

# *Astérisque*

JEAN-LOUIS VERDIER

## **Spécialisation des classes de Chern**

*Astérisque*, tome 82-83 (1981), p. 149-159

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1981\\_\\_82-83\\_\\_149\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__149_0)>

© Société mathématique de France, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SPÉCIALISATION DES CLASSES DE CHERN

par J.-L. VERDIER

Tous les espaces, variétés, schémas de cet exposé sont séparés.

1. Spécialisation des classes d'homologie.

Soient  $D$  un disque ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $o \in D$  son centre,  $X \xrightarrow{\pi} D$  un morphisme analytique. On dit que  $\pi$  est une flèche de spécialisation topologique si, au-dessus de  $D - \{o\}$ ,  $\pi$  est une fibration topologique localement triviale. Soit  $\eta \in D - \{o\}$  un point qu'on appellera le point général. Les groupes de cohomologie à support compact des fibres de  $\pi$  sont les fibres d'un faisceau  $R^i \pi_! \mathbb{Z}$  d'image directe à support propre qui est lui-même le faisceau de cohomologie d'un complexe  $R\pi_! \mathbb{Z}$ . On a des morphismes de complexes :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(D, R\pi_! \mathbb{Z}) & \longrightarrow & (R\pi_! \mathbb{Z})_\eta \\ \downarrow & \nearrow \sigma^* & \\ (R\pi_! \mathbb{Z})_o & & \end{array}$$

La flèche verticale est un isomorphisme car les faisceaux  $R^i \pi_! \mathbb{Z}$  sont localement constants sur  $D - \{o\}$ . On en déduit un morphisme  $\sigma^*$  par commutativité du diagramme. Ce morphisme  $\sigma^*$  induit en passant à la cohomologie des morphismes

$$\sigma^* : H_c^i(X_o) \longrightarrow H_c^i(X_\eta) ,$$

et en dualisant et en passant à la cohomologie

$$\sigma^* : H_i(X_\eta) \longrightarrow H_i(X_o) ,$$

(homologie localement finie).

Ces morphismes sont appelés les morphismes de spécialisation. Le morphisme

$\sigma^*$  est un homomorphisme d'algèbres. On a une formule de projection

$$\sigma_* (\sigma^* \alpha \cap a) = \alpha \cap \sigma_* (a) .$$

Lorsque  $\pi$  est plat, on a  $\sigma_* ([X_\eta]) = [X_0]$  où  $[X_\eta]$  et  $[X_0]$  désignent les classes fondamentales [1] .

Soient  $X_i \xrightarrow{\pi_i} D$ ,  $i = 1, 2$ , deux morphismes de spécialisation topologique,  $p : X_1 \rightarrow X_2$  un morphisme propre,  $p : X_{1,\eta} \rightarrow X_{2,\eta}$  et  $p_0 : X_{1,0} \rightarrow X_{2,0}$  les morphismes induits par  $p$  sur les fibres en 0 et  $\eta$  respectivement. Il résulte immédiatement des définitions qu'on a

$$\begin{cases} \sigma_* \circ p_* = p_* \circ \sigma_* \\ \sigma_* p_{\eta*} = p_{0*} \sigma_* \end{cases}$$

Nous dirons qu'un morphisme  $\pi : X \rightarrow D$  est compactifiable s'il existe un morphisme propre  $\bar{\pi} : \bar{X} \rightarrow D$  et une immersion ouverte  $i : X \hookrightarrow \bar{X}$  tels que  $\bar{\pi} \circ i = \pi$  et que  $\bar{X} - i(X)$  soit un fermé analytique de  $\bar{X}$ . Soit  $\pi : X \rightarrow D$  un morphisme compactifiable. Il résulte du théorème d'isotopie [2] que, en se restreignant à un disque ouvert non vide convenable  $D' \subset D$  de centre 0,  $\pi$  devient un morphisme de spécialisation topologique.

On appellera alors point général de  $D$  relativement à  $\pi$ , un point quelconque de  $D' - \{0\}$ .

Nous dirons qu'un morphisme  $\pi : X \rightarrow D$  est de nature algébrique s'il existe une variété algébrique  $X'$ , une fonction algébrique  $\pi' : X' \rightarrow \mathbb{C}$ , un plongement analytique  $i : D \hookrightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\pi$  soit la restriction de  $\pi'$  à  $D$ . Il résulte d'un théorème de Magata qu'un morphisme de nature algébrique est compactifiable.

## 2. Les faisceaux de monodromie locale.

Soient  $X$  un espace topologique,  $\pi : X \rightarrow D$  une application continue. On a  $\pi_1(D - \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$ . Notons  $\mathbb{Z} \langle 0 \rangle$  le faisceau associé à la représentation régulière de  $\pi_1(D - \{0\})$  et prolongé par 0 sur  $D$ . Posons

alors  $Z \langle \tilde{\pi} \rangle = \tilde{\pi}^* Z \langle 0 \rangle$  . Pour tout faisceau de groupes commutatifs  $F$  sur  $X$  , on pose

$$\psi(F) = \mathcal{H}om_{\mathbb{Z}}(Z \langle \tilde{\pi} \rangle, F)/X_0 .$$

Soit  $\gamma \in \tilde{\pi}_1(D - \{0\})$  le générateur canonique. Comme  $\tilde{\pi}_1(D - \{0\})$  opère sur  $Z \langle \tilde{\pi} \rangle$  ,  $\gamma$  induit un automorphisme encore noté  $\gamma^*$  , de  $\psi(F)$  . Le faisceau  $\psi(F)$  sur la fibre  $X_0$  est appelé le faisceau de monodromie locale de  $F$  et  $\gamma^* : \psi(F) \rightarrow \psi(F)$  est appelé l'automorphisme de monodromie, de sorte que  $\psi(F)$  est un  $\mathbb{Z}[\gamma, \gamma^{-1}]$  faisceau sur  $X_0$  .

En passant aux catégories dérivées, on obtient un foncteur  $R\psi$  qui associe à tout complexe borné inférieurement, de faisceaux  $F^*$  sur  $X$  , un complexe  $R\psi(F^*)$  de  $\mathbb{Z}[\gamma, \gamma^{-1}]$ -faisceaux sur  $X_0$  . On pose alors

$$R^i\psi(F^*) = H^i(R\psi(F^*)) .$$

Lorsqu'il convient de préciser, on pose  $\psi(F) = \psi_{\tilde{\pi}}(F)$  .

Soient  $\tilde{\pi}_i : X_i \rightarrow D$  ,  $i = 1, 2$  , deux applications continues,  $p : X_1 \rightarrow X_2$  une application propre telle que  $\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 \circ p$  ,  $p_0 : X_{1,0} \rightarrow X_{2,0}$  l'application induite par  $p$  sur les fibres en  $0$  . Il résulte immédiatement des définitions que, pour tout faisceau  $F$  sur  $X$  , on a un isomorphisme canonique

$$p_{0,*} \psi_{\tilde{\pi}_1}(F) \simeq \psi_{\tilde{\pi}_2}(p_*(F))$$

et que, pour tout complexe  $F^*$  , on a un isomorphisme canonique

$$(2.1) \quad R_{p_{0,*}} \circ R\psi_{\tilde{\pi}_1}(F^*) = R\psi_{\tilde{\pi}_2} \circ R_{p_*}(F^*)$$

PROPOSITION 2.2.- Soient  $\tilde{\pi} : X \rightarrow D$  un morphisme analytique,  $F^*$  un complexe borné de faisceaux à cohomologie analytiquement constructible [3] et de type fini sur  $\mathbb{Z}$  . Alors pour tout  $i$  ,  $R^i\psi(F^*)$  est un faisceau analytiquement constructible de type fini sur  $\mathbb{Z}$  . Si, de plus,  $\tilde{\pi}$  est de nature algébrique et si  $F^*$  est la restriction d'un complexe algébriquement constructible [loc. cit.], alors les  $R^i\psi(F^*)$  sont des faisceaux algébriquement constructibles.

Par un dévissage standard [loc. cit.] , on se ramène grâce à 2.1 , au cas où

- 1)  $X$  est lisse ,
- 2)  $F^*$  est un faisceau localement constant sur  $X - Y$  , où  $Y$  est un diviseur à croisements normaux,
- 3) on a  $F^* = R_{j_*} R_{j^*} F$  où  $j : X - Y \rightarrow X$  est l'inclusion canonique,
- 4) la fibre  $X_0$  est un diviseur à croisements normaux et  $(X_0)_{\text{red}} \subset Y$ .

Rappelons de plus que la propriété d'être analytiquement (resp. algébriquement) constructible est locale (resp. Zariski-locale).

On peut donc supposer de plus qu'il existe sur  $X$  des fonctions  $Z_1, \dots, Z_p$  , dont les différentielles sont indépendantes en tout point de  $X$  , telles que

- 5)  $Y$  soit défini par l'équation  $Z_1, \dots, Z_p = 0$  ,
- 6) il existe des entiers  $m_i \geq 0$  tels que  $X_0$  soit définie par l'équation  $\prod_1^p Z_i^{m_i} = 0$  .

Soit  $W = \{ x \in X \mid Z_i(x) = 0, 1 \leq i \leq p \}$  . Il suffit de montrer que  $R^i \psi(F)/W$  est localement constant de type fini sur  $Z$  . Soit  $x_0 \in W$  . Il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x_0$  dans  $X$  tel que  $\pi_1(V - V \cap Y)$  soit un groupe commutatif libre engendré par  $p$  générateurs  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  . Sur  $V - V \cap Y$  , le faisceau  $F^*$  est associé à une représentation de  $\pi_1(V - V \cap Y)$  dans un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini  $M$  .

Soit  $\pi_* : \pi_1(V - V \cap Y) \rightarrow \mathbb{Z}$  l'homomorphisme qui envoie  $\gamma_i$  sur  $m_i$  ,  $R$  la représentation de  $\pi_1(V - V \cap Y)$  déduite de la représentation régulière de  $\mathbb{Z}$  par  $\pi_*$  . Le faisceau  $\mathbb{Z} \langle \pi \rangle$  restreint à  $V - V \cap Y$  est associé à  $R$  . On a

$R \mathcal{H}om(\mathbb{Z} \langle \pi \rangle, F^*) \simeq R_{j_*} R \mathcal{H}om(\mathbb{Z} \langle \pi \rangle / V - V \cap Y, F^*)$  et, par suite,  $R^i \psi(F^*)/W \cap V$  est le faisceau constant de fibre

2.3  $\text{Ext}_{\pi_1(V - V \cap Y)}^i(R, M)$  .

Comme  $R$  est un  $\mathbb{Z}(\prod_1, V-V \cap Y)$ -module de type fini et  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini, les groupes  $\text{Ext}_{\prod_1, (V-V \cap Y)}^i(R, M)$  sont de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , d'où la proposition.

Remarque 2.4. - Il résulte de la formule 2.3. qu'on a, en tout point  $x \in W \cap V$

$$\sum (-1)^i \text{rg}(R^i \psi(F^*)_x) = k \text{rg } M$$

où  $k$  est un nombre entier indépendant de  $M$ .

### 3. Spécialisation des fonctions.

Soit  $X$  un espace analytique (resp. algébrique). Notons  $K(X)$  le groupe de Grothendieck des faisceaux analytiquement (resp. algébriquement) constructibles de type fini sur  $\mathbb{Z}$ ,  $C(X)$  le groupe des fonctions analytiquement (resp. algébriquement) constructibles sur  $X$ ,  $\chi_X : K(X) \longrightarrow C(X)$  l'unique homomorphisme de groupes qui associe à toute classe  $[F]$  de faisceau constructible la fonction  $x \longmapsto \text{rg}(F_x)$ . Soit  $p : X \longrightarrow Y$  un morphisme propre d'espaces analytiques. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\chi_X} & C(X) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ K(Y) & \xrightarrow{\chi_Y} & C(Y) \end{array}$$

où  $p_* : K(X) \longrightarrow K(Y)$  est induit par le foncteur  $R_{p_*}$  et où  $p_* : C(X) \longrightarrow C(Y)$  a été défini dans l'exposé 1. En effet cette assertion équivaut à montrer que, pour tout  $X$ , lisse, compactifiable, tout faisceau localement constant  $F$  sur  $X$  de rang  $n$ , on a

$$(3.2) \quad \sum_i (-1)^i \text{rg } H_c^i(X, F) = n \sum_i (-1)^i \text{rg } H_c^i(X, \mathbb{Z})$$

et cette dernière égalité résulte du fait qu'il existe une triangulation finie de  $X$  qui trivialise  $F$ .

Soit  $\pi : X \longrightarrow D$  un morphisme. Notons

$$(3.3) \quad \psi : K(X) \longrightarrow K(X_0)$$

l'homomorphisme induit par le foncteur  $R\psi$  suivi de l'oubli de l'automorphisme de monodromie

PROPOSITION 3.4.- Il existe un homomorphisme

$$\sigma_{\star} : K(X) \longrightarrow C(X_0)$$

et un seul tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\psi} & K(X_0) \\ \chi_X \downarrow & & \downarrow \chi_{X_0} \\ C(X) & \xrightarrow{\sigma_{\star}} & C(X_0) \end{array}$$

soit commutatif.

L'homomorphisme  $\sigma_{\star} : C(X) \longrightarrow C(X_0)$  est appelé l'homomorphisme de spécialisation.

Pour démontrer l'assertion, on se ramène par un dévissage standard et une récurrence sur la dimension de  $X$ , à démontrer le fait suivant : soient  $X$  lisse,  $\pi : X \longrightarrow D$  un morphisme tel que  $X_0$  soit un diviseur à croisements normaux,  $Y \subset X$  un diviseur à croisements normaux tel que  $(X_0)_{\text{red}} \subset Y$ ,  $j : X - Y \hookrightarrow X$  l'injection canonique,  $M_1, M_2$  deux faisceaux localement constants de même rang sur  $X - Y$ ,  $F_i^* = R_{j\star} M_i$ . Alors  $\chi_{X_0}(R\psi(F_1^*)) = \chi_{X_0}(R\psi(F_2^*))$ . Cette dernière égalité résulte de la remarque 2.4.

COROLLAIRE 3.5.- Soient  $\pi : X \longrightarrow D$  un morphisme de nature algébrique et  $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$  la restriction d'une fonction algébriquement constructible.

Alors  $\sigma_{\star}(f) : X_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$  est algébriquement constructible.

Résulte de 3.4 et 2.2.

COROLLAIRE 3.6.- Soient  $\pi_i : X_i \longrightarrow D$  deux morphismes,  $p : X_1 \longrightarrow X_2$  un morphisme propre tel que  $\pi_2 \circ p = \pi_1$ ,  $f : X_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$  une fonction analytiquement constructible. Alors on a

$$p_{0*} \sigma_* f = \sigma_* p_* f .$$

Résulte de 3.4 et 2.1 .

4. Calcul de la fonction spécialisée.

Soient  $\pi : X \rightarrow D$  un morphisme analytique et  $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$  une fonction analytiquement constructible. Il existe une famille localement finie de sous-espaces fermés  $Y_i \subset X$  telle que

$$f = \sum_i n_i 1_{Y_i} .$$

Par additivité, il suffit donc, pour calculer  $\sigma_*(f)$ , de savoir calculer  $\sigma_*(1_{Y_i})$ . Par commutation de la spécialisation aux images directes (3.6), il suffit donc de savoir calculer  $\sigma_*(1_X)$ . Soit  $x \in X_0$ . Choisissons un plongement local de  $X$  au point  $x$  dans un espace vectoriel et pour tout  $\varepsilon > 0$ , notons  $B(x, \varepsilon)$  la trace sur  $X$  d'une boule de rayon  $\varepsilon$  centrée en  $x$ . Soit  $\eta \in D$ ,  $\eta \neq 0$ . Pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,  $t\eta \in D - \{0\}$ . Notons  $X_{t\eta}$  la fibre de  $X$  au-dessus de  $t\eta$ .

PROPOSITION 4.1.- Il existe un  $\varepsilon_0$ ,  $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ , un entier  $m$  tel que pour tout  $(t, \varepsilon)$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $0 < t < \varepsilon^m$ , on ait

$$\sigma_*(1_X)(x) = \chi(B(x, \varepsilon) \cap X_{t\eta})$$

où  $\chi$  désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Soit  $Q = \{(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2, 0 < t \leq 1, 0 < \varepsilon\}$  et soit  $q : Z \rightarrow Q$  l'espace naturel dont la fibre en  $(t, \varepsilon)$  est  $X_{t\eta} \cap B(x, \varepsilon)$ . Il résulte du théorème d'isotopie pour les morphismes analytiques réels entre parties sous-analytiques que, quitte à se restreindre à des  $\varepsilon$  petits, il existe une triangulation sous-analytique de  $Q$  qui trivialisent  $q$  [2]. Il existe donc un  $\varepsilon_0$ ,  $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ , et un entier  $m$  tel que, au-dessus de l'ouvert  $\{(t, \varepsilon) \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, 0 < t < \varepsilon^m\}$   $q$  soit une fibration topologique triviale dont la fibre en chaque point est une partie sous-analytique. En particulier sur cet ouvert, la fonction  $(t, \varepsilon) \mapsto \chi(B(x, \varepsilon) \cap X_{t\eta})$  est définie et cons-

tante.

Par définition de  $\sigma_{\times}(1_X)$ , on a

$$\sigma_{\times}(1_X)(x) = \sum_i (-1)^i \operatorname{rg} \varinjlim_{x \in V} \operatorname{Ext}^i(V-V \cap X_0, \mathbb{Z} \langle \pi \rangle, \mathbb{Z})$$

où  $V$  parcourt un système fondamental de voisinages de  $x$ . Pour tout  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  et tout  $\rho$ ,  $0 < \rho < \varepsilon^m/2$ , posons

$V(\rho, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \cap \pi^{-1}(\rho D)$ . Pour tout  $\varepsilon$ , il existe un  $\rho(\varepsilon)$  tel que

$V(\rho, \varepsilon) - V(\rho, \varepsilon) \cap X_0 \rightarrow \rho D - \{0\}$  soit une fibration topologique localement triviale. On constate alors que les  $V(\rho, \varepsilon)$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,

$0 < \rho < \rho(\varepsilon)$  forment un système fondamental de voisinage de  $x$  et que les systèmes inductifs

$$V(\rho, \varepsilon) \mapsto \operatorname{Ext}^i(V(\rho, \varepsilon) - V(\rho, \varepsilon) \cap X_0, \mathbb{Z} \langle \pi \rangle, \mathbb{Z})$$

sont constants de valeurs  $H^i(B(x, \varepsilon) \cap X_{\rho(\varepsilon)})$ , d'où la proposition.

### 5. Spécialisation de classes de Chern.

Soient  $\pi : X \rightarrow D$  un morphisme,  $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$  une fonction analytiquement constructible. Nous dirons que  $(f, \pi)$  est compactifiable s'il existe une compactification  $\bar{\pi} : \bar{X} \rightarrow D$  de  $\pi$  telle que la fonction  $\bar{f}$  obtenue en prolongeant  $f$  par zéro sur  $\bar{X} - X$  soit analytiquement constructible.

Lorsque  $\pi$  est de nature algébrique et lorsque  $f$  est la restriction d'une fonction algébriquement constructible,  $(f, \pi)$  est compactifiable.

Soit  $(f, \pi)$  un couple compactifiable. Quitte à se restreindre à un disque ouvert non vide  $D'$  de centre 0, suffisamment petit, on peut supposer qu'il existe un nombre fini de sous-espaces analytiques fermés  $Y_i$  compactifiables, tels que

$$f = \sum_i n_i 1_{Y_i}.$$

Grâce au théorème d'isotopie, on peut supposer, quitte à se restreindre encore à un disque plus petit  $D''$ , que les restrictions de  $\pi$  à  $X - X_0$ ,  $Y_i - Y_{i,0}$  sont des fibrations topologiques localement triviales sur

$D'' - \{0\}$  . Un point  $\eta$  de  $D'' - \{0\}$  sera appelé un point général relativement à  $(f, \Pi)$  .

THÉOREME 5.1.- Soient  $\Pi : X \longrightarrow D$  un morphisme analytique,  $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$  une fonction analytiquement constructible. On suppose que  $(f, \Pi)$  est compactifiable. Soit  $\eta \in D - \{0\}$  un point général relativement à  $(f, \Pi)$ ,  $X_\eta$  la fibre de  $X$  au-dessus de  $\eta$ ,  $f_\eta$  la restriction de  $f$  à  $X$  . On a alors

$$\sigma_{\star} C.(f_\eta) = C.(\sigma_{\star} f)$$

En d'autres termes, on peut donc dire que sous les hypothèses du théorème, la formation des classes d'homologie de Chern commute aux spécialisations.

Démontrons le théorème. Par additivité sur  $f$  , on peut supposer que  $f = 1_Y$  . En utilisant les propriétés de commutation des spécialisations aux images directes pour les classes d'homologies (n° 1) et les fonctions (3.6), on se ramène au cas  $f = 1_X$  . Il existe alors, quitte à se restreindre à un disque plus petit, des espaces analytiques lisses  $Z_\alpha$  et des morphismes propres en nombre fini  $p_\alpha : Z_\alpha \longrightarrow X$  tels que  $1_X = \sum_{\alpha} m_\alpha p_{\alpha \star} 1_{Z_\alpha}$  (exp. 1), et que  $Z_\alpha \longrightarrow D$  soit compactifiable. Quitte à se restreindre à un disque encore plus petit convenable, on peut supposer que les  $\Pi \circ p_\alpha$  sont des morphismes de spécialisation topologique.

En appliquant à nouveau l'additivité et la commutation de la spécialisation aux images directes, on se ramène au cas où  $X$  est lisse. On peut alors construire une modification  $X' \xrightarrow{P} X$  de  $X$  qui est un isomorphisme en dehors de  $X_0$  et telle que la fibre  $X'_0$  soit un diviseur à croisements normaux et à composantes irréductibles lisses. La fonction  $p_{\star} 1_X$  , vaut 1 sur  $X - X_0$  et par suite  $\sigma_{\star}(p_{\star} 1_X) = \sigma_{\star}(1_X)$  . On peut donc supposer  $X$  lisse et  $X_0$  diviseur à croisements normaux. Soit  $Z_1^{m_1}, \dots, Z_p^{m_p}$  une équation locale de  $X_0$  où  $Z_1, \dots, Z_p$  font partie d'un système de coordonnées. Posons  $D'_i = \{Z_i = 0, Z_k \neq 0, k \neq i\}$  . Alors on vérifie facilement que  $\sigma_{\star}(1_X) = \sum_i m_i 1_{D'_i}$  , et par suite que  $\sigma_{\star}(1_X)$  est la fonction construc-

table suivante :

Soient  $(D_i)_{1 \leq i \leq k}$  les composantes irréductibles de  $X_0$ . Soient  $m_i$  les multiplicités des  $D_i$ . Alors

$$\sigma_{\star}(1_X) = \sum_i^k m_i 1_{D_i} - \sum_{i,j} (m_i+m_j) 1_{D_i \cap D_j} + \sum_{i,j,k} (m_i+m_j+m_k) 1_{D_i \cap D_j \cap D_k} + \dots$$

Par ailleurs  $X_\eta$  est lisse et le fibré normal à  $X_\eta$  est trivial. Donc  $C.(X_\eta) = C^*(T_X) \cap [X_\eta] \in H_{\star}(X_\eta)$  où  $T_X$  est le fibré tangent à  $X$ .

Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & H^*(X) & \\ i_0^* \swarrow & & \searrow i_\eta^* \\ H^*(X_0) & \xrightarrow{\sigma^*} & H^*(X_\eta) \end{array}$$

est commutatif, il résulte de la formule de projection que

$$\sigma_{\star}(C^*(T) \cap [X_\eta]) = C^*(T) \cap \sigma_{\star}[X_\eta],$$

et comme  $\pi : X \rightarrow D$  est plat, on a  $\sigma_{\star}[X_\eta] = [X_0]$ . Donc

$$\sigma_{\star}(C.(X_\eta)) = C^*(T) \cap [X_0].$$

Le théorème résulte donc du lemme suivant :

Lemme 5.2.- On a

$$C^*(T) \cap [X_0] = C. \left( \sum_1^k m_i 1_{D_i} - \sum_{i < j} (m_i+m_j) 1_{D_i \cap D_j} + \dots \right).$$

C'est un calcul qui utilise les ingrédients suivants.

Soit, pour tout  $i$ ,  $N_i$  le fibré de rang 1 sur  $X$  dont le faisceau des sections est  $\mathcal{O}(D_i)$ . Le fibre  $N_i$  induit sur  $D_i$  le fibré normal. Le fibré  $\bigotimes_{i=1}^k N_i^{m_i}$  est trivial. Soit  $T_{i_1, \dots, i_\ell}$  le fibré tangent à

$D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_\ell}$ . On a une suite exacte

$$0 \rightarrow T_{i_1, \dots, i_\ell} \rightarrow T_X|_{D_{i_1, \dots, i_\ell}} \rightarrow N_{i_1} \oplus \dots \oplus N_{i_\ell}|_{D_{i_1, \dots, i_\ell}} \rightarrow 0.$$

Notons  $[D_i] \in H_{\star}(X_0)$  la classe fondamentale de  $D_i$  dans  $X_0$ . De ce qui précède résulte alors

$$(5.3) \quad C.(1_{D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap \dots \cap D_{i_\ell}}) = \frac{C^*(T_X) \cup C^1(N_{i_2}) \cup \dots \cup C^1(N_{i_\ell})}{C^*(N_{i_1}) \cup \dots \cup C^*(N_{i_\ell})} \cap [D_{i_1}],$$

$$(5.4) \quad \sum_1^k m_i c^1(N_i) = 0 \quad .$$

Rappelons qu'on a évidemment

$$(5.5) \quad c^*(N_i) = 1 + c^1(N_i)$$

$$(5.6) \quad [X_0] = \sum m_i [D_i] \quad .$$

Pour tout  $\ell$  posons

$$S(\ell) = C. \left( \sum_1^k m_i 1_{D_i} - \sum_{i_1 < i_2} (m_{i_1} + m_{i_2}) 1_{D_{i_1} \cap D_{i_2}} + \dots + (-1)^\ell \sum_{i_1 < \dots < i_\ell} (m_{i_1} + \dots + m_{i_\ell}) 1_{D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_\ell}} \right)$$

Démontrons par récurrence sur  $\ell$  la relation  $R(\ell)$  :

$$c^*(T_X) \wedge [X_0] - S(\ell) = -(-1)^\ell \sum_{i_1 < \dots < i_\ell} (m_{i_1} c^1(N_{i_1}) + \dots + m_{i_\ell} c^1(N_{i_\ell})) C. (1_{D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_\ell}}) \quad .$$

D'après (5.6), on a

$$c^*(T_X) \wedge [X_0] = \sum_1^k m_i \frac{c^*(T_X)}{c^*(N_i)} c^*(N_i) \wedge [D_i] \quad .$$

Donc, d'après (5.3), on a

$$c^*(T_X) \wedge [X_0] = \sum_1^k m_i c^*(N_i) \wedge C. (1_{D_i}) \quad ,$$

ce qui, par (5.5), entraîne  $R(1)$ . D'après (5.4), on a

$$\sum_{j \in \{i_1, \dots, i_\ell\}} m_j c^1(N_j) = - \sum_{k \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}} m_k c^1(N_k) \quad .$$

Donc  $R(\ell)$  entraîne

$$c^*(T_X) \wedge [X_0] - S(\ell) = (-1)^\ell \sum_{i_1 < \dots < i_{\ell+1}} \sum_{p=1}^{\ell+1} m_{i_p} c^1(N_{i_p}) \wedge C. (1_{D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_p} \cap \dots \cap D_{i_{\ell+1}}}) \quad .$$

D'après (5.3), on a donc

$$c^*(T_X) \wedge [X_0] - S(\ell) = (-1)^\ell \sum_{i_1 < \dots < i_{\ell+1}} \sum_{p=1}^{\ell+1} m_{i_p} c^*(N_{i_p}) \wedge C. (1_{D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_p} \cap \dots \cap D_{i_{\ell+1}}}) \quad ,$$

ce qui, d'après (5.5), entraîne  $R(\ell+1)$ ; ce qu'il fallait démontrer. Pour

$\ell$  assez grand, le deuxième membre de  $R(\ell)$  est nul; d'où le lemme.

[1] Séminaire de Géométrie analytique, Astérisque 36-37, exp. VI, p. 47.

[2] J.-L. VERDIER, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inventiones math. 36, (1976) p. 295-342.

[3] Séminaire de Géométrie analytique, Astérisque 36-37, exp. VI, p. 6.