LÊ DŨNG TRÁNG

Limites d'espaces tangents et obstruction d'Euler des surfaces

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 45-69
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__45_0>

Séminaire E.N.S. (1978-1979)

Exposé n° 4

LIMITES D'ESPACES TANGENTS
ET
OBSTRUCTION D'EULER DES SURFACES

Par LÊ Dũng Tráng

Dans [14], R. Mac Pherson a défini l'obstruction d'Euler d'un germe d'espace analytique complexe réduit (voir aussi [4]). Cette obstruction d'Euler lui permet de construire des classes de Chern pour les variétés algébriques singulières. Dans cet exposé, nous allons montrer une formule de B. Teissier et moi-même pour calculer l'obstruction d'Euler d'un germe de surface analytique. Nous ne ferons la démonstration que dans le cas d'une surface $(X,0)$ dans $(\mathbb{C}^3,0)$. Dans [12], B. Teissier et moi-même obtenons un résultat général pour un germe d'espace analytique réduit quelconque. Le calcul de l'obstruction d'Euler que nous faisons ici repose sur une relation de G. González-Sprinberg-Verdier (cf [4]). Dans le cas des germes de surfaces $(X,0)$ dans $(\mathbb{C}^3,0)$ ce calcul utilise une description explicite des limites d'espaces tangents de X en 0 (cf [7]). Nous rappelons les résultats préliminaires dont nous avons besoin.

1. Limites d'espaces tangents.

(1.1) Soit (X,x) un germe d'espace analytique complexe réduit équidimensionnel de dimension d. On supposera $(X,x) \subset (\mathbb{C}^{N+1},0)$.

On désignera encore par X un représentant assez petit de (X,x) .

On note $\nu : \tilde{X} \longrightarrow X$ <u>la modification de Nash de</u> X (cf [14] ou [4]).

(1.1.1.) On appelle <u>espace des limites d'espaces tangents à</u> X <u>en</u> x l'espace analytique $\nu^{-1}(x)$. L'ensemble analytique sous-jacent $|\nu^{-1}(x)|$ à $\nu^{-1}(x)$ est appelé <u>ensemble</u> des limites d'espaces tangents de X en 0 . Ses éléments sont les limites d'espaces tangents à X en x . Par le plongement local $(X,x) \subset (\mathbb{C}^{N+1},0)$, on peut considérer $|\nu^{-1}(x)|$ comme une sous-variété projective de $G(N,d-1)$, Grassmanienne des d-plans de $\mathbb{C}^{N+1}$ qui passent par 0 .

On note $C_{X,x}$ le <u>cône tangent</u> de X en x .

(1.1.2.) <u>Théorème</u>.- Les espaces tangents au cône tangent réduit à X en x sont des limites d'espaces tangents à X en x .

Ce théorème est corollaire d'un résultat plus fort que nous allons rappeler (cf [7]).

On sait que, grâce au plongement de (X,x) dans $(\mathbb{C}^{N+1},x)$, les génératrices du cône tangent réduit $|C_{X,x}|$ sont les limites de sécantes de X en x dans le sens suivant (cf [24]) : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $X - x$ qui tend vers x telle que la suite de $\mathbb{P}^N$ des droites $(\overline{xx_n})$ tende vers une limite l , alors $l \in \mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|$. Réciproquement, tout point de $\mathrm{Proj}|C_{X,x}|$ est obtenu de cette façon.

(1.1.3.) Considérons une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non singuliers dans X qui tend vers x . On suppose que les suites $(\overline{xx_n})_{n\in\mathbb{N}}$

et $(T_{x_n}X)_{n\in\mathbb{N}}$ de sécantes et de plans tangents convergent respectivement vers l et T. Un lemme de H. Whitney ([24]) (voir [10]) montre que : $T \supset l$.

Nous avons le théorème suivant (cf [7]) :

(1.1.4.) <u>Théorème</u>.- Il existe un ouvert de Zariski Ω dense dans $\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|$ tel que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans (1.1.3.) et pour laquelle $l \in \Omega$, on ait T tangent à $|C_{X,x}|$ le long de l.

Il est bien clair que le théorème (1.1.4.) entraîne le théorème (1.1.2.).

(1.1.5.) <u>Remarques</u>.- L'ensemble des limites d'espaces tangents au cône réduit $|C_{X,x}|$ en son sommet forme une sous-variété projective de $G(N,d-1)$ qu'on notera $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^{\vee}$ et qui est la <u>variété duale</u> de $\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}| \subset \mathbf{P}^N$.

Le théorème (1.1.2.) dit que : $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^{\vee} \subset |\nu^{-1}(x)|$.

En général on a : $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^{\vee} \neq |\nu^{-1}(x)|$. En effet, si (X,x) est un germe d'hypersurface à singularité isolée, la modification de Nash $\nu : \tilde{X} \longrightarrow X$ est l'éclatement de l'idéal jacobien (cf [16]). Dans ce cas $\dim |\nu^{-1}(x)| = d-1$. Or il existe des hypersurfaces dont la singularité est isolée et le cône tangent réduit en cette singularité est un hyperplan ; ceci entraîne que $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^{\vee}$ est alors un point. Donc si $d \geq 2$, on a bien $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^{\vee} \neq |\nu^{-1}(x)|$ dans ce cas.

Dans le cas où $\dim_x X = 1$, le lemme de Whitney implique qu'on a toujours :

$$(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^{\vee} = |\nu^{-1}(x)|.$$

(1.2) Dans le cas d'un germe d'espace analytique réduit (X,x) général, nous n'avons pas de description générale de l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en x. Dans le cas des germes d'hypersurfaces et surtout pour les surfaces de $(\mathbb{C}^3,0)$, dans [10] et [7] nous avons obtenu des résultats assez précis. Dans le cas de singularités isolées, ceux-ci sont conséquences d'un théorème de B. Teissier dans [20], Chap. 1, (Proposition 2.9).

(1.2.1.) <u>Théorème</u>.- Soit $(X,0)$ un germe d'hypersurface complexe dans $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ défini par l'équation $f = 0$. L'hyperplan $z_0 = 0$ <u>n'est pas</u> limite d'espaces tangents à X en 0 si et seulement si $\partial f/\partial z_0 \mathcal{O}_{X,0}$ est entier sur l'idéal $(\partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_n)\mathcal{O}_{X,0}$ de $\mathcal{O}_{X,0}$.

Pour pouvoir bien interpréter ce théorème, nous rappelons rapidement ce qu'est un élément entier sur un idéal I d'un anneau commutatif noethérien A (cf [13]) :

On dit que $\alpha \in A$ est <u>entier sur l'idéal</u> I de A s'il existe $a_1,\ldots,a_k \in A$ tels que $a_i \in I^i$ et :

$$\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots + a_k = 0$$

Si A est un anneau local analytique complexe (i.e. quotient d'un anneau local de séries entières complexes convergentes) qui définit un germe (Y,y) d'espace analytique complexe, on a (cf [13] théorème 2.1, ou [5] théorème 7.5) :

(1.2.2.) <u>Théorème</u>.- Soit $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ et I un idéal de $\mathcal{O}_{Y,y}$. Soit $\alpha \in A$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) α est entier sur I dans A ;

2) soit $(g_1,\dots,g_k)$ un système de générateurs de I. Il existe un voisinage ouvert U de y dans Y et $C \geq 0$ tel que, pour tout $z \in U$, on ait :

$$|\alpha(z)| \leq C \operatorname{Sup}\left\{g_1(z),\dots,g_k(z)\right\} \quad ;$$

3) pour tout chemin analytique $p : (\mathbb{D},0) \longrightarrow (Y,y)$ la valuation de α en 0 pour p est minorée par la borne inférieure des valuations des générateurs $g_1,\dots,g_k$ de I en 0 pour p :

$$v_p(\alpha) \geq \inf\left\{v_p(g_1),\dots,v_p(g_k)\right\}$$

Une conséquence de (1.2.1.) est :

(1.2.3.) <u>Corollaire</u>.- (B. Teissier [20] Chap. II, Remarque 1.6) Si $(X,0)$ est une hypersurface de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ ayant en 0 une singularité isolée, un hyperplan H de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui passe par 0 n'est pas une limite d'espaces tangents à X en 0 si et seulement si le nombre de Milnor $\mu(X \cap H,0)$ de $X \cap H$ en 0 est minimum.

Rappelons que, si $(X,0)$ est un germe d'hypersurface de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ définie par $f = 0$ et ayant en 0 une singularité isolée, J. Milnor dans [15] a défini le nombre de Milnor :

$$\mu(X,0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_0,\dots,z_n\} \Big/ \left(\partial f/\partial z_0,\dots,\partial f/\partial z_n\right)$$

A l'aide de [17] et des résultats de J. Milnor [15] , on peut montrer que, si $\varepsilon > 0$ est assez petit et $t \in \mathbb{C}$, $0 < |t| \ll \varepsilon$, la variété à bord $F_t = \{f = t\} \cap B_\varepsilon$, où B_ε est la boule de $\mathbb{C}^{n+1}$ centrée en 0 et de rayon ε, a le type d'homotopie d'un bouquet de $\mu(X,0)$ sphères de dimension réelle n (i.e. un ensemble topologique formé de $\mu(X,0)$ sphères de dimension n

ayant un seul point en commun).

Si $(X,0)$ est un germe d'hypersurface de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ à singularité isolée, on remarque que pour un ouvert de Zariski Ω_k de la Grassmanienne $G(n,k-1)$ des k-plans de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui passent par 0, pour tout $E \in \Omega_k$, le nombre de Milnor de $X \cap E$ en 0 est minimum (cf [20]). Comme dans [20], on note pour tout $E \in \Omega_k$:

$$\mu(X \cap E,0) = \mu^{(k)}(X,0)$$

donc :

$$\mu(X,0) = \mu^{(n+1)}(X,0)$$

Le corollaire (1.2.3.) peut donc s'énoncer en disant que l'hyperplan H n'est pas une limite d'espaces tangents à X en 0 si et seulement si $H \in \Omega_n$.

Ce corollaire nous a permis de montrer dans [10] :

(1.2.4.) __Théorème__.- Si $(X,0)$ est une surface dans $(\mathbb{C}^3,0)$ ayant une singularité isolée en 0, l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 est l'union de $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|)^{\vee}$ et d'un nombre fini de droites qui représentent des pinceaux de plans dont les axes sont des génératrices de $C_{X,0}$. On appelle ces génératrices les __tangentes exceptionnelles de__ X __en__ 0.

(1.2.5.) __Remarque__.- Dans [10], dans ce cas où $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$ ayant une singularité isolée, on montre que toutes les génératrices singulières de $|C_{X,0}|$ sont des tangentes exceptionnelles.

Dans [11], nous montrons le résultat suivant :

(1.2.6.) __Théorème__.- Si $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$ ayant une singularité isolée en 0, si $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|)^{\vee}$ est l'ensemble des limites d'espaces tangents en 0 , on a :

1) $C_{X,0}$ est réduit ;

2) $(X,0)$ est équisingulière à $(C_{X,0},0)$.

La notion d'équisingularité dans ce théorème doit s'entendre dans le sens suivant :

(1.2.7.) Soit $f = 0$ une équation de $(X,0)$. Soit $m = m(X,0)$ la multiplicité de X en 0 . L'équation $F = 0$, où $F(x,y,z,t) = t^{-m}f(tx,ty,tz)$, définit dans $(\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C},0)$ un germe d'hypersurface $\mathfrak{X}$, qu'on peut considérer, en projetant sur l'axe $(\mathbb{C},0)$ des t , comme un germe de déformation $\varphi : (\mathfrak{X},0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ de $(C_{X,0},0)$ dont la fibre générale $\mathfrak{X}_t$ sur t est analytiquement isomorphe à X . On remarque qu'en éclatant $\{0\} \times \mathbb{C}$ dans cette hypersurface $\mathfrak{X}$, sous les hypothèses du théorème (1.2.6.) on obtient une résolution des singularités fortes au sens de [21] . De plus, si on projette génériquement $(\mathfrak{X},0)$ sur $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C},0)$, sous les hypothèses de (1.2.6.) le discriminant de cette projection est équisingulier le long de $\{0\} \times \mathbb{C}$ (au sens de [25]). Pour plus de détails le lecteur pourra consulter [11] .

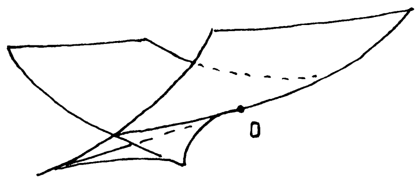
(1.3) Quand $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$ qui n'a pas nécessairement une singularité isolée en 0 , dans [7] nous avons obtenu un résultat analogue à (1.2.4.) :

(1.3.1.) <u>Théorème</u>.- Soit $(X,0) \subset (\mathbb{C}^3,0)$ un germe de surface analytique complexe (réduite). La conclusion de (1.2.4.) reste valable. Les droites qui représentent les pinceaux de plans sont des génératrices de $C_{X,0}$ qu'on appelle les tangentes exceptionnelles de X en 0 .

Dans le cas où 0 n'est pas une singularité isolée, on ne peut pas utiliser le corollaire (1.2.3.), mais on a encore :

Si le plan H passant par 0 donne $\mu(X \cap H,0)$ minimum, alors H n'est pas limite d'espaces tangents à X en 0 . Cette implication suffit pour établir (1.3.1.) comme (1.2.4.) (cf [7]).

Attention ! le corollaire (1.2.3.) n'est pas vrai si la singularité n'est pas isolée. En effet, dans le cas de la queue d'aronde, discriminant du polynôme général du 4^e degré en X sans terme de degré 3 :



On sait qu'en 0 la queue d'aronde n'a qu'une seule limite d'espace tangent, à savoir le plan du cône tangent, et on peut trouver un plan H tel que $(X \cap H,0)$ n'ait pas la topologie générique (i.e. $\mu(X \cap H,0)$ minimum d'après [9]) et qui est transverse au cône tangent.

De plus dans cet exemple, les limites d'espaces tangents coïncident avec $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|)^{\vee}$, i.e. il n'y a pas de tangentes exceptionnelles et on ne peut raisonnablement pas dire que $(X,0)$ et $(C_{X,0},0)$ puissent être équisinguliers. Mais dans cet exemple, $C_{X,0}$

n'est pas réduit. En fait, dans [11] nous démontrons :

(1.3.2.) <u>Théorème</u>.- Soit $(X,0)$ un germe de surface analytique complexe dans $(\mathbb{C}^3,0)$. On suppose que le cône tangent de X en 0 $C_{X,0}$ est réduit et que l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 égale $(\mathrm{Proj}\,|\,C_{X,0}|)^{\vee}$, alors $(X,0)$ est équisingulière à $(C_{X,0},0)$.

Pour plus de détails, le lecteur pourra encore consulter [11].

De [10], [7] et [11] nous tirons les caractérisations suivantes des tangentes exceptionnelles :

(1.3.3.) <u>Théorème</u>.- Soit $(X,0)$ une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$. Soit l une génératrice de $C_{X,0}$ qui n'est pas tangente en 0 au lieu singulier Σ de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) la génératrice l est une tangente exceptionnelle ;

2) soit $e : X' \longrightarrow X$ l'éclatement de $\{0\}$ dans X, la surface X' n'est pas équisingulière le long de $e^{-1}(0)$ au point de $e^{-1}(0)$ qui représente l ;

3) pour toute projection $\pi : (X,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ de degré égal à la multiplicité de X en 0, l est tangente à une composante du lieu critique de π ;

4) soit $\nu' : \widetilde{X}' \longrightarrow X'$ l'éclatement de l'idéal $(\partial\mathcal{H}/\partial x, \partial\mathcal{H}/\partial y, \partial\mathcal{H}/\partial z)\mathcal{O}_{X'}$ dans X', alors ν' est fini au-dessus de l ;

5) en tout point de $l \times \{0\} - 0$, la partie non singulière de $\mathcal{X} - \mathcal{X}_0$ (cf (1.2.7.)) ne satisfait pas la <u>condition de Thom</u> le long de $\mathcal{X}_0$ relativement à $\varphi : (\mathcal{X},0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$.

Rappelons quelle est la <u>condition de Thom</u> (cf [6]) :

Soit $g : Z \longrightarrow \mathbb{D}$ un morphisme analytique à valeur dans un disque ouvert $\mathbb{D}$. Soient Z_α et Z_β deux sous-espaces non singuliers localement fermés dans Z. On suppose que les restrictions de g à Z_α et Z_β sont de rang constant et que $Z_\alpha \subset \overline{Z_\beta}$. On dit que Z_β satisfait la condition de Thom en $z \in Z_\alpha$ le long de Z_α relativement à g si pour toute suite $(z_n \in Z_\beta)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers z et pour laquelle $\lim_{n\to\infty} T_{z_n}(g^{-1}(g(z_n)) \cap Z_\beta)$ existe on a :

$$\lim_{n\to\infty} T_{z_n}(g^{-1}(g(z_n)) \cap Z_\beta) \supset T_z(g^{-1}(g(z)) \cap Z_\alpha)$$

(1.4) Dans [7] nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 soit fini quand $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$.

Pour cela considérons une courbe plane $(C,0)$. On associe à $(C,0)$ un invariant topologique de $(C,0)$:

$$\Delta(C,0) = \mu(C,0) + m(C,0) - 1$$

appelé le <u>discriminant de</u> C <u>en</u> 0 (cf [26]). Ce nombre est aussi la multiplicité du point discriminant d'une projection de $(C,0)$ sur $(\mathbb{C},0)$ de degré $m(C,0)$.

Soit $l : (\mathbb{C}^3,0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ une forme linéaire générale par rapport à $(X,0)$. Alors pour t assez petit non nul $l^{-1}(t) \cap X$ est une courbe plane ayant ses singularités en $x_1(t),\ldots,x_k(t)$. On a alors :

(1.4.1.) <u>Théorème</u>.- (cf [7]) L'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 est fini si et seulement si pour toute forme linéaire

$l : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ assez générale, on a :

$$\Delta(l^{-1}(0) \cap X, 0) = \sum_{i=1}^{k} \Delta(l^{-1}(t) \cap X, x_i(t))$$

pour $t \neq 0$ assez petit.

(1.4.2.) <u>Remarques</u>.- 1) Si le lieu singulier Σ de X est non singulier en 0, d'après le critère discriminant de O. Zariski (cf [25]), l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 est fini si et seulement si X est équisingulier en 0 le long de Σ.

2) Le discriminant $\Delta(C,0)$ de $(C,0)$ peut se "voir" topologiquement de la façon suivante. Soit C_v la translatée de C dans $\mathbb{C}^3$ par un vecteur v assez général. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit ; si $0 < \|\overline{v}\| \ll \varepsilon$, $S_\varepsilon \cap C$ et $S_\varepsilon \cap C_v$ sont deux entrelacements dont le nombre d'enlacements égale $\Delta(C,0)$. En fait, ceci résulte de ce que le nombre de points de $C_v \cap C$ dans B_ε égale $\Delta(C,0)$.

3) Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe projective plane réduite irréductible. Si C n'est pas une droite projective, l'ensemble des droites projectives tangentes à C forme une courbe $C^\vee$ dans l'espace projectif $\check{\mathbb{P}}^2$ des droites projectives dans $\mathbb{P}^2$. La deuxième formule de Plücker donne le degré $\check{d}$ de $C^\vee$ en fonction du degré d de C et des discriminants des singularités $x_1,\ldots,x_k$ de C :

$$\check{d} = d(d-1) - \sum_{i=1}^{k} \Delta(C,x_i)$$

(grâce à 2) ci-dessus, ceci est démontré dans [22], Chap. I, 15, p. 43).

2. La formule de González-Verdier.

(2.1) Soit $(X,0)$ un germe d'espace analytique réduit équidimensionnel de dimension d. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\tilde{e}} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle \nu'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ X' & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

où $e : X' \longrightarrow X$ est l'éclatement de $\{0\}$ dans X, ν est la modification de Nash, $\tilde{e}$ est l'éclatement de $\nu^{-1}(0)$ et $\nu' : \mathcal{X} \longrightarrow X'$ est l'unique morphisme analytique qui rende le diagramme commutatif. On rappelle que $e^{-1}(0)$ est isomorphe à Proj $C_{X,0}$. On note $Y' = e^{-1}(0)$, $\tilde{Y} = \nu^{-1}(0)$ et

$\mathcal{Y} = \tilde{e}^{-1}(\tilde{Y}) = \nu'^{-1}(Y')$

Sur $\tilde{X}$ on a le fibré de Nash $\tilde{T} \longrightarrow \tilde{X}$. L'image inverse de ce fibré par $\tilde{e}$ est un fibré T sur $\mathcal{X}$. De même sur X' on a le fibré $N' \longrightarrow X'$ construit de la façon suivante :

Supposons que $(X,0) \subset (\mathbb{C}^{N+1},0)$, on peut considérer X' comme la fermeture dans $X \times \mathbb{P}^N$ du graphe de l'application de $X - \{0\}$ dans $\mathbb{P}^N$ qui à x fait correspondre la droite $\overline{0x}$. On a donc une projection $X' \xrightarrow{\lambda} \mathbb{P}^N$, le fibré $N' \longrightarrow X'$ est l'image inverse du fibré canonique de $\mathbb{P}^N$ par λ. L'image inverse du fibré $N' \longrightarrow X'$ par ν' donne un fibré $N \longrightarrow \mathcal{X}$.

(En fait, le fibré de Nash $\tilde{T} \longrightarrow \tilde{X}$ est image inverse, par le morphisme de Gauss $\tilde{X} \xrightarrow{\gamma} G$, du fibré universel de la Grassmanienne $G = G(N,d-1)$ des d-plans de $\mathbb{C}^{N+1}$ passant par 0).

Dans [4], G. González-Sprinberg et Verdier ont établi la formule suivante permettant de calculer l'obstruction d'Euler de X en 0 :

(2.1.1.) <u>Théorème</u>.- $Eu_0(X) = \deg\left(c_{d-1}(T-N) \cap [\mathcal{Y}]\right)$

Le symbole $c_{d-1}(T-N)$ désigne le terme de degré $d-1$ dans $\dfrac{c_*(T)}{c_*(N)}$, i.e. :

(2.1.2.) $$c_{d-1}(T-N) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i c_{d-i-1}(T)\, c_1(N)^i$$

car $c_*(N) = 1 + c_1(N)$
et $[\mathcal{Y}]$ désigne la classe fondamentale de $\mathcal{Y}$.

En fait, dans [12] nous montrons que :

(2.1.3) $Eu_0(X) = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i m_{d-i}$, où m_{d-i} est la multiplicité en 0 de la variété polaire de $(X,0)$ de dimension $d-i$. Nous allons montrer cette formule dans le cas où $d = 2$. Dans ce cas, (2.1.2) donne :

(2.1.4) $(d=2)$ $c_1(T-N) = c_1(T) - c_1(N)$

(2.2) Dans ce paragraphe, plaçons-nous dans le cas où $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$. On reprend les notations de (2.1). On remarque que le théorème (1.1.4.) peut s'interpréter de la façon suivante :

(2.2.1.) <u>Théorème</u>.- Pour tout point y' d'un ouvert de Zariski dense Ω' dans Y' , $\nu'^{-1}(y')$ ne contient qu'un seul point.

(2.2.2.) Ainsi, au-dessus d'un voisinage de tout point $y' \in \Omega'$, le morphisme ν' induit un morphisme biméromorphe fini.

De même, le théorème (1.3.1.) peut se traduire de la façon suivante :

(2.2.3.) <u>Théorème</u>.- Pour tout point $\tilde{y}$ d'un ouvert de Zariski dense $\tilde{\Omega}$ de $\tilde{Y}$, $\tilde{e}^{-1}(\tilde{y})$ ne contient qu'un seul point.

Démonstration de (2.2.1.) et (2.2.3.) :

On remarque que $\eta = \nu \circ \tilde{e} = e \circ \nu'$ est l'éclatement de l'idéal produit de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ qui définit $\{0\}$ de X et de l'idéal jacobien $J(f)$ engendré par $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial y$ dans $\mathcal{O}_{X,0}$, avec $f(x,y,z) = 0$ équation de $(X,0)$ dans $(\mathbb{C}^3,0)$.

On peut donc considérer $\mathcal{X}$ comme la fermeture dans $X \times \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$ du graphe du morphisme analytique de $X - \Sigma$ dans $\mathbb{P}^N \times G$ qui à un point $x \in X - \Sigma$ non singulier de X fait correspondre le couple de la droite $0x \in \mathbb{P}^2$ et du plan tangent $T_x X \in G(2,1) = \check{\mathbb{P}}^2$.

On remarque alors que $\tilde{e}$ est induit par la projection $X \times \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow X \times \check{\mathbb{P}}^2$, que ν' est induit par la projection $X \times \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow X \times \mathbb{P}^2$ et que η est induit par la projection $X \times \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow X$.

Soit l une génératrice dans l'ouvert Ω de (1.1.4.). Le théorème (1.1.4.) montre que $|\nu'^{-1}(0,l)| = \{(0,l,T)\}$ où T est le plan tangent à $|C_{X,0}|$ le long de l. Ceci démontre (2.2.1.) en prenant $\Omega' = \{0\} \times \Omega$.

Soient $C_1,\dots,C_k$ les composantes de $\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|$. Soient $\check{C}_1,\dots,\check{C}_r$ les composantes de dimension 1 de $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|)^\vee$ duales de $C_1,\dots,C_r$, i.e. $C_{r+1},\dots,C_k$ sont des droites.

On a un ouvert de Zariski dense Ω_i de C_i $(i = 1,\dots,r)$ tel que pour tout $l \in \Omega_i$, le plan tangent à $|C_{X,0}|$ le long de l coupe transversalement $|C_{X,0}| - l$.

On remarque ue si $(0,T) \in \tilde{e}(\nu^{-1}(\Omega_i))$ $(i = 1,\dots,r)$, on a $\tilde{e}^{-1}((0,T)) = (0,l,T)$ où l est l'unique génératrice de

$|C_{X,0}|$ le long de laquelle T est tangent.

Soient $\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_s$ les droites de $\check{\mathbb{P}}^2$ qui représentent les pinceaux de plans dont les axes sont les tangentes exceptionnelles $l_1,\dots,l_s$. On remarque qu'il existe un ouvert de Zariski dense V_j ($j = 1,\dots,s$) de $\mathcal{L}_j$ tel que pour tout $T \in V_j$, les génératrices de $T \cap |C_{X,0}|$ sauf l_j sont dans l'ouvert Ω de (1.1.4.) et T coupe $|C_{X,0}|$ transversalement le long de ces génératrices. On remarque alors que pour tout $(0,T)$, tel que $T \in V_j$, on a : $|\tilde{e}^{-1}(0,T)| = \{(0,l_j,T)\}$. On choisit donc :

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{r} \check{e}(\nu^{-1}(\Omega_i)) \cup \bigcup_{j=1}^{s} V_j \ .$$

Ceci démontre (2.2.3.).

(2.3) <u>Calcul de l'obstruction d'Euler</u>.

Soit $(X,0)$ un germe de surface analytique complexe (réduite) dans $(\mathbb{C}^3,0)$. Dans [7] nous avons défini la partie verticale du lieu critique d'une projection générale π de $(X,0)$ sur $(\mathbb{C}^2,0)$. Soit Γ^* l'espace critique de la restriction à la partie non singulière $X - \Sigma$ de X d'une projection assez générale π de $(X,0)$ sur $(\mathbb{C}^2,0)$ (on remarque que Γ^* peut être vide : cf par exemple l'exemple ci-dessus dans (1.3) de la queue d'aronde ; en fait on peut montrer que Γ^* est vide si et seulement si les limites d'espaces tangents à X en 0 sont en nombre fini). Si π est assez générale et Γ^* non vide, Γ^* est non singulière. Dans ce cas, la fermeture de Γ^* dans X s'appelle la partie verticale Γ du lieu critique de π (dans [12] cette partie verticale est une courbe polaire). On a alors :

(2.3.1.) <u>Théorème</u>.- Si $(X,0)$ est un germe de surface analytique complexe dans $(\mathbb{C}^3,0)$, on a :

$$Eu_0(X) = m(X,0) - m(\Gamma,0)$$

où Γ est la partie verticale d'une projection assez générale de $(X,0)$ sur $(\mathbb{C}^2,0)$.

On remarque que $(\Gamma,0)$ est la variété éclaire de dimension 1 de $(X,5)$.

Nous donnerons ci-dessous les idées de la démonstration. Un résultat plus général est démontré dans [12] . Nous allons tout d'abord donner des corollaires.

On peut calculer $m(\Gamma,0)$ de la façon suivante. Soit $l : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire générale relativement à X . Soit $t \neq 0$ assez petit. Les points singuliers de $l^{-1}(t) \cap X = X_t$ sont $x_1(t),\ldots,x_k(t)$; on a alors :

(2.3.2.) $m(\Gamma,0) = \Delta(X_0,0) - \sum_{i=1}^{k} \Delta(X_t,x_i(t))$

(On retrouve ainsi que $m(\Gamma,0) = 0$, i.e. $\Gamma = \emptyset$ si et seulement si X n'a qu'un nombre fini de limites d'espaces tangents en 0).

Cette formule (2.3.2.) est obtenue de la façon suivante :

Si $\pi : (X,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ est assez générale, on remarque (cf [12] (5.1.2)) que $m(\Gamma,0) = m(|\pi(\Gamma)|,0)$. En fait, si $(\pi(\Gamma),0)$ est défini comme image directe de $(\Gamma,0)$, $\pi(\Gamma)$ est réduit. Or la multiplicité du discriminant de π égale $\Delta(X_0,0)$: cette multiplicité égale la multiplicité d'intersection d'une droite générale L de $\mathbb{C}^2$ passant par 0 et du discriminant $\Delta(\pi)$ de π . Or $L \cap \Delta(\pi)$ est le discriminant de $\pi_L : (\pi^{-1}(L),0) \longrightarrow (L,0)$. D'après (1.4) la multiplicité du discriminant de π_L est égale à $\Delta(\pi^{-1}(L),0)$. Si π et L sont assez généraux, on a bien $\Delta(\pi^{-1}(L),0) = \Delta(l^{-1}(0) \cap X,0)$ avec

$l : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ assez général.

La multiplicité de $\pi(\Gamma)$ en 0 est obtenue en retranchant de $m(\Delta(\pi),0)$ la "contribution" de $(\pi(\Sigma),0)$. Un argument comme ci-dessus donne que cette contribution est précisément
$\sum_{i=1}^{k} \Delta(X_t, x_i(t))$.

Soient $(\Sigma_j)_{1 \leq j \leq s}$ les branches analytiques de Σ. Soit ν_i la multiplicité de Σ_i. Soit μ_i le nombre de Milnor et m_i la multiplicité de X_t en un point singulier de X_t sur Σ_i.

On a :

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta(X_t, x_i(t)) = \sum_{i=1}^{s} \nu_i(\mu_i + m_i - 1)$$

On obtient ainsi :

$$m(\Gamma, 0) = \Delta(X_o, 0) - \sum_{i=1}^{s} \nu_i(\mu_i + m_i - 1)$$

Donc :

$$Eu_o(X) = m(X,0) - \Delta(X_o,0) + \sum_{i=1}^{s} \nu_i(\mu_i + m_i - 1)$$

Comme $\Delta(X_o,0) = \mu(X_o,0) + m(X,0) - 1$ on obtient :

$$(2.3.3.) \quad Eu_o(X) = 1 - \mu(X_o,0) + \sum_{i=1}^{s} \nu_i(\mu_i + m_i - 1)$$

En remarquant que $1 - \mu(X_o,0) + \sum_{i=1}^{s} \nu_i \mu_i$ égale la caractéristique d'Euler-Poincaré de $(X_t \cap B_\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit et X_t la fibre sur $t \in \mathbb{C}$ par une forme linéaire : $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ assez générale pour $t \neq 0$ et $|t| \ll \varepsilon$, on a :

$$(2.3.4.) \quad Eu_o(X) = \chi(X_t \cap B_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{s} \nu_i(m_i - 1)$$

On retrouve ainsi une formule de Dubson (cf [3]) qu'on généralise aussi dans [12] (6.1.9).

De plus, si la singularité de X en 0 est isolée on a :

$Eu_0(X) = \chi(X_t \cap B_\varepsilon)$.

Revenons au théorème (2.3.1.).

Soit $\mathcal{L}$ une droite de $\check{\mathbb{P}}^2$. Cette droite représente en homologie l'obstruction qui donne la première classe de Chern du fibré universel sur $\check{\mathbb{P}}^2$. Si $\check{\mathcal{L}}$ est assez générale, son image inverse $\tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(\check{\mathcal{L}}))$ par la composée du morphisme de Gauss $\tilde{X} \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$ et de $\tilde{e}$ représente dans l'homologie de $\mathfrak{X}$ l'obstruction qui donne la première classe de Chern de $T' \longrightarrow \mathfrak{X}$. A cause du changement de signe en dimension 1 entre la classe de Chern définie par obstruction et celle définie classiquement, on a :

$$\deg(c_1(T') \cap [\mathcal{Y}]) = - i(\tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(\check{\mathcal{L}})), \mathcal{Y})_{\mathfrak{X}}$$

si $\check{\mathcal{L}}$ est assez général, avec $i(\, , \,)$ désignant la forme d'intersection dans $\mathfrak{X}$.

Comme $\check{\mathcal{L}}$ est assez général, $\gamma^{-1}(\check{\mathcal{L}})$ ne coupe $\tilde{Y}$ qu'en des points contenus dans l'ouvert $\tilde{\Omega}$ de (2.2.3.). On obtient ainsi :

$$i(\tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(\check{\mathcal{L}})), \mathcal{Y})_{\mathfrak{X}} = i(\gamma^{-1}(\check{\mathcal{L}}), \tilde{Y})_{\tilde{X}}$$

car sur $\tilde{\Omega}$, $\tilde{e}$ est fini et biméromorphe (cf (2.2.3.).

Dans [12] on montre alors que $i(\gamma^{-1}(\check{\mathcal{L}}), \tilde{Y})_{\tilde{X}}$ est la multiplicité de la partie verticale Γ d'une projection générale $(X,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ (cf (2.3)) , si $\check{\mathcal{L}}$ est assez générale.

De même si $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2$ est une droite assez générale, $\nu'^{-1}(\lambda^{-1}(\mathcal{L}))$ représente dans l'homologie l'obstruction qui donne la première classe de Chern du fibré $N \longrightarrow \mathfrak{X}$ (avec le $\lambda : X' \longrightarrow \mathbb{P}^2$ défini dans (2.1)).

On montre alors :

$$\deg(c_1(N') \cap [\mathcal{Y}]) = - i(\lambda^{-1}(\mathcal{L}), Y')_{X'}$$

si $\mathcal{L}$ est assez général. Mais :

$$i(\lambda^{-1}(\mathcal{L}), Y')_{X'} = m(X,0) \quad .$$

Dans [4] G. González-Sprinberg montre en fait :

$$[\mathcal{Y}] = \sum_{\alpha=1}^{k} m_{\alpha} [C_{\alpha}] + \sum_{\beta=1}^{s} p_{\beta} [\mathcal{L}_{\beta}]$$

où (C_{α}) sont les composantes de $\mathcal{Y}$ qui se projettent par ν' sur les composantes de Y' et $\mathcal{L}_{\beta}$ sont les composantes de $\mathcal{Y}$ qui se projettent sur les pinceaux de $\check{\mathbb{P}}^2$ dans $\tilde{Y}$.

On a : $\sum_{\alpha=1}^{k} m_{\alpha} = m(X,0)$

et $\sum_{\alpha=1}^{k} m_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} p_{\beta} = m(\Gamma,0)$

si $C_1, \ldots, C_k$ sont les composantes de $\mathcal{Y}$ dont l'image par ν' ne sont pas des droites projectives.

(2.3.5.) Un argument de semi-continuité montre que $m_1, \ldots, m_k$ sont les multiplicités de chacune des composantes de Proj $C_{X,0}$ et $p_1, \ldots p_s$ sont les multiplicités des courbes dans $(\Gamma,0)$ dont les tangentes sont les tangentes exceptionnelles de X en 0 .

3. <u>Compléments</u>.

(3.1) Dans [12] on trouve une formule générale pour calculer le nombre d'Euler d'un germe d'espace analytique complexe réduit $(X,0)$ comme somme alternée de multiplicités de variétés polaires.

La formule générale obtenue montre que la relation (2.3.4.) de Dubson est valable pour tout germe de surface réduite $(X,0)$ en utilisant [8] .

En fait, dans [12] on donne une formule qui généralise (2.3.4.) .

De plus, cette formule de [12] permet d'expliciter la classe de Chern-Mac Pherson-Schwartz (cf [14] et [19], voir aussi [1]) de façon géométrique.

(3.2) Grâce aux relations entre cycles polaires et classe de Chern-Mather (cf [18]) données par Todd, on obtient alors dans [12] des généralisations des formules de Plücker (cf [18]) comme théorèmes "à la Gauss-Bonnet" (voir aussi [2]).

(3.2.1.) Exemples.- a) Soit $X \subset \mathbb{P}^2$ une courbe projective irréductible et réduite. Soit $c_*(X)$ sa classe de Chern-Mac Pherson-Schwartz et $c_*^M(X)$ sa classe de Chern-Mather. On a :

$$c_*(X)(1_X) = c_*^M(X) - \sum_{i=1}^{k} (Eu_{x_i}(X) - 1)\ \mathrm{incl}_* c_*^M(\{x_i\})$$

où les x_i sont les points singuliers de X. On a dans ce cas : $Eu_{x_i}(X) = m(X,x_i)$, car X est une courbe. En appliquant les propriétés fonctorielles des classes de Chern-Mac Pherson-Schwartz (cf [14]), on obtient :

$$\chi(X) = -\check{d} + 2d - \sum_{i=1}^{k} (Eu_{x_i}(X) - 1)$$

où $\check{d}$ est le degré de la courbe duale de X. Dans (1.4.2.) 3), on a vu (2e formule de Plücker) :

$$\check{d} = d(d-1) - \sum_{i=1}^{k} (\mu(X,x_i) + m(X,x_i) - 1)$$

On vérifie bien :

$$\chi(X) = 2 - (d-1)(d-2) + \sum_{i=1}^{k} (\mu(X,x_i) + m(X,x_i) - 1)$$
$$- \sum_{i=1}^{k} (Eu_{x_i}(X) - 1) .$$

Ce calcul est encore valable pour une courbe projective quelconque, en remarquant (cf [12] (6.2.6.1.)) qu'en degré 0 le degré de $C_1^M(X)$ égale la somme du nombre d'Euler en 0 du cône affine sur X et de la multiplicité de ce cône.

b) Si $X \subset \mathbb{P}^3$ est une surface projective irréductible et réduite, on a :

$$C_*(X)(1_X) = C_*^M(X) - \sum_{i=1}^{s} (E_i-1)\, C_*^M(\Sigma_i)$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} \left(- Eu_{x_j}(X) + Eu_{x_j}(\Sigma_i)(E_i-1) - 1\right) \{x_i\}$$

où les Σ_i $(i = 1,\ldots,s)$ sont les composantes du lieu singulier Σ de X et x_j sont les points de Σ_i où X n'est pas équisingulière le long de Σ, E_i est le nombre d'Euler en tout point de Σ_i où X est équisingulière le long de Σ_i (en fait E_i est la multiplicité m_i de ces points dans X).

On obtient une formule qui donne la caractéristique d'Euler de X en utilisant encore la fonctorialité de la classe de Mac Pherson-Schwartz (cf [14]) :

$$\chi(X) = \check{d} - 2\check{d}_1 + 3d + \sum_{i=1}^{s} (1-E_i)(Eu_0(\tilde{\Sigma}_i) + m_0(\tilde{\Sigma}_i))$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} (- Eu_{x_j}(X) + Eu_{x_j}(\Sigma_i)(E_i-1) - 1)$$

où $\check{d}$ est le degré de la surface duale de X, $\check{d}_1$ est le degré de la courbe duale d'une section hyperplane générale de X et d est le degré de X, d'autre part $\tilde{\Sigma}_i$ est le cône affine dans $\mathbb{C}^4$ défini par Σ_i et $Eu_0(\tilde{\Sigma}_i)$ et $m_0(\tilde{\Sigma}_i)$ sont respectivement son nombre d'Euler en 0 et sa multiplicité (cf la remarque à la fin de l'exemple (3.2.1) a)).

Comme dans l'exemple a) ci-dessus, on remarque que cette formule reste encore valable en notant que le degré de $C_2^M(X)$ égale la somme du nombre d' Euler en 0 du cône affine $\tilde{X}$, de celui d'une section hyperplane générique et de celui d'une section plane générique (cf [12] (6.2.6.1.)).

Quand $X \subset \mathbb{P}^3$ n'a que des singularités isolées, comme $Eu_{x_j}(X) = 1 - \mu^{(2)}(X,x_j)$, où $\mu^{(2)}(X,x_j)$ est le nombre de Milnor d'une section plane générique de X par un espace non singulier qui passe par x_j, on retrouve la formule de Plücker établie par Teissier pour les hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$ (cf [18]).

c) Dans le cas où $(X,0)$ est un germe de surface analytique réduite dans $(\mathbb{C}^3,0)$ et à singularité isolée, A. N. Varchenko (cf [23]) a montré que, si $M(\varepsilon)$ est l'intersection de X avec une sphère S_ε centrée en 0 de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit, l'intégrale :

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{M(\varepsilon)} \theta \wedge \alpha$$

où θ est la forme sur $M(\varepsilon)$ restrictionde l'image inverse de la 2-forme de Kälher sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par l'application de $X - (0)$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui à $x \in X - (0)$ fait correspondre la droite complexe des vecteurs de T_xX orthogonaux à x pour la métrique hermitienne de $\mathbb{C}^3$ et α est la forme $\dfrac{\langle dZ, Z \rangle}{\|Z\|^2}$ (où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit hermitien de $\mathbb{C}^3$), tend vers un entier a_{oo} qui n'est autre que $Eu_o(X)$.

Le lecteur trouvera dans [12] d'autres exemples.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. BRASSELET, Classes de M.H. Schwartz et classes de Mac Pherson, in Séminaire Douady-Verdier 1978-1979, Ecole Normale Supérieure, Paris.

[2] A. DUBSON, Classes caractéristiques des variétés singulières, C.R.A.S., t. 287, Série A, p. 237-239.

[3] A. DUBSON, Exposé au Séminaire Douady-Verdier 1978-1979, Ecole Normale Supérieure, Paris.

[4] G. GONZALEZ-SPRINBERG, L'obstruction locale d'Euler et le théorème de Mac Pherson, in Séminaire Douady-Verdier 1978-1979, Ecole Normale Supérieure, Paris.

[5] H. HIRONAKA, Introduction to the theory of infinitely near singular points, Mem. Mat. Ins. Jorge Juan n° 28, Madrid 1974.

[6] H. HIRONAKA, Stratification and flatness, in Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff 1977.

[7] LÊ Dũng Tráng, Limites d'espaces tangents sur les surfaces, in Proc. of the symposium on algebraic singularities at Rheinhardsbrunn, Acad. Leopoldina, Halle, R.D.A.

[8] LÊ Dũng Tráng, Sur les cycles évanouissants des espaces analytiques, Note aux C.R.A.S., t. 288, p. 283-286 (1979)

[9] Lê Dũng Tráng-C.P. RAMANUJAM, The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, Amer. J. Math. 98 (1976), 67-78.

[10] LÊ Dũng Tráng-J.P.G. HENRY, Limites d'espaces tangents, in Séminaire sur les fonctions de plusieurs variables complexes (Prof. Norguet), Springer Lecture Notes n° 482 .

[11] LÊ Dũng Tráng-B. TEISSIER, Sur la géométrie des surfaces complexes I. Tangentes exceptionnelles, in Amer. J. Math. 101,(1979)(Avril).

[12] LÊ Dũng Tráng-B. TEISSIER, Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, à paraître.

[13] M. LEJEUNE-JALABERT-B. TEISSIER, Clôture intégrale des idéaux et équisingularité, Sém. au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 1974, Pub. du Laboratoire de mathématiques pures de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[14] R. MAC PHERSON, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Maths., vol. 100, n° 2 (1974), p. 423-432.

[15] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Stud. 61, Princeton, 1968.

[16] A. NOBILE, Some properties of the Nash blowing-up, Pacific Journal of Maths 60 (1975), p. 297-305.

[17] V.P. PALAMODOV, On the multiplicity of holomorphic mappings, Funk. Anal. i ievo priloj., 1967, p. 54-65.

[18] R. PIENE, Cycles polaires et classes de Chern, Séminaire sur les singularités des surfaces 1977-1978, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, F-91128 Palaiseau Cedex.

[19] M. H. SCHWARTZ, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, C.R.A.S. 1965, t. 260, p. 3262-3264 et 3535-3537.

[20] B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, in Singularités à Cargèse 1972, Astérisque 7-8, S.M.F., Paris.

[21] B. TEISSIER, Cycles évanescents et résolution simultanée, Sém. sur les singularités de surfaces 1976-1977, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, F-91128 Palaiseau Cedex.

[22] G. VALIRON, Cours d'Analyse Mathématique, Equations fonctionnelles, Applications, Masson et Cie, Ed. 1945.

[23] A.N. VARCHENKO, Uspekhi Mat. Naouk Tom 33, 6, (1978) p. 199-200.

[24] H. WHITNEY, Local properties of analytic varieties, in Differential and Combinatorial topology, Pub. Princeton U. P., 1965.

[25] O. ZARISKI, Studies in equisingularity I & II, Amer. J. Math. 87 (1965).

[26] O. ZARISKI, Contributions to problem of equisingularity, Problems in Algebraic Geometry, C.I.M.E., Varenna 1969, Edizioni Cremonese, Roma.