

Astérisque

NICOLE DESOLNEUX-MOULIS

**Familles à un paramètre de feuilletages proches
d'une fibration**

Astérisque, tome 80 (1980), p. 77-84

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__80__77_0>

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FAMILLES A UN PARAMÈTRE
DE FEUILLETAGES PROCHES D'UNE FIBRATION

par
Nicole DESOLNEUX-MOULIS

Introduction :

Dans cet article nous généralisons les résultats de la note [1] en étudiant les familles à un paramètre de feuilletages proches d'une fibration non triviale.

Le résultat se présente comme une extension en dimension supérieure, sous une hypothèse de transversalité (T), du théorème de Seifert [3] et [6].

Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème

Soit $\mathcal{F}_t$ $t \in [0, \varepsilon]$ une famille à un paramètre de classe C^1 de feuilletages d'une variété M de classe C^∞ telle que

a) $\mathcal{F}_0$ soit une fibration de base B variété compacte vérifiant $\chi(B) \neq 0$ et de fibre F , vérifiant $\pi_1(F)$ commutatif.

b) Le 1-cocycle $\left\{ \frac{d}{dt} \mathcal{F}_t \right\}_{t=0}$ vérifie une condition T de transversalité.

Alors pour t assez petit $\mathcal{F}_t$ admet une famille compacte.

I - DONNÉES DU PROBLÈME - COMPLEXE DE DE RHAM D'UNE FIBRATION

Dans toute la suite nous considérons M^n une variété compacte de classe C^∞ . On suppose que M est l'espace total d'une fibration $\mathcal{F}_0$ de base B (variété compacte de dimension p) dont la fibre F est une variété compacte de dimension $(n-p)$. Soit π la projection de M sur B . Soit $(U_i) (i \in I; I \text{ ensemble fini d'indices})$ un recouvrement ouvert de B tel que la fibration $\mathcal{F}_0$ au dessus de U_i soit triviale : il existe un difféomorphisme

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \varphi_i(U_i) \times F$$

où $(\varphi_i, U_i) (i \in I)$ définit un atlas de B tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & \phi_i(U_i) \times F \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi_i \\
 U_i & \xrightarrow{\phi_i} & \phi_i(U_i)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{où } \pi_i \text{ est la projection} \\
 \text{sur la première} \\
 \text{composante.}
 \end{array}$$

Dans la suite nous considérerons $\mathcal{F}_0$ comme un feuilletage dont les feuilles sont les fibres. La feuille passant par un point z de M sera notée F_z .

Complexe de De Rham de $\mathcal{F}_0$

Nous reproduisons ici les définitions de [5] et [9].

Soit TM le fibré tangent à M , $\tau(\mathcal{F}_0)$ le sous fibré de TM tangent au feuilletage $\mathcal{F}_0$.

Soit $\nu(\mathcal{F}_0) = TM/\tau(\mathcal{F}_0)$ le fibré normal à $\mathcal{F}_0$.

Soit $\Omega^k(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0))$ l'espace des k -formes différentielles de type $(k,0)$ (suivant Vaisman) à valeurs dans $\nu(\mathcal{F}_0)$.

Définition : Soit $d_{\mathcal{F}_0}$ l'opérateur différentiel de type $(1,0)$ qui est l'opérateur de différentiation le long des feuilles de $\mathcal{F}_0$:

$$d_{\mathcal{F}_0} : \Omega^k(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0)) \rightarrow \Omega^{k+1}(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0))$$

Proposition 1

L'opérateur $d_{\mathcal{F}_0}$ vérifie la relation $d_{\mathcal{F}_0}^2 = 0$

Pour une expression en coordonnées locales de l'opérateur $d_{\mathcal{F}_0}$ et la démonstration de la proposition 1 on pourra se reporter à [5] ou [9].

Feuilletages proches de $\mathcal{F}_0$

Soit $G(M)$ le fibré de base M associé à TM de fibre au dessus d'un point z de M la grassmannienne des sous-espaces de dimension $(n-p)$ de $T_z M$. Soit $\mathcal{G}(M)$ l'espace des sections de classe $\overset{\infty}{C}$ de $G(M)$.

Nous définissons l'espace $\Lambda^2 G(M)$ fibré au dessus de $G(M)$ de la manière suivante : Soit C_z un élément de $G(M)$, c'est à dire un sous espace de dimension $(n-p)$ de $T_z M$; la fibre de $\Lambda^2 G(M)$ au dessus de C_z est l'ensemble des applications bilinéaires antisymétriques de $C_z \times C_z$ dans $T_z M/C_z$.

Soit $\mathcal{A}(M)$ l'ensemble des sections de classe $\overset{\infty}{C}$ de $\Lambda^2 G(M)$ au dessus de M . Nous noterons $D(M)$ le groupe des difféomorphismes de classe $\overset{\infty}{C}$ de M .

Un feuilletage $\mathcal{F}$ proche de $\mathcal{F}_0$ est une section intégrable de $G(M)$ proche (au sens de la C^1 -topologie) de la section définie par $\mathcal{F}_0$.

De façon plus explicite, nous définissons suivant Hamilton [5] les applications P et Q :

$$\begin{aligned} P &: D(M) \rightarrow \mathcal{G}(M) \\ Q &: \mathcal{G}(M) \rightarrow \mathcal{A}(M) \end{aligned}$$

- P est l'application de conjugaison :

$$P(\varphi)(\varphi(z)) = T \varphi(z)(T_z(F_z))$$

où $T_z(F_z)$ est l'espace tangent en z à la feuille F_z de $\tilde{\mathcal{F}}_0$ passant par z.

- b étant un élément de $\mathcal{G}(M)$, nous posons

$$Q(b)(z) = a(z)$$

où a(z) est une application bilinéaire antisymétrique de $\mathcal{C}(z) \times \mathcal{C}(z)$ dans

$T_z M / \mathcal{C}(z)$ définie par :

$$a(z)(X_1(z), X_2(z)) = [X_1, X_2](z) / \mathcal{C}(z)$$

($X_i, i = 1, 2$, est un champ de vecteur de classe C^∞ sur M tel que $X_i(z) \in \mathcal{C}(z)$).

Définissons l'application Z de $\mathcal{G}(M)$ dans $\mathcal{A}(M)$ par $Z(b)(z) = 0$ pour tout b. Il résulte immédiatement du théorème de Frobenius la proposition suivante :

Proposition 2

Un champ de (n-p) plans élément de $\mathcal{G}(M)$ est intégrable si et seulement si
 $Q(b) = Z(b)$.

Description des espaces tangents

Proposition 3

L'espace tangent en $\mathcal{F}_0$ à $\mathcal{G}(M)$ est $\Omega^1(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0))$

L'espace tangent en $Q(\mathcal{F}_0)$ à $\mathcal{A}(M)$ est $\Omega^2(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0))$

et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} T_{\text{Id}} D(M) & \xrightarrow{T_{\text{Id}} P} & T_{\mathcal{F}_0}(\mathcal{G}(M)) & \xrightarrow{T_{\mathcal{F}_0} Q} & T_{Q(\mathcal{F}_0)} \mathcal{A}(M) \\ \bar{\omega} \downarrow & & \downarrow |2 & & \downarrow |2 \\ \Omega^0(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0)) & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}_0}} & \Omega^1(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0)) & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}_0}} & \Omega^2(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0)) \end{array}$$

où $\bar{\omega}$ est la projection d'un champ de vecteurs sur l'espace des sections du fibré normal au feuilletage.

La démonstration est un simple calcul [5].

II - PÉRIODES D'UN ÉLÉMENT $H^1(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0))$

Proposition 4 et définition 1

Soit ω_1 une forme 1-forme fermée, élément de $\Omega^1(\tau(\mathcal{F}_0), \nu(\mathcal{F}_0))$. Pour tout lacet α de F nous définissons le champ de vecteurs tangents à $B, X_\alpha(\omega_1)$, de la manière suivante : Pour tout point y de B , soit $\alpha_y = \phi_i^{-1}(\varphi_i(y) \times \{\alpha\})$ le lacet représentant α dans F_y .

$$\text{Posons } X_\alpha(\omega_1)(y) = \int_{\alpha_y} T\pi.\omega_1$$

Le champ de vecteurs $X_\alpha(\omega_1)$ est bien défini, ne dépend que de la classe de cohomologie de ω_1 et de la classe d'homotopie de α , et est appelé la période de ω_1 relativement au lacet α .

Démonstration

a) Définition de $X_\alpha(\omega_1)$

$$\text{Par définition } X_\alpha(\omega_1)(y) = \int_0^1 T\pi(\alpha_y(t)).(\omega_1(\alpha_y(t)).\alpha_y'(t))dt$$

L'application $(T\pi)$ morphisme d'espaces fibrés de TM dans TB a pour noyau $\tau(\mathcal{F}_0)$, elle est donc définie sur $\nu(\mathcal{F}_0)$.

$X_\alpha(\omega_1)(y)$ est donc bien défini et est un vecteur tangent à B en y . Toutes les applications considérées étant de classe C^∞ , $X_\alpha(\omega_1)$ est un champ de vecteurs de classe C^∞ .

b) Expression dans une carte locale.

On vérifie que :

$$T\varphi_i(y).X_\alpha(\omega_1)(y) = \int_{\phi_i(\alpha_y)} (\phi_i^{-1})^* \omega_1$$

où $(\phi_i^{-1})^* \omega_1$ est considérée comme 1-forme différentielle sur $\varphi_i(U_i) \times F$ à valeurs dans $\mathbb{R}P \times \varphi_i(U_i) \times F$.

c) Propriétés de $X_\alpha(\omega_1)$

Montrons que $X_\alpha(\omega_1)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de α et de la classe de cohomologie de ω_1 .

Pour démontrer chacune de ces propriétés, nous pouvons supposer y fixé et par conséquent faire la démonstration dans une carte locale. La démonstration est alors la même que la démonstration classique dans le cas où la forme ω_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}$ [4].

Définition 2 - Condition T

Nous dirons que la 1-forme ω_1 vérifie la condition T s'il existe un élément de $\pi_1(F)$ tel que $X_\alpha(\omega_1)$ soit un champ transverse à la section nulle de TB.

III - PSEUDO-GROUPE D'HOLONOMIE PERTURBÉE

Soit $(U_i)(i \in I)$ l'ensemble des ouverts formant le recouvrement de B défini au paragraphe I. Posons $S =$ union disjointe des ouverts $U_i (i \in I)$. Soit x_0 un point de F, pour tout i, nous définissons $\theta_i : U_i \rightarrow M$

$$\theta_i \circ \varphi_i^{-1} = \phi_i / (\varphi_i(U_i) \times \{x_0\})$$

$\theta_i(U_i)$ est une sous variété de M transverse aux feuilles de $\mathcal{F}_0$.

Définissons H une immersion de S dans M transverse à $\mathcal{F}_0$, $H / U_i = \theta_i$.

Nous définissons aussi Π l'application naturelle de S dans B.

Définition 3

Holonomie perturbée d'un lacet α de F.

Dans la carte $(\pi^{-1}(U_i), \phi_i)$ nous définissons l'holonomie perturbée d'un lacet α_{x_0} de F, d'origine le point x_0 de F, suivant [7].

Soit η un point de $\varphi_i(U_i)$. Pour t assez petit, nous définissons le relèvement γ_t de α passant par η dans le feuilletage $\mathcal{F}_t$ comme l'intersection du cylindre $\varphi_i(U_i) \times \alpha$ avec la feuille de $\phi_i(\mathcal{F}_t)$ passant par η . Ce relèvement est donc un chemin passant par η . Pour t assez petit, on définit $\bar{h}_{t,\alpha}(\eta)$ le premier point où le relèvement de α passant par η recoupe $\varphi_i(U_i)$ transversalement. En composant avec ϕ_i^{-1} , on définit ainsi un germe de difféomorphisme $h_{t,\alpha}$ de S. L'ensemble des germes de difféomorphismes $h_{t,\alpha}$ quand α décrit l'ensemble des lacets de F définit un pseudo-groupe d'holonomie perturbée de $\mathcal{F}_t$.

Nous rappelons le résultat suivant du à Langevin et Rosenberg [7] suivant une méthode de Thurston [8].

Proposition 5

Supposons que pour toute valeur t assez petite du paramètre, il existe un point $\tilde{y}_t$ de S tel que :

$$h_{t,\alpha}(\tilde{y}_t) = \tilde{y}_t$$

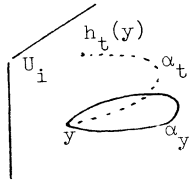
pour tout lacet α de F; alors, pour t assez petit, la feuille de $\mathcal{F}_t$ passant par $H(\tilde{y}_t)$ est compacte et difféomorphe à F.

Proposition 6

Soit α un lacet fixé de F , le vecteur tangent à la famille à un paramètre $h_{t,\alpha}$ est $X_\alpha(\omega_1)$.

$$\text{Soit } \frac{d}{dt} \left[h_{t,\alpha}(\tilde{y}) \right]_{t=0} = (D\pi)^{-1} X_\alpha(\omega_1)(\pi(\tilde{y}))$$

Démonstration.



Nous faisons le calcul dans une carte locale, $\tilde{y}$ étant un point de U_i .

$$\gamma'_t(s) = \alpha'_{\tilde{y}}(s) + t \omega_1(\alpha_y(s)) \cdot \alpha'_{\tilde{y}}(s) + o(t)$$

Soit π_i la projection de $U_i \times F$ sur U_i

$$\pi_i \cdot \gamma'_t(s) = t \omega_1(\alpha_y(s)) \cdot \alpha'_{\tilde{y}}(s) + o(t)$$

$$h_{t,\alpha}(\tilde{y}) - \tilde{y} = \int_0^{1+\varepsilon(t)} \pi_i \cdot \gamma'_t(s) ds \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$$

$$= t \int_0^1 \omega_1(\alpha_y(s)) \cdot \alpha'_{\tilde{y}}(s) ds + o(t)$$

$$\left[\frac{d}{dt} h_{t,\alpha}(\tilde{y}) \right]_{t=0} = \int_0^1 \omega_1(\alpha_y(s)) \cdot \alpha'_{\tilde{y}}(s) ds = X_\alpha(\omega_1)(\tilde{y})$$

Proposition 7 : Supposons que $\pi_1(F)$ soit commutatif alors quels que soient α_1 et α_2 lacets de F

$$[X_{\alpha_1}(\omega_1), X_{\alpha_2}(\omega_1)] = 0$$

Démonstration

D'après le calcul précédent il suffit de montrer que pour tout couple de lacets de $F(\alpha_1, \alpha_2)$ on a :

$$h_{t,\alpha_1} \circ h_{t,\alpha_2} = h_{t,\alpha_2} \circ h_{t,\alpha_1}$$

Cette relation découle immédiatement du fait que $\pi_1(F)$ est commutatif car le difféomorphisme $h_{t,\alpha}$ est indépendant du choix du lacet α représentant un élément $\bar{\alpha}$ de $\pi_1(F)$.

IV - LE THÉOREME PRINCIPAL ET SA DÉMONSTRATION

Théorème. Soit $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,\varepsilon]}$ une famille à un paramètre de feuilletages de classe

C^∞ de M , telle que $\mathcal{F}_0$ soit une fibration de base B de fibre F . Nous supposons

- (i) la caractéristique d'Euler de B , $\chi(B)$, est non nulle et $\pi_1(F)$ est commutatif
- (ii) le 1-cocycle $\{\frac{d}{dt} \mathcal{F}_t\}_{t=0}$ vérifie la condition T (II, définition 2).

Alors pour t assez petit, le feuilletage $\mathcal{F}_t$ admet au moins une feuille compacte difféomorphe à F .

Démonstration

Posons $\omega_1 = \{\frac{d}{dt} \mathcal{F}_t\}_{t=0}$. D'après la définition de la condition T il existe un lacet α tel que le champ $X_\alpha(\omega_1)$ défini à la proposition 4 soit transverse à la section nulle en un point y_0 de B .

Soit $\tilde{y}_0$ un point de S tel que $\Pi(\tilde{y}_0) = y_0$ et χ_α le flot dans S du champ $(D\Pi)^{-1} X_\alpha(\omega_1)$. Le point $\tilde{y}_0$ est un point fixe de χ_α d'indice +1 ou -1. D'après le calcul fait pour démontrer la proposition 6

$$|\chi_\alpha(\tilde{y}, t) - h_{t,\alpha}(\tilde{y})| = o(t)$$

Donc $h_{t,\alpha}$ admet dans un voisinage de $\tilde{y}_0$ un point fixe isolé $\tilde{y}_t$ d'indice +1 ou -1. Pour tout lacet β de F

$$h_{t,\beta} \circ h_{t,\alpha} = h_{t,\alpha} \circ h_{t,\beta}$$

donc $\tilde{y}_t$ est point fixe de $h_{t,\beta}$ quel que soit β .

D'après la proposition 5 la feuille de $\mathcal{F}_t$ passant par $H(\tilde{y}_t)$ est compacte et difféomorphe à F .

c.q.f.d

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. DESOLNEUX-MOULIS : Sur certaines familles à un paramètre de feuilletages de $T^2 \times S^2$. Note C.R.A.S. T. 287, p. 1043-1046.
- [2] D. EPSTEIN : A topology for the space of foliations. Preprint university of Warwick - January 1977.
- [3] F.B. FULLER : An index of fixed point type for periodic orbits. Am. J. Math. 89 - 1967, p. 133-148.
- [4] C. GODBILLON : Topologie algébrique.
- [5] R.S. HAMILTON : Deformation theory of foliations. Preprint 1977, Cornell University.
- [6] J. MOSER : Periodic orbits near on equilibrium and a theorem by Alan Weinstein. Comm. Pure and Applied Math. 29 - 1976, p. 727-746.
- [7] H. ROSENBERG - R. LANGEVIN : On stability of compact leaves and foliations. Topology, vol. 16, p. 207-111.
- [8] W. THURSTON : A generalisation of the Reeb stability theorem. Topology (1974).
- [9] I. VAISMAN : Cohomology and differential forms. (Dekker - 1973).

N. DESOLNEUX-MOULIS
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, route de Chartres
91440 BURES SUR YVETTE