\xi)^{-1} \cap [D])$, où $\tilde{\alpha}: \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ est l'éclaté de \tilde{X}_0 dans \tilde{X} et ξ est le fibré normal du diviseur exceptionnel D . La dimension de D est $d-1$. Notons aussi \tilde{T} l'image inverse de \tilde{T} par $\tilde{\alpha}$, et sa restriction à D . Alors on a

$$\deg(c(\tilde{T}) \cap s(\tilde{X}_0, \tilde{X})) = \deg(c(\tilde{T}) \cap \tilde{\alpha}_*(c(\xi)^{-1} \cap [D])) =$$

$$= \deg(c(\tilde{T}) \cup c(\xi)^{-1} \cap [D]) = \deg(c_{d-1}(\tilde{T} - \xi) \cap [D]) \quad \text{c.q.f.d.}$$

4.4. Quelques propriétés.

4.4.1. Le nombre local d'Euler $Eu_0(X)$ est indépendant du transformé de Nash (généralisé) considéré pour sa construction. Plus précisément, soient

$\bar{v} : \bar{X} \rightarrow X$ (resp. $v : \tilde{X} \rightarrow X$) un transformé de Nash généralisé (resp. le transformé de Nash minimal), $\bar{X}_0 = \bar{v}^{-1}(0)$ (resp. $\tilde{X}_0 = v^{-1}(0)$) la fibre au-dessus de 0 et \bar{D} (resp. D) le diviseur exceptionnel dans l'écclaté $\bar{\lambda} : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ de \bar{X}_0 dans \bar{X} (resp. dans l'écclaté $\tilde{\lambda} : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ de \tilde{X}'_0 dans \tilde{X}). Notons $\bar{\xi}$ (resp. ξ) le fibré normal à \bar{D} (resp. D). Finalement, soit \bar{T} (resp. \tilde{T}) le fibré tangent de Nash de \bar{X} (resp. \tilde{X}) ; on désignera avec la même notation \bar{T} (resp. \tilde{T}) et son image inverse par $\bar{\lambda}$ (resp. $\tilde{\lambda}$) et sa restriction à \bar{D} (resp. D).

PROPOSITION.- Avec les notations précédentes, on a

$$Eu_0(X) = \deg(c_{d-1}(\bar{T} - \bar{\xi}) \cap [\bar{D}]) \quad ,$$

où d est la dimension de X .

Démonstration.- Il existe un morphisme $\mu : \bar{X} \rightarrow \tilde{X}$ tel que $\mu^* \tilde{T} = \bar{T}$ et $\bar{v} = v \circ \mu$, et un morphisme $\mu' : \bar{X}' \rightarrow \tilde{X}'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}' & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \bar{X} \\ \downarrow \mu' & & \downarrow \mu \\ \tilde{X}' & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & \tilde{X} \end{array}$$

En conséquence on a :

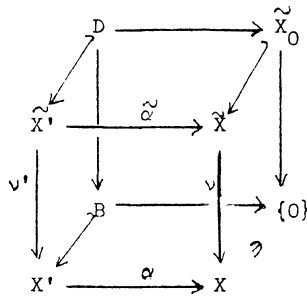
$$\mu'_*(c(\bar{T} - \bar{\xi}) \cap [\bar{D}]) = c(\tilde{T} - \xi) \cap [D] \quad .$$

Donc la proposition résulte du théorème du §4.3.

4.4.2. La construction du nombre local d'Euler $Eu_0(X)$ est locale, et on sait que le transformé de Nash $v : \tilde{X} \rightarrow X$ est localement un écclatement (§2).

Notons J un idéal dont l'écclaté est \tilde{X} (en supposant X un voisinage conve-

nable de 0). Considérons par ailleurs l'idéal maximal m du point 0 . Alors l'idéal de $\tilde{X}_0 = v^{-1}(0)$ est $m \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ et son éclatement est par définition \tilde{X}' , soit $\tilde{\alpha} : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ le morphisme correspondant, et $D \subset \tilde{X}'$ le diviseur exceptionnel. D'autre part, considérons l'éclaté de $\alpha : X' \rightarrow X$ de m (i.e. du point 0) dans X , et soit B le diviseur exceptionnel correspondant (qui est la "base" du cône tangent CT_0 en 0 , c'est-à-dire le schéma projectif $\mathbb{P}CT_0$ associé à l'algèbre graduée de CT_0). Alors \tilde{X}' est aussi l'éclaté de $J_0^1 X'$ dans X' ; notons $v' : \tilde{X}' \rightarrow X'$ le morphisme correspondant. On a le diagramme commutatif suivant :



Avec les notations précédentes on a la

PROPOSITION.- a) Soit ξ (resp. ξ') le fibré normal à D (resp. B) . Alors, on a $\xi = v'^* \xi'$.

b) Il existe un ouvert dense U de B tel que v' induise un isomorphisme de $[v'^{-1}(U)]_{\text{red}}$ sur U_{red} .

En conséquence pour chaque composante irréductible Z de B , il existe une seule composante irréductible \tilde{Z} de D telle que \tilde{Z}_{red} soit birationnellement isomorphe à Z_{red} .

c) Soit m (resp. \tilde{m}) la multiplicité de Z (resp. \tilde{Z}) , i.e. son coefficient dans le cycle fondamental de B (resp. D) . Alors on a $m = \tilde{m}$.

Démonstration.

L'affirmation a) résulte du fait que D est l'image inverse par v' de B .

Pour démontrer b), démontrons d'abord que étant donné un point p de D_{red} , $\tilde{\alpha}(p) = T$ sa projection sur \tilde{X}_0 qui est un plan tangent limite en 0 , et $v'(p) = \ell$ sa projection sur B qui est une génératrice de CT_0 , alors il existe une suite x_n dans X_{reg} qui tend vers 0 , telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n, X) = T$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{Ox}_n = \ell$ (où \overline{Ox}_n est la sécante qui porte 0 et x_n) : avec les notations du §4.2, considérons le sous-fibré de rang 1 du fibré trivial E , défini sur $\tilde{X} - \tilde{X}_0$ par la section radiale ρ . Le schéma \tilde{X}_0 est défini par $\rho = 0$. Alors l'ensemble sous-jacent à la fibre exceptionnelle D de l'écèlement de \tilde{X}_0 dans \tilde{X} peut être regardé comme étant l'ensemble des positions limites des sécantes données par ρ . C'est-à-dire, plus précisément, qu'étant donné $p \in D_{\text{red}}$, il existe une suite dans $\tilde{X} - \tilde{X}_0$ de plans tangents limites T_n en des points y_n de $X - \{0\}$ (avec $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T = \tilde{\alpha}(p)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{Oy}_n = \ell = v'(p)$. Par ailleurs, pour chaque T_n il existe une suite de points dans X_{reg} z_n^m telle que $\lim_{m \rightarrow \infty} z_n^m = y_n$ et $\lim_{m \rightarrow \infty} T(z_n^m, X) = T_n$.

Donc on peut construire une suite de points dans X_{reg} , $x_n = z_n^{m(n)}$ qui tend vers 0 telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{Ox}_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n, X) = T$.

Or, par un résultat d'Hironaka (lemme 1.6 et Th. 1.7 de [5]) on sait qu'il existe un ouvert régulier dense U de B tel que si $\ell \in U_{\text{red}}$ est une génératrice du cône CT_0 et x_n est une suite dans X_{reg} qui tend vers 0 avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{Ox}_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n, X) = T$, alors on a que T est le plan tangent au cône tangent CT_0 le long de ℓ .

Soit $\psi : U_{\text{red}} \rightarrow \tilde{X}_0$ l'application qui associe à chaque $\ell \in U$ l'espace tangent au cône CT_0 le long de la génératrice ℓ (qu'on peut identifier avec l'espace tangent à B en ℓ) ; il appartient à \tilde{X}_0 car on sait que la variété duale \check{B}_{red} de B_{red} est contenue dans \tilde{X}_0 (Th. 1.5 de [5]). En conséquence on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 D \supset (v'^{-1}(U))_{\text{red}} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{X}_0 \\
 \downarrow v' & & \downarrow \psi \\
 B \supset U_{\text{red}} & \xrightarrow{\psi} &
 \end{array}$$

On voit que $(v^{-1}(U))_{\text{red}}$ peut être considéré comme étant le graphe de l'application ψ , d'où l'affirmation b).

Pour démontrer c), on utilisera le lemme suivant :

LEMME.— Soient Y et Y' deux schémas intègres noethériens, et $f : Y' \rightarrow Y$ un morphisme fini birationnel. Soient Z un diviseur irréductible de Y et Z_1, \dots, Z_n les composants irréductibles de $f^{-1}(Z)$. Notons $m(Z)$ (resp. $m(Z_i)$, $i = 1, \dots, n$) la multiplicité de Z (resp. de Z_i , $i = 1, \dots, n$), et d_i le degré générique de $(D_i)_{\text{red}}$ sur D_{red} ($i = 1, \dots, n$). Alors on a

$$m(D) = \sum_{i=1}^n d_i m(D_i) .$$

Démonstration.— On peut supposer Y et Y' affines ; soit B (resp. B') l'anneau de Y (resp. Y'). Soit A l'anneau local de X au point générique de D , et soit $A' = A \otimes_B B'$. Soit encore $\delta \in A$ l'équation de D . Alors on a le diagramme commutatif suivant, avec lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & N & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A'/A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow & & \\
 & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A'/A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & A/\delta A & \longrightarrow & A'/\delta A' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

On en déduit la suite exacte

$$(*) \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow A/\delta A \longrightarrow A'/\delta A' \longrightarrow K \longrightarrow 0 .$$

La multiplicité de D est par définition la longueur $l_{g_A} A/\delta A$ de $A/\delta A$ sur A .

La suite exacte (*) entraîne :

$$\lg_A A/\delta A = \lg_A A'/\delta A + \lg_A N - \lg_A K .$$

Or, le noyau N et le conoyau K ont la même longueur car on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A'/A \longrightarrow A'/A \longrightarrow K \longrightarrow 0 ,$$

où A'/A est de longueur finie car f est birationnel. Donc on a $\lg_A A/\delta A = \lg_A A'/\delta A'$.

Par ailleurs, soit A'_i l'anneau local au point générique de D_i , et $\delta_i \in A'_i$ l'équation de D_i ($i = 1, \dots, n$) . Alors, on a $A'/\delta A' = \bigoplus A'_i/\delta_i A'_i$, donc

$$\lg_A A'/\delta A' = \sum_i \lg_{A'_i} A'_i/\delta_i A'_i = \sum_i d_i \cdot \lg_{A'_i} A'_i/\delta_i A'_i ,$$

où $d_i = [k(A'_i) : k(A)]$ est le degré générique de $(D_i)_{\text{red}}$ sur D_{red} .

Donc on a bien

$$m(D) = \lg_A A/\delta A = \sum_i d_i \cdot \lg_{A'_i} A'_i/\delta_i A'_i = \sum_i d_i m(D_i) .$$

Pour achever la démonstration de l'affirmation c) de la proposition, il suffit de remarquer qu'on est bien dans la situation du lemme précédent en considérant un ouvert de X' , qui coupe une seule composante irréductible Z du diviseur B en un ouvert dense U de Z pour lequel on ait b). En ce cas, on a une seule composante irréductible \tilde{Z} au-dessus de Z et avec degré générique 1 sur Z , d'où $m = \hat{m}$. C.Q.F.D.

Remarque.- On peut distinguer deux types de composantes irréductibles de D : celles qui se contractent par ν' en des sous-schémas immergés de B et celles dont l'image par ν' a la même dimension.

Pour ces dernières, on sait par la proposition précédente qu'elles ont la même multiplicité que leurs images et que les variétés réduites sous-jacentes à ces dernières sont birationnellement isomorphes à leurs images.

4.4.3 PROPOSITION.- Sur le schéma réduit D_{red} sous-jacent à D , le fibré normal ξ est un sous-fibré du fibré tangent de Nash \tilde{T} .

Démonstration.

Soit $\tilde{\alpha} : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ l'éclatement de \tilde{X}'_0 dans \tilde{X} . Soit F le sous-fibré de rang 1 de E , défini sur $\tilde{X} - \tilde{X}'_0$ par la section "radiale" ρ de E , qui ne s'annule pas sur $\tilde{X} - \tilde{X}'_0$ (§4.3). On peut regarder ξ comme la restriction à D du prolongement à \tilde{X}' tout entier de $(\tilde{\alpha}|_{\tilde{X}' - D})^*F$, prolongement obtenu en éclatant le schéma $\{\rho = 0\} = \tilde{X}'_0$. Autrement dit, la fibre $\tilde{\alpha}^{-1}(x)$ au-dessus de $x \in \tilde{X}'_0$ est l'ensemble des positions limites des sécantes données par $\rho(x_n)$ où $\{x_n\}$ est une suite de points dans $\tilde{X} - \tilde{X}'_0$ qui tend vers x . En ayant fixé une forme hermitienne s dans le fibré trivial E , on peut décomposer E comme somme directe de \tilde{T} et d'un fibré supplémentaire. On obtient une section σ_s de \tilde{T} en projetant ρ sur \tilde{T} et une section η_s du fibré supplémentaire ; $\rho = \sigma_s + \eta_s$. Par la proposition du §4.3, étant donné $\epsilon > 0$, il existe un voisinage \tilde{V} de x dans \tilde{X} tel qu'on ait

$$(*) \quad \|\eta_s(v)\| < \epsilon \|\sigma_s(v)\|, \text{ pour tout } v \in \tilde{V}.$$

Nous allons montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n) / \|\rho(x_n)\|$ appartient à \tilde{T} . Pour n assez grand $\|\sigma(x_n)\| \neq 0$, donc c'est équivalent de considérer $\rho(x_n) / \|\sigma(x_n)\|$ à la place de $\rho(x_n) / \|\rho(x_n)\|$. Or l'inégalité (*) entraîne

$$\|\rho(x_n) - \sigma(x_n)\| / \|\sigma(x_n)\| < \epsilon,$$

donc on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n) / \|\sigma(x_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n) / \|\sigma(x_n)\|,$$

et ce dernier appartient à \tilde{T} d'où la proposition (voir aussi [10]).

4.5. Exemples.

1. Soit p un point lisse de X , donc on peut supposer $X = \mathbb{C}^d$. Alors on a $\tilde{X} = X$, $\tilde{T} = T$ est le fibré tangent (trivial) de \mathbb{C}^d , $D = \tilde{X}'_0 = \mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{C})$, et $\xi = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{C})}(-1)$; Donc on a

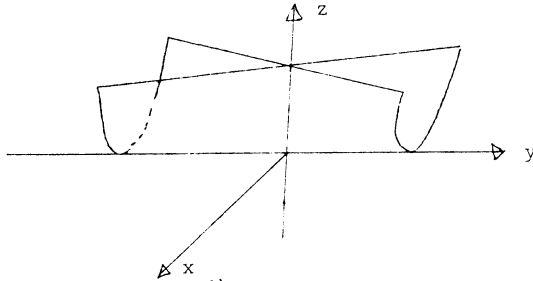
$$Eu_p(X) = \int_D c_{d-1}(\tilde{T} - \xi) \cap [D] = \int_D (-1)^{d-1} c_1^{d-1}(\xi) \cap [D] = 1.$$

2. Soient C une courbe et $p \in C$. Alors, pour calculer $Eu_p(\mathbb{C})$ on peut

considérer son transformé de Nash désingularisé \bar{C} (par 4.4.1), i.e. sa résolution. Soit D le diviseur exceptionnel. Alors on a

$$Eu_p(C) = \int_D [D] = \text{multiplicité de } C \text{ en } p .$$

3. Soit $X = \{x^2 = y^2z\} \subset \mathbb{C}^3$, le parapluie de Whitney.



Le transformé de Nash \tilde{X} est dans ce cas l'éclatement de l'idéal jacobien. On trouve que \tilde{X} est une surface lisse (qui n'est pas la résolution minimale de X).

Calculons le nombre d'Euler à l'origine, $Eu_0(X)$. La fibre \tilde{X}_0 au-dessus de 0 est une droite projective avec un point immergé de longueur 2. Ceci correspond à la description géométrique suivante : la droite projective représente le pinceau des plans qui contiennent l'axe Oy , et le point immergé est le plan "double" d'équation $x^2 = 0$ (qui est d'ailleurs le cône tangent en 0). Le diviseur exceptionnel D dans l'éclaté \tilde{X} de \tilde{X}_0 dans \tilde{X} est formé de deux droites projectives qui se coupent en un point ; l'une d'elles est le transformé strict de \tilde{X}_0 , et l'autre est "double" (n'est pas réduite) et se projette sur le point immergé de X_0 . La base du cône tangent $B = \text{FCT}_0$ est aussi une droite projective "double", birationnellement isomorphe à la droite "double" de D (par la projection ν' , voir §4.4), et l'autre droite se projette sur le point de B qui représente la direction de l'axe Oy .

Soit $[D] = L_1 + 2L_2$ le cycle fondamental de D . On trouve

$$c_1(\tilde{T}|_{L_1}) = -1, \quad c_1(\tilde{T}|_{L_2}) = 0, \quad c_1(\xi|_{L_1}) = 0 \text{ et } c_1(\xi|_{L_2}) = -1 .$$

Alors on a $\text{Eu}_0(X) = \int_D (c_1(\tilde{T}) - c_1(\xi)) \cap [D] = -1 + 2 = 1$.

Calculons aussi $\text{Eu}_p(X)$, où $p \neq 0$ appartient à l'axe Oz . Alors \tilde{X}_p est formé de deux points (qui correspondent aux deux plans tangents limites passant par la droite Oz), et D_p est formé de deux droites projectives disjointes.

On trouve que \tilde{T} est trivial sur chaque droite (car il provient de la restriction à un point), et $c_1(\xi) = -1$ sur chaque droite. Donc on a $\text{Eu}_p(X) = 2$.

5. Formule pour le nombre d'Euler d'une hypersurface de dimension 2 .

Reprenons les notations de 4.4. Soient $[B] = \sum m_\alpha Z_\alpha$ le cycle fondamental de B , et $[D] = \sum m_\alpha \tilde{Z}_\alpha + \sum p_\beta L_\beta$ celui de D , où les m_α et les p_β sont des entiers, où $(\tilde{Z}_\alpha)_{\text{red}}$ est bi rationnellement isomorphe à $(Z_\alpha)_{\text{red}}$ et où les L_β sont les composantes qui se contractent par ν' (cf. §4.4.2). Alors chaque L_β est une droite projective, car L_β représente un pinceau de plans dans \mathbb{C}^3 d'axe une droite fixe (correspondante à $\nu'(L_\beta)$).

Notons \check{Z}_α la courbe duale à Z_α (qui représente les plans tangents à la composante du cône tangent correspondant à Z_α) . Soient d_α le degré de Z_α et d_α^v le degré de \check{Z}_α . Alors on a

$$(*) \quad \text{Eu}_0(X) = \sum m_\alpha (d_\alpha - d_\alpha^v) - \sum p_\beta .$$

En effet, \tilde{T} est la restriction du fibré tautologique de la grassmannienne $\text{Grass}_2(E)$ (cf. §2), donc on a

$$c_1(\tilde{T}|_{\tilde{Z}_\alpha}) = c_1(\tilde{T}|_{\check{Z}_\alpha}) = - \deg \check{Z}_\alpha = - d_\alpha^v .$$

Pour les composantes L_β on a

$$c_1(\tilde{T}|_{L_\beta}) = - \deg(L_\beta) = -1 .$$

D'autre part, par le paragraphe 4.4.2 a), on a

$$c_1(\xi|_{Z_\alpha}) = - \deg Z_\alpha = d_\alpha$$

et $c_1(\xi|_{L_\beta}) = 0$, car $\nu'(L_\beta)$ est de dimension 0 . Donc, en développant

l'expression $\int_D (c_1(\tilde{T}) - c_1(\xi)) \cap [D]$ on obtient la formule (*).

Remarque.- Si X est une surface dans \mathbb{C}^n et $n > 3$, la seule différence essentielle avec le cas d'une hypersurface est que les composantes L_β ne sont pas forcément des droites projectives. Notons ℓ_β le degré de L_β ; alors avec les notations précédentes on a :

$$Eu_0(X) = \sum m_\alpha (d_\alpha - d_\alpha^v) - \sum p_\beta \ell_\beta .$$

5. Soient X le cône dans \mathbb{C}^3 sur une courbe lisse C dans \mathbb{P}^2 de degré d , et O le sommet (qui est le seul point singulier de X). Alors on trouve que D et B sont isomorphes à C . Donc, en appliquant la formule de 4. on a :

$$Eu_0(X) = \deg(C) - \deg(C^v) = d - d(d-1) = 2d - d^2 .$$

6. Soit $X = \{x^n = y^p z\} \subset \mathbb{C}^3$, avec $p < n-1$, $(n,p) = 1$. Alors on trouve (avec les notations de 4) :

$$[D] = p\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + (p+1)L ,$$

où Z_1 , Z_2 et L sont des droites projectives.

Donc on a (par la formule de 4) :

$$Eu_0(X) = n(1-0) + 1(1-0) - (p+1) = 0 .$$

6. Énoncé précis du théorème de Mac-Pherson.

Soit T l'homomorphisme du groupe de cycles de X dans les fonctions sur X à valeurs dans \mathbb{Z} défini par :

$$T(\sum n_i Z_i)(p) = \sum n_i Eu_p(Z_i) , \quad \forall p \in X .$$

PROPOSITION.- T est un isomorphisme sur le groupe de fonctions constructibles $C(X)$ de X .

Démonstration.- D'abord il faut montrer que l'image d'un cycle par T est une fonction constructible. Or ceci résulte du fait que la fonction définie par le nombre local d'Euler est constante sur chaque strate d'une stratification de

Whitney quelconque de X (exposé suivant de ce séminaire).

Montrons l'injectivité de T . Soit $\sum n_i Z_i$ un cycle dans X tel que $Z_i \neq Z_j$ si $i \neq j$, et $\sum n_i \text{Eu}_p(Z_i) = 0$ pour tout $p \in X$. Alors $n_i = 0$, pour tout i , car la valeur générale de $T(\sum n_i Z_i)$ en Z_i est n_i . Pour montrer la surjectivité de T , on fait un argument par récurrence sur la dimension du support de $\alpha \in \mathcal{C}(X)$.

Avec les notations du paragraphe 1, l'énoncé du théorème de Mac Pherson est $c_* = c_M T^{-1}$, où c_M est la classe de Mather-Chern définie au paragraphe 3.

Reprenons l'exemple de la courbe plane avec un point de rebroussement de §3.2, $X = \{y^2 z = x^3\} \subset \mathbb{P}^2$. On veut montrer que $v_* c_M T^{-1}(\mathbb{1}_{\tilde{X}}) = c_M T^{-1} v_*(\mathbb{1}_{\tilde{X}})$, où $v: \tilde{X} \rightarrow X$ est le transformé de Nash de X . D'une part, on a $T^{-1}(\mathbb{1}_{\tilde{X}}) = \tilde{X}$ car \tilde{X} est lisse. Donc on a

$$\deg(v_* c_M T^{-1}(\mathbb{1}_{\tilde{X}})) = \deg(v_*(c(\tilde{TX}) \cap [\tilde{X}])) = 2,$$

car $\deg \tilde{TX} = 2$.

D'autre part, on a $v_*(\mathbb{1}_{\tilde{X}}) = \mathbb{1}_X$ et $T^{-1}(\mathbb{1}_X) = X - \{0\}$ car $\text{Eu}_0(X) = 2$ et $\text{Eu}_p(X) = 1$ si $p \neq 0$.

Donc on a :

$$\deg(c_M T^{-1} v_*(\mathbb{1}_{\tilde{X}})) = \deg(c_M(X - \{0\})) = \deg(v_*(c(\tilde{T}) \cap [\tilde{X}])) - 1 = 3 - 1 = 2,$$

car $\deg \tilde{T} = 3$.

L'égalité de degrés entraîne l'égalité des classes qu'on voulait démontrer.

On renvoie à [6] pour la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

- [1] A. DOUADY, J.-L. VERDIER - Séminaire de géométrie analytique, Astérisque 36-37, 1976.
- [2] W. FULTON, R. MAC PHERSON - Intersecting cycles on an algebraic variety, Complex singularities, Oslo, 1976, Sijthoff and Noordhoff, 1977.
- [3] W. FULTON - Rational equivalence on singular varieties, Publ. Math. IHES 1975, n° 45.
- [4] G. GONZALEZ-SPRINBERG - Eventails en dimension 2 et transformé de Nash, Secr. Math. ENS, 1977.
- [5] J.P.G. HENRY et LÊ DUNG TRANG - Limites d'espaces tangents, Séminaire Norguet, Springer Lecture Notes in Math. 482, 1974.
- [6] R. MAC PHERSON - Chern classes for singular varieties, Ann. of Math., 1974.
- [7] A. NOBILE - Some properties of the Nash blowing-up, Pacific J. Math. 60, n° 1, 1975.
- [8] R. PIENE - Ideals associated to a desingularization, Algebraic geometry, Proceedings Copenhagen 1978, Springer Lecture Notes n° 738
- [9] J.-L. VERDIER - Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inv. Math. 36, 1976.
- [10] H. WHITNEY - Tangents to an analytic variety, Ann. of Maths 81, 1965.
- [11] S.G.A. 6 - Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, Springer Lecture Notes n° 225.