AST

Pages préliminaires

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__1_0>

TABLE DES MATIÈRES

L'objet de ce séminaire, dirigé par L. ILLUSIE et le rédacteur, et publié dans le volume 82-83 d'Astérisque, est d'étudier la caractéristique d'Euler - Poincaré des variétés algébriques ou des espaces analytiques complexes compacts. Pour préciser ce sujet, rappelons d'abord quatre faits classiques :

I) Soient M une variété analytique lisse, complexe, compacte, de dimension pure n, $c^\bullet(T_M) \in H^{2*}(M, \mathbb{Z})$ les classes de Chern du fibré tangent à M. La caractéristique d'Euler-Poincaré de M est l'entier $\chi(M)$ défini par :

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \dim H^i(M, \mathbb{Z}) .$$

On sait qu'on a :

$$\chi(M) = \int_M c^n(T_M) \cap [M],$$

où $[M] \in H_n(M, \mathbb{Z})$ est la classe fondamentale de M, $c^n(T_M) \cap [M] \in H_0(M, \mathbb{Z})$ est le cap-produit et $\int_M : H_0(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est l'augmentation canonique. Posons alors pour tout $i \leq n$, $c_i(M) = c^{n-i}(T_M) \cap [M] \in H_{2i}(M, \mathbb{Z})$. On obtient ainsi des classes d'homologie que nous appelons les classes d'homologie de Chern. Avec ce changement de notation, on obtient :

$$\text{(A)} \qquad \chi(M) = \int_M c_n(M) .$$

II) Conservons les notations précédentes et munissons le fibré tangent de M d'une métrique hermitienne. Cette métrique et la structure analytique de T_M permettent de définir une connexion sur T_M . Cette connexion a un tenseur de courbure qui engendre des formes différentielles fermées W_p , de type (p,p) qu'on appelle les formes de courbures ou formes de Chern-Weil. Les formes W_p sont dans les classes de cohomologie $c^p(T_M)$. On a donc

$$\text{(B)} \qquad \chi(M) = \int_M W_n$$

III) Soient M une variété différentiable compacte et $m \longrightarrow \vec{X}(m)$ un champ de vecteurs tangents dont les zéros sont isolés. En chaque point m tel que $\vec{X}(m) = 0$, on peut définir un entier $i(m, \vec{X})$ appelé indice du champ de vecteurs en m et on a

$$\text{(C)} \qquad \chi(M) = \sum_{m, \vec{X}(m)=0} i(m, \vec{X}) .$$

IV) Soient M un complexe cellulaire et T_M un fibré vectoriel complexe sur M. Les classes de Chern $c^p(T_M)$ peuvent être interprétées comme des <u>obstructions</u> à l'existence de champ de p-repères de T_M.

On se propose dans ce séminaire d'étudier ce qu'il advient de ces notions et de ces égalités lorsque M est une variété analytique complexe compacte, éventuellement singulière, ou bien lorsque M est une variété algébrique abstraite.

Le point de départ de cette étude dans le cas transcendant est le théorème de Mac Pherson qui affirme l'existence et l'unicité d'une théorie des classes d'homologie de Chern essentiellement définie par l'égalité (A) interprétée dans un contexte fonctoriel convenable.

Pour construire ces classes d'homologie, Mac Pherson définit un invariant numérique attaché à chaque point singulier et appelé <u>nombre d'Euler</u> du point. Ce nombre est "l'indice du champ de vecteurs radial", champ de vecteurs et indice auxquels on donne un sens dans ce contexte singulier.

Ce nombre d'Euler est étudié dans l'exposé 1 où on en donne une description en termes de multiplicité d'intersection de cycles dans le transformé de Nash de M. Ce nombre d'Euler est aussi exprimé dans l'exposé 4, dans le cas des surfaces, à l'aide des multiplicités des variétés polaires c'est-à-dire des variétés critiques de projections linéaires. Ce résultat a été étendu par la suite en dimension quelconque par LE et TEISSIER.

On peut, en plongeant M dans un espace projectif, définir sur la partie non singulière de M des formes de courbure et étudier l'existence et la valeur des intégrales de courbure. Cette valeur n'est pas en général la caractéristique d'Euler-Poincaré. Les classes d'homologie qui correspondent à ces formes différentielles ne sont pas en général les classes de Chern ; ce sont les classes de Mather. D'après le théorème de Mac Pherson, il faut faire des combinaisons linéaires formant une matrice θ et les coefficients de θ^{-1} sont les nombres d'Euler des différentes singularités de M. Les différentes intégrales de courbure sous leurs formes locales au voisinage des singularités sont étudiées dans l'exposé 3. L'exposé n° 2 du séminaire par A. DUBSON n'est pas publié dans ce volume.

Dans les exposés 5 et 6, on montre en utilisant des stratifications de Whitney de M, comment on peut définir des classes d'homologie qui sont des obstructions à l'existence de champs de p-repères tangents. Il s'agit là de travaux antérieurs de M.H. SCHWARTZ. On y montre aussi que ces classes ne sont autres que les classes d'homologie de Chern. Enfin, pour terminer cette partie transcendante du séminaire, on étudie dans l'exposé 7 le comportement des classes de Chern par spécialisation.

Les exposés 8, 9, 10 sont consacrés à la caractéristique positive où se produisent des phénomènes nouveaux.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de A-modules sur M (A corps de coefficients). Il existe donc par définition, une stratification de M telle que la restriction de $\mathcal{F}$ à chaque strate soit localement constant à fibre de rang fini. Posons :

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum (-1)^i \dim_A H^i(H,\mathcal{F}),$$

et pour tout $m \in M$

$$\rho_{\mathcal{F}}(m) = \operatorname{rang}_A \mathcal{F}_m$$

Lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau pour la topologie transcendante, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{F})$ ne dépend que de la fonction $\rho_{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire ne dépend pas des représentations des groupes fondamentaux des strates définies par $\mathcal{F}$. Ceci se démontre en utilisant l'additivité de χ et l'existence de triangulations de M . La fonction $\rho_{\mathcal{F}}$ s'exprime comme combinaison à coefficients entiers de fonctions caractéristiques de sous-variétés fermés de M et en définitive $\chi(\mathcal{F})$ se calcule à l'aide des caractéristiques d'Euler-Poincaré de ces sous-variétés.

En caractéristique positive et lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau étale, il n'en est plus de même ainsi que le montre le théorème de Grothendieck qui permet de calculer $\chi(\mathcal{F})$ lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur une courbe. En plus des termes classiques, figurent dans cette formule des termes nouveaux : les <u>conducteurs de Swan</u>, qui dépendent des représentations sauvages des π_1 locaux, définies par $\mathcal{F}$. Dans l'exposé 8, on présente un résultat de Deligne qui montre que deux faisceaux qui ont même fonction rang et mêmes comportements sauvages en tous les points, ont même caractéristique d'Euler-Poincaré et dans l'exposé 9, on démontre un théorème de semi-continuité du conducteur de Swan dans les déformations à un paramètre, résultat dû aussi à Deligne. Dans l'exposé 10, on présente des résultats de Deligne et Katz : certaines sommes trigonométriques intervenant en arithmétique s'interprètent comme la trace de l'endomorphisme de Frobenius agissant sur un groupe de cohomologie de degré n d'un faisceau étale $\mathcal{F}$. Lorsqu'on dispose d'un calcul de $\chi(\mathcal{F})$ et de théorèmes d'annulation de la cohomologie en degré $\neq$ n , on peut en utilisant les conjectures de

Weil, démontrées par Deligne, obtenir des bonnes majorations de ces sommes.

Enfin signalons que la situation en caractéristique positive est loin d'être aussi satisfaisante que dans le cas transcendant (*). On aimerait pouvoir disposer d'un groupe de Grothendieck "sauvage" des faisceaux constructibles tels que deux faisceaux ayant même rang et même comportement sauvage en chaque point, aient même classe dans ce groupe de Grothendieck et tel que ce groupe soit un foncteur covariant. Des résultats récents de LAUMON donnent des indications dans ce sens. On aimerait aussi disposer d'une théorie des classes d'homologie de Chern qui serait une transformation naturelle de ce groupe de Grothendieck sauvage dans les groupes d'homologie étale.

Jean-Louis VERDIER

(*) Cette introduction est rédigée en janvier 81.