ANDRE LICHNEROWICZ

Les algèbres formelles associées à une variété symplectique et leurs automorphismes

Astérisque, tome 80 (1980), p. 85-96
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__80__85_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 80 (1980) p. 85-96

LES ALGÈBRES FORMELLES ASSOCIÉES A UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE ET LEURS AUTOMORPHISMES

André Lichnerowicz (Metz Mai 1979)

Cette conférence est consacrée à un exposé synthétique de l'état actuel de la théorie des déformations de l'algèbre associative triviale et de l'algèbre de Lie de Poisson attachées à une variété symplectique. Cette théorie a été suscitée par une approche nouvelle de la mécanique quantique en termes de pur espace de phase, mais elle a conduit, et pose encore des problèmes intéressants et non classiques de géométrie différentielle.

1 - Dynamique classique et géométrie symplectique

a) Soit (W, F) une variété symplectique connexe de dimension $2n$ et classe C^{∞}. Tous les éléments introduits sont supposés C^{∞}. La structure symplectique est définie par la 2-forme fermée F de rang $2n$. Nous désignons par $\mu : TW \to T^{*}W$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels défini par $\mu(X) = -i(X)F$ (où $i(.)$ est le produit intérieur); cet isomorphisme s'étend naturellement aux tenseurs; Λ désigne le 2-tenseur contravariant antisymétrique $\mu^{-1}(F)$. Nous posons $N = C^{\infty}(W;\mathbb{R})$.

Un champ de vecteurs symplectique est un champ X tel que $\mathcal{L}(X)F = 0$ (où $\mathcal{L}$ est la dérivée de Lie); il est équivalent de dire que $\mu(X)$ est une 1-forme fermée. Les champs de vecteurs symplectiques définissent une algèbre de Lie L de dimension infinie. Si $X, Y \in L$, on a

$$(1\text{-}1) \qquad \mu([X,Y]) = d\; i(\Lambda)(\mu(X) \wedge \mu(Y))$$

Soit L^{*} le sous-espace de L défini par les images inverses des 1-formes exactes ($X_u = \mu^{-1}(du)$; $u \in N$). Un élément de L^{*} est un champ de vecteurs hamiltonien. On sait que $[L, L] = L^{*}$; (1-1) conduit) introduire le crochet de Poisson

$$(1\text{-}2) \qquad \{u,v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv) = \mathcal{L}(X_u)v = P(u,v) \quad (u,v \in N)$$

où l'opérateur de Poisson P est un opérateur bidifférentiel d'ordre 1 en chaque argument, nul sur les constantes; P définit sur N une structure d'algèbre de Lie de Poisson de la variété et l'on a l'homomorphisme de (N,P) sur L^{*} puisque $X_{\{u,v\}} = [X_u, X_v]$.

b) Considérons un système dynamique à liaisons indépendantes du temps et n degrés de liberté. L'espace de configuration correspondant est une variété différentiable arbitraire M de dimension n. On sait que le fibré cotangent T^*M admet une structure symplectique naturelle définie par la 2-forme de Liouville. Pour le formalisme hamiltonien, un état dynamique du système n'est autre qu'un point de $W = T^*M$ qui est l'espace de phase usuel. L'analyse des équations de la mécanique a montré depuis longtemps qu'il est essentiel de pouvoir introduire des changements des variables classiques (q^α, p_α) qui ne respectent pas la structure cotangente. Nous sommes conduits à prendre comme espace de phase une variété symplectique (W,F) de dimension 2n.

Sur cette variété, la dynamique est donnée par une fonction $H \in N$, l'hamiltonien, qui définit un champ hamiltonien X_H. Un mouvement du système dynamique est donné, par définition, par une courbe intégrale c(t) de X_H, le paramètre t étant le temps. Telle est la signification géométrique des équations d'Hamilton.

c) Nous pouvons adopter un autre point de vue. L'espace N admet deux structures algébriques :

1. une structure d'algèbre associative donnée par le produit usuel des fonctions (qui est ici commutatif)
2. une structure d'algèbre de Lie donnée par le crochet de Poisson.

Le crochet de Poisson définit des dérivations des produits. Considérons une famille u_t d'éléments de N satisfaisant l'équations différentielle

$$du_t/dt = \{H, u_t\} \tag{1-3}$$

et prenons la valeur u_o pour $t = o$. On voit que l'évolution dans le temps de u_t procède des courbes intégrales apparues dans le premier point de vue; (1-3) peut-être considéré comme l'équation intrinsèque de la Dynamique classique.

Celle-ci ayant été complètement décrite en termes des deux lois de composition définies sur N, il est naturel de se demander s'il est possible de déformer, en un sens convenable, ces deux lois, de façon à obtenir un modèle isomorphe à la mécanique quantique usuelle. La réponse est positive.

2 - Cohomologies de Hochschild et de Chevalley.

a) Dérivations et déformations d'une algèbre associative procèdent d'une même cohomologie de l'algèbre à valeurs dans l'algèbre même et appelée cohomologie de Hochschild. Soit W une variété différentiable arbitraire et $(N = C^\infty(W;\mathbb{R}), .)$ l'algèbre associative définie par le produit des fonctions. Une p-cochaîne C de (N,.) est une application p-linéaire de N^p dans N, les o-cochaînes étant identifiées aux éléments de N. Le cobord de Hochschild de la p-cochaîne C est la (p+1)-cochaîne $\tilde{\partial} C$ définie par

$$\tilde{\partial}\, C(u_o,\ldots,u_p) = u_o\, C(u_1,\ldots,u_p) - C(u_o u_1, u_2,\ldots,u_p) + C(u_o, u_1 u_2,\ldots,u_p) \ldots \tag{2-1}$$
$$+ (-1)^p\, C(u_o,u_1,\ldots,u_{p-1} u_p) + (-1)^{p+1}\, C(u_o,\ldots,u_{p-1})\, u_p$$

On a $\tilde{\partial}^2 = o$ pour $p \geq 1$. Un 1-cocycle de $(N,.)$ est une dérivation de cette algèbre. Une p-cochaîne C est dite <u>d-différentielle</u> ($d \geq 0$) si elle est définie par un opérateur multidifférentiel d'ordre maximum d en chaque argument. Si C est (d+1) -différentielle, $\tilde{\partial}C$ est d-différentielle. On montre

<u>Proposition</u>. <u>Si</u> T <u>est un endomorphisme de</u> N (1-cochaîne) <u>tel que</u> $C = \tilde{\partial}T$ <u>soit d-différentiel</u> ($d \geq 0$), T <u>est lui-même</u> (d+1)-<u>différentiel</u>. <u>Si</u> $\tilde{\partial}T$ <u>est nulle sur les constantes</u>, T <u>l'est aussi</u>.

Soit $\tilde{H}^p_{diff}(N,N)$ le p^e espace de cohomologie de Hochschild pour la cohomologie différentielle nulle sur les constantes. J. Vey [5] a établi en utilisant des résultats de Gelfand.

<u>Théorème (Vey)</u> $\tilde{H}^p_{diff}(N,N)$ <u>est isomorphe à l'espace des p-tenseurs contravariants antisymétrique de</u> W.

b) De manière symétrique, dérivations et déformations d'une algèbre de Lie procèdent d'une même cohomologie de l'algèbre, la cohomologie à valeurs dans l'algèbre correspondant à la représentation adjointe; nous la nommons <u>cohomologie de Chevalley</u>. Soit (W,F) une variété <u>symplectique</u>, (N,P) l'algèbre de Lie de Poisson correspondante; une p-cochaîne de (N,P) est une application p-linéaire <u>alternée</u> de N^p dans N, le cobord ∂ étant défini classiquement à partir de la représentation adjointe. L'espace des 1-cocycles de (N,P) est l'espace des dérivations, un 1-cocycle exact étant une dérivation intérieure. Même définition (pour $d \geq 1$) d'une p-cochaîne d-différentielle que dans le cas associatif; si C est d-différentielle, ∂C est aussi d-différentielle. On montre

<u>Proposition</u>. <u>Si</u> C <u>est un</u> 2-<u>cocycle d-différentiel</u> ($d \geq 1$) <u>exact de Chevalley, il existe un opérateur d-différentiel</u> T <u>tel que</u> $C = \partial T$.

On a déterminé [1] toutes les dérivations de (N,P) (sans hypothèse a priori de différentiabilité). Le résultat le plus utile est le suivant

<u>Proposition</u>. <u>Les dérivations</u> $\mathfrak{D}$ <u>nulles sur les constantes de</u> (N,P) <u>sont données par</u> $\mathfrak{D}\, u = \mathcal{L}(X)u$, <u>où</u> $X \in L$.

Les espaces $H^p_{diff}(N,N)$ sont connus pour $p \geq 3$ ([9] et [5]). Leur dimension est finie.

3 - Déformations formelles.

Je vais d'abord rappeler et étendre les résultats principaux de la théorie de Gerstenhaber [2] concernant les déformations des structures algébriques, en particulier des algèbres associatives.

a) Soit $E(N;\nu)$ l'espace des fonctions formelles de $\nu \in C$ à coefficients dans N; ν est dit le paramètre de déformation. Considérons une application bilinéaire $N \times N \to E(N;\nu)$ qui donne la série formelle

$$(3\text{-}1)\qquad u *_\nu v = \sum_{r=o}^{\infty} \nu^r C^r(u,v) = u.v + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C^r(u,v)$$

où les $C^r (r \geq 1)$ sont des 2-cochaînes différentielles de $(N,.)$. Ces cochaînes s'étendent naturellement à $E(N;\nu)$. On a une déformation formelle de $(N,.)$ si (3-1) vérifie formellement la relation d'associativité. S'il en est ainsi (3-1) définit sur $E(N;\nu)$ une structure d'algèbre associative formelle. Si (3-1) est arbitraire, on a pour $u, v, w \in N$:

$$(3\text{-}2)\qquad (u *_\nu v) *_\nu w - u *_\nu (v *_\nu w) = \sum_{t=1}^{\infty} \nu^t D_t(u,v,w)$$

où D_t est la 3-cochaîne :

$$(3\text{-}3)\qquad D_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} C^r(C^s(u,v),w) - \sum_{r+s=t} C^r(u,C^s(v,w)) \quad (r,s \geq o)$$

Posons

$$(3\text{-}4)\qquad E_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} C^r(C^s(u,v),w) - \sum_{r+s=t} C^r(u,C^s(v,w)) \quad (r,s \geq 1)$$

On a l'identité $D_t = E_t - \partial C^t$. Si (3-1) est limité à l'ordre q, on a une déformation d'ordre q si l'associativité est satisfaite à l'ordre $(q+1)$ près. S'il en est ainsi, E_{q+1} est automatiquement un 3-cocycle de $(N,.)$. Pour qu'on puisse trouver une 2-cochaîne C^{q+1} vérifiant $D_{q+1} = E_{q+1} - \tilde{\partial}\, C^{q+1} = 0$, il faut et il suffit que E_{q+1} soit exact; E_{q+1} définit une classe de cohomologie $\in \tilde{H}^3_{diff}(N,N)$ qui est l'obstruction à l'ordre $(q+1)$ à la construction d'une déformation. Une déformation d'ordre 1 est dite infinitésimale. On a $E_1 = 0$ et par suite seulement $\tilde{\partial}\, C^1 = 0$, c'est à dire que C^1 est un 2-cocycle de $(N,.)$

b) Considérons une série formelle en ν :

$$(3\text{-}5)\qquad T_\nu = \sum_{s=o}^{\infty} \nu^s T_s = Id_N + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s T_s$$

où les $T_s (s \geq 1)$ sont des opérateurs différentiels; T_ν opère naturellement sur

$E(N;\nu)$. Considérons une autre application bilinéaire $N \times N \to E(N;\nu)$ correspondant à la série formelle

$$(3\text{-}6) \qquad u *'_\nu v = u\,v + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C'^r(u,v)$$

où les C'^r sont encore des 2-cochaînes différentielles. Supposons que (3-5), (3-6) soient telles qu'on ait formellement l'identité :

$$(3\text{-}7) \qquad T_\nu(U *'_\nu v) = T_\nu u *_\nu T_\nu v$$

On démontre, à partir de formules universelles, la proposition suivante :

Proposition. La déformation formelle (3-1) de $(N,.)$ étant donnée, toute série formelle (3-5) engendre une application bilinéaire unique (3-6) satisfaisant (3-7). Cette application est une nouvelle déformation qui est dite équivalente à (3-1). En particulier une déformation est dite triviale si elle est équivalente à la déformation identique ($C^r = o$ pour tout $r > 1$).

Si deux déformations sont équivalentes à l'ordre q, il apparaît un 2-cocycle dans la classe $\tilde{H}^2_{diff}(N,N)$ est l'obstruction à l'équivalence à l'ordre (q+1). En particulier deux déformations infinitésimales définies par les 2-cocycles C^1 et C'^1 sont équivalentes si $(C'^1 - C^1)$ est exact.

c) Soit $E(N;\lambda)$ l'espace des fonctions formelles de $\lambda \in C$ à coefficients dans N. Une déformation de l'algèbre de Lie de Poisson (N,P) est définie par une application bilinéaire alternée $N \times N \to E(N;\lambda)$ donnée par :

$$(3\text{-}8) \qquad [u,v]_\lambda = P(u,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C^{2r+1}(u,v)$$

où les C^{2r+1} sont des 2-cochaînes différentielles de (N,P) telles que l'identité de Jacobi soit formellement satisfaite. La cohomologie de Chevalley joue exactement le même rôle pour les déformations d'algèbres de Lie que la cohomologie de Hochschild pour les déformations d'algèbres associatives; (3-8) définit sur $E(N;\lambda)$ une structure d'algèbre de Lie formelle.

4 - Les $*_\nu$ - produits.

a) Sur la variété symplectique (W,F), P donné par le 2-tenseur antisymétrique Λ définit un 2-cocycle de Hochschild qui n'est jamais exact. Supposons qu'il existe sur (W,F) une déformation associative de la forme [8].

$$(4\text{-}1) \qquad u *_\nu v = u\,v + \nu P(u,v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C^r(u,v)$$

satisfaisant aux hypothèses suivantes

Hypothèses (H)

1°. $C^r(u,v)$ est symétrique en u,v pour r pair, antisymétrique pour r impair.

2°. $C^r (r \geq 1)$ est nulle sur les constantes.

Nous dirons que nous avons sur (W,F) un $*_\nu$-produit. Une telle algèbre associative donne naissance par antisymétrisation à une algèbre de Lie formelle (3-8) avec $\lambda = \nu^2$:

$$[u,v]_\lambda = (2\nu)^{-1} (u *_\nu v - v *_\nu u)$$

Les C^{2r+1} sont nulles sur les constantes.

b) On établit que, sous l'hypothèse (H_1), pour t impair, E_t est pair en u, w et pour t pair, E_t est impair en u, w. On note aussi que si C est une 2-cochaîne de Hochschild paire (resp. impaire), ∂C est impaire (resp. paire) au même sens. Un long raisonnement basé sur la connaissance de $\tilde{H}^p_{diff}(N,N)$ et sur la parité permet de montrer, par double récurrence, que sous une hypothèse générale, on peut éviter, malgré leur abondance, toutes les obstructions; Neroslavsky et Vlassov, dans un travail tout récent, non encore publié, ont établi l'important théorème d'existence suivant :

Théorème (N-V). Sur toute variété symplectique (W,F) à troisième nombre de Betti $b_3(W)$ nul, il existe un $*_\nu$-produit et par suite une algèbre de Lie formelle (3-8) à cochaînes nulles sur les constantes.

J'ai d'autre part établi [8] le théorème suivant qui est utile.

Théorème. Supposons qu'il existe sur (W,F) un $*_\nu$-produit (4-1) engendrant l'algèbre de Lie formelle (3-8). Tout $*_\nu$-produit engendrant la même algèbre de Lie coïncide avec (4-1).

Ainsi, sous les hypothèses (H), les cochaînes de rang impair déterminent complètement les cochaînes de rang pair.

5 - Un exemple

a) Une connexion symplectique Γ est une connexion linéaire sans torsion sur (W,F) telle que $\nabla F = 0$, où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante défini par Γ. On démontre aisément qu'une variété symplectique paracompacte admet une infinité de connexions symplectiques, deux telles connexions diffèrent par un tenseur de type (1,2) déduit d'un 3-tenseur covariant symétrique arbitraire.

b) Supposons que la variété symplectique (W,Λ) admette une connexion symplectique sans courbure; s'il en est ainsi (W,Λ,Γ) est dite une variété symplectique plate. L'exemple le plus simple est donné par le fibré cotangent de $\mathbb{R}^n$, soit

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Introduisons sur une variété symplectique plate l'opérateur bidifférentiel P^r d'ordre maximum r en chaque argument, défini par l'expression suivante sur chaque domaine U d'une carte arbitraire $\{x^i\}$ $(i,j, = 1,\ldots,2n)$.

$$(5\text{-}1) \qquad P^r(u,v)|_U = \Lambda^{i_1 j_1} \ldots \Lambda^{i_r j_r} \nabla_{i_1 \ldots i_r} u \nabla_{j_1 \ldots j_r} v \quad (u,v \in N)$$

Nous posons $P^o(u,v) = u.v$. Pour $r = 1$, nous obtenons l'opérateur de Poisson P.

Etant donnée une fonction formelle $f(z)$ à coefficients constants telle que $f(0) = 1$, substituons P^r à z^r dans le développement de $f(\nu z)$; on obtient une application bilinéaire $(u,v) \in N \times N \to u *_\nu v = f(\nu P)(u,v)$. Nous voulons choisir f de façon à définir ainsi une déformation de (N,.). La réponse est donnée dans la proposition suivante :

Proposition. Si (W,Λ,Γ) est une variété symplectique plate, il existe une fonction formelle du crochet de Poisson P, unique à un facteur constant près et à un changement linéaire près de ν, qui engendre une déformation de l'algèbre associative (N,.) : c'est la fonction exponentielle.

On a

$$(5\text{-}2) \qquad u *_\nu v = \sum_{r=o}^{\infty} (\nu^r/r!) P^r(u,v) = \exp(\nu P)(u,v)$$

qui engendre la déformation de l'algèbre de Lie de Poisson $(\lambda = \nu^2)$

$$(5\text{-}3) \qquad [u,v]_\lambda = \sum_{r=o}^{\infty} (\lambda^r/(2r+1)!) \, P^{2r+1} (u,v) = \nu^{-1} \operatorname{sh}(\nu P)(u,v)$$

Il est remarquable que, pour $\nu = i\hbar/2$, on déduit de (5-3) un crochet $\frac{2}{\hbar}\sin(\frac{\hbar}{2}P)$ donné en 1949 par Moyal dans le contexte de la quantification de Hermann-Weyl-Wigner.

Considérons le terme P^3 de (5-3); on déduit de la proposition du §2,b que le 2-cocycle de Chevalley P^3 n'est pas exact. Pour une variété symplectique plate, le second espace de cohomologie de Chevalley est de dimension 1; P^3 définit une 2-classe de cohomologie β qui est un générateur de cet espace. Les déformations (5-2) et (5-3) sont non triviales, même à l'ordre 1.

Il résulte d'importants travaux de Simone Gutt [9] que toute déformation différentiable non triviale de l'algèbre de Lie de Poisson de R^{2n} se déduit du "crochet de Moyal" par substitution $\nu \to a\,\nu^k$ et équivalence. On en déduit qu'il existe un $*_\nu$-produit engendrant l'algèbre de Lie formelle considérée et, par mon théorème d'unicité, que ce $*_\nu$-produit se déduit du "produit de Moyal" d'une façon semblable. De tels résultats s'appliquent à des cas plus généraux.

6 - Les algèbres formelles de Vey.

Cette situation peut être généralisée de la manière suivante

a) pour $u \in N$, désignons par $\mathcal{L}(X_u)\Gamma$ le 3-tenseur covariant symétrique défini à partir de la dérivée de Lie d'une connexion symplectique Γ par le champ hamiltonien X_u. La 2-cochaîne S^3_Γ donnée par

$$(6\text{-}1) \qquad S^3_\Gamma(u,v)\big|_u = \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Lambda^{i_3 j_3}(\mathcal{L}(X_u)\Gamma)_{i_1 i_2 i_3}(\mathcal{L}(X_u)\Gamma)_{j_1 j_2 j_3}$$

est un 2-cocycle de Chevalley d'après les propriétés de la dérivée de Lie et admet même symbole principal que P^3. Le même raisonnement que dans le cas plat montre que S^3_Γ n'est jamais exact. La 2-classe de cohomologie β de (N,P) qu'il définit est indépendante de Γ et est un invariant de la structure symplectique de la variété.

b) Introduisons maintenant les notations suivantes : désignons par Q^r un opérateur bidifférentiel d'ordre maximum r en chaque argument, satisfaisant aux hypothèses (H) et dont le symbole principal coïncide avec celui de P^r. Nous prenons en particulier $Q^o(u,v) = u.v$, $Q^1 = P$ et $Q^3 \in \beta$. En raffinant le théorème N-V, j'ai établi récemment :

Théorème. Sur toute variété symplectique (W,F) à $b_3(W) = 0$, il existe un $*_\nu$-produit de la forme

$$(6\text{-}2) \qquad u *_\nu = \sum_{r=o}^{\infty} (\nu^r/r!)\, Q^r(u,v)$$

Par antisymétrisation, on obtient l'existence d'une déformation de l'algèbre de Lie de Poisson :

$$(6\text{-}3) \qquad [u,v]_\lambda = \sum_{r=o}^{\infty} (\lambda^r/(2r+1)!)Q^{2r+1}(u,v)$$

Ce dernier résultat avait été établi directement par J. Vey [5]. J'appellerai algèbres de Vey les algèbres formelles, associative et de Lie, déduites de (6-2) et (6-3).

c) On peut construire par quotient des $*_\nu$-produits de Vey sur de larges classes de fibrés cotangents de groupes classiques et d'espaces homogènes. Je me limiterai à l'exemple le plus simple : considérons la variété symplectique plate donnée par le fibré cotangent de $\mathbb{R}^n - \{0\}$, soit $E = (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^n$. Le groupe résoluble de dimension 2 opère sur E de la manière suivante

$$(x,y) \in E = (R^n - \{o\}) \times \mathbb{R}^n \to (x' = e^\rho x, y' = e^{-\rho}(y+\sigma x)) \quad (\rho,\sigma \in \mathbb{R})$$

G laisse invariantes la structure symplectique naturelle de E et la connexion plate; il préserve donc les P^r définis par (5-1) et le $*_\nu$-produit correspondant défini sur E. L'espace des orbites de E par G est isomorphe à $T^* S^{n-1}$, où $S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1)$ est la sphère de dimension (n-1). On déduit du $*_\nu$-produit défini sur E un $*_\nu$-produit de Vey naturel sur $T^* S^{n-1}$ qui est invariant par SO(n). C'est cette méthode de quotient qui peut être étendue largement.

7 - Dérivations et automorphisme d'une algèbre de Lie formelle.

Soit (W,F) une variété symplectique munie d'une algèbre de Lie formelle (3-8)

a) Soit $Z \in L$; si U est un domaine contractile de W, il existe $w_U \in N(U)$, défini à une constante additive, telle que $Z|_U = \mu^{-1}(dw_U)$; C^{2r+1} étant nulle sur les constantes, on définit un opérateur différentiel C^{2r+1}_Z sur N par

$$C^{2r+1}_Z(u)|_u = C^{2r+1}(w_u, u|_u)$$

On a

Proposition. L'algèbre de Lie des dérivations nulles sur les constantes de l'algèbre de Lie formelle (3-8) est isomorphe à l'algèbre de Lie $E(L;\lambda)$ par $\rho : Z_\lambda = \Sigma \lambda^s Z_s \in E(L;\lambda) \to D_\lambda$ où

$$D_\lambda = \sum_{r,s \geq 0} \lambda^{r+s} C^{2r+1}_{Z_s}$$

L'algèbre de Lie des dérivations intérieures est isomorphe à $E(L;\lambda)$. [8]

b) Considérons un automorphisme de l'espace $E(N;\lambda)$

(7-1) $$A_\lambda = A_o + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s A_s$$

où A_o est un automorphisme et les A_s des endomorphismes de l'espace N; A_λ est un automorphisme de (3-8) si l'on a :

(7-2) $$A_\lambda [u,v]_\lambda - [A_\lambda u, A_\lambda v]_\lambda = 0$$

Si $A_o = Id$, A_λ est dit à partie principale triviale. Soit Symp. (W,F) le groupe de tous les symplectomorphismes de (W,F) et $Symp_c$ (W,F) sa composante de l'identité connexe par arcs différentiables par morceaux. Considérons un symplectomorphisme σ isotope à l'identité et soit $\sigma(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ une isotopie symplectique telle que $\sigma(0) = Id.$, $\sigma(1) = \sigma$. Pour chaque t

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} \sigma(t)^{-1}$$

définit un champ symplectique et par suite une dérivation

$$\rho(\dot{\sigma}_t) = D_\lambda(t) = \Sigma\ \lambda^r\ C^{2r+1}_{\sigma(t)}$$

En étudiant une solution $A_\lambda(t)$ [où $A_\lambda(t)$ est un automorphisme de l'espace $E(N;\lambda)$ tel que $A_\lambda(0) = Id$] de l'équation différentielle

$$d\ A_\lambda(t)/dt = D_\lambda(t).A_\lambda(t)$$

on construit une famille différentiable à un paramètre d'automorphismes de (3-8) de la forme

$$A_\lambda(t) = \sigma^*(t).(Id. + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s\ V_s(t))$$

où les $V_s(t)$ sont des opérateurs différentiels nuls sur les constantes dépendant différentiablement de t. Il en résulte que <u>pour tout</u> $\sigma \in Symp_c(W,F)$ <u>il existe un automorphisme de l'algèbre de Lie formelle de la forme</u>

$$(7\text{-}3) \qquad A_\lambda = \sigma^*.(Id + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s\ V_s) = (Id + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s\ B_s).\sigma^*$$

où les V_s (resp. B_s) sont des opérateurs différentiels nuls sur les constantes.

8 - <u>Dérivations et automorphismes d'une algèbre associative formelle</u>.

a) Supposons maintenant (W,F) munie de <u>l'algèbre associative formelle</u> (4-1) qui engendre (3-8) par autosymétrisation; la structure d'algèbre de Lie peut être transposée sur $E(N;\nu)$

$$(8\text{-}1) \qquad [u,v]_{\nu^2} = P(u,v) + \Sigma\ \nu^{2r}\ C^{2r+1}(u,v) \qquad (\lambda=\nu^2)$$

On déduit du § 7 que l'algèbre de Lie des dérivations $D_\nu = \Sigma\ \nu^s\ D_s$ nulles sur les constantes de (8-1) est isomorphe à $E(L;\nu)$ par l'isomorphisme $\rho : Z_\nu = \Sigma\ \nu^s\ Z_s \to D_\nu$ avec

$$(8\text{-}2) \qquad D_\nu = \sum_{r,s\ \geq 0} \nu^{2r+s}\ C^{2r+1}_{Z_s}$$

Toute dérivation D_ν de l'algèbre associative est une dérivation de l'algèbre de Lie nulle sur les constantes (§ 2,a) et a donc la forme (8-2). Inversement en raisonnant sur un domaine contractile, on voit que (8-2) est une dérivation de l'algèbre associative. Il vient

<u>Théorème</u>. <u>Les dérivations d'une algèbre associative formelle satisfaisant les hypothèses (H) et les dérivations nulles sur les constantes de l'algèbre de Lie qui s'en déduit coïncident et sont données par (8-2)</u>. <u>Si</u> $b_1(W) = 0$, <u>les dérivations du</u>

$*_\nu$-produit sont toutes intérieures.

b) Etudions les automorphismes A_ν de l'algèbre associative (4-1). On a, à l'ordre 0, $A_o(u,v) = A_o u . A_o v$. Il en résulte qu'il existe un difféomorphisme σ de W tel que $A_o = \sigma'$. Il vient à l'ordre 1

$$\sigma^* P(u,v) = P(\sigma^* u, \sigma^* v)$$

et σ est nécessairement un symplectomorphisme. On établit à partir de § 2,a :

Proposition. Tout automorphisme de (4-1) est de la forme

$$A_\nu = (Id + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s B_s).\sigma^* \tag{8-3}$$

où σ est un symplectomorphisme et les B_s des opérateurs différentiels nuls sur les constantes.

Inversement on établit d'abord par récurrence

Théorème. Le groupe $Aut_t\,(*_\nu)$ des automorphismes à partie principale triviale d'une algèbre associative (4-1) coïncide avec le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie correspondante ayant la forme

$$A_\nu = Id + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s A_s$$

où les A_s sont des opérateurs différentiels nuls sur les constantes. Si $b_1(W) = 0$, $Aut_t(*_\nu)$ coïncide avec le groupe $Aut_i(*_\nu)$ des automorphismes intérieur de l'algèbre associative.

On montre ensuite que, modulo les éléments de $Aut_t(*_\nu)$, on est ramené à l'étude des automorphismes pairs en ν. On en déduit

Théorème. Le groupe $Aut(*_\nu)$ des automorphismes d'une algèbre associative (4-1) coïncide avec le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie correspondante qui sont de la forme (8-3).

Le groupe $Aut(*_\nu)/Aut_t(*_\nu)$ est ainsi isomorphe à un sous-groupe H de Symp (W,F). D'après le § 7, on a $Symp_c(W,F) \subset H$. On peut conjecturer que H = Symp (W,F).

c) Supposons que (4-1) soit une algèbre de Vey. J'ai établi que, dans ce cas, il existe une connexion symplectique unique Γ telle que :

$$Q^3 = S^3_\Gamma + \partial K \tag{8-4}$$

où K est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2. L'étude des automorphismes indépendants de ν d'une algèbre associative de Vey conduit à la proposition suivante

Proposition. Le groupe des automorphismes indépendants de ν d'une algèbre associative de Vey est un sous-groupe fermé du groupe des symplectomorphismes affines pour la connexion Γ. C'est donc un groupe de dimension finie.

Dans le cas plat de Moyal, il n'est autre que le groupe symplectique affine tout entier. Ces résultats sur les automorphismes apportent une grande clarté dans l'étude des problèmes d'invariance de la mécanique quantique.

RÉFÉRENCES

[1] A. Avez et A. Lichnerowicz, C.R. Acad.Sci. Paris, 275, A (1972) p.11-13.

[2] M. Gerstenhaber, Ann. of Math. 79 (1964), p. 59-103.

[3] M. Flato, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, C.R. Acad. Sci. Paris, 283 A(1976), p. 19-24.

[4] J.E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45 (1949), p. 99-124.

[5] J. Vey, Comm. Math. Helv. 50, (1975), p. 421-454.

[6] A. Lichnerowicz, Journ. Geom. Diff. Liège, 1976.

[7] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, Lett. in Math. Phys 1 (1977), p. 521-530; Ann of Physics III (1978), p. 61-152.

[8] A. Lichnerowicz, C.R. Acad. Sci. Paris, 286, (1978), p. 49-53; Ann.di Matem. pura et appl. (à paraître).

[9] Simone Gutt, Cohomologie différentiable de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique. Journ. relativistes d'Angers (Avril 1979).

[10] Simone Gutt, Equivalence of deformations and associated *-produits, Lett. in Math. Phys. (à paraître).

[11] Neroslavsky et Vlassov (à paraître).

André LICHNEROWICZ
Collège de France,
75005 PARIS CEDEX