J. P. Brasselet

Définition combinatoire des homomorphisnes de Poincaré, Alexander et Thom, pour une pseudo-variété

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 71-91
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__71_0>

Séminaire E.N.S. (1978-1979)

Exposé n° 5

DÉFINITION COMBINATOIRE DES HOMOMORPHISMES DE POINCARÉ, ALEXANDER et THOM, POUR UNE PSEUDO-VARIÉTÉ

J.P. BRASSELET

Introduction.

Soit W sous-variété orientée d'une variété, également orientée M. Les isomorphismes de Poincaré, Alexander et Thom sont bien connus, et on a un diagramme commutatif :

(1)
$$\begin{tikzcd} H^q(W) \arrow[rr, "\text{Thom}"] \arrow[dr, "\text{Poincaré}"'] & & H^{q+\nu}(M,M-W) \arrow[dl, "\text{Alexander}"] \\ & H^F_{n-q}(W) & \end{tikzcd}$$

où $\dim W = n = \dim M - \nu$ et le symbole F signifie homologie à supports fermés.

Le but de cet exposé est de définir, dans le cas où W est une pseudo-variété, et de manière combinatoire, des homomorphismes correspondants, tels que l'on ait encore un diagramme commutatif (1). Ce résultat est, sans doute, connu depuis très longtemps (*) ; cependant, je n'en ai trouvé aucune trace dans la littérature, si ce n'est dans un papier de M.H. Schwartz [7], sous une forme relative (modulo l'ensemble singulier Σ). La forme relative se déduit de la forme absolue énoncée ici.

(*) Pour une définition combinatoire des homomorphismes d'Alexander et de Poincaré, voir [1] à [6] de la bibliographie.

Nous définissons de façon élémentaire et à partir de triangulations (K), compatible avec la stratification (V_i), et (D), duale de (K) :

(i) la classe fondamentale $\bar{w}_n \in H_n^F(W)$ et l'homomorphisme de Poincaré $\beta : H^q(W) \longrightarrow H_{n-q}^F(W)$, cap-produit à droite par $\bar{w}_n$.

(ii) la classe fondamentale $\bar{\zeta}_m \in H_m^F(M,M-W)$ et l'isomorphisme d'Alexander $\alpha : H^{q+\nu}(M,M-W) \longrightarrow H_{n-q}^F(W)$, cap-produit à droite par $\bar{\zeta}_m$.

(iii) la classe de Thom $\bar{u}^\nu \in \dot{H}^\nu(M,M-W)$ et l'homomorphisme de Thom $\lambda : H^q(W) \longrightarrow H^{q+\nu}(M,M-W)$, cup-produit par $\bar{u}^\nu$.

Nous montrerons la commutativité du diagramme (1) au niveau des chaînes simpliciales (Théorème) et au niveau de l'homologie (Corollaire 3).

1 - Notations

2 - Conventions d'ordre et d'orientation

3 - Les classes fondamentales $\bar{w}_n$ et $\bar{\zeta}_m$

4 - L'homomorphisme de Poincaré

5 - L'isomorphisme d'Alexander

6 - L'homomorphisme de Thom et la classe de Thom $\bar{u}^\nu$

7 - Le théorème

8 - Quelques corollaires

L'exposé suivant utilisera la définition de l'isomorphisme d'Alexander telle qu'elle est donnée ici (paragraphe 5), ainsi que le résultat principal (commutativité du diagramme (16)).

1 - *Notations*.

Soit M une variété (topologique) orientée, de dimension m. On suppose que M est munie d'une stratification en strates $(V_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire d'une partition localement finie en variétés topologiques V_i telles que chaque $\bar{V}_i$ et chaque $\partial V_i = \bar{V}_i - V_i$ soit réunion de strates de dimension inférieure ou égale à celle de V_i.

Une pseudo-variété est un sous-ensemble fermé W de M, réunion localement finie de strates, tel que l'ensemble des strates dites "singulières", noté Σ, soit de codimension supérieure ou égale à 2 et tel que $W-\Sigma$ soit une variété orientée.

Nous noterons $n = m-\nu$ la dimension de W (dimension maximum des strates de W).

On suppose que M est triangulable par des complexes tels que (K), compatibles avec la stratification (chaque simplexe ouvert K_i est dans une seule strate). On suppose que (K) fait de M une variété combinatoire. Dans la suite de ce travail, nous prendrons pour (K) une triangulation simpliciale. Cette hypothèse n'est faite que pour la clarté de l'exposé, elle n'est pas restrictive et l'ensemble des résultats reste valable si (K) est une décomposition cellulaire de M. (Dans l'exposé suivant, nous les appliquerons à une décomposition cellulaire $(\hat{K})$ d'une variété $\hat{M}$).

Soit (Δ) une subdivision barycentrique de (K). On construit, à l'aide de (Δ), une décomposition cellulaire (D), duale de (K), de la manière suivante :

Soit K_j^p un (K)-simplexe de dimension p ; on note a_j son barycentre. La cellule duale de K_j^p, notée D_j^{m-p}, est réunion des (Δ)-simplexes Δ_α tels que $\bar{\Delta}_\alpha \cap K_j^p = \{a_j\}$.

On vérifie que D_j^{m-p} est de dimension complémentaire $m-p$. D'autre part, comme (K) est compatible avec la stratification (V_i), toute cellule D_j est transverse à W au sens suivant :

$$\operatorname{codim}(D_j \cap W) = \operatorname{codim}(D_j) + \operatorname{codim}(W) .$$

Enfin, $(D) \cap W$ est un (Δ)-complexe.

De façon générale, les dimensions des simplexes de (K) et (Δ) et des cellules de (D) seront notées en indice supérieur.

On considère ici les chaînes cellulaires orientées, et on utilise l'isomorphisme entre homologie cellulaire et homologie singulière à coefficients entiers ; de même pour la cohomologie.

L'indice c pour les groupes de cochaînes, ou de cohomologie, indiquera que les supports des cochaînes sont compacts ; l'indice F pour les groupes de chaînes, ou d'homologie indiquera que les supports des chaînes sont fermés (non nécessairement compacts). Nous noterons $C_{(D),*}(M)$ le groupe différentiel gradué des chaînes (D)-cellulaires (orientées) et $C_{(K),*}(W)$ et $C_{(\Delta),*}(W)$ les groupes différentiels gradués des chaînes simpliciales (orientées) définies par les triangulations simpliciales $(K) \cap W$ et $(\Delta) \cap W$ respectivement. De même pour les groupes de cochaînes $C^*_{(D)}(M)$ etc ...

Enfin, nous désignerons par T le tube (autour de W), réunion des simplexes fermés de (Δ) qui rencontrent W, ∂T sur bord et $\mathring{T} = T - \partial T$ son intérieur.

2 - *Conventions d'ordre et d'orientation.*

Les simplexes de (Δ) pourront être considérés comme simplexes ordonnés ou orientés.

a) *Ordre sur* (Δ).

Soit a un sommet de la subdivision (Δ). Si a est un sommet de (K), nous dirons que son (K)-indice est 0 et nous le noterons a_o. Si a est intérieur à un simplexe de (K) de dimension $i \geq 1$, nous dirons que son (K)-indice est i, et nous le noterons a_i.

Les simplexes de la triangulation (Δ) seront ordonnés par (K)-indices croissants : Un (Δ)-simplexe de dimension p, ordonné, sera noté $[\Delta_i^p] = [a_{i_o},\dots,a_{i_p}]$ avec $i_o < i_1 < \dots < i_p$.

Pour qu'un p-simplexe $[a_{i_o},\dots,a_{i_p}]$ et un q-simplexe $[b_{j_o},\dots,b_{j_q}]$, pris dans cet ordre, engendrent un $(p+q)$-simplexe il faut et il suffit que l'on ait $a_{i_p} = b_{j_o}$. Le $(p+q)$-simplexe engendré s'écrit $[c_{k_o},\dots,c_{k_{p+q}}]$, avec :

$$c_{k_\alpha} = a_{i_\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha = 0, 1,\dots,p$$

$$c_{k_\alpha} = b_{j_{\alpha-p}} \quad \text{pour} \quad \alpha = p\ ,\ p+1,\dots,p+q\ .$$

b) *Orientation sur* (Δ).

On se donne une orientation des simplexes de (K), de manière à ce que les simplexes de dimension maximum aient l'orientation de M et les simplexes de dimension n, situés dans $W - \Sigma$, aient l'orientation de $W - \Sigma$.

On convient alors des orientations suivantes :

Toute cellule D_i^{m-q}, duale de K_i^q, est munie de l'orientation telle que l'orientation de K_i^q, suivie de celle de D_i^{m-q}, donne l'orientation de M.

Les (Δ)-simplexes de dimension q de K_i^q ont l'orientation de K_i^q.

Les (Δ)-simplexes de dimension $m-q$ de D_i^{m-q} ont l'orientation de D_i^{m-q}.

Les (Δ)-simplexes de dimension $n-q$ de $D_i^{m-q} \cap W$ (si cette intersection est non vide), ont l'orientation telle que, l'orientation de K_i^q, suivie de celle du (Δ)-simplexe, donne l'orientation de $W - \Sigma$.

Lemme.- Ces conventions d'orientations sont cohérentes.

En effet, supposons que le q-simplexe K_i^q soit situé dans W. Dans $D_i^{m-q} \cap W$, tout simplexe ouvert de (Δ) de dimension maximum $n-q$ est dans une strate V_j^n de dimension n.

On considère un homéomorphisme local Ψ de M sur $\mathbb{R}^m$ tel que le point $\{a\} = K_i^q \cap D_i^{m-q}$ soit situé à l'origine de $\mathbb{R}^m$. On donne à $\mathbb{R}^m$ l'orientation d'un m-repère $e_1,\ldots,e_m$ que l'on peut choisir comme suit :

+ l'orientation de $e_1,\ldots,e_m$ coïncide avec celle de la variété M.

+ $\Psi(K_i^q)$ est situé dans le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^q$ engendré par $e_1,\ldots,e_q$ et dont l'orientation coïncide avec celle de K_i^q.

+ $\Psi(V_j^n)$ est situé dans le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ engendré par $e_1,\ldots,e_q,e_{q+1},\ldots,e_n$ dont l'orientation coïncide avec celle de la variété V_j^n.

+ $\Psi(D_i^{m-q})$ est situé dans le sous-groupe vectoriel R^{m-q} engendré par $e_{q+1},\ldots,e_m$ supplémentaire de $\mathbb{R}^q$ et dont l'orientation coïncide avec celle de D_i^{m-q}.

+ Les simplexes Δ_β^{n-q} situés dans $D_i^{m-q} \cap V_j^n$ ont l'orientation induite par celle de $e_{q+1},\ldots,e_n$.

On en déduit le lemme.

Conséquences :

(i) Etant donné un q-simplexe K_i^q , soit D_i^{m-q} la cellule duale de K_i^q, si les (Λ)-simplexes $[\Lambda_\alpha^q] \subset K_i^q$ et $[\Lambda_\beta^{m-q}] \subset D_i^{m-q}$ engendrent un m-simplexe $[\Lambda_\gamma^m]$, alors l'orientation de Λ_α^q, suivie de celle de Λ_β^{m-q}, donne l'orientation de Λ_γ^m (qui est celle de la variété M).

(ii) Etant donné un q-simplexe $K_i^q \subset W$, soit D_i^{m-q} la cellule duale de K_i^q, si les (Λ)-simplexes $[\Lambda_\alpha^q] \subset K_i^q$ et $[\Lambda_\beta^{n-q}] \subset D_i^{m-q} \cap W$ engendrent un n-simplexe $[\Lambda_\gamma^n]$, alors l'orientation de Λ_α^q, suivie de celle de Λ_β^{n-q}, donne l'orientation de Λ_γ^n (qui est celle de la variété $W - \Sigma$).

Dans toute la suite, nous noterons K_i^q le q-simplexe K_i^q muni de l'orientation définie ci-dessus. De même pour les (Λ)-simplexes et les (D)-cellules.

c) *Cup et cap-produits.*

Définition de l'application δ.

Les chaînes élémentaires orientées Δ_i^p forment une base de $C_{(\Delta),p}(M)$. Nous noterons $\delta(\Delta_i^p)$ les cochaînes duales ; elles forment une base de l'espace $C^p_{(\Delta)}(M)$. On a :

$$<\delta(\Delta_i^p).\Delta_j^p> = +1 \quad \text{si} \quad i = j \quad , \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Pour vérifier que deux (Δ)-chaînes coïncident, il suffit de vérifier que toutes les cochaînes $\delta(\Delta_i^p)$ prennent sur elles deux la même valeur.

De même, nous définissons une base de l'espace $C^p_{(D)}(M)$ en associant, à toute (D)-chaîne élémentaire D_i^p, la cochaîne duale $\delta(D_i^p)$.

La cochaîne $\delta(D_i^p)$ (donc, toute (D)-cochaîne), peut être considérée comme (Δ)-cochaîne rationnelle, en posant,

$$\text{pour } D_i^p = \sum_{j=1}^{m(D_i^p)} \Delta^p_{\alpha_j}, \qquad \delta(D_i^p) = \frac{1}{m(D_i^p)} \sum_{j=1}^{m(D_i^p)} \delta(\Delta^p_{\alpha_j}).$$

Cependant, $\delta(D_i^p)$ n'interviendra en ce sens que comme élément d'un cup-(ou cap-) produit qui sera une (Δ)-cochaîne (ou chaîne) entière.

Définition du cup-produit. (*)

On définit le cup-produit, comme application :

$$C^p_{(\Delta)}(M) \otimes C^q_{(\Delta)}(M) \longrightarrow C^{p+q}_{(\Delta)}(M)$$

de la manière suivante, on pose :

(3) $$<\delta(\Delta_j^p) \cup \delta(\Delta_k^q).\Delta_h^{p+q}> = \varepsilon_j\ \varepsilon_k\ \varepsilon_h$$

si on peut écrire : $\Delta_j^p = \varepsilon_j[a_{i_o},\dots,a_{i_p}]$, $\Delta_k^q = \varepsilon_k[a_{i_p},\dots,a_{i_{p+q}}]$, $\Delta_h^{p+q} = \varepsilon_h[a_{i_o},\dots,a_{i_{p+q}}]$ avec $\varepsilon_* = \pm 1$, et 0 sinon. On prolonge par linéarité.

Définition des cap-produits.(*)

On définit le cap-produit à droite, comme application :

$$C^q_{(\Delta)}(M) \otimes C_{(\Delta),p}(M) \longrightarrow C_{(\Delta),p-q}(M)$$

en posant :

(4) $$<c^{p-q}.c^q \cap e_p> = <c^{p-q} \cup c^q.e_p>$$

avec $c^{p-q} \in C^{p-q}_{(\Delta)}(M)$, $c^q \in C^q_{(\Delta)}(M)$ et $e_p \in C_{(\Delta),p}(M)$.

De même, on définit le cap-produit à gauche, comme application :

$$C_{(\Delta),p}(M) \otimes C^q_{(\Delta)}(M) \longrightarrow C_{(\Delta),p-q}(M)$$

en posant :

$$<c^{p-q}.e_p \cap c^q> = <c^q \cup c^{p-q}.e_p>$$

(*) On vérifiera que ces définitions sont cohérentes avec les définitions classiques.

3 - *Les classes fondamentales* $\bar{w}_n$ et $\bar{\zeta}_m$.

a) *La classe fondamentale* $\bar{w}_n \in H_n^F(W)$.

Considérons la chaîne simpliciale élémentaire Δ_i^n que définit tout simplexe Δ_i^n de dimension n, situé dans $W - \Sigma$ et orienté comme $W - \Sigma$. Par sommation sur toutes ces chaînes élémentaires, on obtient un cycle w_n de $C^F_{(\Delta),n}(W)$ dont la classe, dans $H_n^F(W)$, est notée $\bar{w}_n$.

Soit alors $x \in W - \Sigma$ et B la trace, sur W, de l'étoile fermée de x dans (Δ). B est une n-boule, en vertu de l'hypothèse combinatoire, et son intérieur $\mathring{B} \subset W - \Sigma$ définit la classe unité $1_x \in H_n^F(B,B-\{x\}) = H_n^F(B,\partial B)$. Soit l'application canonique :

$$h_x \ : H_n^F(W) \longrightarrow H_n^F(W,W-\{x\}) = H_n^F(B,B-\{x\}).$$

On a, par définition de $\bar{w}_n$, $h_x(\bar{w}_n) = 1_x$ et $\bar{w}_n$ est l'unique classe de $H_n^F(W)$ dont l'image par h_x soit 1_x. On en déduit que $\bar{w}_n$ est indépendante des triangulations (K) et (Δ).

b) *La classe fondamentale* $\bar{\zeta}_m \in H_m^F(M,M-W)$.

Notons $\zeta_m \in C^F_{(\Delta),m}(T,\partial T)$ le m-cycle fondamental, somme de tous les (Δ)-simplexes de dimension $m = n+\nu$ situés dans le tube T et orientés comme la variété M. Sa classe dans $H_m^F(T,\partial T)$ est indépendante du choix des triangulations (même démonstration que pour $\bar{w}_n$). Elle définit une classe fondamentale, notée $\bar{\zeta}_m$ dans $H_m^F(M,M-W) = H_m^F(T,\partial T)$.

c) *Deux propositions.*

Proposition 1.- Soit K_i^{n-q} un simplexe de (K) situé dans W et $D_i^{q+\nu}$ la cellule duale de K_i^{n-q} (située dans T), on a :

$$<\delta(\Delta_k^{n-q}) \cup \delta(D_i^{q+\nu}).\zeta_m> \ = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta_k^{n-q} \subset K_i^{n-q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration : Les simplexes $\Delta_\ell^{n+\nu} = \Delta_\ell^m$ de ζ_m pour lesquels cette valeur est non nulle sont les simplexes engendrés par $[\Delta_k^{n-q}]$ et par un $(q+\nu)$-simplexe $[\Delta_j^{q+\nu}]$ de $D_i^{q+\nu}$.

Comme le (K)-indice minimal des sommets des simplexes $\Delta_j^{q+\nu}$ situés dans $D_i^{q+\nu}$ est $n-q$, tout simplexe $[\Delta_j^{q+\nu}]$ de $D_i^{q+\nu}$ est du type $[a_{n-q},\dots,a_{n+\nu}]$. Les simplexes $[\Delta_k^{n-q}]$ qui engendrent avec $[\Delta_j^{q+\nu}]$ un $(n+\nu)$-simplexe $[\Delta_\ell^{n+\nu}]$ sont du type $[a_o,\dots,a_{n-q}]$ et sont situés dans K_i^{n-q}. Nous avons vu que, dans ce cas, l'orientation de $\Delta_\ell^{n+\nu}$ est l'orientation induite par celle de Δ_k^{n-q} suivie de celle de $\Delta_j^{q+\nu}$. (Conséquence (i)).

Soit donc Δ_k^{n-q} un simplexe fixé de K_i^{n-q}, par définition de ζ_m et de δ, pour tout simplexe $\Delta_\ell^{n+\nu}$ ayant une $(q+\nu)$-face dans $D_i^{q+\nu}$, la quantité

$$<\delta(\Delta_k^{n-q}) \cup \delta(D_i^{q+\nu}).\Delta_\ell^{n+\nu}>$$

est non nulle et égale à $1/m(D_i^{q+\nu})$. De tels simplexes sont en quantité égale à $m(D_i^{q+\nu})$, d'où le résultat.

Corollaire 1.- Soit K_i^{n-q} un (K)-simplexe de W et $D_i^{q+\nu}$ la cellule duale de K_i^{n-q} (située dans T), on a :

$$\delta(D_i^{q+\nu}) \cap \zeta_m = K_i^{n-q} \quad . \tag{5}$$

Démonstration : Il suffit de montrer que toutes les cochaînes $\delta(\Delta_k^{n-q})$ prennent la même valeur sur chacun des deux membres de (5), considérés comme (Δ)-chaînes. Sur le second membre, cette valeur est 1 si $\Delta_k^{n-q} \subset K_i^{n-q}$ et 0 sinon. Sur le premier membre, on a :

$$<\delta(\Delta_k^{n-q}).\delta(D_i^{q+\nu}) \cap \zeta_m> = <\delta(\Delta_k^{n-q}) \cup \delta(D_i^{q+\nu}).\zeta_m>$$

d'où le résultat, par la proposition précédente.

Proposition 2.- Soient Δ_k^{n-q} et Δ_j^q deux (Δ)-simplexes, la quantité

$$<\delta(\Delta_k^{n-q}) \cup \delta(\Delta_j^q).w_n>$$

est égale à 1 si Δ_k^{n-q} est situé dans un simplexe K_i^{n-q} de W et si Δ_j^q est situé dans $D_i^{q+\nu} \cap W$, où $D_i^{q+\nu}$ est la cellule duale de K_i^{n-q}. Elle est nulle sinon.

Démonstration : La valeur du cup-produit sur un simplexe Δ_ℓ^n de w_n est non nulle si et seulement si $[\Delta_k^{n-q}]$ et $[\Delta_j^q]$ engendrent $[\Delta_\ell^n] = [a_o,\dots,a_n]$. Nous avons vu que, dans ce cas, $[\Delta_k^{n-q}]$ et $[\Delta_j^q]$ sont du type :

$$[\Delta_k^{n-q}] = [a_o,\dots,a_{n-q}] \quad \text{et} \quad [\Delta_j^q] = [a_{n-q},\dots,a_n].$$

Autrement dit, Δ_k^{n-q} est situé dans un simplexe K_i^{n-q} de dimension n-q et Δ_j^q est situé dans la cellule $D_i^{q+\nu}$ duale de K_i^{n-q}. D'autre part, Δ_k^{n-q} et Δ_j^q sont situés dans W. On en déduit le résultat, par (ii) ci-dessus.

Corollaire 2.- Soit Δ_j^q un (Δ)-simplexe de dimension q situé dans W, s'il existe un $(q+\nu)$-cellule $D_i^{q+\nu}$ telle que $\Delta_j^q \subset D_i^{q+\nu} \cap W$, alors :

$$\delta(\Delta_j^q) \cap w_n = K_i^{n-q} \tag{6}$$

où K_i^{n-q} est le $(n-q)$-simplexe de (K) dual de $D_i^{q+\nu}$. Dans le cas contraire, on a $\delta(\Delta_j^q) \cap w_n = 0$.

Démonstration : Il suffit de vérifier que toutes les cochaînes $\delta(\Delta_k^{n-q})$ prennent la même valeur sur chacun des deux membres de (6), considérés comme (Δ)-chaînes. On a, d'une part,

$$<\delta(\Delta_k^{n-q}).K_i^{n-q}> \; = 1$$

si Δ_k^{n-q} est un $(n-q)$-simplexe de la subdivision barycentrique du simplexe K_i^{n-q} et est nul sinon. D'autre part :

$$<\delta(\Delta_k^{n-q}).\delta(\Delta_j^q) \cap w_n> \; = \; <\delta(\Delta_k^{n-q}) \cup \delta(\Delta_j^q).w_n>$$

d'où le résultat, par la proposition précédente.

4 - *L'homomorphisme de Poincaré* $\beta : H^q(W) \longrightarrow H_{n-q}^F(W)$.

Nous définissons les morphismes :

$$\beta : C^q_{(\Delta)}(W) \to C^F_{(\Delta),n-q}(W) \qquad \beta : H^q(W) \to H^F_{n-q}(W)$$

par les cap-produits :

(7) $$\beta(c^q) = c^q \cap w_n \qquad \beta(\bar{c}^q) = \bar{c}^q \cap \bar{w}_n.$$

De même, nous définissons :

$$\beta' : C^{n-q}_{(\Delta),c}(W) \to C_{(\Delta),q}(W) \qquad \beta' : H_c^{n-q}(W) \to H_q(W)$$

par les relations :

$$\beta'(c^{n-q}) = w_n \cap c^{n-q} \qquad \beta'(\bar{c}^{n-q}) = \bar{w}_n \cap \bar{c}^{n-q}$$

β' est l'homomorphisme transposé de β. On a, en effet, pour tout $c^q \in C^q_{(\Delta)}(W)$:

$$<c^q.{}^t\beta(c^{n-q})> \; = \; <c^{n-q}.\beta(c^q)> \; = \; <c^{n-q}.c^q \cap w_n>$$
$$= \; <c^{n-q} \cup c^q.w_n> \; = \; <c^q.w_n \cap c^{n-q}>.$$

5 - *L'isomorphisme d'Alexander* $\alpha : H^{q+\nu}(M,M-W) \to H^F_{n-q}(W)$.

Considérons les (K)-simplexes de dimension $n-q$, K_i^{n-q}, situés dans W et $D_i^{q+\nu}$ leurs cellules duales. Les cochaînes $\delta(D_i^{q+\nu})$ forment une base de $C_{(D)}^{q+\nu}(T,\partial T)$. D'autre part, on peut définir une base de $C_{(K)}^{n-q}(W)$, formée par les cochaînes $\delta(K_i^{n-q})$, duales des K_i^{n-q}. On définit :

$$\alpha : C_{(D)}^{q+\nu}(T,\partial T) \longrightarrow C^F_{(K),n-q}(W)$$

$$\text{et} \quad \alpha' : C^{n-q}_{(K),c}(W) \longrightarrow C_{(D),q+\nu}(T,\partial T)$$

en posant :

(8) $$\alpha\ \delta(D_i^{q+\nu}) = K_i^{n-q}$$

(9) $$\alpha'\ \delta(K_i^{n-q}) = D_i^{q+\nu}$$

et en prolongeant par linéarité.

Le corollaire 1 du paragraphe 3 permet de montrer, par linéarité, le résultat ci-dessous :

Proposition 3.- On a les formules suivantes (relatives à la triangulation (Δ)) :

(10) $$\alpha(c^{q+\nu}) = c^{q+\nu} \cap \zeta_m \quad \text{pour} \quad c^{q+\nu} \in C_{(D)}^{q+\nu}(T,\partial T)$$

(11) $$\alpha'(c^{n-q}) = \zeta_m \cap c^{n-q} \quad \text{pour} \quad c^{n-q} \in C^{n-q}_{(K),c}(W).$$

Des formules (8) et (9), il résulte que α et α' sont des isomorphismes et des formules (10) et (11) que α et α' sont transposés l'un de l'autre (même démonstration que pour β et β'). De plus, les formules (10) et (11) montrent que α et α' sont des morphismes de groupes différentiels gradués. On note encore α et α' les isomorphismes qu'ils induisent respectivement. On a :

$$\alpha : H^{q+\nu}(M,M-W) = H^{q+\nu}(T,\partial T) \xrightarrow{\sim} H^F_{n-q}(T) = H^F_{n-q}(W)$$

$$\alpha' : H_c^{n-q}(W) = H_c^{n-q}(T) \xrightarrow{\sim} H_{q+\nu}(T,\partial T) = H_{q+\nu}(M,M-W)$$

avec :

$$\alpha(\bar{c}^{q+\nu}) = \bar{c}^{q+\nu} \cap \bar{\zeta}_m$$

$$\alpha'(\bar{c}^{n-q}) = \bar{\zeta}_m \cap \bar{c}^{n-q} .$$

6 - L'homomorphisme de Thom $\lambda : H^q(W) \to H^{q+\nu}(M,M-W)$.

Soit $D_i^{q+\nu}$ une (D)-cellule de dimension $q+\nu$. Dans le sous-complexe $\bar{D}_i^{q+\nu} \cap W$ de (Λ), tout simplexe ouvert de dimension q est situé dans une strate V_j^n et est muni de l'orientation définie ci-dessus. Le complexe ainsi obtenu détermine une chaîne, notée :

$$\hat{\lambda}(D_i^{q+\nu}) \in C_{(\Lambda),q}(W).$$

Par linéarité, on obtient un homomorphisme de groupes gradués, de degré $-\nu$:

$$\hat{\lambda} : C_{(D),*}(M) \longrightarrow C_{(\Lambda),*}(W).$$

Proposition 4.- $\hat{\lambda}$ induit un homomorphisme de groupes différentiels gradués :

(12) $$\lambda' : C_{(D),q+\nu}(T,\partial T) \longrightarrow C_{(\Delta),q}(W)$$

et, par transposition :

(13) $$\lambda = {}^t\lambda' : C^q_{(\Delta)}(W) \longrightarrow C^{q+\nu}_{(D)}(T,\partial T).$$

De ces morphismes, on déduit des homomorphismes (de Thom-Gysin) :

$$\lambda' : H_{q+\nu}(T,\partial T) = H_{q+\nu}(M,M-W) \longrightarrow H_q(W)$$

$$\lambda : H^q(W) \longrightarrow H^{q+\nu}(T,\partial T) = H^{q+\nu}(M,M-W).$$

Démonstration : On a :

Support de (bord de $(D_i^{q+\nu} \cap W)$ - $W \cap$ bord de $D_i^{q+\nu}) \subset \Sigma$.

Comme la codimension de Σ dans W est supérieure ou égale à 2, on a $\partial\hat{\lambda}D_i^{q+\nu} - \hat{\lambda}\partial D_i^{q+\nu} = 0$ et $\hat{\lambda}$ définit un homomorphisme de groupes différentiels gradués. Il se factorise en :

$$C_{q+\nu}(T) \longrightarrow C_{q+\nu}(T,\partial T) \xrightarrow{\lambda'} C_q(W)$$

car, si $D_i^{q+\nu} \subset \partial T$, alors $\hat{\lambda}(D_i^{q+\nu}) = 0$.

Comme $\overset{\circ}{T}$ est stable par le bord des chaînes (D)-cellulaires, λ' induit en homologie un homomorphisme $\lambda' : H_{q+\nu}(T,\partial T) \longrightarrow H_q(V)$.

Pour les cochaînes à supports compacts, considérons les homomorphismes obtenus par transposition $\lambda = {}^t\lambda' : C^q_{(\Delta)}(W) \longrightarrow C^{q+\nu}_{(D)}(T,\partial T)$. Comme λ' commute avec l'opérateur bord, λ est un homomorphisme de groupes différentiels gradués. On en déduit la proposition.

Remarque : Si $\Sigma = \emptyset$, W est une variété et les homomorphismes λ et λ' sont, au signe près, les isomorphismes qui se déduisent du théorème de Thom-Gysin dans le cas des variétés. En effet, (D) induit alors sur W une triangulation cellulaire $W \cap (D)$ et $\hat{\lambda}$ induit un isomorphisme de $C_{(D),q+\nu}(T,\partial T)$ sur le groupe des q-chaînes de la triangulation cellulaire $W \cap (D)$.

La classe de Thom $\bar{u}^\nu \in H^\nu(M,M-W)$.

Le cycle fondamental w_n, défini au paragraphe 3, peut être considéré comme cycle de $C^F_{(K),n}(W)$. On définit un cocycle u^ν de $C^\nu_{(D)}(T,\partial T)$ par :

(14) $$u^{\nu} = \alpha^{-1}(w_n).$$

De la formule (8), et des conventions d'orientation, il résulte que u^{ν} peut être défini par :

$$\langle u^{\nu}.D_i^{\nu}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } D_i^{\nu} \cap W \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

En effet, si D_i^{ν} rencontre W, l'orientation de W suivie de celle de D_i^{ν} donne l'orientation de M.

La classe de u^{ν} dans $H^{\nu}(T,\partial T) = H^{\nu}(M,M-W)$ est :

$$\bar{u}^{\nu} = \alpha^{-1}(\bar{w}_n).$$

Il vient :

(15) $$\begin{aligned} \alpha(u^{\nu}) &= w_n = u^{\nu} \cap \zeta_m \\ \alpha(\bar{u}^{\nu}) &= \bar{w}_n = \bar{u}^{\nu} \cap \bar{\zeta}_m. \end{aligned}$$

Comme α est un isomorphisme et que α et w_n sont indépendants des triangulations, il en est de même de la classe $\bar{u}^{\nu}$.

Dans le cas où $\Sigma = \emptyset$, W est une variété et T est un voisinage tubulaire autour de W, homéomorphe à un fibré, dont la fibre est une boule fermée B de dimension ν. Orientons chaque fibre B_x de manière à ce que l'orientation de W suivie de celle de B_x donne celle de M, la formule (15) montre que $\bar{u}^{\nu}$ est la classe qui induit sur chaque fibre B_x la classe unité de $H^{\nu}(B_x,\partial B_x)$. Dans ce cas $\bar{u}^{\nu}$ est la classe de Thom classiquement définie.

7 - *Le théorème*.

On peut énoncer le résultat principal comme suit :

Théorème.- Le diagramme suivant est commutatif :

(16)
$$\begin{tikzcd} C^q_{(\Delta)}(W) \arrow[rr, "\lambda", "\text{Thom}"'] \arrow[dr, "\beta"', "\text{Poincaré}"] & & C^{q+\nu}_{(D)}(T,\partial T) \arrow[dl, "\text{iso}\ \alpha", "\text{Alexander}"'] \\ & C^F_{(K),n-q}(W) & \end{tikzcd}$$

Autrement dit, si c est une cochaîne de $C^q_{(\Delta)}(W)$, alors $\beta(c) = c \cap w_n = \sum_{K_i^{n-q} \subset W} \mu_i\, K_i^{n-q}$ où $\mu_i = \langle c.D_i^{q+\nu} \cap W\rangle$ (avec $D_i^{q+\nu}$, cellule duale de K_i^{n-q}).

Nous montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme.- Soit Δ_j^q un (Δ)-simplexe de dimension q situé dans W, alors :

(17)
$$\lambda\,\delta(\Delta_j^q) = \begin{cases} \delta(D_i^{q+\nu}) & \text{s'il existe une } (q+\nu)\text{-cellule } D_i^{q+\nu} \text{ telle que } \Delta_j^q \subset D_i^{q+\nu} \cap W \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration : On a $\lambda\,\delta(\Delta_j^q) \in C^{q+\nu}_{(D)}(W)$. Les cochaînes de (17) seront égales si elles prennent la même valeur sur toute cellule $D_h^{q+\nu}$ de (D). Soit donc $D_h^{q+\nu}$ une (D)-cellule de dimension $(q+\nu)$, on a :

$$<\lambda\delta(\Delta_j^q).D_h^{q+\nu}> \;=\; <\delta(\Delta_j^q).\lambda'(D_h^{q+\nu})>$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \Delta_j^q \subset D_h^{q+\nu} \cap W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'autre part :

$$<\delta(D_i^{q+\nu}).D_h^{q+\nu}> \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si} \quad D_i^{q+\nu} = D_h^{q+\nu} \\ & \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où le lemme.

Démonstration du théorème :

Les cochaînes $\delta(\Delta_j^q)$ engendrent $C_{(\Delta)}^q(W)$, il suffit donc de montrer que, pour tout simplexe Δ_j^q contenu dans W, on a :

$$\alpha\lambda\delta(\Delta_j^q) = \beta\delta(\Delta_j^q). \tag{18}$$

D'après le lemme, s'il existe une $(q+\nu)$-cellule $D_i^{q+\nu}$ telle que Δ_j^q soit contenu dans $D_i^{q+\nu} \cap W$, le premier membre de (18) est égal à :

$$\alpha\lambda\,\delta(\Delta_j^q) = \alpha\,\delta(D_i^{q+\nu}) = K_i^{n-q}$$

où K_i^{n-q} est le $(n-q)$-simplexe dual de $D_i^{q+\nu}$. Il est nul dans le cas contraire.

Le second membre de (18) est égal à :

$$\beta\delta(\Delta_j^q) = \delta(\Delta_j^q) \cap w_n.$$

On conclut par le corollaire 2 (paragraphe 3).

8 - *Quelques corollaires.*

Corollaire 3.- Soit W une pseudo-variété, contenue dans une variété orientée M, et de dimension maximum $n = \dim M - \nu$. Les morphismes de Thom λ, d'Alexander α et de Poincaré β étant définis comme ci-dessus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^q(W) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\beta = .\cap \bar{w}_n"'] & & H^{q+\nu}(M, M-W) \arrow[dl, "\mathrm{iso}", "\alpha = .\cap \bar{\zeta}_m"'] \\ & H^F_{n-q}(W) & \end{tikzcd}$$

Corollaire 4.- Dans les mêmes hypothèses, si λ', α' et β' désignent les morphismes définis ci-dessus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_q(W) & & H_{q+\nu}(M, M-W) \arrow[ll, "\lambda'"'] \\ & H_c^{n-q}(W). \arrow[ul, "\beta' = \bar{w}_n \cap ."] \arrow[ur, "\mathrm{iso}", "\alpha' = \bar{\zeta}_m \cap ."'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration : Identique à celle du théorème ou à partir du théorème (voir, par exemple Leray, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), page 117).

Corollaire 5.- Soit u^ν le cocycle de $C^\nu_{(D)}(T, \partial T)$ défini en (14), on a :

$$\lambda(c^q) = c^q \cup u^\nu \qquad \text{pour } c^q \in C^q_{(\Delta)}(W)$$

$$\text{et} \quad \lambda(\bar{c}^q) = \bar{c}^q \cup \bar{u}^\nu \qquad \text{pour } \bar{c}^q \in H^q(W).$$

Démonstration : D'après le théorème, on a :

$$\alpha\lambda(c^q) = \beta(c^q)$$

et, d'autre part :

$$\begin{aligned}\alpha(c^q \cup u^\nu) &= (c^q \cup u^\nu) \cap \zeta_m \\ &= c^q \cap (u^\nu \cap \zeta_m) \\ &= c^q \cap w_n = \beta(c^q)\end{aligned}$$

ceci, d'après (15). On conclut en remarquant que α est un isomorphisme.

Remarque : Soit M une variété analytique complexe et W un sous-ensemble analytique complexe de M. M admet des stratifications analytiques complexes, c'est-à-dire en variétés analytiques complexes, compatibles avec W. On peut toujours trouver une triangulation (K) compatible avec la stratification (voir par exemple [8]). Si, de plus, (K) fait de M une variété combinatoire, les homomorphismes α, β et λ sont définis et le résultat précédent est applicable.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P.S. ALEXANDROV - Combinatorial topology.
Graylock Press, Albany, 1960.

[2] P.S. ALEXANDROV - Introduction à la théorie homologique de la dimension.
Editions Mir, Moscou, Traduction française 1977.

[3] S. LEFSCHETZ - Introduction to topology
Princeton University Press, 1949.

[4] S. LEFSCHETZ - Topology.
Chelsea, New-York, 1956.

[5] H. POINCARÉ - Complément à l'analysis situs.
Palermo Rendic. 13 (1899), 285-343 et Oeuvres de H.P., Gauthier -Villars, 1953, tome VI.

[6] H. POINCARÉ - Second complément à l'analysis situs.
Proc. London Math. Soc. 32 (1900), 277-308 et Oeuvres de H.P., Gauthier -Villars, 1953, tome VI.

[7] M.H. SCHWARTZ - Homomorphismes liés à un ensemble stratifié
Multigraphié, Lille, 1968.

[8] H. HIRONAKA - Triangulations of algebraic sets.
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 29 (1975).