Astérisque

SYLVESTRE GALLOT

Variétés dont le spectre ressemble à celui de la sphère

Astérisque, tome 80 (1980), p. 33-52

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__80__33_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 80 (1980) p. 33-52

VARIÉTÉS DONT LE SPECTRE RESSEMBLE A CELUI DE LA SPHÈRE

par Sylvestre GALLOT

§ 0. MOTIVATIONS

Lorsqu'on connaît la manière dont vibre une variété riemannienne, peut-on en déduire la forme et la métrique de la variété ? Ce type de préoccupations apparaît dans un théorème d'Obata (cf.1.2 et 1.3). Nous en donnons une généralisation en 1.4. Il s'agit de théorèmes caractérisant la sphère munie de sa métrique canonique par les équations que vérifient les fonctions propres de son laplacien.

Inversement, on peut chercher des estimations sur les valeurs propres du laplacien lorsqu'on connaît des bornes de la courbure de la variété. Dans cet ordre d'idées, un théorème de Lichnerowicz donne une minoration de la première valeur propre (cf.1.1). Des estimations plus fines sont données par les propositions 2.1 et 2.2.

On est naturellement amené à se demander si la connaissance de la première valeur propre avec une imprécision d'ordre ε (ε étant petit) donne la topologie de la variété. Ainsi nous montrons dans le paragraphe 3 que toute variété dont la première valeur propre est proche de celle de la sphère canonique est homéomorphe à celle-ci.

§ 1. CARACTÉRISATION DE LA SPHÈRE PAR SES FONCTIONS PROPRES

Dans la suite, la notation (M,g) désignera toujours <u>une variété riemannienne sans bord</u>, <u>connexe</u>, <u>complète</u> <u>et de dimension</u> n <u>au moins égale à</u> 2 (sans qu'il soit nécessaire de le spécifier). Nous noterons D sa dérivation covariante, Δ son laplacien, R son tenseur de courbure et σ sa courbure sectionnelle. Le tenseur de courbure de Ricci (noté ρ) est le 2-tenseur symétrique défini par l'égalité

$$\rho = \sum_i R(e_i,.,e_i,.)$$

où (e_i) est une base orthonormée de l'espace tangent. Nous notons k_o et k_1 la plus petite et la plus grande valeur propre de $\frac{\rho}{n-1}$. Le spectre de (M,g) est l'ensemble des valeurs propres du laplacien agissant sur les fonctions C^∞ de M dans $\mathbb{R}$. Lorsque la variété est compacte, son spectre forme une suite de terme général λ_p vérifiant $0=\lambda_o<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_p<\ldots$ (on ne distingue pas les valeurs propres égales). Par comparaison avec la sphère munie de sa métrique canonique, pour laquelle $\lambda_p = p(n+p-1)$ et $k_o = k_1 = 1$, nous avons les théorèmes suivants.

1.1 Théorème (A. Lichnerowicz): Sur toute variété riemannienne compacte, on a $\lambda_1 \geqq n\, k_o$.

1.2 Théorème (M. Obata): L'égalité $\lambda_1 = nk_o$ caractérise la sphère munie de sa métrique canonique de courbure constante k_o.

On trouvera une preuve de ces théorèmes dans [1], p.179 à 185, nous en donnons une autre au paragraphe 2. Pour prouver 1.2, M. Obata est amené à remarquer que (dans le cas où $k_o=1$) toute fonction vérifiant $\Delta f=n.f$ est solution de l'équation

$$(E_1) \quad DDf + f.g = 0.$$

Le théorème 1.2 est donc une conséquence du théorème suivant

1.3 Théorème (M. Obata): S'il existe sur (M,g) une solution non nulle de (E_1), alors cette variété est la sphère munie de sa métrique canonique de courbure 1.

Pour situer la difficulté de ce théorème, dérivons une fois de plus l'équation (E_1) et antisymétrisons les deux premières variables, cela donne

$$R(.,.)\mathrm{grad}\ f = R_o(.,.)\mathrm{grad}\ f$$

où R_o est le tenseur de courbure de la sphère canonique. Mais on désire que R soit égal à R_o dans toutes les directions, et pas seulement dans la direction de grad f. En fait, toute démarche tendant à prouver 1.3 par des considérations uniquement locales est vouée à l'échec, puisqu'on sait construire des variétés non complètes admettant n-2 solutions de (E_1) (cf. [2], paragraphe 5).

En vue de généraliser 1.3, remarquons que toute fonction f définie sur la sphère canonique telle que $\Delta f = \lambda_p . f$ vérifie une équation différentielle de degré p+1 notée (E_p). En fait, f est la restriction à S^n d'un polynôme homogène harmonique F (de degré p) de R^{n+1}. Si D' est la dérivation covariante de R^{n+1}, on a donc $D'^{p+1}F=0$. C'est cette équation qui, traduite sur la sphère en termes de dérivées de f, devient (E_p) (pour le calcul de (E_p), voir le paragraphe 4 de [2]). Nous noterons encore (E_p) la même équation transcrite littéralement sur (M,g).

1.4 Théorème (cf. [2] page 248): S'il existe sur (M,g) une solution non constante de (E_p) (pour au moins un p dans N^*), alors (M,g) est localement isométrique à la sphère munie de sa métrique canonique de courbure 1.

Ce théorème avait été conjecturé par M. Obata dans le cas p = 2 (pour une autre preuve valable dans ce cas, voir [3]). Une preuve des théorèmes 1.3 et 1.4 est donnée dans le paragraphe 4.

Si les équations (E_p), à la différence du cas p = 1, ne permettent pas en général d'obtenir directement des théorèmes de comparaison semblables à 1.1 et 1.2, elles apparaissent cependant naturellement dans des formules de Weitzenböck analogues à celles qui permettent de prouver 1.1 et 1.2.

§ 2. FORMULES DE WEITZENBOCK

Notons $(S^n, can.)$ la sphère munie de sa métrique canonique de courbure 1. Pour donner une formulation plus simple des équations (E_p) et de leurs solutions sur $(S^n, can.)$, nous avons plongé la sphère dans $S^n \times]0,+\infty[$ muni de la métrique qui l'identifie isométriquement à $R^{n+1}\setminus 0$. En copiant ce plongement, nous identifions (M,g) à la sous-variété $M \times \{1\}$ de la variété $M' = M \times]0,+\infty[$, cette dernière étant munie de la métrique $\langle .,. \rangle$ égale à $r^2.g + (dr)^2$ au point (m,r). Notons D' la connexion de Levi-Civita de M', R' son tenseur de courbure et ρ' son tenseur de courbure de Ricci. Un calcul direct donne $R' = R - R_0$ et $\rho' = \rho - (n-1).g$. Pour montrer que (M,g) est localement isométrique à $(S^n, can.)$, il suffit donc de prouver que M' est plate.

A une fonction f définie sur M et à un entier p de N^*, nous associons la fonction F définie sur M' par $F(m,r) = r^p.f(m)$. Un calcul (direct pour $p = 1$ ou 2, plus compliqué lorsque p est plus grand que 3, cf. le paragraphe 4 de [2]) montre que l'équation (E_p) est équivalente à $D'^{p+1}F = 0$.

Notons Δ et Δ' les laplaciens de Lichnerowicz agissant sur les tenseurs définis sur M et M'. Ils sont donnés par la formule

$$\Delta = D^*D + \mathcal{R}$$

où

$$\mathcal{R}(T)_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{k=1}^{p} \rho(i_k, j)\, T_{i_1 \ldots i_{k-1}}{}^{j}{}_{i_{k+1} \ldots i_p} - \sum_{k \neq s} R(i_k, i, i_s, j)\, T_{i_1 \ldots}{}^{i}{}_{\ldots}{}^{j}{}_{\ldots i_p}$$

En intégrant sur $M \times \{1\}$, nous obtenons la <u>formule de Weitzenböck</u>

$$(\ast)\quad \int_M \langle \Delta'(D'^pF), D'^pF\rangle . v_g = \int_M (|D'^{p+1}F|^2 + \langle \mathcal{R}'(D'^pF), D'^pF\rangle) . v_g$$

D'après le paragraphe 9 de [4], le terme $\langle \mathcal{R}'(D'^pF), D'^pF\rangle$ est positif lorsque la courbure de (M,g) est plus grande que celle de $(S^n, can.)$ (dans un sens que nous préciserons). <u>Dans ce cas, le membre de gauche de</u> $(\ast)$ <u>est positif</u>, ce qui donne des théorèmes de comparaison du type de 1.1. <u>Si de plus le membre de gauche est nul</u>, <u>nous avons alors</u> $D'^{p+1}F=0$ <u>et f est une solution de (E_p)</u>, ce qui donne une caractérisation de $(S^n, can.)$ à la manière de 1.2. Lorsque f est une fonction propre du laplacien (i.e. $\Delta f = \lambda . f$), nous remarquons que

$$\Delta' F = r^{p-2}(\lambda - p(n+p-1))f\ ,$$

ce qui nous amène à comparer les valeurs propres de (M,g) et celles de $(S^n, can.)$.

Ainsi, lorsque $p=1$, nous nous ramenons au cas $k_o = 1$ en multipliant la métrique g par une constante positive adéquate. Dans ce cas $\mathcal{R}'$ est égal à ρ', qui a toutes ses valeurs propres positives. Comme en outre

$$\Delta'(D'F) = D'(\Delta' F) = (\lambda - n)\ D'(r^{-1}.f),$$

l'équation $(\ast)$ implique que $\lambda - n$ est positif, ce qui prouve le théorème 1.1. Le théorème 1.2 s'obtient en remarquant que l'hypothèse $\lambda = n$ et l'équation $(\ast)$ impliquent que $D'D'F$ est nul et que f est une solution de (E_1). Le théorème 1.3 (voir la preuve de ce théorème dans le paragraphe 4) achève la preuve de 1.2.

Lorque p est plus grand que 1, le terme $\langle \mathcal{R}'(D'^pF), D'^pF\rangle$ est positif dès que l'opérateur de courbure de (M,g) est supérieur à celui de $(S^n, can.)$. La difficulté que nous rencontrons ici pour faire apparaître $(\lambda - p(n+p-1))$ en facteur dans le membre de gauche vient du fait que $\Delta'(D'^pF)-D'^p(\Delta'F)$ n'est pas nul, mais se calcule à l'aide des dérivées successives de R. Si nous appelons σ_o la borne inférieure de la courbure sectionnelle et si nous notons $\bar{\lambda}$ le nombre réel $(2/3)[(n+1)k_o-2k_1+2(n+2)\sigma_o]$ nous obtenons les estimations suivantes dans le cas $p = 2$.

2.1 Proposition : Si (M,g) est une variété d'Einstein (i.e. $k_o = k_1$),

-ou bien $\lambda_1 = n\, k_o$ et alors (M,g) est la sphère de courbure k_o.

-ou bien $\lambda_1 \geqq \bar{\lambda}$.

L'intérêt de cette estimation, par rapport à celle de [5](page 6) et de [6] (3° page), est d'être optimale. En effet, la valeur minimale $\bar{\lambda}$ est atteinte sur les espaces symétriques de rang 1, comme le montre le tableau suivant (cf. [7] page 202) :

M	σ_o	$k_o = k_1$	$\bar{\lambda}$	λ_p
S^n	1	1	$2(n+1)$	$p(n+p-1)$
$\mathbb{R}P^n$	1	1	$2(n+1)$	$2p(n+2p-1)$
$\mathbb{C}P^d$	1	$\frac{2(d+1)}{2d-1}$	$4(d+1)$	$4p(p+d)$
$\mathbb{H}P^d$	1	$\frac{4(d+2)}{4d-1}$	$8(d+1)$	$4p(p+2d+1)$
CaP^2	1	$36/15$	48	$4p(p+11)$

Remarquons que le λ_1 de $(S^n,\text{can.})$ est isolé, ce qui redémontre bien qu'il n'y a pas d'autre métrique d'Einstein dans tout un voisinage de la métrique canonique de S^n (cf. l'exposé de M. Berger, chapitre 6.1).

Dans le cas général (non Einstein), nous avons la proposition suivante (comme 2.2, elle n'a d'intérêt que si $\overline{\lambda} > nk_1$)

2.2 <u>Proposition</u> : <u>Toute valeur propre</u> λ <u>du laplacien vérifie</u>

$$n\, k_o \leqq \lambda \leqq nk_1 + \alpha_1 (\overline{\lambda} - nk_1)^{-2} \, \|D\rho\|^2_{L^\infty}$$

ou

$\overline{\lambda} - \alpha_2 (\overline{\lambda} - nk_1)^{-1/2} \, \|D\rho\|_{L^\infty} \leqq \lambda$, <u>où</u> α_1 <u>et</u> α_2 <u>sont des constantes ne dépendant que de</u> n.

<u>Preuve</u> : Dans la définition du laplacien de Lichnerowicz (cf. le chapitre 2), nous décomposons à nouveau le terme D^*D de manière à faire apparaître de nouveaux termes en courbure, ce qui nous donne une formule de Weitzenböck plus adaptée au cas de courbure sectionnelle positive et s'appliquant à tout 2-tenseur symétrique h (cf. l'exposé de J.P. Bourguignon) :

$$\Delta h = S^* S(h) - \delta^* \delta(h) + 2\mathfrak{R}(h)$$

où $\delta(h)$ est la divergence de h et où $S(h)$ est le symétrisé de Dh (i.e. $Sh(X,Y,Z) = Dh(X,Y,Z) + Dh(Y,Z,X) + Dh(Z,X,Y)$).

En désignant par $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire g étendu aux tenseurs, nous obtenons par intégration de la formule précédente

$$(1) \quad \int_M (\Delta(DDf)|DDf) \cdot v_g = \int_M [\tfrac{1}{3} |S(DDf)|^2 - 2|\delta(DDf)|^2 + 2(\mathfrak{R}(DDf)|DDf)] \cdot v_g \; .$$

Considérons une fonction propre f (i.e. $\Delta f = \lambda f$) normalisée par $\int_M f^2 \cdot v_g = 1$. En multipliant au besoin la métrique par une constante positive, on peut supposer que l'intégrale de $\rho(\text{grad } f, \text{grad } f)$ est égale à celle de $(n-1)\,|df|^2$.
La formule de Weitzenböck appliquée à la 1-forme df donne donc

$$\int_M |DDf|^2 \cdot v_g = \int_M [(\Delta df|df) - \rho(\text{grad } f, \text{grad } f)] \cdot v_g = \lambda(\lambda - n + 1) \; .$$

Des calculs directs conduisent aux estimations

$$\int (\mathcal{R}(DDf)\,|\,DDf) \geq 2(n-1)\sigma_o(\lambda-n)\lambda,$$

$$\int |\delta(DDf)|^2 = \lambda(\lambda-n+1)^2 + \int |(\rho-(n-1).\mathrm{Id})(df)|^2$$

$$\int |S(DDf)|^2 = \int |S(DDf) + (\frac{3\lambda-2n+2}{n+2})\, df \circ g|^2 + \frac{(3\lambda-2n+2)^2}{n+2} \cdot 3\lambda,$$

où $df \circ g$ est le symétrisé de $df \otimes g$. Par ailleurs, le défaut de commutation $(\Delta D - D\Delta)(df)$ est égal à $\Box\rho(\mathrm{grad}\, f;.,.)$, où le tenseur $\Box\rho$ est une combinaison linéaire de dérivées de ρ. Il s'ensuit

$$(\Delta(DDf)\,|\,DDf) \leq \lambda|DDf|^2 + \|\Box\rho\|_{L^\infty}.|df|.|DDf|.$$

En remplaçant dans (1), nous obtenons

$$(\lambda-n)[3\lambda-2(n-1)-4\sigma_o(n+2)] \geq -\|\Box\rho\|_{L^\infty}(n+2)[n(n-1)]^{-1/2}(\lambda-n)^{1/2}$$
$$-\ 2(n-1)(n+2)(k_1-1)(1-k_o)$$

ce qui donne 2.1 et 2.2. □

Remarquons que, si (M,g) est d'Einstein et si $\lambda = \overline{\lambda}$, le terme négligé dans la minoration de $S(DDf)$ s'annule, ce qui s'écrit

$$S(DDf) + 4\sigma_o.df \circ g = 0.$$

Cette équation est exactement la symétrisée de l'équation (E_2) qui caractérise la sphère canonique de courbure σ_o. Elle est vérifiée sur tous les espaces symétriques de rang 1 par les fonctions propres correspondant à la valeur propre $\overline{\lambda}$. Elle signifie que, le long d'une géodésique c, $f \circ c(t)$ est un polynôme de degré 1 en cos 2t et en sin 2t. On ne sait pas si cela caractérise les espaces symétriques de rang 1.

§ 3. PINCEMENT DU λ_1

Considérons une fonction propre (i.e. $\Delta f=\lambda.f$). En multipliant au besoin la métrique par une constante, il est toujours possible de supposer que $\lambda=n$ (dans ce cas k_o est plus petit que 1 d'après 1.1). La formule de Weitzenböck (✱) appliquée à la 1-forme D'F donne

$$\int_M |D'D'F|^2.v_g = -\int_M \rho'(\text{grad } F,\ \text{grad } F).v_g$$

où la fonction F est définie sur M' par $F(m,r)=r.f(m)$. Si λ est proche de nk_o, alors k_o est proche de 1 et le second membre de l'égalité ci-dessus est petit, ce qui implique que D'D'F est petit en norme L^2. Un calcul direct montre que D'D'F est égal à $DDf+f.g$ (cf. [2]page 241). Nous verrons que, si $DDf+f.g$ est petit en norme L^2, il l'est aussi en norme L^∞ (ceci relève d'inégalités de Sobolev non classiques). Nous sommes ainsi amenés à considérer la variation de l'équation (E_1), ce qui motive le lemme suivant :

3.1 <u>Lemme</u>.(cf.[6]) : <u>Soit</u> (M,g) <u>une variété riemannienne dont le volume et le diamètre sont bornés supérieurement par</u> V <u>et</u> d. <u>S'il existe une fonction</u> f <u>non nulle telle que toutes les valeurs propres de</u> $DDf+f.g$ <u>soient comprises entre</u> $-\varepsilon'$ <u>et</u> ε', <u>où</u>

$$\varepsilon'=(1+d)^{-1}\left[\frac{1}{V}\int_M (|df|^2 + f^2)v_g\right]^{1/2} ,$$

<u>alors</u> M <u>est homéomorphe à</u> S^n.

En corollaire, l'existence d'une fonction propre non nulle du laplacien telle que toutes les valeurs propres de $DDf + (\lambda/n)f.g$ soient inférieures (en valeur absolue) à $(1+d\sqrt{\lambda/n})^{-1}(n+1)^{1/2}(\frac{1}{V}\int_M f^2.v_g)^{1/2}$ implique que M est une sphère topologique (il suffit de faire $\lambda=n$ dans 3.1).

Preuve : En dérivant $F(m,r) = r.f(m)$, nous obtenons

$$\left(\frac{1}{V}\int_M |D'F|^2.v_g\right)^{1/2} = \left[\frac{1}{V}\int_M (|df|^2 + f^2).v_g\right]^{1/2} = (1+d)\varepsilon'.$$

Il existe donc un point a où $|D'F_a| \geqq (1+d)\varepsilon'$. Par hypothèse, les valeurs propres de $D'D'F$ (égal à $DDf+f.g$) sont inférieures à ε'. Ceci implique que

$$\Big|\, |D'F_m| - |D'F_a| \,\Big| < \varepsilon'.d(a,m)$$

en tout point m de M. Si m est un point critique de f, nous avons $|f(m)| = |D'F_m| > \varepsilon'$, car $D'F$ est égal à $r.df+f.dr$. Toutes les valeurs propres de DDf étant comprises entre $-(f(m)+\varepsilon')$ et $\varepsilon'-f(m)$, le Hessien DDf est défini négatif ou défini positif au point m. Les parties M^+ et M^-, respectivement formées de l'ensemble des points où les fonctions $-f$ et f sont inférieures à ε', sont respectivement difféomorphes à la réunion de n^+ et de n^- disques. Ces disques se recollent 2 à 2 suivant les couronnes dont la réunion forme $M^+ \cap M^-$. La connexité de M assure que $n^+ = n^- = 1$. La fonction f n'a donc pour points critiques qu'un maximum et un minimum non dégénérés et la variété M est homéomorphe à S^n. □

Pour toute variété riemannienne (M,g), <u>nous poserons</u>

$A = -\sigma_o.V^{2/n}$,

$\delta = \|D\, \rho\|_{L^\infty}.V^{3/n}$,

$B = V_o/V$,

où V est le volume de (M,g) et où V_o est le volume de la boule, de rayon égal au diamètre d de la variété, tracée sur l'espace de courbure constante k_o. Remarquons que, si k_o est positif, le nombre B est majoré (à une constante près) par $\frac{d^n}{V}$ et que V et d sont majorés par le volume et le diamètre de la sphère de courbure constante k_o (d'après le théorème de Myers). Il est à noter que le minimum σ_o de la courbure sectionnelle peut être négatif et que les trois valeurs A, δ et B sont homogènes (i.e. ne changent pas lorsqu'on multiplie la métrique par une constante) ; enfin ces trois quantités sont finies dès que M est compacte. Les constantes universelles qui interviennent en 3.2 et 3.3 seront d'autant moins bonnes que A, δ, B et n seront grands.

3.2 <u>Lemme</u> : <u>Si</u> (M,g) <u>est de volume</u> 1 <u>et si</u> f <u>est une fonction propre du laplacien (i.e</u>. $\Delta f=\lambda.f$), <u>nous avons, si</u> $k_o \geqq -a$,

$$\|df\|_{L^\infty} \leq C_1(n,B,\lambda,a).\ \|df\|_{L^2}$$

$$\| DDf+(\lambda/n)f.g\|_{L^\infty} \leqq C_2(n,B,\delta,A,\lambda).\| T\|^s_{L^2}.\sup(\| T\|_{L^2},\|df\|_{L^2})^{1-s}$$

<u>où</u> $s = e^{-n/2}$ <u>et où les constantes</u> C_1 et C_2 <u>dépendent de manière croissante des quantités entre parenthèses</u>.

<u>Remarques</u> : Dans la suite, nous noterons T le tenseur $DDf + \frac{\lambda}{n} f.g$.

a) Il est généralement admis que, si T est une solution d'une équation du type $\Delta T = \lambda.T$, on a une inégalité de Sobolev de la forme

$$\|T\|_{L^\infty} \leq C(M,g,\lambda)\ \|T\|_{L^2}\ .$$

Mais ici, nous ne voulons faire aucune hypothèse particulière sur M, d'où la recherche des meilleures constantes C_1 et C_2 possibles.

b) La difficulté se trouve renforcée ici par le fait qu'on n'a pas $\Delta T = \lambda.T$, la faute en incombe au défaut de commutation de Δ avec D qui donne (cf.[6] et la preuve de 2.2)

$$\Delta T = \lambda.T + \square\rho(\text{grad } f;.,.)\ ,$$

d'où la présence de l'exposant s dans la 2° inégalité.

c) Pour s'expliquer la forme des inégalités 3.2, il est possible de faire une première démonstration en passant en cartes locales normales. Le laplacien de Lichnerowicz sur les tenseurs devient, en coordonnées normales, un opérateur elliptique d'ordre 2 dont les coefficients des termes de degrés 0 et 1 sont majorés à l'aide de R et de DR (ceci apparaît dans la définition de Δ donnée au paragraphe 2). Si on utilise les inégalités de Sobolev dans la carte munie de sa métrique euclidienne, les constantes obtenues dépendront d'un minorant du rayon d'injectivité et d'un majorant de R et de ses dérivées successives. Cette méthode, utilisée dans [6], est remplacée ici par des inégalités de Sobolev intrinsèques à la manière de [8]. Il faut cependant adapter la méthode pour tenir compte de la remarque b.

Preuve de 3.2 : Nous utilisons des formules de Weitzenböck non intégrées. Ces formules se déduisent de la définition de Δ donnée au paragraphe 2, ainsi nous avons

$$\frac{1}{2}\cdot\Delta(|df|^2) = (\Delta df|df)-|DDf|^2-\rho(\text{grad } f,\text{grad } f),$$

$$\frac{1}{2}\cdot\Delta(|T|^2) = (\Delta T|T)-|DT|^2 - (\mathcal{R}(T)|T).$$

Ces deux formules donnent, en remarquant que $|D(|S|)|\leqq|DS|$ pour tout tenseur S et en utilisant les calculs effectués dans la preuve de 2.2,

$$|df|\cdot\Delta(|df|)\leqq (\lambda-(n-1)k_o)\cdot|df|^2 ,$$

$$|T|\cdot\Delta(|T|) \leqq (\lambda -2n\cdot\sigma_o)\cdot|T|^2+\delta|T|\cdot|df|.$$

Si h est une fonction comprise entre 0 et 1, une inégalité du type $h.\Delta(h) \leqq C.h$ (valable en chaque point) donne

$$\|D(h^k)\|^2_{L^2} = \frac{k^2}{2k-1} \cdot \int_M h^{2k-1} . \Delta(h) . v_g \leqq \frac{C.k^2}{2k-1} . \|h\|^{2k-1}_{L^{2k}}$$

Par ailleurs, on peut généraliser les inégalités de Sobolev à des fonctions non normalisées du type de h (cf.[8], lemmes 2 et 5), ce qui donne

$$\|\phi\|^2_{L^{2\beta}} \leqq C(n,B) \ (V^{2/n} \|d\phi\|^2_{L^2} + \|\phi\|^2_{L^2}) \ ,$$

où $\beta = \frac{n}{n-2}$ ($\beta=2$ en dimension 2). En faisant $\phi = h^k$, nous avons

$$\|h\|_{L^{2k\beta}} \leqq C(n,B)^{1/2k} . \|h\|^{1-1/2k}_{L^{2k}} \ (1+C.\frac{k^2}{2k-1})^{1/2k}$$

Par itérations successives, nous obtenons une formule du type

$$\|h\|_{L^\infty} \leqq C'(n,B) \ (1+C)^{n/4} . \|h\|^s_{L^2}$$

En posant successivement

$$h = \frac{|df|}{\|df\|_{L^\infty}} \ ,$$

puis

$$h = \frac{|T|}{\sup(\|T\|_{L^\infty}, \|df\|_{L^\infty})} \ ,$$

nous obtenons le lemme 3.2. □

3.3 Théorème : Il existe une constante strictement positive $\varepsilon(A,B,\delta,n)$, décroissante en chacune de ces variables, telle que, si (M,g) est compacte et vérifie $\lambda_1 \leqq nk_o(1+\varepsilon(A,B,\delta,n))$, alors M est homéomorphe à S^n.

Remarques : La constante ε établie pour une valeur donnée de (A,B,δ,n) est également valable pour toutes les valeurs plus petites. On ne sait pas si ε tend forcément vers O quand A, B, ou δ tend vers $+\infty$. Par contre, on peut aisément construire un contre-exemple prouvant que ε doit tendre vers O quand n tend vers l'infini. Il suffit pour cela de construire (M,g) comme le produit riemannien d'une sphère S^{n-2} de courbure 1 et d'une sphère S^2 de courbure supérieure à $n-3$. Dans ce cas, $k_o = (n-3)/(n-1)$ et $\lambda_1(M,g)=\lambda_1(S^{n-2})=n-2$. Il est clair que le rapport λ_1/nk_o tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Preuve de 3.3 : Nous nous ramenons au cas où V = volume de $(S^n,\mathrm{can.})$. D'après le théorème de comparaison de Myers, on en déduit que $k_o \leqq 1$. En faisant l'hypothèse $\lambda_1 \leqq (n+1)k_o$, nous nous assurons que λ_1 est borné par n+1. Nous avons montré (cf. le début du paragraphe 3) que $DDf+(\lambda_1/n)f.g$ est petit en norme L^2. Les lemmes 3.2 et 3.1 achèvent la preuve. □

On peut se demander si M est difféomorphe à S^n dès que λ_1 est assez proche de nk_o. Cela parait probable, mais la constante ε obtenue sera moins bonne (i.e. dépendra d'un majorant de R et de certaines de ses dérivées). Par contre, la démonstration ne présente pas de difficulté supplémentaire lorsqu'on suppose (comme c'est le cas sur la sphère munie d'une métrique proche de la canonique) qu'il existe n+1 valeurs propres voisines de nk_o : la variété M est alors une sphère différentiable et sa métrique g est proche de la métrique canonique. En effet, si $f_o,\ldots,f_n$ sont les fonctions propres associées et si $F_i=r.f_i$, les gradients des F_i forment un repère de M' presque orthonormé en chaque point et presque parallèle d'après le début du paragraphe 3 et le lemme 3.2.

Nous pouvons majorer $|df|$ à l'aide de $\|df\|_{L^2}$ dans la fin de la preuve de 2.2 en utilisant le lemme 3.2. Nous pouvons donc remplacer $\|D\rho\|_{L^\infty}$ par $\|D\rho\|_{L^2}$ dans l'énoncé de la proposition 2.2, les constantes α_1 et α_2 dépendent uniquement de n et d'un minorant strictement positif de $V^{2/n}.k_o$.

En rapprochant le théorème 3.3 de la dernière inégalité de la preuve de 2.2, nous voyons que, si $\|D\rho\|_{L^2}$ est assez petit et si M n'est pas homéomorphe à S^n, alors

$$\lambda_1 \geqq \bar{\lambda} - \alpha_2(n, V^{2/n}.k_o).(4\sigma_o - k_1)^{-1/2}.\|D\rho\|_{L^2}.$$

§ 4. PREUVES DES THÉORÈMES 1.3 ET 1.4

Pour des preuves plus détaillées, voir [2] chapitres 2,3 et 4.

Preuve de 1.3: Si f est une solution de (E_1), nous définissons comme précédemment la fonction F sur M' par

$$F(m,r) = r.f(m).$$

Un calcul direct montre que

$$D'D'F = DDf + f.g = 0.$$

Le champ de vecteurs grad F est donc parallèle sur M'. Si m est un point critique de f, grad F est normal à M au point (m,1) car $D'F = r.df + f.dr$. Considérons une géodésique γ de M' issue du point (m,1). Par construction, si N est le vecteur normal $r.\frac{\partial}{\partial r}$, nous avons $D'_{\dot\gamma} N = \dot\gamma$. Ceci implique

$$N_{\gamma(t)} = \frac{1}{f(m)} \text{ grad } F_{\gamma(t)} + t.\gamma(t).$$

La courbure R' est nulle dans la direction de N (par construction) et dans la direction de grad F (car celui-ci est parallèle). Nous avons par conséquent

$$R'(.,.)\dot{\gamma} = 0.$$

Les champs de Jacobi le long de γ sont alors ceux d'une variété plate, ce qui signifie que l'application exponentielle de M' au point (m,1) est une isométrie locale. On montre aisément (même sans hypothèse de compacité) que tout point de M' peut être relié par une géodésique à un point (m,1) où le gradient de F est normal à M (i.e. m est un point critique de f). Ceci prouve que M' est plate et que (M,g) admet $(S^n,\text{can.})$ comme revêtement universel. La fonction f se relève sur $(S^n,\text{can.})$ en une fonction vérifiant elle aussi (E_1). Celle-ci n'a qu'un seul maximum, le revêtement n'a donc qu'un seul feuillet et $(M,g) = (S^n,\text{can.})$. □

<u>Preuve de 1.4</u> : Si f est une solution de (E_p), nous définissons la fonction F comme dans le paragraphe 2 par

$$F(m,r) = r^p.f(m).$$

Un calcul assez compliqué (cf. [2] paragraphe 4) montre que l'équation (E_p) est équivalente à

$$D'^{p+1}F = 0.$$

Le groupe d'holonomie de M' est un sous-groupe de O(n+1) qui agit isométriquement sur l'espace tangent $T_{m'}M'$ en chaque point m' de M'. L'action de ce groupe peut être décrite de la manière suivante : à chaque élément h' du groupe correspond un lacet ω de point-base m', l'image d'un vecteur X de $T_{m'}M'$ par h' étant le vecteur de $T_{m'}M'$ obtenu en transportant X parallèlement le long de ω. Nous notons G' la composante connexe de l'identité dans le groupe d'holonomie.

Le tenseur $D'^{p}F$ étant invariant par l'action de G', le polynôme $P(X) = (D'^{p}F)_{m'}(X,\ldots,X)$ est un polynôme homogène de degré p sur l'espace $T_{m'}M' \simeq R^{n+1}$, invariant par l'action de G' et par transport parallèle. Si G' agit transitivement sur S^n, le polynôme P est constant sur S^n, la fonction f est également constante sur M, puisque la définition de F donne

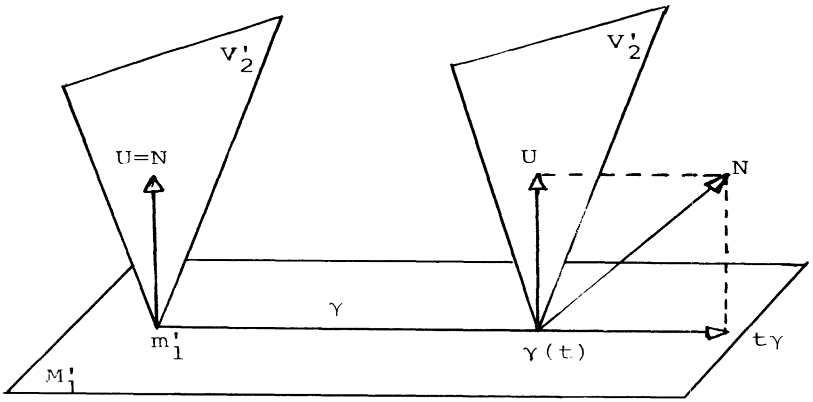
$$p!r^{p}.f(m) = D'^{p}F(N,\ldots,N) = r^{p}.P(N/|N|).$$

Un théorème de Berger et Simons (cf. [9] page 234) montre que, si M' n'est pas localement symétrique et si G' n'agit pas transitivement sur S^n, alors G' agit réductiblement sur l'espace tangent. Or M' ne peut être localement symétrique sans être réductible, en effet l'algèbre de Lie de G' serait alors engendrée par les endomorphismes $R'(X,Y)$ (pour tous les vecteurs X et Y de l'espace tangent) et le vecteur N serait invariant par l'action de G' (puisque $R'(X,Y)N=0$).

Il reste à montrer que, si G' est réductible, il est trivial. Cette propriété est liée à la construction de M', en particulier au fait que $D'_{\dot\gamma} N = \dot\gamma$ et que $R'(.,.)N = 0$. Supposons que TM' se décompose en une somme de deux distributions orthogonales V'_1 et V'_2 invariantes par l'action de G'. Par tout point m' de M' passent deux sous-variétés intégrales de V'_1 et V'_2, totalement géodésiques, notées M'_1 et M'_2. Appelons N_1 et N_2 les composantes du vecteur N au point m'. Dès que N_2 est non nul, la géodésique β de M' issue de m' et de vecteur initial $-N_1$ est telle que le vecteur N se trouve dans V'_2 au point $\beta(1)$. Posons $m'_1 = \beta(1)$.
Inversement, pour toute géodésique γ de M'_1 issue de m'_1, le champ de vecteurs U défini le long de γ par

$$U_{\gamma(t)} = N_{\gamma(t)} - t.\dot\gamma(t)$$

est parallèle et reste donc dans V'_2.



Or $R'(.,.)N$ est nul, tandis que $R'(.,.)\dot{\gamma}$ et $R'(.,.)U$ appartiennent respectivement à V'_1 et V'_2. Ceci n'est possible que si $R'(.,.)\dot{\gamma}$ est nul. Comme dans la preuve de 1.3, les champs de Jacobi le long de γ sont ceux d'une variété plate et l'application exponentielle est une isométrie locale de V'_1 sur M'_1. La sous-variété M'_1 est donc plate. Un raisonnement identique montre que M'_2 est plate dès que N_1 est non nul. Comme les composantes de N sont presque partout non nulles, la courbure R' est presque partout nulle et la variété M' est plate. Nous en concluons que (M,g) admet (S^n,can) comme revêtement universel, ce qui achève la preuve de 1.4.

Remarque : Lorsque p est pair, les fonctions f définies sur $(S^n,\mathrm{can.})$ et telles que $\Delta f=\lambda_p.f$ passent au quotient par l'application antipodique. Il existe donc des solutions de (E_p) sur $\mathbb{R}P^n$.

RÉFÉRENCES

[1] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET, le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math.,194,Springer 1971.

[2] S. GALLOT, Equations différentielles caractéristiques de la sphère. Ann. Scient. Ecole Norm. Sup., t.12,1979, p 235 à 267.

[3] S. TANNO, Some differential equations on Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan, Vol.30,n°3,1978.

[4] S. GALLOT, D. MEYER, Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne. Journal Math. Pures et Appl., t.54,1975, p. 259 à 284.

[5] U. SIMON, K. BENKO, M. KOTHE et K.D. SEMMLER, Eigen-values of the Laplacian and curvature. Preprint Reihe Mathematik, Technische Universität Berlin,n°37a,1977-78.

[6] S. GALLOT, Un théorème de pincement et une estimation sur la première valeur propre du laplacien d'une variété riemannienne. C.R. Acad. Sci. Paris, 1979, t.289, p 441-444.

[7] A. BESSE, Manifolds all of whose geodesics are closed, Ergebnisse der Mathematik, 93 , Springer 1978.

[8] P. LI, On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact Riemannian manifold. A paraître (Ann. Sci. Ecole Normale Sup.).

[9] J. SIMONS, On the transitivity of Holonomy Systems. Ann. of Math., Vol. 76, 1962, p. 213 à 234.

SUMMARY

On a riemannian manifold, the first eigenvalue λ_1 of the Laplace-operator Δ satisfies $\lambda_1 \geq nk_o$, where $(n-1)k_o$ is the lower bound of Ricci-curvature. The equality $\lambda_1 = nk_o$ characterizes the canonical sphere. Sections 1 and 4 contain a new proof of this theorem. More generally, if (E_p) is the differential equation satisfied by the $p^{\underline{th}}$ eigenfunctions of Δ on the canonical sphere, the existence of a solution of (E_p) (for at least one p) characterizes the canonical sphere. Section 2 gives more precise estimates on the Spectrum of Δ. In chapter 3, by making a variation of the equation (E_1), we prove that, if λ_1 is not too far from $n.k_o$, the manifold is homeomorphic to S^n.

Sylvestre GALLOT
Laboratoire associé au C.N.R.S
n° 212
U.E.R de Mathématiques
Université PARIS VII

Adresse actuelle :
UNIVERSITE DE SAVOIE
Faculté des Sciences et des
Techniques
Service de Mathématiques
BP 1104
73011 CHAMBERY CEDEX