

# *Astérisque*

G. LAUMON

**Majorations de sommes trigonométriques  
(d'après P. Deligne et N. Katz)**

*Astérisque*, tome 82-83 (1981), p. 221-258

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1981\\_\\_82-83\\_\\_221\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__221_0)

© Société mathématique de France, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Séminaire E.N.S. (1978-1979)

Exposé n° 10

MAJORATIONS DE SOMMES TRIGONOMETRIQUES

(d'après P. DELIGNE et N. KATZ)

par G. LAUMON

0.- Introduction

L'objet de cet exposé est de montrer comment les conjectures de Weil, sous leur forme "forte", démontrées par Deligne [3], et des formules du type Grothendieck-Ogg-Safarevič en dimension quelconque permettent de majorer des sommes trigonométriques.

Dans le numéro 1, on rappelle (cf. [1]) comment les sommes trigonométriques, indexées par les solutions, modulo  $p$ , d'un système d'équations polynomiales, peuvent s'interpréter comme trace de Frobenius agissant sur des espaces de cohomologie  $l$ -adique.

Dans le numéro 2, on rappelle les résultats généraux de majoration de telles sommes (cf. [1]). Les résultats qui nous serviront dans la suite de l'exposé sont rassemblés en 2.2.3.

Dans le numéro 3, on fait une étude locale à l'infini de revêtements d'Artin-Schreier. Cette étude, conjuguée avec les résultats généraux du numéro 2, conduit à des majorations du type (cf. 4.1.1)

$$|S_n| \leq A.p^n$$

où  $S_n$  est une somme trigonométrique indexée par les points, à valeurs dans le corps  $\mathbb{F}_p$ , d'une surface. De plus, ces majorations sont les meilleures possibles : on a, en effet, (cf. 4.1.1)

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|S_n|}{p^n} = A.$$

Il reste à déterminer  $A$ . C'est un problème difficile et non

résolu, en général.

Katz a apporté une réponse partielle à ce problème [6].

Dans le numéro 4, on explique le plan de la démonstration de Katz. Il y a essentiellement deux parties : une partie purement géométrique, c'est l'objet du numéro 5, et une partie arithmétique où l'on calcule "à la Weil" la somme trigonométrique

$$S_n = \sum_{\substack{x_1^d + x_2^d + x_3^d + 1 = 0 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}_p^n}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} x_1\right)$$

c'est l'objet du numéro 6.

## 1.- Traduction cohomologique des sommes trigonométriques [1], [9].

1.1. Soit  $\mathbb{F}_q$  un corps fini de caractéristique  $p$ . Soit  $\mathbb{F}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{F}_q$ . On notera  $\mathbb{F}_q^n$  l'unique sous-corps à  $q^n$  élément de  $\mathbb{F}$ . On utilisera la convention de Deligne (SGA 4 1/2, [Rapport]) consistant à noter par un symbole affecté de l'indice  $\circ$  un objet "sur  $\mathbb{F}_q$ ", le même symbole sans l'indice  $\circ$  désignant l'objet déduit par extension des scalaires de  $\mathbb{F}_q$  à  $\mathbb{F}$ .

Soit  $U_\circ = \text{Spec}(A_\circ)$  une variété algébrique affine sur  $\mathbb{F}_q$  et soit  $f_\circ \in A_\circ$ .

Soit  $\psi : \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{C}^*$  un caractère additif non trivial (par exemple, le caractère induit par l'homomorphisme  $a \mapsto \exp\left(\frac{2\pi i a}{p}\right)$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}^*$ ). On notera  $\psi_n : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{C}^*$  le caractère  $\psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{F}_q^n/\mathbb{F}_p}$ .

On s'intéresse aux sommes trigonométriques du type :

$$(1.1.1) \quad S_n = S_n(U_o, f_o) = \sum_{x \in U_o(\mathbb{F}_q^n)} \Psi_n(f_o(x))$$

Exemples. - 1) Sommes de Kloosterman [1]

$$S_n = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_N = 1 \\ x_1, \dots, x_N \in \mathbb{F}_q^n}} \Psi_n(x_1 + \dots + x_N)$$

2) Sommes indexées par une hypersurface de Fermat (voir le numéro 6)

$$S_n = \sum_{\substack{x_1^d + \dots + x_N^d + 1 = 0 \\ x_1, \dots, x_N \in \mathbb{F}_q^n}} \Psi_n(x_1)$$

1.2. L'interprétation cohomologique de telles sommes trigonométriques fait intervenir le revêtement d'Artin-Schreier de  $U_o$ , d'équation  $t^p - t = f_o$ ,

$$U'_o \xrightarrow{\pi_o} U_o$$

où

$$U'_o = \text{Spec}(A_o[t]/(t^p - t - f_o))$$

Ce revêtement est étale, fini, galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{F}_p$ ;  $i \in \mathbb{F}_p$  opère sur  $U'_o$  par  $t \mapsto t + i$ .

Notons  $F_o$  et  $F'_o$  les endomorphismes de Frobenius (relatifs à  $\mathbb{F}_q$ ) de  $U_o$  et  $U'_o$  respectivement (l'endomorphisme de Frobenius d'un schéma sur  $\mathbb{F}_q$  est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et l'élévation à la puissance  $q$ -ième sur le faisceau structural). Puisque  $\pi_o : U'_o \rightarrow U_o$  est étale, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 U'_0 & \xrightarrow{F'_0} & U'_0 \\
 \Pi_0 \downarrow & & \downarrow \Pi_0 \\
 U_0 & \xrightarrow{F_0} & U_0
 \end{array}$$

et, par extension des scalaires à  $\mathbb{F}$ , un cartésien "sans l'indice 0".

Si l'on identifie l'ensemble  $|U|$  des points fermés de  $U$  à  $U(\mathbb{F}) = U_0(\mathbb{F})$ , l'action de  $F$  sur  $|U|$  s'identifie à l'action de  $\varphi \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$  (où  $\varphi(\alpha) = \alpha^q$ ) sur  $U_0(\mathbb{F})$ . Par suite, l'ensemble  $U^{F^n}$  des points fermés de  $U$  fixes par  $F^n$  s'identifie à  $U_0(\mathbb{F}_{q^n})$

Soit  $x \in U_0(\mathbb{F}_{q^n}) = U^{F^n}$  et soit  $x' = (x, t) \in U'(F)$  au-dessus de  $x$ . On a

$$F'^n x' = (x, t^{q^n})$$

et

$$t^{q^n} = t + (t^p - t) + (t^p - t)^p + \dots + (t^p - t)^{q^n/p}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 t^{q^n} &= t + f_0(x) + (f_0(x))^p + \dots + (f_0(x))^{q^n/p} \\
 &= t + \text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p}(f_0(x))
 \end{aligned}$$

Ceci montre que  $F'^n$  opère sur la fibre  $\overset{-1}{\Pi}(x)$  comme l'élément

$$\text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p}(f_0(x))$$

de  $\text{Gal}(U'/U) = \mathbb{F}_p$ .

1.3. Soient  $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$  et  $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$  le corps cyclotomique des racines  $p$ -ièmes de l'unité. Le caractère  $\psi$  est à valeurs dans  $E^*$ .

Soit  $E_\lambda$  le complété de  $E$  en une place  $\lambda$  au-dessus d'une place finie  $l$  de  $\mathbb{Q}$ ,  $l \neq p$ . On considérera  $\psi$  comme un caractère additif de  $\mathbb{F}_p$  à valeurs dans  $E_\lambda^*$ .

Le groupe de Galois  $\text{Gal}(U'/U)$  opère naturellement sur le  $E_\lambda$ -faisceau  $(\pi_0)_* E_\lambda$ ; soit  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(\psi, f_0)$  le facteur direct de  $(\pi_0)_* E_\lambda$  sur lequel  $\text{Gal}(U'/U)$  opère par  $\psi^{-1}$ ; de sorte que pour tout point fermé  $x$  de  $U$ ,

$$\mathcal{H}_x = \left\{ (\alpha_t)_{(x,t) \in \overline{\mathbb{F}}^{-1}(x)} \in (\pi_* E_\lambda)_x \mid \alpha_{t+i} = \psi(-i) \alpha_t \text{ pour tout } i \in \mathbb{F}_p \right\}$$

où l'on a identifié  $(\pi_* E_\lambda)_x$  à  $(E_\lambda)^{\overline{\mathbb{F}}^{-1}(x)}$  en tant que  $E_\lambda[\mathbb{F}_p]$ -modules.

On dispose d'un isomorphisme de Frobenius [4]:

$$F^* : F^* \mathcal{H}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_x$$

et en particulier, si  $x \in U^{\mathbb{F}^n}$ , le composé

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x \xrightarrow{F^*} \mathcal{H}_{F^n(x)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{H}_{F(x)} \xrightarrow{F^*} \mathcal{H}_x$$

est un automorphisme, que l'on notera  $F_x^*$ , de  $\mathcal{H}_x$ .

**Lemme 1.3.1.** - L'automorphisme  $F_x^*$  de  $\mathcal{H}_x$  est l'homothétie de rapport

$$\psi(\text{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(f_0(x))) .$$

En effet, l'isomorphisme

$$F^* : \mathcal{H}_{F(x)} \longrightarrow \mathcal{H}_x$$

est restriction de l'isomorphisme de Frobenius

$$F^* : (\pi_* E_\lambda)_{F(x)} \longrightarrow (\pi_* E_\lambda)_x$$

qui envoie  $(\alpha_t)_{t^q \in \overline{\mathbb{F}}^{-1}(F(x))}$  sur  $(\alpha_t)_{(x,t) \in \overline{\mathbb{F}}^{-1}(x)}$ .

Par suite,

$$F_x^* : \mathfrak{Y}_x \longrightarrow \mathfrak{Y}_x$$

est restriction de l'automorphisme

$$F_x^* : (\pi_* E \lambda)_x \longrightarrow (\pi_* E \lambda)_x$$

qui envoie  $(\alpha_{t^{q^n}})_{(x, t^{q^n})} \in \overline{\pi}^{-1}(x)$  sur  $(\alpha_t)_{(x, t)} \in \overline{\pi}^{-1}(x)$ .

Mais, on a vu en 1.2 que

$$t = t^{q^n} - \text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p}(f_o(x))$$

donc

$$\alpha_t = \psi(\text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p}(f_o(x))) \circ \alpha_{t^{q^n}}$$

ce qui termine la démonstration de 1.3.1.

On peut donc réécrire  $S_n$  sous la forme

$$(1.3.2) \quad S_n = S_n(U_o, f_o) = \sum_{x \in U} F^n \text{Tr}(F_x^*, \mathfrak{Y}_x)$$

1.4. La correspondance de Frobenius [4]  $(F, F^*) : (U, \mathfrak{Y}) \longrightarrow (U, \mathfrak{Y})$

induit un endomorphisme

$$F^* : H_c^i(U, \mathfrak{Y}) \longrightarrow H_c^i(U, \mathfrak{Y})$$

pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , et la formule des traces de Grothendieck (SGA 4 1/2

[ Rapport ] ou SGA 5 XV)

$$\sum_{x \in U} F^n \text{Tr}(F_x^*, \mathfrak{Y}_x) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(F^*, H_c^i(U, \mathfrak{Y}))$$

permet d'écrire finalement

$$(1.4.1) \quad S_n = S_n(U_o, f_o) = \text{Tr}((F^*)^n, H_c^*(U, \mathfrak{Y})) .$$

## 2.- Méthode générale de majoration [1]

2.0. On rappelle dans ce numéro les résultats de [1] qui nous seront nécessaires. On attire tout particulièrement l'attention sur le théorème 2.1.1 qui est la forme "forte" des conjectures de Weil, prouvée

par Deligne [3].

2.1. Soit  $U_0$  un schéma de type fini sur  $\mathbb{F}_q$ . Soit  $E_\lambda$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_1$ ,  $l \neq p$ . Soit  $\mathfrak{F}_0$  un  $E_\lambda$ -faisceau sur  $U_0$ . Pour tout point fermé  $x$  de  $U$ , la correspondance de Frobenius [4] définit un automorphisme  $F_x^*$  du  $E_\lambda$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathfrak{F}_x$ . On dira ([1], [3]) que  $\mathfrak{F}_0$  est ponctuellement de poids 0 sur  $U_0$  si, et seulement si, pour tout point fermé  $x$  de  $U$ , les valeurs propres de  $F_x^*$  agissant sur  $\mathfrak{F}_x$  sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue 1.

Dans la situation du numéro 1,  $\mathfrak{F}_0(\psi, f_0)$  est ponctuellement de poids 0.

Théorème 2.1.1 [1], [3].- Soit  $U_0/\mathbb{F}_q$  un schéma séparé de type fini. Soit  $\mathfrak{F}_0$  un  $E_\lambda$ -faisceau sur  $U_0$ , ponctuellement de poids 0. Alors, pour toute valeur propre  $\alpha$  de  $F^*$  agissant sur  $H_c^i(U, \mathfrak{F})$  il existe un entier  $\omega(\alpha) \leq i$  tel que tous les conjugués complexes de  $\alpha$  soient de valeur absolue  $q^{\omega(\alpha)/2}$ .

Compte-tenu de 1.4.1, on obtient la majoration, où  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\psi, f_0)$

$$(2.1.1.1) \quad \left| S_n(U_0, f_0) \right| \leq \sum_{i=0}^{2 \dim U} \dim_{E_\lambda} (H_c^i(U, \mathfrak{F})) \cdot q^{ni/2}$$

Pour utiliser toute la force du théorème 2.1.1, il faut pouvoir calculer les nombres de Betti  $\dim_{E_\lambda} (H_c^i(U, \mathfrak{F}))$ , ce qui est en général un problème difficile.

2.2. Dans [1], Deligne montre comment certaines hypothèses sur la ramification à l'infini du faisceau  $\mathfrak{F}$  entraînent l'annulation des nombres de Betti  $\dim_{E_\lambda} (H_c^i(U, \mathfrak{F}))$ , sauf pour  $i = \dim U$ , et per-

mettent de préciser le "poids" de  $\alpha$ ,  $\omega(\alpha)$  (notations de 2.1.1), pour  $\alpha$  valeur propre de  $F^*$  agissant sur  $H_c^{\dim U}(U, \mathcal{F})$ .

Plus précisément [1]:

Proposition 2.2.1.- Soit  $U_0/\mathbb{F}_q$  un schéma affine, lisse et purement de dimension  $N$ . Soit  $\mathcal{F}_0$  un  $E_\lambda$ -faisceau lisse sur  $U_0$ . Alors :

(i) si la flèche naturelle

$$R\Gamma_c(U, \mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma(U, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme, on a

$$H_c^i(U, \mathcal{F}) = H^i(U, \mathcal{F}) = 0$$

pour tout  $i \neq N$  ;

(ii) si, de plus,  $\mathcal{F}_0$  est ponctuellement de poids 0, pour toute valeur propre  $\alpha$  de  $F^*$  agissant sur  $H_c^N(U, \mathcal{F})$ , le "poids" de  $\alpha$ ,  $\omega(\alpha)$ , est exactement  $N$ .

Remarque 2.2.2 [1].- Si  $j : U \hookrightarrow Z$  est une compactification de  $U$  et si

$$(R^i j_* \mathcal{F})_z = 0$$

pour tout point fermé  $z$  de  $Z - U$  et pour tout  $i \geq 0$ , alors la flèche naturelle

$$R\Gamma_c(U, \mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma(U, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Scolie 2.2.3.- Si  $U_0$  est affine, lisse purement de dimension  $N$  sur  $\mathbb{F}_q$  et si la flèche naturelle, où  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\psi, f_0)$ ,

$$R\Gamma_c(U, \mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma(U, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme, on peut écrire

$$S_n = S_n(U_0, f_0) = \sum_{i=1}^{b_N} \alpha_i^n$$

où  $b_N = (-1)^N \chi_c(U, \mathcal{F}) = \dim_{E_\lambda} (H_c^N(U, \mathcal{F}))$  et où les  $\alpha_i$  sont de

valeur absolue  $q^{N/2}$  dans tout plongement complexe de  $\overline{E}_\lambda$  dans  $\mathbb{C}$  ( $\alpha_i \in \overline{E}_\lambda$ ,  $\overline{E}_\lambda$  clôture algébrique de  $E_\lambda$ ). On a donc la majoration

$$(2.2.3.1) \quad |S_n| \leq (-1)^N \chi_c(u, \mathfrak{z}) q^{nN/2}$$

C'est la meilleure possible : on a en effet

$$(2.2.3.2) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|S_n|}{q^{nN/2}} = (-1)^N \chi_c(u, \mathfrak{z})$$

Cette formule résulte du lemme suivant :

**Lemme.-** Si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  est une famille de nombres complexes de module 1, on a

$$N = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i^n \right|.$$

En effet, soit  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  et soit  $\Gamma$  le sous-groupe de  $\mathbb{T}^N$  engendré par  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ . Si  $\Gamma$  est discret,  $\Gamma$  est fini, et donc, pour  $n$  multiple de l'ordre de  $\Gamma$ , on a

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^n = N;$$

le lemme est démontré dans ce cas. Sinon,  $\Gamma$  n'est pas discret, et, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  tel que

$$\sum_{i=1}^N |1 - \alpha_i^n| < \varepsilon,$$

donc, tel que

$$N - \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i^n \right| \leq \left| \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i^n) \right| \leq \sum_{i=1}^N |1 - \alpha_i^n| \leq \varepsilon$$

ce qui achève la preuve du lemme.

### 3.- Ramification à l'infini de revêtements d'Artin-Schreier

3.1. Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ , soit  $Z = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$  le plan affine sur  $k$ , soit  $Y$  "l'axe

des  $y^n$ , i.e. le diviseur d'équation  $x = 0$  de  $Z$ , soit  $U = Z - Y$  et soit  $j : U \hookrightarrow Z$  l'inclusion.

On considère le revêtement d'Artin-Schreier de  $U$

$$\pi : U' \longrightarrow U$$

d'équation

$$t^p - t = y^b/x^a$$

où  $a, b$  sont des entiers vérifiant

(i)  $a > 0$  et  $b \geq 0$

(ii)  $a$  premier à  $p$  et, si  $b \neq 0$ ,  $b$  premier à  $p$ .

Le revêtement  $\pi$  est étale, fini, galoisien, de groupe de Galois  $\mathbb{F}_p$ .

Soit  $E_\lambda$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_1$ ,  $l \neq p$ , et soit  $\psi : \mathbb{F}_p \longrightarrow E_\lambda^*$  un caractère additif non trivial. On dispose sur  $U$  du  $E_\lambda$ -faisceau lisse de rang 1,  $\mathfrak{H}(\psi, y^b/x^a)$ , facteur direct de  $\pi_* E_\lambda$  sur lequel  $\text{Gal}(U'/U)$  opère à travers  $\psi^{-1}$ .

On va montrer le résultat suivant dû à Deligne :

Théorème 3.1.1.- On garde les hypothèses et les notations ci-dessus.

Soit  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\psi, y^b/x^a)$ . Alors

1)  $(R^n j_* \mathfrak{H})_{(0,0)} = 0$  si  $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$

2)  $(R^1 j_* \mathfrak{H})_{(0,0)}$  et  $(R^2 j_* \mathfrak{H})_{(0,0)}$  sont deux  $E_\lambda$ -espaces vectoriels de dimension  $d - 1$ , où  $d$  est le p.q.c.d. de  $a$  et  $b$  (avec la convention  $d = 1$ , si  $b = 0$ ).

Corollaire 3.1.2.- Soit  $Z$  une surface propre et lisse sur  $k$ , soit  $Y$  un diviseur lisse sur  $Z$ , soit  $U = Z - Y$  et soit  $\mathfrak{H}$  un  $E_\lambda$ -faisceau lisse de rang 1 sur  $U$ , ramifié comme suit le long de  $Y$  : pour tout  $z \in Y$ , il existe un voisinage  $V$  de  $z$  dans  $Z$

et des coordonnées locales  $(x,y)$  définies sur  $V$  , centrées en  $z$  ,  
telles que  $x = 0$  soit une équation de  $Y$  dans  $V$  et telles que  $\mathfrak{J}$   
soit isomorphe à  $\mathfrak{J}(\psi, y^b/x^a)$  sur  $V$  , où  $a$  ,  $b$  sont deux entiers  
vérifiant les hypothèses (i) et (ii) de 3.1 et l'hypothèse :

(iii)  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, si  $b \neq 0$  .

Alors la flèche naturelle

$$R\Gamma_c(U, \mathfrak{J}) \longrightarrow R\Gamma(U, \mathfrak{J})$$

est un isomorphisme.

Ce corollaire est conséquence immédiate de 3.1.1 et de 2.2.2 .

La preuve de 3.1.1 est l'objet du reste du numéro 3 .

3.2. Cas où  $b = 0$  . L'équation de  $\pi : U \longrightarrow U'$  s'écrit

$$t^p - t = 1/x^a$$

et la situation est une situation produit : soit  $X = \text{Spec}(k[x])$

"l'axe des  $x$ " , on a

$$Z = X \times Y$$

$$U = (X - \{0\}) \times Y$$

$$j = j_X \times \text{id}_Y$$

où  $j_X : X - \{0\} \hookrightarrow X$  est l'inclusion, et, si  $\mathcal{G}$  est le faisceau  
 $\mathfrak{J}(\psi, 1/x^a)$  sur  $X - \{0\}$  , on a

$$\mathfrak{J} = \text{pr}_X^* \mathcal{G} \otimes \text{pr}_Y^* E_\lambda$$

où  $\text{pr}_X : Z \longrightarrow X$  et  $\text{pr}_Y : Z \longrightarrow Y$  sont les deux projections. Par suite

$$R^n j_* \mathfrak{J} = \text{pr}_X^* (R^n (j_X)_* \mathcal{G})$$

pour tout  $n \geq 0$  . On est donc ramené à montrer que

$$(R^n (j_X)_* \mathcal{G})_0 = 0$$

pour tout  $n \geq 0$  , ce qui est contenu dans le lemme suivant

Lemme 3.2.1. - Soit  $\mathcal{H}$  le  $E_\lambda$ -faisceau  $\mathcal{H}(\psi, x^m)$  sur  $A_k^1$ , où  $m$  est un entier premier à  $p$ . Soit  $\eta : A_k^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$  l'inclusion et soit  $\infty$  le point à l'infini de  $\mathbb{P}_k^1$ . Alors

(i)  $S w_\infty(\eta_* \mathcal{H}) = m$

(ii)  $(R^n \eta_* \mathcal{H}) = 0$  pour tout  $n \geq 0$ .

(iii)  $H_c^n(A_k^1, \mathcal{H}) = H^n(A_k^1, \mathcal{H}) = 0$  pour  $n = 1$  et  $2$ .

(iv)  $H_c^1(A_k^1, \mathcal{H}) = H^1(A_k^1, \mathcal{H})$  est un  $E_\lambda$ -espace vectoriel de dimension  $m - 1$ .

Preuve : Pour (i), voir [7] 1.1.7. Pour (ii), remarquons tout d'abord que  $\mathcal{H}$  est de rang 1 sur  $A_k^1$  et se ramifie effectivement au point  $\infty$  d'après (i), donc  $(\eta_* \mathcal{H})_\infty = 0$ . De plus  $\mathcal{H}^\vee = \mathcal{H}(\psi^{-1}, x^m)$ , donc on a aussi  $(\eta_* \mathcal{H}^\vee)_\infty = 0$ . Par dualité locale (SGA 5 I 5.18 ou SGA 4 1/2 [Dualité] 1.3), on en déduit que  $(R^1 \eta_* \mathcal{H})_\infty = 0$ . Enfin, pour des raisons de dimension,  $(R^n \eta_* \mathcal{H})_\infty = 0$  pour  $n \geq 2$ . Pour (iii) et (iv), remarquons que la flèche naturelle

$$\eta_* \mathcal{H} \longrightarrow R \eta_* \mathcal{H}$$

est un isomorphisme d'après (ii), donc la flèche naturelle

$$R \Gamma_c(A_k^1, \mathcal{H}) \longrightarrow R \Gamma(A_k^1, \mathcal{H})$$

est aussi un isomorphisme. Comme  $A_k^1$  est affine,  $H_c^2(A_k^1, \mathcal{H}) = H^2(A_k^1, \mathcal{H}) = 0$ . Comme  $A_k^1$  est lisse sur  $k$  et que  $\mathcal{H}$  est un  $E_\lambda$ -faisceau lisse, par dualité de Poincaré, on a aussi

$$H_c^0(A_k^1, \mathcal{H}) = H^0(A_k^1, \mathcal{H}) = 0$$

(ici encore on utilise le fait que  $\mathcal{H}^\vee = \mathcal{H}(\psi^{-1}, x^m)$ ). Enfin, on a d'après la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevič ,

$$\chi_c(A_k^1, \mathcal{H}) = - S w_\infty(\mathcal{H}) = - m, \text{ d'où (iv).}$$

3.3. Cas où  $a = b$  . On a alors  $d = a = b$  et l'équation du revêtement

$$\pi : U' \longrightarrow U$$

s'écrit

$$t^p - t = (y/x)^d$$

Soit  $\rho : \tilde{Z} \longrightarrow Z$  l'éclatement de centre l'origine dans  $Z$  . L'immersion  $j : U \hookrightarrow Z$  se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{Z} \\ & \nearrow \tilde{j} & \downarrow \rho \\ U & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

où  $\tilde{j}$  est encore une immersion ouverte, d'où une suite spectrale de composition :

$$E_2^{r,s} = R^r \rho_* R^s \tilde{j}_* \mathcal{H} \implies R^* j_* \mathcal{H}$$

Comme  $\rho$  est propre, la fibre en l'origine de cette suite spectrale s'écrit

$$E_{2,(0,0)}^{r,s} = H^r(E, (R^s \tilde{j}_* \mathcal{H})|_E) \implies (R^* j_* \mathcal{H})_{(0,0)}$$

où  $E = \tilde{\rho}^{-1}(0,0)$  est le diviseur exceptionnel.

On est donc ramené à calculer la cohomologie

$$H^*(E, (R^s \tilde{j}_* \mathcal{H})|_E)$$

pour tout  $s \geq 0$  .

Pour cela, considérons les deux cartes affines

$$\tilde{Z}_x = \{ (x, v = y/x) \}$$

$$\tilde{Z}_y = \{ (u = x/y, y) \}$$

qui recouvrent  $\tilde{Z}$  et posons

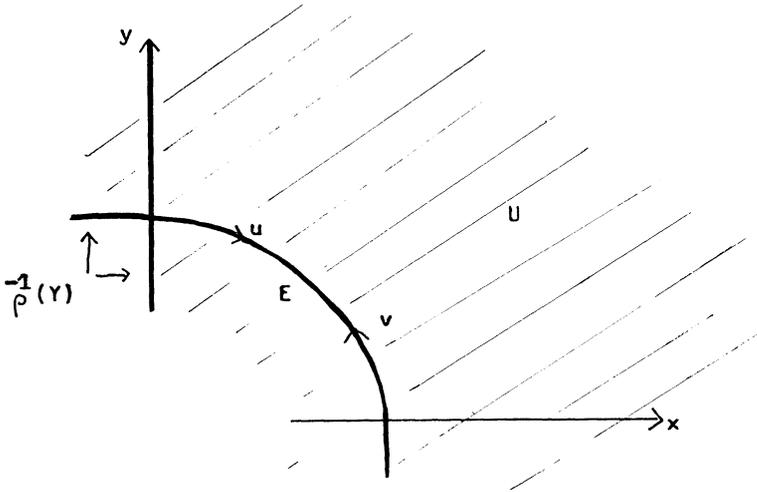
$$E_x = E \cap \tilde{Z}_x = \{ (x, v) \mid x = 0 \}$$

$$E_y = E \cap \tilde{Z}_y = \{ (u, y) \mid y = 0 \}$$

Alors  $E_x$  et  $E_y$  forment un recouvrement affine de  $E \simeq \mathbb{P}_k^1$ . Enfin, on peut voir  $U$  comme un ouvert de  $\tilde{Z}$  et

$$U_x = U \cap \tilde{Z}_x = \{ (x, v) \mid v \neq 0 \}$$

$$U_y = U \cap \tilde{Z}_y = \{ (u, y) \mid uy \neq 0 \}$$



On a

$$U'_x|_{U_x} = \{ (t, x, v) \mid t^p - t = v^d \}$$

$$U'_y|_{U_y} = \{ (t, u, y) \mid t^p - t = 1/u^d \}$$

On va prouver le lemme suivant :

Lemme 3.3.1.- Soit  $\mathcal{G}$  le  $E_\lambda$ -faisceau sur  $E$ , obtenu en prolongeant par zéro le  $E_\lambda$ -faisceau  $\mathcal{H}(\psi, v^d)$  qui est défini sur la carte affine  $E_x = \text{Spec}(k[v])$  de  $E$ . Alors

$$(R^s \tilde{j}_* \mathcal{H})|_E = \begin{cases} \mathcal{G} & \text{si } s = 0 \\ \mathcal{G}(-1) & \text{si } s = 1 \\ 0 & \text{si } s \geq 2 \end{cases}$$

3.3.2. Prouvons 3.3.1. On se place successivement sur chaque carte

$\tilde{Z}_x$  et  $\tilde{Z}_y$ .

3.3.2.1. Sur la carte  $\tilde{Z}_x$ , on est dans une situation produit :

$$U_x = \{x \neq 0\} \times \{v\} \quad (*)$$

$$\tilde{j} = \tilde{j}_x \times \text{id}_{\{v\}}$$

où  $\tilde{j}_x : \{x \neq 0\} \hookrightarrow \{x\}$  est l'inclusion

$$\mathfrak{H}|_{U_x} = \text{pr}_x^* E_\lambda \otimes \text{pr}_v^* (g|_{E_x})$$

où  $\text{pr}_x$  et  $\text{pr}_v$  sont les deux projections.

Par Künneth, on obtient

$$R^s \tilde{j}_x^* \mathfrak{H} = \text{pr}_x^* (R^s(\tilde{j}_x)_* E_\lambda) \otimes \text{pr}_v^* (g|_{E_x})$$

donc

$$(R^s \tilde{j}_x^* \mathfrak{H})|_{E_x} = (R^s(\tilde{j}_x)_* E_\lambda)_o \otimes (g|_{E_x})$$

Or  $(R^0(\tilde{j}_x)_* E_\lambda)_o = E_\lambda$  et par dualité locale (SGA 5 I 5.18 ou SGA 4 1/2 [Dualité] 1.3) on a

$$(R^1(\tilde{j}_x)_* E_\lambda)_o \xrightarrow{\sim} E_\lambda(-1)$$

l'isomorphisme étant fourni par la classe fondamentale locale. Enfin, pour des raisons de dimension

$$(R^s(\tilde{j}_x)_* E_\lambda)_o = 0$$

pour  $s \geq 2$ . Donc le lemme 3.3.1 est vérifié sur la carte  $E_x$ .

3.3.2.2. Sur la carte  $\tilde{Z}_y$ , on est aussi dans une situation produit :

$$U_y = \{u \neq 0\} \times \{y \neq 0\}$$

$$\tilde{j} = \tilde{j}_u \times \tilde{j}_y$$

où  $\tilde{j}_u : \{u \neq 0\} \hookrightarrow \{u\}$  et  $\tilde{j}_y : \{y \neq 0\} \hookrightarrow \{y\}$  sont les inclusions

$$\mathfrak{H}|_{U_y} = \text{pr}_u^* (g|_{\{u \neq 0\}}) \otimes \text{pr}_y^* (E_\lambda)$$

---

(\*) On désigne par  $\{v\}$  la droite affine  $\text{Spec}(k[v])$

Par Künneth, on a donc

$$R^s \tilde{j}_{*} \mathfrak{B} = \bigoplus_{p+q=s} \text{pr}_u^* (R^p(\tilde{j}_u)_* (\mathcal{G}|_{\{u \neq 0\}})) \otimes \text{pr}_y^* (R^q(\tilde{j}_y)_* E\lambda)$$

Mais d'après 3.2.1, la flèche naturelle

$$(\tilde{j}_u)! (\mathcal{G}|_{\{u \neq 0\}}) \longrightarrow R(\tilde{j}_u)_* (\mathcal{G}|_{\{u \neq 0\}})$$

est un isomorphisme et

$$\mathcal{G}|_{\{u\}} = (\tilde{j}_u)! (\mathcal{G}|_{\{u \neq 0\}})$$

par définition de  $\mathcal{G}$ . Comme on a déjà calculé  $(R^q(\tilde{j}_y)_* E\lambda)_0$  (cf.

3.3.2.1), on en déduit que

$$R^s \tilde{j}_{*} \mathfrak{B}|_{E_y} = \begin{cases} \mathcal{G} & \text{si } s = 0 \\ \mathcal{G}(-1) & \text{si } s = 1 \\ 0 & \text{si } s \geq 2 \end{cases}$$

Donc 3.3.1 est démontré.

3.3.3. Le lemme 3.3.1 a pour conséquence immédiate que

$$H^*(E, (R^s \tilde{j}_{*} \mathfrak{B})|_E) = \begin{cases} H^*(E, \mathcal{G}) & \text{si } s = 0 \\ H^*(E, \mathcal{G}(-1)) & \text{si } s = 1 \\ 0 & \text{si } s \geq 2 \end{cases}$$

D'après 3.2.1, on a, pour  $r = 0$  et  $2$ ,

$$H^r(E, \mathcal{G}) = 0$$

et  $H^1(E, \mathcal{G})$  est de dimension  $d - 1$ . La suite spectrale

$$E_{2, s}^{r, s} = H^r(E, (R^s \tilde{j}_{*} \mathfrak{B})|_E) \implies (R^* j_* \mathfrak{B})_{(0,0)}$$

dégénère en  $E_2$ , et il reste simplement des isomorphismes

$$H^1(E, (R^n \tilde{j}_{*} \mathfrak{B})|_E) \cong (R^n j_* \mathfrak{B})_{(0,0)}$$

Ceci achève la preuve de 3.1.1 dans ce cas.

3.4. Cas général. On supposera  $b \neq 0$  et on notera  $m$  le p.p.c.m. de  $a$  et  $b$ , de sorte que  $m = aa' = bb'$  où  $a = db'$  et  $b = da'$  avec  $(a', b') = 1$ . Considérons le revêtement

$$\bar{Z} \xrightarrow{r} Z$$

où  $\bar{Z} = \text{Spec}(k[\bar{x}, \bar{y}])$  et  $r(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{a'}, \bar{y}^{b'})$ . On notera  $\bar{U}$  l'ouvert  $\bar{x} \neq 0$  de  $\bar{Z}$  et  $\bar{j} : \bar{U} \hookrightarrow \bar{Z}$  l'inclusion. Soit  $\bar{\mathcal{F}}$  le  $E_\lambda$ -faisceau  $\bar{\mathcal{F}}(\bar{\psi}, \bar{y}^m / \bar{x}^m)$  sur  $\bar{U}$ . Par construction

$$r^* \bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}$$

Le revêtement  $r : \bar{Z} \rightarrow Z$  est galoisien de groupe de Galois  $G = \langle \rho_a, \rho_b \rangle$ ;  $(\zeta, \nu) \in G$  opère sur  $\bar{Z}$  par  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\zeta \bar{x}, \nu \bar{y})$ . On a une action naturelle de  $G$  sur  $r_* r^* \bar{\mathcal{F}} = r_* \bar{\mathcal{F}}$  et on retrouve  $\mathcal{F}$  en prenant les invariants :

$$\mathcal{F} = \Gamma^G r_* \bar{\mathcal{F}} = R \Gamma^G r_* \bar{\mathcal{F}}$$

par suite

$$Rj_* \mathcal{F} = Rj_* R \Gamma^G r_* \bar{\mathcal{F}} = R \Gamma^G Rj_* (r_* \bar{\mathcal{F}}) ;$$

or  $r$  est fini, donc

$$Rj_* \mathcal{F} = R \Gamma^G Rj_* Rr_* \bar{\mathcal{F}} = R \Gamma^G R\bar{j}_* \bar{\mathcal{F}},$$

ce qui n'est autre que la suite spectrale de Hochschild-Serre ; la fibre en  $(0,0)$  de cette suite spectrale de faisceaux s'écrit :

$$E^{pq} = H^q(G, (R^p \bar{j}_* \bar{\mathcal{F}})_{(0,0)}) \implies (R^* j_* \mathcal{F})_{(0,0)}$$

Comme on a montré en 3.3 que  $(R^n \bar{j}_* \bar{\mathcal{F}})_{(0,0)} = 0$  si  $n \neq 1, 2$ , il reste à expliciter l'action de  $G$  sur  $(R^n \bar{j}_* \bar{\mathcal{F}})_{(0,0)}$  pour  $n = 1$  ou  $2$ . On a montré que

$$(R^1 \bar{j}_* \bar{\mathcal{F}})_{(0,0)} = H^1(\bar{E}, \bar{\mathcal{G}})$$

$$(R^2 \bar{j}_* \bar{\mathcal{F}})_{(0,0)} = H^1(\bar{E}, \bar{\mathcal{G}})(-1)$$

où  $\bar{E} = \text{Proj}(k[\bar{u}, \bar{v}])$  et  $\bar{\mathcal{G}}$  est le  $E_\lambda$ -faisceau égal à  $\bar{\mathcal{F}}(\bar{\psi}, \bar{v}^d)$  sur  $\text{Spec}(k[\bar{v}])$  et prolongé par zéro sur tout  $\bar{E}$ . Il est clair

que  $G$  opère sur  $H^1(\bar{E}, \bar{Q})$  et que les isomorphismes ci-dessus sont équivariants pour les actions de  $G$ . L'action de  $G$  sur  $\bar{Q}$  se factorise par l'isomorphisme  $((a', b') = 1)$

$$|\mathcal{P}_{a'} \times \mathcal{P}_{b'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{a'b'}$$

qui envoie  $(\zeta, \nu)$  sur  $\nu \cdot \zeta^{-1}$ . On est donc ramené à calculer

$$H^*(|\mathcal{P}_{a'b'}, H_c^1(\bar{E}, \bar{Q}))$$

On considère alors le revêtement

$$\bar{E} \longrightarrow \mathbb{P}_k^1 = \text{Proj}(k[w_0, w_1])$$

défini par  $(\bar{u}; \bar{v}) \longmapsto (\bar{u}^{a'b'}; \bar{v}^{a'b'})$  et le  $E_\lambda$ -faisceau  $\mathcal{H}$  sur  $\mathbb{P}_k^1$  égal à  $\mathcal{H}(\psi, (w_1/w_0)^d)$  sur  $\text{Spec}(k[w_1/w_0])$  et prolongé par zéro à tout  $\mathbb{P}_k^1$ .  $\bar{Q}$  est l'image réciproque de  $\mathcal{H}$  sur  $\bar{E}$  et on a de nouveau une suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^q(|\mathcal{P}_{a'b'}, H^p(\bar{E}, \bar{Q})) \implies H^*(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{H})$$

Elle dégénère en  $E_2$ , car  $H^p(\bar{E}, \bar{Q}) = 0$  si  $p \neq 1$ , et il reste des isomorphismes

$$H^q(|\mathcal{P}_{a'b'}, H^1(\bar{E}, \bar{Q})) = H^{q+1}(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{H})$$

Or, d'après 3.2.1,  $H^{q+1}(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{H}) = 0$  si  $q \neq 0$  et  $H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{H})$  est de dimension  $d - 1$ . Donc

$$H^q(G, (R^p \bar{j}_* \mathcal{H})_{(0,0)}) = \begin{cases} H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{H}) & \text{si } (p, q) = (0, 1) \\ H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{H})(-1) & \text{si } (p, q) = (0, 2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par suite, la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^q(G, (R^p \bar{j}_* \mathcal{H})_{(0,0)}) \implies (R^* j_* \mathcal{H})_{(0,0)}$$

dégénère en  $E_2$  et il reste les isomorphismes

$$(R^n \int_{\mathbb{A}} \mathfrak{A})_{(0,0)} = \begin{cases} H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathfrak{A}) & \text{si } n = 1 \\ H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathfrak{A})(-1) & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \text{ et } 2 \end{cases}$$

Le théorème 3.1.1 est démontré.

4.- Retour aux sommes trigonométriques

4.1. Soit  $Z_0$  une surface propre et lisse sur  $\mathbb{F}_q$  et soit  $f_0$  une fonction rationnelle sur  $Z_0$ . On suppose que le diviseur des pôles de  $f_0$  n'a qu'une composante  $Y_0$ , qui est lisse et de multiplicité  $a$ , première à  $p$ . On suppose que l'ouvert complémentaire  $U_0 = Z_0 - Y_0$  est affine. Enfin, on suppose que le diviseur des zéros de  $f_0$  est transverse à  $Y_0$  et que les multiplicités des composantes de ce diviseur qui rencontrent  $Y_0$  sont premières à  $p$  et à  $a$ .

Si  $\psi : \mathbb{F}_p \rightarrow E_\lambda$  est un caractère additif non trivial, on est à même de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1.1.- La somme trigonométrique

$$S_n = S_n(U_0, f_0) = \sum_{z \in U_0(\mathbb{F}_{q^n})} \psi_0 \text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p}(f_0(z))$$

admet la majoration

$$|S_n| \leq \chi_c(U, \mathfrak{A}(\psi, f_0)) \cdot q^n$$

pour tout  $n \geq 0$ , et c'est la meilleure majoration possible au sens suivant :

$$\chi_c(U, \mathfrak{A}(\psi, f_0)) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|S_n|}{q^n}$$

En effet, ce théorème résulte aussitôt de 2.2.3 et 3.2.1.

4.2. Pour aller plus loin, il faut calculer  $\chi_c(U, \mathfrak{A}(\psi, f_0))$ . Deline

a conjecturé et proposé un plan de démonstration pour la formule suivante (on garde les notations de 4.1 )

$$(4.2.1) \quad \chi_c(U, \mathfrak{B}(\Psi, f_0)) = \chi_c(U) - a \chi_c(Y^0)$$

où  $Y^0$  est l'ouvert de  $Y$  formé des points qui n'appartiennent pas au diviseur des zéros de  $f$ . La méthode que Deligne propose est de balayer la surface  $Z$  par un pinceau, de manière à se ramener à une fibration en courbes sur  $\mathbb{P}^1$ , puis d'utiliser le théorème de semi-continuité [7]. Ce programme est mené à bien par l'auteur dans [8].

4.3 Dans cet exposé, on se limitera à un cas particulier pour lequel Katz a démontré la formule 4.2.1 par un argument analogue à celui de [2], 8.4. La situation est la suivante : soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $Z$  une hypersurface lisse, de degré  $d$ , dans  $\mathbb{P}_k^3 = \text{Proj}(k[X_1, X_2, X_3, X_4])$ . Soit  $H$  l'hyperplan de  $\mathbb{P}_k^3$  d'équation  $X_4 = 0$ . Soit  $F(X_1, X_2, X_3, X_4)$  une forme linéaire homogène dans  $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$ . On fait les hypothèses

- (i)  $d$  est premier à  $p$
- (ii)  $H$  est transverse à  $Z$ , de sorte que  $Y = H \cap Z$  est une courbe plane lisse de degré  $d$ . On pose  $U = Z - Y$ .
- (iii) L'hyperplan  $\{F = 0\}$  est transverse à  $Y$ , de sorte que  $Y_1 = \{F = 0\} \cap Y$  est un ensemble fini de points fermés de  $Z$ , de cardinal  $d$ .

On note  $x_i = X_i/X_4$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les coordonnées affines sur  $\mathbb{A}_k^3 = \mathbb{P}_k^3 - H$  et  $f(x_1, x_2, x_3) = F(X_1, X_2, X_3, X_4)/X_4$  la fonction induite par  $F$  sur  $U$ .

Soit  $\psi : \mathbb{F}_p \longrightarrow E_\lambda^*$  un caractère additif non trivial et soit

$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\psi, f)$  . Le résultat de Katz est le suivant [ 6 ]

$$(4.3.1) \quad \chi_c(u, \mathfrak{F}) = d(d-1)^2$$

Ce résultat est bien un cas particulier de 4.2.1 , puisque l'on a les formules bien connues (SGA 7 XI)

$$\chi(Z) = d(d^2 - 4d + 6)$$

$$\chi(Y) = d(3-d)$$

$$\chi(Y_1) = d$$

donc  $\chi_c(u) = d(d^2 - 3d + 3)$  et  $\chi_c(Y^0) = \chi_c(Y - Y_1) = d(2-d)$  ; la valeur de  $a$  étant ici 1 .

4.4. Un exemple de la situation précédente est le suivant :  $Z$  est l'hypersurface de Fermat, i.e. l'hypersurface d'équation

$$x_1^d + x_2^d + x_3^d + x_4^d = 0$$

et  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1$  . Comme  $d$  est premier à  $p$  , il existe  $q$  , puissance de  $p$  , tel que  $d$  divise  $q - 1$  . Soit  $\mathbb{F}_q$  le corps à  $q$  éléments contenu dans  $k$  . Soient  $Z_0, Y_0, Y_{1,0}, \dots$  les objets précédents vus comme objets sur  $\mathbb{F}_q$  . De sorte que  $Z = Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} k, \dots$  . On peut considérer les sommes trigonométriques

$$S_n = S_n(u_0, f_0) = \sum_{\substack{x_1^d + x_2^d + x_3^d + 1 = 0 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}_q^n}} \psi_0 \text{Tr}_{\mathbb{F}_q^n / \mathbb{F}_p} (x_1)$$

pour  $n \in \mathbb{N}^*$  . On sait calculer "à la Weil" ces sommes trigonométriques. Plus précisément, on va montrer, au numéro 6, que

$$S_n = \sum_{i=1}^{d(d-1)^2} \alpha_i^n$$

où les  $\alpha_i$  sont des nombres complexes de module  $q$  qui s'expriment en termes de sommes de Jacobi. On en déduit que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|S_n|}{q^n} = d(d-1)^2$$

D'après 4.1.1, cela suffit à montrer 4.3.1 pour cet exemple.

4.5. Le principe de la démonstration de 4.3.1 est le suivant : en considérant la famille universelle de toutes les situations décrites en 4.3, on montre que  $\chi_c(U, \mathfrak{H}(\psi, f))$  ne dépend pas de la situation choisie. Pour calculer cette caractéristique d'Euler-Poincaré, on peut donc choisir n'importe quelle situation particulière, par exemple, la situation de "Fermat" et on pourra conclure par l'argument esquissé en 4.4.

### 5.- L'argument de déformation de Katz

5.1. Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $S$  un schéma normal, de type fini sur  $k$ . Soit

$$\mathbb{P}_S^3 = \mathbb{P}_k^3 \times_k S = \text{Proj}(\mathcal{O}_S[x_1, x_2, x_3, x_4])$$

Soit  $Z$  une hypersurface relative dans  $\mathbb{P}_S^3$ , de degré  $d$ , lisse sur  $S$ ;  $Z$  est donc un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}_S^3$  d'équation

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

où  $P \in H^0(\mathcal{O}_S[x_1, x_2, x_3, x_4])$  est homogène de degré  $d$ . On suppose  $d$  premier à  $p$ . Soit  $H$  l'hyperplan d'équation  $x_4 = 0$ . On suppose  $H$  transverse à  $Z$ , de sorte que  $Y = H \cap Z$  est un diviseur relatif de  $Z$ , lisse sur  $S$ . On posera  $U = Z - Y$  et

$$\mathbb{A}_S^3 = \mathbb{P}_S^3 - H = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[x_1, x_2, x_3]) \quad \text{où } x_i = X_i/X_4 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Soit  $F \in H^0(\mathcal{O}_S[x_1, x_2, x_3, x_4])$  une forme linéaire homogène. On supposera que l'hyperplan  $\{F = 0\}$  est transverse à  $Y$ . On posera  $Y_1 = \{F = 0\} \cap Y$ , de sorte que  $Y_1$  est un revêtement fini, étale,

de degré  $d$  de  $S$ . Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que  $F(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1$ .

Soit  $f(x_1, x_2, x_3) = F(X_1, X_2, X_3, X_4)/X_4 = x_1$  vu comme  $S$ -morphisme

$$f : U \longrightarrow \mathbb{A}_S^1$$

On considère le revêtement d'Artin-Schreier

$$\pi : U' \longrightarrow U$$

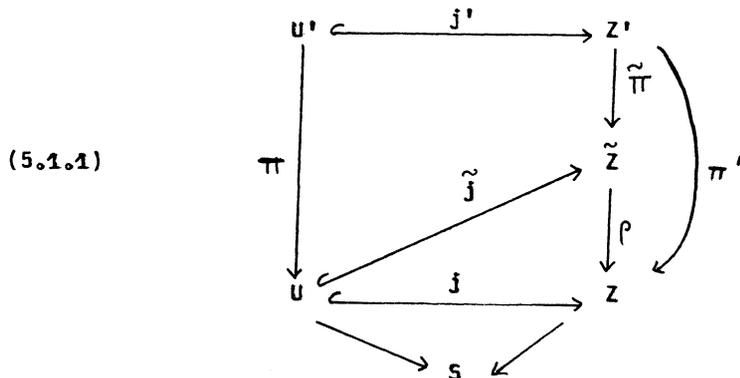
d'équation

$$t^p - t = f(x_1, x_2, x_3) = x_1$$

C'est un revêtement fini, étale, galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{F}_p$ .

On va compactifier et désingulariser le revêtement d'Artin-Schreier ci-dessus.

Soit  $\rho : \tilde{Z} \longrightarrow Z$  l'éclaté de  $Z$  le long de  $Y_1$ ; alors, l'immersion ouverte  $j : U \hookrightarrow Z$  se factorise par  $\rho$  en une immersion ouverte  $\tilde{j} : U \hookrightarrow \tilde{Z}$ . Soit  $\tilde{\pi} : Z' \longrightarrow \tilde{Z}$  le normalisé de  $\tilde{Z}$  dans  $\pi : U' \longrightarrow U$  et soit  $\pi' = \rho \circ \tilde{\pi}$ . Comme  $U$  est normal ( $U$  est lisse sur  $S$  et  $S$  est normal) et que  $\pi$  est étale,  $U'$  s'identifie à un ouvert de  $Z'$ ; soit  $j' : U' \hookrightarrow Z'$  l'inclusion. En résumé, on a le diagramme commutatif



Soit  $E = \rho^{-1}(Y_1)$  le diviseur exceptionnel de l'éclatement (c'est un diviseur relatif, lisse sur  $S$ ). On posera  $E' = \tilde{\pi}^{-1}(E)$ . D'autre part,  $t$  est une fonction rationnelle sur  $Z'$ ; on notera  $Y'$  le diviseur des pôles de  $t$  sur  $Z'$  (c'est encore un diviseur relatif). Le résultat que l'on a en vue est le suivant :

Proposition 5.1.2.- Avec les notations et hypothèses ci-dessus :

- (i)  $Z'$  est une surface relative propre et lisse sur  $S$
- (ii)  $U'$  est le complémentaire dans  $Z'$  d'un diviseur à croisements normaux relatifs. Plus précisément, l'image réciproque sur  $Z'$  du diviseur  $Y$  s'écrit

$$\pi'^*(Y) = p_0 Y' + E'$$

où  $Y'$  est isomorphe à  $Y$  par la projection  $\pi'$ , donc est lisse sur  $S$ ,  $E'$  est lisse sur  $S$  et  $Y' + E'$  est un diviseur à croisements normaux relativement à  $S$ .

5.1.3.- Preuve : Mis à part l'assertion de propreté pour  $Z'$ , qui est d'ailleurs immédiate, les autres assertions sont locales sur  $Z$ , pour la topologie étale. Or la situation est, localement sur  $Z$ , produit de la base  $S$  par la fibre et les assertions à vérifier sont relatives. De plus la construction du diagramme 5.1.1 commute au changement de base  $S \rightarrow \text{Spec}(k)$ . Par suite, il suffit de démontrer 5.1.2 dans le cas où la base  $S$  est  $\text{Spec}(k)$ .

Enfin, comme  $U'$  est lisse (puisque  $\pi$  est étale), il suffit de se placer au voisinage de chaque point  $z$  de  $Y$ . Il y a donc deux cas à distinguer.

5.1.3.1.  $z$  est un point de  $Y - Y_1$ . Il existe alors des coordonnées locales  $(x, y)$  sur  $Z$ , centrées en  $z$ , telles que  $Y$  soit le

diviseur d'équation  $x = 0$  et que  $f(x,y) = 1/x$ . La situation en  $z$  est donc localement (pour la topologie étale) isomorphe à la situation produit :

$$\left( \begin{array}{c} U' \\ \pi \downarrow \\ U \end{array} \xrightarrow{j} Z \right) \simeq \left( \left\{ (t,x) \mid \begin{array}{l} x \neq 0 \text{ et} \\ t^p - t = 1/x \end{array} \right\} \right) \times \{y\} \quad (*)$$

$$\downarrow$$

$$\{x \neq 0\} \longleftrightarrow \{x\}$$

et l'on n'a pas d'éclatement à effectuer. Comme la normalisation commute au produit avec un espace lisse et que la normalisée d'une courbe est lisse sur  $k$  (puisque  $k$  est algébriquement clos), on voit que  $Z'$  est lisse au-dessus de  $z$ . En fait, il y a un unique point  $z' \in Z'$  au-dessus de  $z$  et  $(1/t, y)$  sont des coordonnées locales sur  $Z'$ , centrées en  $z'$  ([7], 1.1.7). Enfin l'équation de  $\pi'^*(Y)$  est  $(1/t)^p = 0$  dans ces coordonnées locales sur  $Z'$ , d'où la conclusion dans ce cas.

5.1.3.2.  $z$  est un point de  $Y_1$ . Il existe alors des coordonnées locales  $(x,y)$  sur  $Z$ , centrées en  $z$ , telles que  $Y$  soit le diviseur d'équation  $x = 0$  et que  $f(x,y) = y/x$ . La situation en  $z$  est donc localement (pour la topologie étale) isomorphe à la situation suivante :

$$\left( \begin{array}{c} U' \\ \pi \downarrow \\ U \end{array} \xrightarrow{j} Z \right) \simeq \left( \left\{ (t,x,y) \mid \begin{array}{l} x \neq 0 \text{ et} \\ t^p - t = y/x \end{array} \right\} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\{(x,y) \mid x \neq 0\} \longleftrightarrow \{(x,y)\}$$

On doit tout d'abord éclater l'origine  $(0,0)$ ,  $\tilde{Z}$  est donc (localement au-dessus de  $z$ ) recouvert par deux cartes affines

(\*) On rappelle que  $\{y\}$  désigne la droite affine  $\text{Spec}(k[y])$

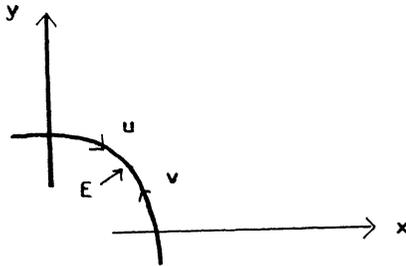
$$\begin{aligned} \tilde{Z}_x &= \{(x, v)\} & \text{où } v &= y/x \\ \tilde{Z}_y &= \{(u, y)\} & \text{où } u &= x/y \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} U_x &= \tilde{j}(U) \cap \tilde{Z}_x = \{(x, v) \mid x \neq 0\} \\ U_y &= \tilde{j}(U) \cap \tilde{Z}_y = \{(u, y) \mid uy \neq 0\} \end{aligned}$$

et, sur chacun de ces ouverts, le revêtement  $U'$  est donné par

$$\begin{aligned} U' \big|_{U_x} &= \{(t, x, v) \mid x \neq 0 \text{ et } t^p - t = v\} \\ U' \big|_{U_y} &= \{(t, u, y) \mid uy \neq 0 \text{ et } t^p - t = 1/u\} \end{aligned}$$



Le diviseur exceptionnel,  $E$ , est défini dans chaque carte par

$$\begin{aligned} E_x &= E \cap \tilde{Z}_x = \{(x, v) \mid x = 0\} = \{v\} \\ E_y &= E \cap \tilde{Z}_y = \{(u, y) \mid y = 0\} = \{u\} \end{aligned}$$

et la condition de recollement de  $E_x$  et  $E_y$  est  $u = 1/v$ .

Il résulte de cette description de la situation que  $U' \big|_{U_x}$  se prolonge en un revêtement étale de  $\tilde{Z}_x$  et donc que

$$Z' \big|_{\tilde{Z}_x} = \{(t, x, v) \mid t^p - t = v\}$$

Par suite, si  $E' = \tilde{\pi}^{-1}(E)$

$$E' \big|_{E_x} = \{(t, v) \mid t^p - t = v\}$$

et  $E' \big|_{E_x}$  est un revêtement d'Artin-Schreier de  $E_x$ .

D'autre part,  $U' \big|_{U_y}$  se prolonge en un revêtement étale de  $\{(u, y) \mid u \neq 0\}$  et l'on est dans une situation produit identique à

celle traitée dans 5.1.3.1 . Donc  $Z'$  est lisse au-dessus de  $\tilde{Z}_y$  et  $(1/t, y)$  sont des coordonnées locales sur  $Z'$  , centrées en l'unique point de  $Z'$  au-dessus de  $(0,0) \in \tilde{Z}_y$  . De plus,  $\pi'^*(Y)$  a pour équation  $y(1/t)^p = 0$  au-dessus de  $(0,0) \in \tilde{Z}_y$  . Ceci achève de montrer que

$$\pi'^*(Y) = p \cdot Y' + E'$$

et que  $Y' + E'$  est un diviseur à croisements normaux, au-dessus d'un voisinage de  $z$  dans  $Z$  . En fait  $E'$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^1$  :  $E' \rightarrow E$  est un revêtement d'Artin-Schreier ramifié en un point avec pour conducteur de Swan en ce point 1 ([7], 1.1.7) ; on peut appliquer la formule de Weil (SGA 5 X) ; on obtient

$$\chi(E') = p \cdot \chi(E) - (p-1)(1+1) = 2$$

donc  $E'$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^1$  (au-dessus d'un voisinage de  $z$  et dans le cas où  $S = \text{Spec}(k)$  ).

5.2. Gardons les notations de 5.1 . Soit  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\psi, f)$  le  $E_\lambda$ -faisceau lisse de rang 1 sur  $U$  , facteur direct de  $\pi_*(E_\lambda)$  sur lequel  $\mathbb{F}_p$  agit par l'intermédiaire de  $\psi^{-1}$  . On a le corollaire suivant de 5.1.2 :

Corollaire 5.2.1.- Si  $p : Z \rightarrow S$  est la projection canonique, les faisceaux

$$R^n p_* (j_! \mathcal{Y})$$

$(n \in \mathbb{N})$  sont lisses sur  $S$  .

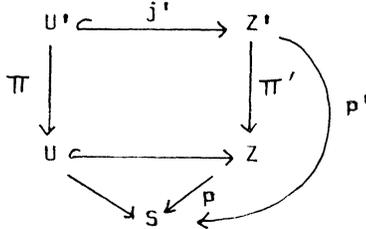
En effet, si  $p' = p \circ \pi' : Z' \rightarrow S$  est la projection canonique, d'après (SGA 4 1/2, [Th. finitude], appendice), les faisceaux

$$R^n p'_* (j_! E_\lambda) \quad (n \in \mathbb{N})$$

sont lisses sur  $S$  . On a

$$\begin{aligned} R^n p'_* (j'_! E_\lambda) &= R^n (p' \circ j') ! E_\lambda \\ &= R^n (p \circ j \circ \pi) ! E_\lambda \end{aligned}$$

puisque le diagramme



commute. Or π est fini, donc  $R\pi_* = \pi_*$  et donc, on a

$$R^n p'_* (j'_! E_\lambda) = R p_* (j ! (\pi_* E_\lambda))$$

Mais le faisceau  $R^n p_* (j ! \mathcal{F})$  est le facteur direct du faisceau  $R^n p_* (j ! (\pi_* E_\lambda))$  sur lequel  $\mathbb{F}_p$  opère à travers  $\psi^{-1}$ , d'où le corollaire.

5.3. Appliquons en particulier 5.2.1 à la famille universelle des hypersurfaces de degré d dans  $\mathbb{P}_k^3$ . Plus précisément soit S l'ouvert de

$$\text{Spec}(k[A_{\underline{i}} \mid \underline{i} \in \mathbb{N}^3 \text{ et } |\underline{i}| \leq d])$$

(où  $\underline{i} = (i_1, i_2, i_3)$  et  $|\underline{i}| = i_1 + i_2 + i_3$ ) qui paramètre les polynômes de  $k[x_1, x_2, x_3]$  de degré  $\leq d$  :

$$\sum_{|\underline{i}| \leq d} a_{\underline{i}} x^{\underline{i}}$$

(où  $x^{\underline{i}} = x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$ ) tels que l'hypersurface de

$$\mathbb{P}_k^3 = \text{Proj}(k[X_1, X_2, X_3, X_4]) \text{ d'équation}$$

$$\sum_{|\underline{i}| \leq d} a_{\underline{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} X_4^{d-|\underline{i}|} = 0$$

soit lisse, soit transverse à l'hyperplan d'équation  $X_4 = 0$  et soit

transverse à la droite  $\{x_1 = x_4 = 0\}$ .

Soit  $Z \subset \mathbb{P}_S^3$  l'hypersurface universelle d'équation

$$\sum_{|\underline{i}| \leq d} A_{\underline{i}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{d-|\underline{i}|} = 0,$$

soit  $H$  l'hyperplan d'équation  $x_4 = 0$ , soit  $U$  l'ouvert  $Z - (Z \cap H)$  de  $Z$  et soit  $\mathcal{Y}$  le  $E_\lambda$ -faisceau  $\mathcal{Y}(\psi, x_1)$  sur  $U$ . Alors les hypothèses de 5.2.1 sont vérifiées et on peut appliquer 5.3.1. En particulier, la fonction sur  $S$  :

$$s \longmapsto \chi_c(U_s, \mathcal{Y}_s)$$

(où  $(U_s, \mathcal{Y}_s)$  est la fibre en  $s \in S$  de la famille) est localement constante, donc constante puisque  $S$  est connexe.

On peut donc calculer  $\chi_c(U_s, \mathcal{Y}_s)$  en n'importe quel point de  $s$ . On le fera, au numéro suivant, au point  $s$  correspondant à la surface de Fermat d'équation affine  $x_1^d + x_2^d + x_3^d + 1 = 0$ .

## 6.- Une majoration "à la weil" de sommes trigonométriques

6.1. Pour achever la preuve de la formule de Katz 4.3.1, il nous reste à montrer la proposition suivante (cf. 4.4) :

Proposition 6.1.1.- Soit  $d$  un entier positif divisant  $q - 1$ , posons, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n = \sum_{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}_q^n} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \text{Tr}_{\mathbb{F}_q^n/\mathbb{F}_p}(x_1)\right) \cdot x_1^d + x_2^d + x_3^d + 1 = 0$$

Il existe  $d(d-1)^2$  nombres algébriques  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{d(d-1)^2})$  dont tous les conjugués complexes sont de module  $q$  tels que

$$S_n = \sum_{i=1}^{d(d-1)^2} \alpha_i^n$$

pour tout  $n > 0$  .

6.2. On va suivre la méthode, qu'utilise Weil, pour prouver l'hypothèse de Riemann pour une hypersurface diagonale [10], [5].

Pour tout entier  $n \geq 1$  et tous  $\alpha, y \in \mathbb{F}_q^n$ , on pose

$$N_n(\alpha) = \# \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^n \mid x_1^d + x_2^d = \alpha \}$$

et

$$m_n(y) = \# \{ x \in \mathbb{F}_q^n \mid x^d = y \}$$

On fixe, dans toute la suite de l'exposé, un caractère multiplicatif

$$\chi : \mathbb{F}_q^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \text{ non trivial, d'ordre exactement } d ; \text{ on pose}$$

$$\chi_n = \chi \circ N_{\mathbb{F}_q^n / \mathbb{F}_q} : \mathbb{F}_q^{n*} \longrightarrow \mathbb{C}^* . \text{ On désigne par } \varepsilon : \mathbb{F}_q^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

le caractère unité. On prolonge  $\chi$  (resp.  $\varepsilon$ ) à  $\mathbb{F}_q$  en posant  $\chi(0) = 0$  (resp.  $\varepsilon(0) = 1$ ).

Comme on a supposé que  $d$  divise  $q - 1$ , on a les formules suivantes [5] :

$$(6.2.1) \quad N_n(0) = 1 + d(q^n - 1)$$

et pour  $y \in \mathbb{F}_q^n$ ,

$$(6.2.2) \quad m_n(y) = \sum_{j=0}^{d-1} \chi_n^j(y) .$$

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{F}_q^n$ , on a immédiatement

$$N_n(\alpha) = \sum_{y_1 + y_2 = \alpha} m_n(y_1) m_n(y_2)$$

donc, d'après 6.2.2,

$$N_n(\alpha) = \sum_{j_1, j_2=0}^{d-1} \sum_{y_1 + y_2 = \alpha} \chi_n^{j_1}(y_1) \chi_n^{j_2}(y_2)$$

Si  $\alpha \in \mathbb{F}_q^n$ , on en déduit que

$$(6.2.3) \quad N_n(\alpha) = \sum_{j_1, j_2=0}^{d-1} J_n(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) \chi_n^{j_1+j_2}(\alpha)$$

où

$$J_n(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) = \sum_{\substack{z_1+z_2=1 \\ z_1, z_2 \in \mathbb{F}_q^n}} \chi_n^{j_1}(z_1) \chi_n^{j_2}(z_2)$$

est une somme de Jacobi.

Les sommes de Jacobi vérifient les formules suivantes [5] :

$$J_n(\varepsilon, \varepsilon) = q^n,$$

si  $\chi^{j_1}$  et  $\chi^{j_2}$  sont distincts de  $\varepsilon$ ,

$$J_n(\chi^{j_1}, \varepsilon) = J_n(\varepsilon, \chi^{j_2}) = 0$$

et, si  $\chi^{j_1} \cdot \chi^{j_2} = \varepsilon$ ,

$$J_n(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) = -\chi_n^{j_1}(-1).$$

Introduisant alors

$$J = \{(j_1, j_2) = \underline{j} \in \{1, \dots, d-1\}^2 \mid j_1 + j_2 = |\underline{j}| \neq d\},$$

on peut récrire 6.2.3 sous la forme

$$N_n(\alpha) = q^n - \sum_{j_1=1}^{d-1} \chi_n^{j_1}(-1) + \sum_{\underline{j} \in J} J_n(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) \chi_n^{j_1+j_2}(\alpha)$$

D'après 6.2.2, on a

$$1 + \sum_{j_1=1}^{d-1} \chi_n^{j_1}(-1) = \sum_{j_1=0}^{d-1} \chi_n^{j_1}(-1) = m_n(-1) = d$$

donc  $N_n(\alpha)$ , pour  $\alpha \in \mathbb{F}_q^n$ , se réécrit encore

$$(6.2.4) \quad N_n(\alpha) = q^n + 1 - d + \sum_{\underline{j} \in J} J_n(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) \chi_n^{|\underline{j}|}(\alpha)$$

6.3. Utilisons 6.2.4 pour calculer  $S_n$ . On désigne par  $\Psi : \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{C}^*$  le caractère  $\Psi(\alpha) = \exp(\frac{2\pi i \alpha}{p})$  et par  $\Psi_n$  le composé  $\Psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p} : \mathbb{F}_{q^n} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . On a

$$S_n = \sum_{x_1 \in \mathbb{F}_{q^n}} N_n(-1-x_1^d) \Psi_n(x_1)$$

donc, d'après 6.2.1 et 6.2.4,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{\substack{x_1^d \neq -1 \\ x_1 \in \mathbb{F}_{q^n}}} (1 + d(q^n-1)) \Psi_n(x_1) \\ &\quad + \sum_{\substack{x_1^d = -1 \\ x_1 \in \mathbb{F}_{q^n}}} (q^n + 1 - d) \Psi_n(x_1) \\ &\quad + \sum_{\substack{x_1^d = -1 \\ x_1 \in \mathbb{F}_{q^n}}} \sum_{\underline{j} \in J} J_n(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) \Psi_n(x_1) \chi_n^{|\underline{j}|} (-1-x_1^d) \end{aligned}$$

Or  $\sum_{x_1 \in \mathbb{F}_{q^n}} \Psi_n(x_1) = 0$  et  $\chi_n^{|\underline{j}|}(0) = 0$  pour tout  $\underline{j} \in J$ , donc

on obtient finalement la formule

$$(6.3.1) \quad S_n = (d-1) \sum_{\substack{x_1^d = -1 \\ x_1 \in \mathbb{F}_{q^n}}} q^n \Psi_n(x_1) + \sum_{\underline{j} \in J} J_n(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) K(|\underline{j}|, n)$$

où l'on a posé

$$K(a, n) = \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^n}} \Psi_n(x) \chi_n^a(-1-x^d)$$

pour tout  $(a, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

**Lemme 6.3.2.- Il existe d nombres algébriques  $(\gamma_{a,1}, \dots, \gamma_{a,d})$  dont tous les conjugués complexes sont de module  $\sqrt{q}$  et tels que**

$$K(a, n) = - \sum_{l=1}^d \gamma_{a, l}^n$$

pour tout  $(a, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  , avec  $d$  ne divisant pas  $k$  .

Ce lemme est démontré dans [11] . On en donnera cependant une démonstration au numéro 6.4 .

Admettons provisoirement 6.3.2 , il est facile d'en déduire 6.1.1 . En effet, si  $x_1 \in \mathbb{F}_q^n$  et  $x_1^d = -1$  ,  $x_1$  est déjà dans  $\mathbb{F}_q$  (  $d$  divise  $q-1$  ), donc

$$q^n \Psi_n^-(x_1) = (q \Psi(x_1))^n$$

avec  $|q \Psi(x_1)| = q$  . Donc le premier terme de  $S_n$  , dans la formule 6.3.1 , peut s'exprimer à l'aide de  $(d-1)d$  nombres algébriques  $\alpha_i$  de module  $q$  . D'autre part, si  $\underline{j} \in J$  ,  $\chi^{j_1} \cdot \chi^{j_2} \neq \varepsilon$  , donc on a les deux résultats classiques suivants pour les sommes de Jacobi [1] , [5] :

$$|J_1(\chi^{j_1}, \chi^{j_2})| = \sqrt{q}$$

et la relation de Davenport-Hasse

$$J_n(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) = - (-J_1(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}))^n$$

De sorte que, pour  $\underline{j} \in J$  , on a

$$J_n(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) K(|\underline{j}|, n) = \sum_{l=1}^d (-J_1(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) \gamma_{|\underline{j}|, l})^n$$

avec

$$| - J_1(\chi^{j_1}, \chi^{j_2}) \gamma_{|\underline{j}|, l} | = q$$

Le deuxième terme de  $S_n$  , dans la formule 6.3.1 , peut s'exprimer à l'aide de  $d \cdot (\# J)$  nombres algébriques  $\alpha_i$  de module  $q$  . On a gagné, puisque

$$d(d-1) + d \cdot (\# J) = d(d-1)^2 .$$

6.4. Il nous reste à prouver 6.3.2 . Pour cela, considérons le revêtement suivant :

$$\begin{array}{c} U'_0 = \{ (t, u, x) \mid x^d \neq -1, t^p - t = x, u^{q-1} = -1 - x^d \} \\ \downarrow \pi_0 \\ U_0 = \{ x \mid x^d \neq -1 \} \end{array}$$

C'est un revêtement fini, étale, galoisien de groupe de Galois

$$G = H \times K$$

où  $H = \mathbb{F}_p^*$  et  $K = \mathbb{F}_q^*$  ;  $g = (h, k)$  agit par  $(t, u, x) \mapsto (t+h, k.u, x)$  .

On ne traitera que le cas  $a = 1$  , ce qui est suffisant puisque l'on peut remplacer  $\chi$  par  $\chi^a$  . Alors  $\psi$  et  $\chi$  définissent un caractère

$$\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

par  $\rho(h, k) = \psi(h)\chi(k)$  . Ici encore on peut considérer que ce caractère est à valeurs dans une extension finie  $E_\lambda$  de  $\mathbb{Q}_1$  ,  $l \neq p$  . On dispose donc d'un  $E_\lambda$ -faisceau lisse de rang 1 ,  $\mathcal{G}_0$  , sur  $U_0 : \mathcal{G}_0$  est le facteur direct de  $(\pi_0)_* E_\lambda$  sur lequel  $H \times K$  opère par l'intermédiaire de  $\rho^{-1}$  . La traduction cohomologique de  $K(1, n)$  est la suivante [1] :

$$K(1, n) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \text{Tr}((\mathbb{F}^*)^n, H_c^i(U, \mathcal{G}))$$

Soient  $Z = \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1$  ,  $Y = \{\infty\} \cup \{ x \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^1 \mid x^d = -1 \}$  et  $j : U = Z - Y \hookrightarrow Z$  l'inclusion. Le lemme 6.3.2 résulte de 2.1.1 , 2.2.1 , 2.2.2 et des deux résultats suivants :

(6.4.1) la flèche naturelle

$$j! \mathcal{G} \longrightarrow Rj_* \mathcal{G}$$

est un isomorphisme ;

$$(6.4.2) \quad \chi_c(U, \mathcal{G}) = -d .$$

Remarque : Avant de montrer ces deux derniers résultats, remarquons que l'on est dans une situation de dimension 1, où l'hypothèse de Riemann se démontre par voie "élémentaire".

Montrons 6.4.1. Pour  $i \geq 2$ , on a pour des raisons de dimension  $R^i j_* \mathcal{G} = 0$ . Par dualité locale (SGA 5 I 5.18 ou SGA 4 1/2, [Dualité] 1.3) on ramène la nullité de  $R^i j_* \mathcal{G}$  à celle de  $(j_* \check{\mathcal{G}})|_Y$ . Enfin  $(j_* \mathcal{G})_y = (g_{\bar{\eta}_y})^{I_y}$ , pour tout  $y \in Y$ , où  $\bar{\eta}_y$  est un point géométrique au-dessus du point générique  $\eta_y$  du localisé de  $Z$  en  $y$  et où  $I_y = \text{Gal}(\bar{\eta}_y/\eta_y)$  est le groupe d'inertie local. Or  $g_{\bar{\eta}_y}$  est un  $E_\lambda$ -espace vectoriel de dimension 1 et  $I_y$  opère non trivialement sur cet espace car  $\chi$  et  $\psi$  sont supposés non triviaux, donc  $(j_* \mathcal{G})_y = 0$ . On procède de même pour  $\check{\mathcal{G}}$ .

Montrons 6.4.2. La formule de Grothendieck-Ogg-Safarevič ([7], 1.2.1) donne l'égalité

$$\chi_c(U, \mathcal{G}) = \chi_c(U) - \sum_{y \in Y} S_{w_y}(\mathcal{G})$$

Or  $\mathcal{G}$  est modérément ramifié aux points  $x \in Y$  tels que  $x^d = -1$  et  $\chi_c(U) = 1 - d$ . Donc

$$\chi_c(U, \mathcal{G}) = 1 - d - S_{w_\infty}(\mathcal{G}) ,$$

donc 6.4.2 résulte de la formule

$$(6.4.3) \quad S_{w_\infty}(\mathcal{G}) = 1$$

Prouvons cette dernière formule.

Soient  $K = \mathbb{F}((y))$  et  $A_K = \mathbb{F}[[y]]$  où  $y = 1/x$  est un paramètre local sur  $Z$  à l'infini. Puisque  $(d, p) = 1$ ,  $-1 - y^d$  admet une racine  $d$ -ième dans  $A_K$ , déterminée à une racine  $d$ -ième

de l'unité près. On notera  $(-1 - y^d)^{1/d}$  une des racines  $d$ -ième.

Alors

$$y' = y/(-1 - y^d)^{1/d}$$

est encore une uniformisante de  $A_K$ .

Ecrivons  $q - 1 = d \cdot d'$  et soit  $\eta$  une racine primitive  $d$ -ième de l'unité, alors

$$u^{q-1} + 1 + x^d = u^{q-1} - 1/y'^d$$

donc

$$u^{q-1} + 1 + x^d = (u^{d'} - 1/y') (u^{d'} - \eta/y') \dots (u^{d'} - \eta^{d-1}/y')$$

Ceci montre que le normalisé  $Z'$  de  $Z$  dans  $U'$  admet  $d$  points distincts  $(\infty'_0, \dots, \infty'_{d-1})$  au-dessus du point  $\infty \in Z$ , et que

$$\mathcal{O}_{Z', \infty'_i} = A_K[t, u] / (t^q - t - 1/y, u^{d'} - \eta^i/y')$$

Soit  $\infty' = \infty'_0$ ,  $A_L = \mathcal{O}_{Z', \infty'}$  et  $L = \text{Fract}(A_L)$ . Alors  $A_L/A_K$  est une extension d'anneaux de valuations discrète complets, galoisienne, de groupe de Galois le groupe d'inertie  $G_0 \subset G$  du point  $\infty'$  de  $Z'$ , et cette extension est totalement ramifiée. Il est clair que

$$G_0 = H \times \{k \in K \mid k^{d'} = 1\}$$

et que, si  $a, b \in \mathbb{N}$  sont tels que

$$aq - bd' = 1,$$

l'élément

$$\pi = u^{-a} t^b$$

de  $L$  est une uniformisante de  $A_L$ .

Si  $g = (h, k) \in G_0$ , on a

$$g(\pi) - \pi = u^{-a} t^b (k^{-a} (1 + t/h)^b - 1)$$

donc

$$i(g) = v_L(g(\pi) - \pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq 1 \\ 1 + d' & \text{si } k = 1 \text{ et } h \neq 0 \\ \infty & \text{si } k = 1 \text{ et } h = 0 \end{cases}$$

Les groupes de ramification supérieurs de  $A_L/A_K$  sont donc

$$G_0 \supset_{\#} G_1 = \dots = G_{d'} \supset_{\#} G_{d'+1} = G_{d'+2} = \dots = \{(1, 0)\}$$

où  $G_1 = \dots = G_{d'} = H \times \{1\}$  . Or ([7], 1.1.5) :

$$\begin{aligned} Sw_{\infty}(g) &= Sw_{\infty}'(g) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[G_0 : G_i]} \dim_{E_{\lambda}} (E_{\lambda} / E_{\lambda}^{\rho(G_i)}) \end{aligned}$$

donc

$$Sw_{\infty}(g) = \sum_{i=1}^{d'} 1/d' = 1$$

Ceci montre 6.4.3 et achève la preuve de 6.3.2 .

Bibliographie

- [ 1 ] P. DELIGNE.- Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques, [Sommes trig.], SGA 4 1/2 .
- [ 2 ] P. DELIGNE.- La conjecture de Weil I , Publ. Math. I.H.E.S n° 43, 1974, p. 273-307 .
- [ 3 ] P. DELIGNE.- La conjecture de Weil II, Publ. Math. I.H.E.S n° 50 ou n° 51, 1980 .
- [ 4 ] C. HOUZEL.- Morphisme de Frobenius et rationalité des fonctions L, SGA 5 , exposé XV .
- [ 5 ] J.-R. JOLY.- Equations et variétés algébriques sur un corps fini, L'Enseignement Math., t. XIX, p. 1-117 .
- [ 6 ] N. KATZ.- Exposés à Irvine, janvier 1977 .
- [ 7 ] G. LAUMON.- Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne), ce volume .
- [ 8 ] G. LAUMON.- Travail en préparation .
- [ 9 ] J.-P. SERRE.- Majorations de sommes exponentielles, Journées Arithmétiques de Caen, Astérisque, t. 41-42, 1977, p. 111-126 .
- [10] A. WEIL.- Numbers of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., t. 55, 1949, p. 497-504 .
- [11] A. WEIL.- Examples of L-functions, Appendix V to "Basic Number Theory", 3<sup>rd</sup> edition, Springer-Verlag, 1974 .