ALAIN LOUVEAU

Ensembles analytiques et boréliens dans les espaces produits

Astérisque, tome 78 (1980)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__78__1_0>

INTRODUCTION

Cet article a pour origine des résultats de l'auteur concernant les ensembles analytiques et boréliens, dans les espaces produits de deux espaces Polonais, dont les coupes sont d'une classe de Borel donnée. Des résultats typiques concernant ces ensembles, établis dans Louveau [4], sont les suivants : Soient X et Y deux espaces Polonais, et B un borélien de l'espace X x Y. L'ensemble des points y de Y pour lesquels la coupe $B_y = \{ x : (x,y) \in B \}$ est de classe ξ - additive (resp. multiplicative) est un ensemble coanalytique dans Y. Si toutes les coupes de l'ensemble B sont de classe $\xi + 1$ - additive, B est la réunion d'une suite de boréliens de X x Y dont les coupes sont de classe ξ - multiplicative. Pour établir ces résultats, nous avons introduit une méthode nouvelle provenant de la Théorie descriptive effective des ensembles. Cette méthode, loin d'être particulière au problème des ensembles à coupes de classe de Borel donnée, est en fait très générale. Elle permet, pour de nombreuses propriétés naturelles sur les coupes, d'obtenir des résultats, analogues à ceux indiqués plus haut, pour la famille des parties boréliennes des espaces produits dont les coupes jouissent d'une de ces propriétés. De plus, en permettant de mieux comprendre les phénomènes, cette méthode nous a permis de dégager un cadre de référence adéquat pour élaborer une théorie systématique des ensembles analytiques et boréliens dans les espaces produits. C'est ce double aspect d'une théorie générale et systématique d'une part, et de résultats nouveaux étendant ceux obtenus pour les classes de Borel d'autre part, que nous allons développer ici.

La considération d'ensembles dont les coupes jouissent d'une propriété fixée à l'avance n'est pas neuve en Théorie descriptive des ensembles. On la trouve au tout début de cette théorie, soit comme méthode de génération des ensembles analytiques (cribles de Lusin), soit pour résoudre le problème des fonctions implicites (étude des boréliens à coupes dénombrables). Au cours des recherches ultérieures, le nombre de propriétés sur les coupes envisagées s'est accru, et il existe maintenant une littérature importante sur le sujet. Cependant, les tentatives de systématisation n'ont été que partielles, probablement par manque d'outils généraux pour attaquer ces problèmes. Avant de préciser nos résultats nous allons essayer de dégager les thèmes de recherche et les problèmes abordés par les différents auteurs.

Soient donc X un espace Polonais, et Φ une famille de parties de X (celles qui jouissent de la propriété particulière que nous voulons étudier). Considérons d'autre part un espace Polonais auxiliaire Y.

Le premier problème étudié est celui de la complexité de la famille Φ (ou pour être plus précis, des Boréliens de la famille Φ), complexité que l'on peut mesurer de la manière suivante : A chaque borélien B de l'espace X x Y, nous associons l'ensemble H_B des points y de l'espace Y pour lesquels la coupe B_Y est élément de Φ. La complexité de Φ est alors mesurée par la complexité de l'ensemble H_B. Les familles qui vont nous intéresser dans ce travail sont celles pour lesquelles l'ensemble H_B est coanalytique, quel que soit le borélien B. Historiquement, de nombreux auteurs ont préféré considérer le complémentaire de l'ensemble H_B. Notons $\pi_Y^{\Phi}(B) = Y - H_B$ ce complémentaire, par analogie avec le cas où $\Phi = \{\emptyset\}$, et où π_Y^{Φ} n'est autre que la projection π_Y sur Y. L'opération π_Y^{Φ} ainsi définie, qui transforme les boréliens de X x Y en parties de Y, peut être appelée le crible généralisé relatif à Φ , le crible de Lusin en étant un cas particulier, où X est l'espace $\mathbb{R}$ et Φ est la famille des parties de $\mathbb{R}$ bien ordonnées par l'ordre canonique. Les familles Φ qui vont nous intéresser sont donc celles pour lesquelles le crible généralisé transforme les boréliens en analytiques. Un problème, connexe au précédent, est celui de la génération de tous les ensembles analytiques de Y à partir des boréliens de $X \times Y$ par l'opération de crible généralisé relatif à Φ. La solution positive apportée à ce problème dans le cas du crible de Lusin (cf Lusin [1]) est à l'origine de la décomposition des ensembles coanalytiques en leurs constituantes, et de l'étude des propriétés structurelles de ces ensembles.

Un second thème d'étude concerne les problèmes de séparation. Grossièrement, il s'agit de relier les ensembles analytiques à coupes dans Φ aux boréliens ayant la même propriété. La propriété généralement envisagée est la suivante : Soient A^1 un ensemble analytique de l'espace X x Y dont les coupes sont dans Φ , et A^2 un autre ensemble analytique de l'espace X x Y, disjoint de l'ensemble A^1. Peut-on séparer A^1 de A^2 par un borélien B de X x Y à coupes dans Φ, c'est-à-dire trouver un borélien B à coupes dans Φ qui contienne A^1 et soit disjoint de A^2 ? Nous appellerons cette propriété de Φ la propriété d'approximation, puisque cette propriété exprime que les analytiques à coupes dans Φ ont "beaucoup" d'approximations boréliennes qui sont aussi à coupes dans Φ.

Cette façon d'envisager le problème de la séparation est particulièrement bien adaptée au cas où la famille Φ est héréditaire, c'est-à-dire si toute sous-partie d'un élément de Φ est dans Φ (et on peut voir que dans ce cas la propriété d'approximation se réduit au cas particulier où on fait $A^2 = \phi$ dans la définition précédente). Cependant, cette propriété est très asymétrique et lorsque Φ n'est pas héréditaire, il est préférable d'étudier une autre propriété de séparation, qui porte vraiment sur les couples d'analytiques, et que nous appelons propriété de biséparation : Soient A^1 et A^2 deux ensembles analytiques de l'espace $X \times Y$, tels que pour chaque point y de Y, la coupe A^1_y est séparable de la coupe A^2_y par un élément de Φ . Est-il possible de séparer l'ensemble A^1 de l'ensemble A^2 par un borélien B à coupes dans Φ ? Il est facile de vérifier que cette propriété de biséparation est plus forte que la propriété d'approximation, et lui est équivalente dans le cas d'une famille Φ héréditaire. De plus, la propriété de biséparation est symétrique au sens suivant : Si une famille Φ jouit de cette propriété, la famille Φ_c des complémentaires des éléments de Φ en jouit aussi.

Un troisième problème est celui de la commutativité avec les opérations ensemblistes. Considérons une opération ensembliste f. Suivant une notation classique, nous noterons Φ_f la famille des parties de l'espace X qui sont obtenues par l'opération f à partir d'éléments de la famille Φ . Ainsi Φ_c correspond à l'opération c de passage au complémentaire, Φ_σ à l'opération σ de réunion dénombrable, etc ... Le problème de commutativité , sous sa forme générale, peut alors s'énoncer : Si B est un ensemble borélien dans $X \times Y$ dont les coupes sont éléments de Φ_f , est-ce que B peut être obtenu comme le résultat de l'opération f effectuée sur les boréliens de $X \times Y$ à coupes dans Φ ? Dans la suite de ce travail nous étudierons le cas particulier de ce problème qui concerne l'opération de réunion dénombrable, c'est-à-dire : Si B est un borélien de $X \times Y$ à coupes dans Φ_σ , est-ce que B est la réunion dénombrable de boréliens à coupes dans Φ ?

Il reste un quatrième grand type de problèmes concernant les boréliens des espaces produits. Il s'agit des problèmes d'uniformisation (ou de sélection) par des fonctions boréliennes. Nous n'aborderons pas ces problèmes dans ce travail, car ils sont d'un esprit assez différent et relèvent d'autres techniques. D'ailleurs, on ne sait résoudre positivement ces problèmes que pour un petit nombre de familles, comme la famille des ensembles dénombrables, la famille des compacts, la famille des ensembles K_σ, la famille des ensembles de mesure de Lebesgue strictement positive ou la famille des ensembles non maigres. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Dellacherie [1] pour une discussion de ces problèmes.

Ces différents thèmes d'étude étant précisés, il s'agit de trouver des critères sur la famille Φ permettant de résoudre positivement l'un ou l'autre des problèmes envisagés. De tels critères ont été avancés par plusieurs auteurs, principalement Dellacherie [2] pour le problème de la complexité, Cenzer et Mauldin [1] et Burgess [1] pour le problème de l'approximation, et Hillard [1], pour le problème de la commutativité avec la réunion dénombrable. Notre travail est d'un esprit différent : Nous allons considérer globalement la classe de toutes les familles pour lesquelles les trois problèmes ont une solution, et étudier les propriétés de clôture de cette classe par les opérations ensemblistes usuelles sur les familles.

Nous étudierons en particulier :
- le passage $\Phi \mapsto \Phi_c$ à la famille des complémentaires
- le passage $\Phi \mapsto \Phi_\sigma$ à la famille des unions dénombrables (et plus généralement aux classes de la hiérarchie borélienne, Φ_σ, $\Phi_{\sigma c}$, $\Phi_{\sigma c \sigma}$, etc, construite au-dessus de Φ).
- les passages $(\Phi_n) \mapsto \bigcap_n \Phi_n$ et $(\Phi_n) \mapsto \bigcup_n \Phi_n$ d'une suite dénombrable de familles à leur intersection ou à leur réunion.
- le passage d'une famille Φ (dans un espace X) à la famille $s(\Phi)$ des ensembles à coupes dans Φ (dans un espace produit X x Y).
- le passage de deux familles Φ_1 et Φ_2 (dans des espaces respectifs X_1 et X_2) à la famille $\Phi_1 \times \Phi_2$ des rectangles à côtés dans Φ_1 et Φ_2 (dans l'espace $X_1 \times X_2$).

Ces opérations sur les familles sont étudiées dans le chapitre 2. Le coeur de ce chapitre est consacré à l'étude de l'opération $\Phi \mapsto \Phi_\sigma$. Plus précisément, nous introduisons une condition suffisante concernant la famille Φ pour que d'une part Φ ait la propriété de commutativité avec la réunion dénombrable, et que d'autre part on puisse résoudre pour Φ_σ les problèmes de complexité et de biséparation. Ceci conduit à la notion centrale de <u>famille régulière</u>. Nous étudions également les propriétés de clôture de la classe des familles régulières, et prouvons en particulier que cette classe est close par l'opération $\Phi \mapsto \Phi_{\sigma c}$. Ces résultats permettent, à partir de la connaissance de familles régulières primaires, de construire un très grand nombre de familles Φ pour lesquelles une théorie complète peut être faite.

Le chapitre 3 est consacré à la recherche de telles familles régulières primaires, et donc aux applications des résultats du chapitre 2. Pour cela, nous faisons un tour d'horizon des différentes familles déjà étudiées. Le fait marquant est que la plupart de ces familles entrent dans la classe des familles régulières. Par suite ceci nous permet à la fois de donner des démonstrations (souvent très différentes des démonstrations originales) pour de nombreux résultats antérieurs, et, en utilisant les résultats du chapitre 2, de clôture par les opérations ensemblistes sur les familles, de faire rentrer dans la théorie un grand nombre de nouvelles familles.

A la fin du chapitre 3, nous essayons d'indiquer sur des exemples les limitations de notre théorie générale. Certaines limitations proviennent de la méthode utilisée ; mais, ce qui est plus surprenant puisqu'il s'agit de problèmes concernant les ensembles analytiques et boréliens, d'autres limitations sont inhérentes à la théorie des ensembles, puisque certains des problèmes que nous avons considérés s'avèrent indécidables dans le cadre de la théorie des ensembles classique . Les phénomènes d'indépendance ainsi découverts ont leur intérêt propre.

Deux appendices sont consacrés à des généralisations possibles de nos résultats. Dans le premier, l'espace polonais auxiliaire Y est remplacé par un espace mesuré abstrait. La plupart de nos résultats se généralisent sans difficulté, par une technique de transfert, à ce cadre. Dans le second appendice, nous indiquons brièvement quelques extensions aux autres niveaux de la hiérarchie projective de Lusin. Même à l'aide d'axiomes supplémentaires très puissants, en l'occurence des axiomes de détermination de jeux, les résultats présentés sont très partiels, et laissent ouverts des problèmes intéressants et probablement difficiles.

Quelques commentaires historiques et une bibliographie complètent ce travail.

Il nous reste à présenter le contenu du premier chapitre. En un sens, ce chapitre est très distinct des chapitres suivants, puisqu'il expose un certain nombre de résultats, la plupart bien connus, de la Théorie descriptive effective des ensembles, sans référence aux problèmes dont nous avons parlé jusqu'ici. Mais d'un autre point de vue, il s'agit du chapitre fondamental, car, même si l'ensemble de nos résultats concernant les analytiques et les boréliens des espaces produits sont compréhensibles indépendamment des notions introduites dans le premier chapitre, ces résultats ne sont établis que comme corollaires de résultats de type effectif. Et dans un grand nombre de cas, nous ne savons pas faire autrement, c'est-à-dire qu'on ne connaît pas de démonstration n'utilisant que les outils de la théorie descriptive "classique". C'est en particulier le cas lorsque Φ est une classe donnée de la hiérarchie borélienne.

INTRODUCTION

Dans ce premier chapitre, nous n'avons pas essayé de donner une vue d'ensemble de la théorie descriptive effective, même pour le premier niveau de la hiérarchie projective. Nous nous sommes restreints aux résultats nécessaires pour les chapitres suivants. Le lecteur intéressé par les développements de cette théorie peut consulter les traités de Kechris [1], et de Moschovakis [1].

Comme d'habitude en théorie descriptive, nos résultats sont établis dans le cadre de la théorie des ensembles de Zermelo Frenkael, ZF , augmentée de l'axiome du choix dépendant. Lorsqu'une démonstration nécessite un axiome supplémentaire, y compris l'axiome du choix, celui-ci est indiqué explicitement en tête de l'énoncé.

Le résultat principal de cet article et certains corollaires ont été annoncés dans la note de Louveau [6]. Nous tenons à remercier ici les membres de l'équipe de Logique de Paris VII, et en particulier K.Mc Aloon et J. Stern, pour l'infatigable intérêt qu'ils ont porté à ce travail tout au long de son évolution, A.S. Kechris et J.E. Jayne pour de fructueuses discussions pendant leur séjour à Paris, et B.Weglorz, Z. Adamowicz et l'Académie des Sciences de Pologne qui m'ont permis, au cours d'un séjour à Varsovie et à Wrocław,et grâce à leur généreuse hospitalité, d'en mettre au point la version définitive.

CHAPITRE 1

RAPPELS DE THÉORIE DESCRIPTIVE EFFECTIVE

Dans la suite, les notations et la terminologie que nous adoptons sont celles du livre de Y. N. Moschovakis [1]. En particulier, ω désigne l'ensemble des entiers, désignés par les lettres n, m, p, q. Les lettres α, β, γ, sont réservées aux éléments de l'espace de Baire ω^ω, c'est-à-dire aux suites infinies d'entiers, généralement appelées "réels" par abus de langage. Les lettres f, g, h désignent des fonctions, les lettres X, Y, Z des espaces ambiants, dont les éléments sont notés x, y, z. Les lettres A, B, C, D, E, F, G etc... désignent des sous-ensembles des espaces ambiants, et les lettres Φ, Ψ des familles de tels sous-ensembles. Enfin, ξ, η, λ, désignent des ordinaux.

La notion fondamentale de la théorie descriptive effective est celle de fonction <u>récursive</u> d'un espace ω^n dans ω. Intuitivement, une fonction f de ω^n dans ω est récursive si il est possible de la calculer au moyen d'une machine. Une définition mathématique possible est la suivante : La classe des fonctions récursives est la plus petite classe de fonctions des espaces ω^n dans ω qui contient les <u>fonctions constantes</u>, <u>les projections</u> et la <u>fonction successeur</u> S définie par $S(n) = n + 1$, et qui est close par les opérations de <u>composition</u>, de <u>définition par induction</u> (si $g : \omega^{n-1} \to \omega$ et $h : \omega^{n+1} \to \omega$ sont récursives, la fonction $f : \omega^n \to \omega$ définie par $f(x_1,\dots,x_{n-1},0) = g(x_1,\dots,x_{n-1})$ et $f(x_1,\dots,x_{n-1},n+1) = h(x_1,\dots,x_{n-1},n,f(x_1,\dots,x_{n-1},n))$ l'est aussi), et de <u>minimalisation</u> (si $g : \omega^{n+1} \to \omega$ est récursive, et pour chaque n-uple $(x_1,\dots,x_n)$ il existe un entier k tel que $g(x_1,\dots,x_n,k) = 0$, la fonction $f : \omega^n \to \omega$ qui à chaque n-uple $(x_1,\dots,x_n)$ associe le plus petit tel k est une fonction récursive). Un ensemble $A \subset \omega^n$ est récursif si sa fonction caractéristique est récursive.

Il est clair que ces considérations définissent une famille dénombrable d'ensembles et de fonctions dans les espaces ω^n. De plus, on peut voir sans difficulté que cette famille contient les opérations et les fonctions usuelles de l'arithmétique, addition, multiplication, exponentiation, recherche des diviseurs premiers, etc... En particulier il existe des bijections récursives entre chaque espace ω^n et ω. Nous en fixons une pour chaque espace, notée de manière ambigüe $<.,.,.,.>$, l'inverse étant notée $(.)_0$, $(.)_1$ ... De la même façon, nous fixons un sous-ensemble récursif de ω, Seq, et une fonction bijective $s \to \bar{s}$ de l'espace $\omega^{<\omega}$ des suites finies d'entiers sur Seq, de telle façon que les ensembles et fonctions suivantes soient récursifs.

- la fonction longueur $\qquad lg(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin \text{Seq} \\ \text{longueur de } s & \text{si } n = \bar{s} \end{cases}$

- les fonctions coordonnées $\qquad (n)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin \text{Seq ou } i \geq lg(n) \\ s(i) & \text{si } n = \bar{s} \text{ et } i < lg(n) \end{cases}$

Nous noterons également $<.,.>$ la bijection de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ sur ω^ω définie par $<\alpha,\beta>(2n) = \alpha(n)$ et $<\alpha,\beta>(2n+1) = \beta(n)$; de même nous noterons $(.)_i$ la famille d'applications de ω^ω dans ω^ω définies par $(\alpha)_i(n) = \alpha(<i,n>)$, qui définissent une bijection entre ω^ω et $(\omega^\omega)^\omega$. $\underline{0}$ désignera la fonction identiquement nulle de ω dans ω.

On définit de manière analogue la notion de fonction <u>récursive en α</u> où α est un réel : C'est la plus petite classe ayant les propriétés précédentes, et de plus contenant α. Intuitivement, cette notion correspond à celle de fonction calculable par une machine ayant l'oracle α en mémoire.

Ayant à sa disposition la notion de fonction récursive, on peut définir la notion d'espace Polonais récursivement présenté, en abrégé <u>espace r.p.</u>

<u>DÉFINITION 1.1 Un espace Polonais récursivement présenté est la donnée d'un triplet</u> $<X,(r_n)_{n\in\omega},d>$, <u>où</u> X <u>est un espace Polonais</u>, $(r_n)_{n\in\omega}$ <u>est une suite de points de</u> X <u>qui est dense dans</u> X, d <u>est une distance sur</u> X, <u>compatible</u>

avec sa topologie, qui rend X métrique complet, et d et la suite $(r_n)_{n \in \omega}$ sont tels que les deux relations

$$d(r_n, r_m) \leqslant \frac{p}{q+1} \quad \text{et} \quad d(r_n, r_m) < \frac{p}{q+1}$$

sont récursives (dans ω^4).

Il faut remarquer que d'une part tous les espaces Polonais n'admettent pas nécessairement une présentation récursive, et d'autre part que le même espace peut en admettre plusieurs. Dans la suite, la présentation récursive de l'espace X sera toujours sous-entendue. Aussi faisons nous la convention que pour les espaces "classiques", la présentation récursive est toujours la suivante :

Pour ω^ω , $r_n = n$ et d est définie par $d(n,n) = 0$, $d(n,m) = 1$ si $n \neq m$.

Pour $\mathbb{R}$, d est la distance usuelle, $r_n = \dfrac{(n)_0}{(n)_1 + 1} . (-1)^{(n)_2}$

Pour ω^ω , d est la distance usuelle, définie par $d(\alpha,\alpha) = 0$ et $d(\alpha,\beta) = 2^{-\inf\{n \,:\, \alpha(n) \neq \beta(n)\}}$ si $\alpha \neq \beta$, et r_n est défini par $r_n = \underline{0}$ si $n \notin \mathrm{Seq}$, $r_n(m) = (n)_m$ si $n \in \mathrm{Seq}$.

De même, un produit $X_0 \times X_1$ d'espaces récursivement présentés $\langle X_0 , (r^0_n)_{n \in \omega} , d_0 \rangle$ et $\langle X_1 , (r^1_n)_{n \in \omega} , d_1 \rangle$ est toujours supposé récursivement présenté par la présentation suivante :

$$r_n = (r^0_{(n)_0}, r^1_{(n)_1}) \ , \quad d((x_0,x_1),(y_0,y_1)) = \sup(d_0(x_0,y_0), d_1(x_1,y_1)) \ .$$

DÉFINITION 1.2 Si X est un espace r.p., la base canonique de X est la suite d'ouverts élémentaires $(N(n,X))_{n \in \omega}$ définie par :

$$N(n,X) = \{x \in X : d(x, r_{(n)_0}) < \frac{(n)_1}{(n)_2 + 1}\} \ .$$

A partir de cette base canonique, on construit les hiérarchies effectives de manière très analogue à la construction des hiérarchies classiques, borélienne et projective. La différence essentielle tient dans la non-utilisation de l'opération de réunion dénombrable, qui n'est pas effective, et qui est remplacée par l'opération, notée $\exists^\omega$, de projection "le long" de ω : si A est un sous-ensemble de $X \times \omega$, $\exists^\omega A$ est défini par $\exists^\omega A = \{x \in X : \exists n \in \omega \ (x,n) \in A\}$.

DÉFINITION 1.3 Un sous-ensemble A d'un espace r.p. X est semi-récursif (Σ^0_1) s'il existe une fonction récursive f de ω dans ω telle que $A = \bigcup_n N(f(n),X)$. A partir de la classe Σ^0_1 des ensembles semi-récursifs, on construit par récurrence les classes de la hiérarchie de Kleene par :

- Un ensemble A est Π^0_n si $X - A$ est Σ^0_n.
- Un ensemble $A \subset X$ est Σ^0_{n+1} s'il existe $B \subset X \times \omega$, $B \in \Pi^0_n$ tel que $A = \exists^\omega B$. et les classes de la hiérarchie projective effective par :
- Un ensemble A est Σ^1_1 s'il existe un ensemble Π^0_1 $B \subset X \times \omega^\omega$ tel que
$$A = \exists^{\omega^\omega} B = \{x \in X : \exists \alpha \in \omega^\omega (x,\alpha) \in B\} .$$
- Un ensemble A est Π^1_n si $X - A$ est Σ^1_n, et est Σ^1_{n+1} s'il existe $B \subset X \times \omega^\omega$, $B \in \Pi^1_n$ tel que $A = \exists \omega^\omega B$.
- Les classes ambigües Δ^0_n et Δ^1_n sont définies par
$$\Delta^0_n = \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n \quad \text{et} \quad \Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n .$$

Si x_0 est un point d'un espace r.p. X_0, les classes relativisées à x_0 sont définies, dans tout espace r.p. X, par :

$A \subset X$ est $\Sigma^0_n(x_0)$ (resp^t $\Sigma^1_n(x_0)$, $\Pi^0_n(x_0)$, $\Pi^1_n(x_0)$) s'il existe $B \subset X \times X_0$, $B \in \Sigma^0_n$ (resp^t Σ^1_n, Π^0_n, Π^1_n) tel que $A = B_{x_0} = \{x \in X : (x,x_0) \in B\}$. De même $\Delta^0_n(x_0) = \Sigma^0_n(x_0) \cap \Pi^0_n(x_0)$ et $\Delta^1_n(x_0) = \Sigma^1_n(x_0) \cap \Pi^1_n(x_0)$.

Enfin les classes grasses $\utilde{\Sigma}^0_n$, $\utilde{\Pi}^0_n$, $\utilde{\Delta}^0_n$ et $\utilde{\Sigma}^1_n$, $\utilde{\Pi}^1_n$, $\utilde{\Delta}^1_n$ sont définies par

$$\utilde{\Sigma}^0_n = \bigcup_{\alpha\in\omega^\omega} \Sigma^0_n(\alpha) , \quad \utilde{\Pi}^0_n = \bigcup_{\alpha\in\omega^\omega} \Pi^0_n(\alpha) , \quad \utilde{\Delta}^0_n = \utilde{\Sigma}^0_n \cap \utilde{\Pi}^0_n \quad \text{et}$$

$$\utilde{\Sigma}^1_n = \bigcup_{\alpha\in\omega^\omega} \Sigma^1_n(\alpha) , \quad \utilde{\Pi}^1_n = \bigcup_{\alpha\in\omega^\omega} \Pi^1_n(\alpha) , \quad \utilde{\Delta}^1_n = \utilde{\Sigma}^1_n \cap \utilde{\Pi}^1_n .$$

Cette longue suite de définitions appelle quelques remarques. Il est clair que chaque ensemble semi-récursif, relativisé ou non, est ouvert. Par suite les classes effectives introduites forment des sous-classes dénombrables des classes correspondantes dans les hiérarchies classiques, hiérarchie des boréliens de rang fini et hiérarchie des ensembles projectifs. En fait, on peut montrer que les classes grasses coïncident avec les classes correspondantes des hiérarchies classiques : $\utilde{\Sigma}^0_1$ est la classe des ouverts, $\utilde{\Pi}^0_1$ la classe des fermés, $\utilde{\Sigma}^1_1$ la classe des

analytiques, $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$ des coanalytiques, $\underset{\sim}{\Delta}^1_1$ des boréliens, etc...
Il s'agit d'un résultat très simple, mais très important, puisqu'il permet d'utiliser la théorie effective pour démontrer des résultats sur les hiérarchies classiques. Si l'on veut par exemple démontrer un résultat pour tout ensemble borélien, il suffit de le faire pour tout ensemble $\Delta^1_1(\alpha)$. En fait d'après la similitude entre les classes Δ^1_1 et $\Delta^1_1(\alpha)$, il suffit en général de le démontrer pour les ensembles Δ^1_1 , la démonstration pour les ensembles relativisés étant exactement la même. C'est ce que nous ferons, de manière très libre, dans la suite, laissant au lecteur le soin de relativiser la démonstration (et parfois même l'énoncé).

Jusqu'à maintenant, la théorie descriptive effective copie, pour ainsi dire, la théorie classique. Mais elle s'en sépare en ce sens qu'elle fournit une hiérarchie non triviale des ensembles pour <u>tous</u> les espaces r.p., y compris l'espace ω . C'est cette différence qui donne à la théorie effective ses outils les plus puissants, comme nous allons l'illustrer par les définitions et le théorème fondamental qui suivent .
Soit Γ l'une des classes que nous avons introduites dans les définitions 1.3.

<u>DÉFINITION 1.4</u> a) <u>Soit</u> X <u>un espace récursivement représenté, et</u> x <u>un point de</u> X . <u>Le point</u> x <u>est dit</u> Γ<u>-récursif, (abrégé en</u> $x \in \Gamma$, <u>ce qui est un abus de notations commode, à condition de ne pas confondre</u> $x \in \Gamma$ et $\{x\} \in \Gamma$) si le <u>diagramme</u> D_x <u>de</u> x , <u>défini par</u> $n \in D_x \leftrightarrow x \in N(n,X)$, <u>est dans</u> Γ <u>(comme partie de</u> ω).

b) <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces r.p.,</u> f <u>une fonction partielle de</u> X <u>dans</u> Y , <u>de domaine</u> Domf . <u>La fonction</u> f <u>est dite</u> Γ<u>-récursive si le diagramme</u> D_f <u>de</u> f , <u>défini par</u> $(x,n) \in D_f \leftrightarrow x \in \mathrm{Dom} f \wedge f(x) \in N(n,Y)$ <u>est dans</u> Γ <u>comme partie de</u> $X \times \omega$).

Nous n'utiliserons pratiquement ces définitions que dans deux cas, le cas $\Gamma = \Delta^1_1$ et le cas $\Gamma = \Pi^1_1$ (et leurs classes relativisées).

D'après la définition, les fonctions Δ^1_1-récursives sont l'analogue effectif des fonctions boréliennes. On peut montrer qu'une fonction est Δ^1_1-récursive si et seulement si son domaine est Δ^1_1 et son graphe est Δ^1_1. Cette proposition n'est plus vraie dans le cas des fonctions Π^1_1-récursives : leur graphe est Π^1_1, mais elles ne coïncident pas avec les fonctions de graphe Π^1_1, pas plus que les points Π^1_1-récursifs, dont on peut voir qu'ils coïncident avec les points Δ^1_1-récursifs, ne sont identiques aux singletons Π^1_1. Les fonctions Π^1_1-récursives ne coïncident pas non plus avec les fonctions Δ^1_1-récursives. Cependant :

1- Si f est une fonction à valeurs dans ω, f est Π^1_1-récursive si et seulement si son graphe est Π^1_1.

2- Si f, de X dans Y, a son domaine Δ^1_1 (en particulier si elle est totale), alors f est Π^1_1-récursive si et seulement si elle est Δ^1_1-récursive.

L'analogue, en théorie classique, de la notion de fonction partielle Π^1_1-récursive est la notion (peu étudiée) de fonction partielle de domaine coanalytique, et bianalytique sur son domaine.

L'intérêt de ces notions apparaît dans le théorème suivant (cf. Louveau [2]) :

THÉORÈME 1.5 *Soient X, Y deux espaces récursivement présentés et $A \subset X \times Y$ un ensemble Π^1_1. Alors l'ensemble $B = \{y \in Y : \exists x \in \Delta^1_1(y)\ (x,y) \in A\}$ est un ensemble Π^1_1, et il existe une fonction partielle Π^1_1-récursive f de Y dans X, de domaine B, telle que pour tout $y \in B$, $(f(y),y) \in A$.*

COROLLAIRE 1.6 a) *Si A est Π^1_1 dans $X \times Y$, une condition nécessaire et suffisante pour que A soit uniformisable par une fonction partielle Π^1_1-récursive est que l'ensemble B du théorème précédent coïncide avec la projection de A sur Y.*

b) *Si A est Δ^1_1 dans $X \times Y$, une condition nécessaire et suffisante pour que A soit uniformisable par une fonction partielle Δ^1_1-récursive est que l'ensemble B du théorème précédent coïncide avec la projection de A sur Y, et cette projection est alors Δ^1_1.*

Si on particularise les résultats précédents en prenant pour X l'espace ω (dont tous les points sont Δ^1_1-récursifs) on obtient les énoncés suivants, qui sont les analogues effectifs des différents "principes de séparation" de la théorie classique.

THÉORÈME 1.7 (ω -réduction des ensembles Π^1_1). Si $A \subset \omega \times X$ est un ensemble Π^1_1 , il existe un ensemble Π^1_1 $B \subset A$ tel que si on définit $A_n = \{x \in X : (n,x) \in A\}$, et de même $B_n = \{x \in X : (n,x) \in B\}$, la suite $(A_n)_{n \in \omega}$ est réduite par la suite $(B_n)_{n \in \omega}$,c'est-à-dire que les B_n sont deux à deux disjoints et ont même réunion que les A_n .

En particularisant encore, on obtient le

THÉORÈME 1.8 (Réduction des Π^1_1). Si A_1 , A_2 sont deux ensembles Π^1_1 d'un espace X , il existe deux ensembles Π^1_1 B_1 et B_2 tels que

$$B_1 \subset A_1 \ , \ B_2 \subset A_2 \ , \ B_1 \cap B_2 = \emptyset \ \text{ et } \ B_1 \cup B_2 = A_1 \cup A_2 \ .$$

et le théorème de séparation des ensembles Σ^1_1 :

THÉORÈME 1.9 (Kleene). Si A_1 et A_2 sont deux ensembles Σ^1_1 disjoints dans un espace r.p. X , il existe un ensemble Δ^1_1 B qui sépare A_1 de A_2 , c'est-à-dire tel que $A_1 \subset B$ et $A_2 \cap B = \emptyset$.

Dans la suite nous utiliserons le théorème 1.5 et ses conséquences sans référence particulière. Nous aurons également besoin d'un "bon" codage des ensembles boréliens des espaces récursivement présentés. Pour cela, nous fixons une fois pour toutes pour chaque espace r.p. X un couple $\langle W,C\rangle$ de parties satisfaisant :

(i) W est un sous-ensemble Π^1_1 de $\omega^\omega \times \omega$.

(ii) C est un sous-ensemble Π^1_1 de $X \times \omega^\omega \times \omega$, de projection sur $\omega^\omega \times \omega$ égale à W , et tel que la relation $(\alpha,n) \in W \wedge (x,\alpha,n) \notin C$ est Π^1_1 .

(iii) le couple $\langle W,C\rangle$ est universel au sens suivant : Pour chaque (α,n) , notons $C_{\alpha,n}$ la coupe de C au point (α,n) c'est-à-dire $C_{\alpha,n} = \{x \in X : (x,\alpha,n) \in C\}$. $C_{\alpha,n}$ est l'ensemble borélien codé par (α,n) . Avec ces définitions, pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$ fixé, l'ensemble des $C_{\alpha,n}$, pour n variable tel que $(\alpha,n) \in W$, est exactement l'ensemble des parties $\Delta^1_1(\alpha)$ de X.

L'existence d'un tel couple $\langle W,C \rangle$ se démontre en utilisant le théorème de réduction des ensembles Π^1_1 et de difficiles théorèmes de paramétrisation des classes effectives (cf. Moschovakis [1], chap. 3).

CHAPITRE 2

FAMILLES SÉPARANTES ET FAMILLES RÉGULIÈRES

Ce chapitre est consacré à l'étude des problèmes indiqués dans l'introduction, et principalement de la notion centrale de famille régulière. Cependant, la discussion des problèmes dans l'introduction se plaçait dans le cadre de la théorie classique , aussi nous devons d'abord traduire ces problèmes dans le cadre de la théorie descriptive effective.

Dans la suite, X est un espace r.p. fixé, et Φ est une famille de parties de X. La définition qui suit précise, dans le cadre de la théorie effective, la classe des familles pour lesquelles le problème du calcul de la complexité et le problème de biséparation sont résolus positivement. Il faut noter que le passage de la théorie classique à la théorie effective permet d'éliminer de nos considérations l'espace polonais auxiliaire Y .

DÉFINITION 2.1. <u>Une famille</u> Φ <u>de parties de l'espace r.p.</u> X <u>est dite séparante, avec paramètre</u> $\alpha_o \in \omega^\omega$, <u>si elle satisfait les deux propriétés suivantes</u> :

(i) <u>L'ensemble</u> $W_\Phi = \{(\alpha,n) \in W : C_{\alpha,n} \in \Phi\}$ <u>est un ensemble</u> $\Pi^1_1(\alpha_0)$.

(ii) <u>Si</u> A_1 <u>et</u> A_2 <u>sont deux ensembles</u> $\Sigma^1_1(\alpha)$ <u>de</u> X , <u>et s'il existe un ensemble</u> B <u>de</u> Φ <u>qui sépare</u> A_1 <u>de</u> A_2 , <u>c'est-à-dire tel que</u> $A_1 \subset B$ et $A_2 \cap B = \emptyset$, <u>alors il existe un tel ensemble séparateur qui est dans</u> Φ <u>et est</u> $\Delta^1_1(<\alpha_o ,\alpha>)$.

La condition (i) de cette définition correspond au calcul de la complexité. Cette condition dit intuitivement que la famille des boréliens de Φ peut être codée, de manière très uniforme, de façon coanalytique.

La condition (ii) correspond clairement au problème de la biséparation. Le paramètre α_o que nous avons introduit n'est là que pour donner le plus de généralité possible à la définition. En fait, comme nous le verrons sur les exemples du chapitre 3, la plupart des propriétés "naturelles" que nous envisagerons sur les parties d'un espace X conduisent à des familles qui sont séparantes sans paramètre. Par ailleurs, ce paramètre ne simplifie ni ne complique les considérations ultérieures (hormis sans doute une certaine lourdeur dans les notations).

Avant de passer à l'étude des familles séparantes, nous allons justifier notre définition en reliant cette notion aux problèmes évoqués dans l'introduction.

PROPOSITION 2.2. *Soit* X *un espace r.p.,* Φ *une famille séparante de parties de* X *. Alors pour chaque espace polonais auxiliaire* Y *, on a les propriétés suivantes:*

(i) *Calcul de la complexité. Si* B *est un borélien de* $X \times Y$ *, l'ensemble* H *des points* y *de* Y *pour lesquels la coupe* B_y *est élément de* Φ *est un ensemble coanalytique. De plus, si* Φ *est héréditaire, il en est de même si* B *est seulement supposé analytique.*

(ii) *Propriété de biséparation. Si* A^1 *et* A^2 *sont deux ensembles analytiques de* $X \times Y$ *, et pour chaque* $y \in Y$ *la coupe* A^1_y *peut être séparée de la coupe* A^2_y *par un élément de* Φ *, alors il existe un ensemble borélien* $B \subset X \times Y$ *, qui sépare* A^1 *de* A^2 *, et dont les coupes sont dans* Φ .

DÉMONSTRATION Cette démonstration étant un bon exemple de l'utilisation des théorèmes d'uniformisation du chapitre 1, nous allons la donner intégralement. Dans la suite, les démonstrations analogues, de passage d'une propriété effective à une propriété de type classique, seront laissées au lecteur.

Tout d'abord, l'espace polonais Y est boréliennement isomorphe à une partie G_δ de l'espace ω^ω . Ceci nous permet de supposer, sans perte de généralité, que $Y = \omega^\omega$.

Montrons la partie (i). Soit B un borélien de $X \times \omega^\omega$. B est un ensemble $\Delta^1_1(\alpha_1)$ pour un certain $\alpha_1 \in \omega^\omega$, et pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$, la coupe B_α de B est un ensemble $\Delta^1_1(<\alpha_1 ,\alpha>)$. Par suite

$$\alpha \in H \leftrightarrow \exists n \ [(<\alpha_1 ,\alpha>,n) \in W_\Phi \wedge B_\alpha = C_{<\alpha_1,\alpha>,n}] \ .$$

D'après l'hypothèse faite sur la famille Φ , l'ensemble W_Φ est $\Pi^1_1(\alpha_o)$, pour un certain $\alpha_o \in \omega^\omega$. Par suite H est $\Pi^1_1(<\alpha_o , \alpha_1>)$, donc est coanalytique.

Montrons la partie (ii) . Soient donc A^1 et A^2 deux ensembles analytiques satisfaisant les hypothèses. Pour un certain $\alpha_1 \in \omega^\omega$, A^1 et A^2 sont $\Sigma^1_1(\alpha_1)$, et par suite pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$, les coupes A^1_α et A^2_α sont $\Sigma^1_1(<\alpha_1 , \alpha>)$. Par hypothèse, A^1_α est séparable de A^2_α par un élément de Φ . D'après la propriété (ii) des familles séparantes, il existe alors un élément $\Delta^1_1(<\alpha_o , <\alpha_1 , \alpha>>)$ de Φ qui sépare A^1_α de A^2_α . Considérons alors l'ensemble R suivant :

$$(n,\alpha) \in R \leftrightarrow (<\alpha_o , <\alpha_1 , \alpha>>, n) \in W_\Phi \wedge A^1_\alpha \subset C_{<\alpha_o , <\alpha_1 , \alpha>>, n} \wedge$$
$$\wedge A^2_\alpha \cap C_{<\alpha_o , <\alpha_1 , \alpha>>, n} = \emptyset .$$

Les considérations qui précèdent entrainent que pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$, il existe un n tel que $(n,\alpha) \in R$. Maintenant R est un ensemble $\Pi^1_1(<\alpha_o , \alpha_1>)$ et par les théorèmes d'uniformisation, nous en déduisons l'existence d'une fonction $\Delta^1_1(<\alpha_o , \alpha_1>)$-récursive totale $f : \omega^\omega \to \omega$ telle que pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$ on ait $(f(\alpha),\alpha) \in R$.

Posons alors $$(x,\alpha) \in B \leftrightarrow x \in C_{<\alpha_o , <\alpha_1 , \alpha>>, f(\alpha)} .$$

L'ensemble B ainsi défini est un ensemble $\Delta^1_1(<\alpha_o , \alpha_1>)$, donc borélien, et d'après le choix de la fonction f , B est à coupes dans Φ et sépare A^1 de A^2 .

Pour terminer la démonstration il reste à démontrer la seconde partie de (i). Supposons Φ héréditaire, et soit $A \subset X \times \omega^\omega$ un ensemble analytique. Nous voulons prouver que $H = \{\alpha \in \omega^\omega : A_\alpha \in \Phi\}$ est coanalytique. Pour un certain $\alpha_1 \in \omega^\omega$, A est $\Sigma^1_1(\alpha_1)$ et donc chaque coupe A_α est $\Sigma^1_1(<\alpha_1 , \alpha>)$. Si α est élément de H, A_α est élément de Φ , donc est séparable de l'ensemble vide par un élément de Φ . Par suite, par séparation, il existe un élément $\Delta^1_1(<\alpha_o , <\alpha_1 , \alpha>>)$ dans Φ qui contient A_α . Mais d'après l'hérédité de Φ , si réciproquement il existe un tel élément contenant A_α , alors A_α est dans Φ , donc $\alpha \in H$. Ceci fournit une définition de l'ensemble H qui est clairement $\Pi^1_1(<\alpha_o , \alpha_1>)$, donc coanalytique :

$$\alpha \in H \leftrightarrow \exists n\,[(<\alpha_o, <\alpha_1, \alpha>>, n) \in W_\Phi \wedge A_\alpha = C_{<\alpha_o, <\alpha_1, \alpha>>, n}] \,.$$

⊣

Il faut remarquer que dans cette démonstration, nous n'avons pas utilisé toute la puissance des théorèmes d'uniformisation du chapitre 1. Par contre, celle-ci sera nécessaire lorsque nous discuterons de l'extension des résultats de cette proposition au cadre plus général d'un espace Y mesuré abstrait.

Au vu de cette proposition, le problème que nous étudions est la recherche d'une condition suffisante sur la famille Φ pour que la famille Φ_σ des unions dénombrables d'éléments de Φ soit séparante. Avant d'introduire une telle condition, notons quelques propriétés simples de clôture de la classe des familles séparantes:

PROPOSITION 2.3. La classe des familles séparantes est close par les opérations suivantes :

(i) le passage d'une famille Φ à la famille Φ_c des complémentaires d'éléments de Φ.

(ii) le passage d'une suite $(\Phi_n)_{n\in\omega}$ de familles à leur union $\Phi = \bigcup_n \Phi_n$.

(iii) le passage d'une famille Φ de parties d'un espace X à la famille $s(\Phi)$ formée des parties d'un espace $Y \times X$, où Y est un espace r.p., dont les coupes sont dans Φ.

(iv) la classe des familles séparantes n'est pas close par intersection, même de deux familles. Cependant, si $(\Phi_n)_{n\in\omega}$ est une suite de familles séparantes héréditaires, $\Phi = \bigcap_n \Phi_n$ est aussi séparante héréditaire.

DÉMONSTRATION.

(i) Soit Φ séparante avec paramètre α_o.

$$\begin{aligned}(\alpha,n) \in W_{\Phi_c} &\leftrightarrow (\alpha,n) \in W \wedge C_{\alpha,n} \in \Phi_c \,.\\ &\leftrightarrow (\alpha,n) \in W \wedge X - C_{\alpha,n} \in \Phi \,.\\ &\leftrightarrow (\alpha,n) \in W \wedge \exists m\ [(\alpha,m) \in W_\Phi \wedge C_{\alpha,m} = X - C_{\alpha,n}] \,.\end{aligned}$$

Par suite $W_{\Phi_c} \in \Pi^1_1(\alpha_o)$. Par ailleurs la condition (ii) des familles séparantes est clairement symétrique. Donc Φ_c est séparante, avec le même paramètre α_o

que Φ .

(ii) Soit $\Phi = \bigcup_n \Phi_n$ avec Φ_n séparante. L'ensemble $W_\Phi = \bigcup_n W_{\Phi_n}$ est $\Pi^1_1(\beta_o)$, pour un β_o que l'on peut supposer coder les paramètres des Φ_n . La condition (ii) des familles séparantes est alors immédiate.

(iii) Soit Φ une famille séparante de l'espace r.p. X , et soit Y un autre espace r.p.. L'espace Y est alors Δ^1_1-isomorphe à une partie Δ^1_1 de l'espace ω^ω (Moschovakis [1], § 4D).

La démonstration de la proposition 2.2 montre alors exactement que la famille $s(\Phi)$ satisfait la condition (ii) des familles séparantes avec le même paramètre α_o que Φ (Pour être tout à fait précis, la proposition 2.2 est légèrement plus forte, car le fait que la séparation coupe par coupe entraîne la séparation par un élément de $s(\Phi)$ nécessite a priori l'axiome du choix). Il reste à établir la condition (i) des familles séparantes. Pour cela, soit $Z = Y \times X$, et notons $\langle W^X, C^X\rangle$ et $\langle W^Z, C^Z\rangle$ les codages des boréliens de X et de Z respectivement.

On a alors :

$$\begin{aligned}(\alpha,n) \in W^Z_{s(\Phi)} &\leftrightarrow (\alpha,n) \in W^Z \wedge C^Z_{\alpha,n} \in s(\Phi) .\\ &\leftrightarrow (\alpha,n) \in W^Z \wedge \forall y \in Y (C^Z_{\alpha,n})_y \in \Phi .\\ &\leftrightarrow (\alpha,n) \in W^Z \wedge \\ &\quad \wedge \forall y \in Y \exists m \exists \beta \in \Delta^1_1(y) \ [(\beta,m) \in W^X_\Phi \wedge (C^Z_{\alpha,n})_y = C^X_{\beta,m}] .\end{aligned}$$

(La troisième équivalence est justifiée par le fait que l'on peut prendre pour β le point $f(y)$, où f est n'importe quel Δ^1_1-isomorphisme de Y dans ω^ω).

Ceci montre que $W^Z_{s(\Phi)}$ est $\Pi^1_1(\alpha_o)$ si W^X_Φ l'est.

(iv) Nous allons maintenant montrer que l'intersection de deux familles séparantes n'est pas nécessairement séparante.

Pour cela introduisons l'ensemble $WO \subset \omega^\omega$ <u>des codes de bons ordres</u>. C'est l'ensemble des réels α tels que la relation R_α sur ω^2 définie par $(n,m) \in R_\alpha \leftrightarrow \alpha(\langle n,m\rangle) = 0$ bien ordonne ω . Cet ensemble est un ensemble Π^1_1 non borélien de ω^ω . Pour chaque $\alpha \in WO$, notons $|\alpha|$ l'ordinal du type d'ordre de R_α et soit $WO_{|\alpha|}$ l'ensemble $WO_{|\alpha|} = \{\beta \in WO : |\beta| < |\alpha|\}$. Chaque $WO_{|\alpha|}$ est $\Delta^1_1(\alpha)$, et ceci uniformément, au sens suivant :

Les deux relations $\alpha \in WO \wedge \beta \in WO_{|\alpha|}$ et $\alpha \in WO \wedge \beta \notin WO_{|\alpha|}$ sont Π^1_1. Soit alors A l'ensemble Σ^1_1, $A = \omega^\omega - WO$, et pour chaque ordinal $\xi < \aleph_1$, B_ξ l'ensemble borélien $B_\xi = \omega^\omega - WO_\xi$. Nous construisons deux familles Φ_0 et Φ_1 de la manière suivante : Φ_0 consiste de A et des ensembles B_ξ pour ξ <u>non limite</u>, tandis que Φ_1 consiste de A et des ensembles B_ξ pour ξ <u>limite</u>. Clairement $\Phi_0 \cap \Phi_1 = \{A\}$ n'est pas séparante, puisque A n'est pas borélien. Pour montrer que Φ_0 et Φ_1 sont séparantes, nous allons utiliser le <u>théorème effectif de la borne</u> (cf Moschovakis [1] § 4B), qui assure que si E est un ensemble $\Sigma^1_1(\alpha)$ contenu dans WO, E est en fait contenu dans $WO_{|\beta|}$ pour un réel $\beta \in WO$ qui est $\Delta^1_1(\alpha)$. On vérifie sans difficulté que les ensembles

$$D_0 = \{\beta \in WO : |\beta| \text{ est successeur}\} \text{ et } D_1 = \{\beta \in WO : |\beta| \text{ est limite}\}$$

sont Π^1_1.

On a alors :

$$\begin{aligned}(\alpha,n) \in W_{\Phi_0} &\leftrightarrow (\alpha,n) \in W \wedge \exists\beta \in D_0\ [C_{\alpha,n} = WO_{|\beta|}] \\ &\leftrightarrow (\alpha,n) \in W \wedge \exists\beta \in \Delta^1_1(\alpha)\ [\beta \in D_0 \wedge C_{\alpha,n} = WO_{|\beta|}] ,\end{aligned}$$

(la seconde équivalence étant obtenue par application du théorème de la borne). Par suite W_{Φ_0} est Π^1_1. De même

$$(\alpha,n) \in W_{\Phi_1} \leftrightarrow (\alpha,n) \in W \wedge \exists\beta \in \Delta^1_1(\alpha)\ [\beta \in D_1 \wedge C_{\alpha,n} = WO_{|\beta|}] ,$$

et par suite W_{Φ_1} est Π^1_1.

Considérons maintenant la condition (ii) des familles séparantes, et montrons qu'elle est vérifiée par Φ_0 (le résultat pour Φ_1 étant analogue). Soient donc A_1 et A_2 deux ensembles $\Sigma^1_1(\alpha)$, tels que A_1 est séparable par un élément de Φ_0 de A_2. Comme A est le plus petit élément de Φ_0, on a certainement $A \cap A_2 = \emptyset$, et par suite $A_2 \subset WO$. Appliquant le théorème effectif de la borne, nous en déduisons un élément $\Delta^1_1(\alpha)$ WO_ξ qui contient A_2, et tel que ξ soit successeur. Considérons alors un élément quelconque de Φ_0 qui sépare A_1 de A_2, soit B, et d'autre part $B_\xi = \omega^\omega - WO_\xi$. L'élément $B \cup B_\xi$ sépare encore A_1 de A_2, et on vérifie immédiatement que c'est un élément $\Delta^1_1(\alpha)$ de Φ_0. Ceci montre que Φ_0 et Φ_1 sont deux familles séparantes dont l'intersection n'est pas séparante.

Ceci établi, revenons aux résultats positifs. Nous supposons que $(\Phi_n)_{n\in\omega}$ est une suite de familles séparantes héréditaires de paramètres respectifs $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ et nous allons montrer que $\Phi = \bigcap_n \Phi_n$ est encore séparante héréditaire, de paramètre β défini par $(\beta)_n = \alpha_{n+1}$ pour tout n, et $(\beta)_o$ tel que la relation $(\alpha,n) \in W_{\Phi_m}$ soit $\Pi^1_1((\beta)_o)$, en α, n, et m. D'une part Φ est clairement héréditaire. D'autre part $W_\Phi = \bigcap_n W_{\Phi_n}$ est clairement $\Pi^1_1(\beta)$. Il reste donc à vérifier la propriété de séparation. Mais comme Φ est héréditaire, il suffit de prouver que si A est un ensemble $\Sigma^1_1(\alpha)$ dans Φ, A est contenu dans un ensemble $\Delta^1_1(<\alpha,\beta>)$ dans Φ. Pour chaque n, A est $\Sigma^1_1(\alpha)$ et dans Φ_n, donc A est contenu dans un ensemble $\Delta^1_1(<\alpha_n,\alpha>)$ et donc $\Delta^1_1(<\beta,\alpha>)$ de Φ_n. Ceci montre que pour chaque n, il existe un m satisfaisant la condition $\Pi^1_1(<\beta,\alpha>)$ suivante : $(<\beta,\alpha>,m) \in W_{\Phi_n} \wedge A \subset C_{<\beta,\alpha>,m}$.

Par $\Delta^1_1(<\beta,\alpha>)$-uniformisation, il existe une fonction $\Delta^1_1(<\beta,\alpha>)$-récursive $f : \omega \longrightarrow \omega$ telle que pour tout n, $C_{<\beta,\alpha>,f(n)}$ soit un élément de Φ_n qui contient A. Par suite $B = \bigcap_n C_{<\beta,\alpha>,f(n)}$ est un élément de Φ, qui contient A, et qui est $\Delta^1_1(<\beta,\alpha>)$. ⊣

REMARQUE. Le fait que la classe des familles séparantes ne soit pas stable par intersection est très dommageable dans la pratique, car la considération d'ensembles jouissant de plusieurs propriétés différentes est tout à fait naturelle. Il est donc intéressant d'avoir des résultats positifs partiels. Le résultat que nous avons indiqué en est un, mais nous le généraliserons de manière significative à la fin de ce chapitre, en étudiant les familles qui jouissent d'une propriété d'approximation plus faible.

Nous allons maintenant introduire la notion centrale de famille régulière. Pour cela nous devons tout d'abord définir deux autres notions.

DÉFINITION 2.4. Soit Φ une famille de parties de X, et $\alpha \in \omega^\omega$. Le noyau séparateur d'ordre α de Φ, noté $S_\alpha(\Phi)$, est la famille des ensembles $\Sigma^1_1(\alpha)$ de X qui sont séparables de tout ensemble $\Sigma^1_1(\alpha)$ disjoint par un ensemble qui est à la fois $\Delta^1_1(\alpha)$ et dans Φ .

Remarquons que ce noyau séparateur $S_\alpha(\Phi)$ contient toujours les éléments $\Delta^1_1(\alpha)$ de Φ . Par ailleurs, si Φ est une famille séparante avec paramètre α_o , alors pour chaque α , le noyau séparateur d'ordre $<\alpha_o,\alpha>$ contient aussi les ensembles qui sont $\Sigma^1_1(<\alpha_o,\alpha>)$ et qui sont dans Φ , sans d'ailleurs nécessairement se réduire à ces ensembles.

DÉFINITION 2.5. *Soit X un espace r.p., et $\alpha \in \omega^\omega$. La topologie de Harrington d'ordre α sur X , notée $T(\alpha)$, est la topologie engendrée par les ensembles $\Sigma^1_1(\alpha)$ de X . A cette topologie est associée une relation d'équivalence sur les parties de X , notée $\sim_\alpha$, définie par $E_1 \sim_\alpha E_2$ si la différence symétrique $(E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1)$ est maigre pour $T(\alpha)$.*

Chaque topologie $T(\alpha)$ est une topologie à base dénombrable, plus fine que la topologie initiale de X . Dès que X n'est pas dénombrable, il existe des ensembles $\Sigma^1_1(\alpha)$ et non boréliens, et par suite $T(\alpha)$ n'est pas une topologie régulière. Par contre, les topologies $T(\alpha)$ jouissent d'une propriété extrêmement intéressante.

LEMME 2.6 (essentiellement dans Harrington [1]). Pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$, l'espace X muni de la topologie $T(\alpha)$ est un espace de Baire.

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que X , muni de la topologie T engendrée par ensembles Σ^1_1 de X , est un espace de Baire, le résultat relativisé se démontrant de la même façon.

Soient donc $(U_n)_{n\in\omega}$ une suite de T-ouverts denses, et A un sous-ensemble Σ^1_1 non vide de X . Nous voulons montrer que $A \cap (\bigcap_n U_n)$ est encore non vide. Pour cela, nous allons construire par récurrence une suite double $(F_{i,j})_{i\in\omega, j \geqslant i}$ d'ensembles Π^o_1 non vides de $X \times \omega^\omega$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $\pi_X(F_{o,o}) \subset A \cap U_o$ et pour tout i , $\pi_X(F_{i,i}) \subset U_i$ (π_X désigne la projection sur X).

(ii) Pour i fixe, la suite $(F_{i,j})_{j \geqslant i}$ est une suite décroissante de fermés de diamètre tendant vers 0 . (Nous allons prendre $\delta(F_{i,j}) \leqslant 2^{i-j}$ pour $i \leqslant j$).

(iii) Pour j fixe, $\bigcap_{i \leqslant j} \pi_X(F_{i,j}) \neq \emptyset$.

Considérons d'abord $A \cap U_o$. C'est un ensemble T-ouvert non vide, qui contient donc un ensemble Σ^1_1 non vide. Par suite, il existe un ensemble Π^o_1 non vide, soit $F_{o,o}$, de $X \times \omega^\omega$ tel que $\pi_X(F_{o,o}) \subset A \cap U_o$.

Supposons avoir construit la suite $(F_{i,j})$ pour $i \leqslant j \leqslant n$, satisfaisant les propriétés (i), (ii) et (iii) pour $i \leqslant j \leqslant n$. Nous voulons construire les ensembles $(F_{i,n+1})_{i \leqslant n+1}$. Pour cela, considérons l'ensemble $A_{n+1} = \bigcap_{i \leqslant n} \pi_X(F_{i,n})$. C'est un ensemble Σ^1_1 et non vide de X , par la construction des $(F_{i,j})_{i \leqslant j \leqslant n}$. D'après la densité du T-ouvert U_{n+1} , l'ensemble $U_{n+1} \cap A_{n+1}$ contient un ensemble Σ^1_1 non vide. Par suite il existe un ensemble Π^o_1 non vide, soit $F_{n+1,n+1}$, de $X \times \omega^\omega$, tel que $\pi_X(F_{n+1,n+1}) \subset U_{n+1} \cap A_{n+1}$. Ce choix de $F_{n+1,n+1}$ assure (i).

Nous allons maintenant construire par récurrence sur $i \leqslant n$ les ensembles $F_{i,n+1}$, chacun contenu dans l'ensemble $F_{i,n}$ correspondant et de diamètre $\delta(F_{i,n+1}) \leqslant 2^{i-n-1}$, ce qui assurera (ii), de façon que $\bigcap_{i \leqslant n+1} \pi_X(F_{i,n+1}) \neq \emptyset$. Supposons avoir déjà construit la suite $(F_{i,n+1})$ pour $i \leqslant k < n$ de façon que $\bigcap_{i \leqslant k} \pi_X(F_{i,n+1}) \cap \pi_X(F_{n+1,n+1}) \neq \emptyset$. L'ensemble $\pi_X(F_{n+1})$ a été choisi contenu dans A_{n+1} , donc en particulier contenu dans $\pi_X(F_{k+1,n})$. Considérons alors tous les ensembles Π^o_1 de $X \times \omega^\omega$ qui sont contenus dans $F_{k+1,n}$, sont non vides et de diamètre inférieur ou égal à 2^{k-n} . Ces ensembles recouvrent l'ensemble $F_{k+1,n}$ et par suite l'un d'entre eux, soit $F_{k+1,n+1}$, est tel que $\pi_X(F_{k+1,n+1})$ rencontre l'ensemble $\bigcap_{i \leqslant k} \pi_X(F_{i,n+1}) \cap \pi_X(F_{n+1,n+1})$. Ceci achève la construction de la suite double $(F_{i,j})_{i \leqslant j}$ satisfaisant (i), (ii) et (iii).

L'espace $X \times \omega^\omega$ étant complet, la suite de fermés $(F_{i,j})$ converge, pour un i fixé, vers un point (x_i,α_i) . Par ailleurs, la condition de compatibilité (iii) assure que le point x_i ne dépend pas de i , c'est-à-dire $x_i = x_o$ pour tout i. Mais comme le point $(x_i,\alpha_i) = (x_o,\alpha_i)$ appartient au fermé $F_{i,i}$ la condition (i) assure que le point x_o appartient à A et à chacun des ouverts U_i . $\dashv$

DÉFINITION 2.7. Soit Φ une famille de parties de l'espace r.p. X. La famille Φ est dite régulière avec paramètre $\alpha_o \in \omega^\omega$ si elle satisfait les deux propriétés suivantes :

(i) L'ensemble W_Φ est $\Pi^1_1(\alpha_o)$.

(ii) (Propriété de régularité). Pour chaque réel α, et pour chaque ensemble $E \in \Phi$, il existe une suite $(A_n)_{n\in\omega}$ d'éléments du noyau séparateur d'ordre $\langle\alpha_o,\alpha\rangle$, telle que $E \sim_{\langle\alpha_o,\alpha\rangle} (\bigcup_n A_n)$.

Cette définition appelle quelques remarques.

(i) Tout d'abord, la condition de régularité n'est pas très naturelle. Cependant nous allons essayer dans la suite de la justifier, à la fois par des résultats positifs, en montrant qu'un grand nombre de familles "naturelles" ont cette propriété, et également par des résultats négatifs, montrant qu'il semble nécessaire de se restreindre aux familles satisfaisant une propriété du type de celle-ci.

(ii) Sans entrer maintenant dans cette discussion, il est tout de même nécessaire de remarquer que la propriété de régularité est très différente de la propriété de séparation des familles séparantes, en ce sens que la condition porte sur tous les éléments de la famille Φ, et pas seulement sur ceux qui sont boréliens ou analytiques. Ceci se justifie aisément. Nous voulons étudier les boréliens et les analytiques de la famille Φ_σ, et rien n'assure a priori que ces ensembles sont obtenus à partir des seuls boréliens ou analytiques de la famille Φ par union dénombrable. Une condition portant sur tous les éléments de Φ est donc a priori nécessaire.

(iii) Pour voir ce que signifie la propriété de régularité que nous avons introduite, supposons pour simplifier que Φ est régulière sans paramètre, et que $\emptyset$ et X sont dans Φ, et donc dans tous les noyaux séparateurs $S_\alpha(\Phi)$. Le noyau $S_\alpha(\Phi)$ engendre alors une topologie $T_\alpha(\Phi)$, qui est moins fine que la topologie de Harrington $T(\alpha)$. La condition de régularité est alors que pour chaque α, chaque élément de Φ est équivalent à un $T_\alpha(\Phi)$-ouvert modulo un ensemble $T(\alpha)$-maigre. Il s'agit donc d'une propriété de Baire forte (qui entraine en particulier la propriété de Baire pour la topologie $T(\alpha)$).

Voici maintenant le résultat principal de ce travail, qui montre que la notion de famille régulière résoud le problème de trouver une condition suffisante pour que Φ_σ soit séparante, et d'autre part que la classe des familles régulières possède une remarquable propriété de clôture.

THÉORÈME 2.8. *Soit* Φ *une famille régulière de parties de l'espace* r.p. X , *avec paramètre* α_o . *Alors* :

(i) *Les familles* Φ_σ *et* $\Phi_{\sigma c}$ *sont séparantes, avec paramètre* α_o .

(ii) $$W_{\Phi_\sigma} = \{(\alpha,n)\in W : \exists\beta \in \Delta^1_1(<\alpha_o,\alpha>)\ [\ \forall m\ (<\alpha_o,\alpha>,\beta(m)) \in W_\Phi \ \wedge \ \wedge\ C_{\alpha,n} = \bigcup_m C_{<\alpha_o,\alpha>,\ \beta(m)}\ ]\}$$

et de plus

(iii) *La famille* $\Phi_{\sigma c}$ *est régulière, avec paramètre* α_o .

DÉMONSTRATION Pour simplifier les notations, nous allons supposer que Φ est régulière sans paramètre, la démonstration générale étant analogue. De même nous allons démontrer les différents résultats pour les ensembles Σ^1_1 et Δ^1_1 , le résultat pour les ensembles $\Sigma^1_1(\alpha)$ et $\Delta^1_1(\alpha)$ étant démontré de la même manière.

La démonstration comporte plusieurs étapes.

(a) Pour chaque ensemble E , nous définissons un ensemble $\bar{E}^\Phi$ par

$$x \notin \bar{E}^\Phi \leftrightarrow \exists A \in S(\Phi)\ (x \in A \ \wedge \ A \cap E = \emptyset) .$$

Remarquons que si $\emptyset$ et X sont éléments de Φ , alors $\bar{E}^\Phi$ est l'adhérence de E pour la topologie $T(\Phi)$ introduite dans la remarque précédant l'énoncé du théorème. Nous allons montrer que d'une part *si* A *est un ensemble* Σ^1_1 *de* X , *l'ensemble* $\bar{A}^\Phi$ *est encore* Σ^1_1 , et d'autre part que *si* A_1 *et* A_2 *sont deux ensembles* Σ^1_1 *de* X , *et* A_1 *est séparable de* A_2 *par un élément de* Φ_σ , *alors* $A_1 \cap \bar{A}_2^\Phi = \emptyset$.

Pour démontrer la première assertion, il faut remarquer que si A est un ensemble Σ^1_1 , et B un ensemble du noyau séparateur $S(\Phi)$ disjoint de A , alors par définition du noyau séparateur, il existe un élément Δ^1_1 de Φ , soit C , qui sépare B de A . Par suite

$$\begin{aligned} x \notin \bar{A}^{\Phi} &\leftrightarrow \exists B \in S(\Phi)\ [x \in B \wedge B \cap A = \emptyset] \\ &\leftrightarrow \exists C \in \Delta^1_1 \cap \Phi\ [x \in C \wedge C \cap A = \emptyset] \\ &\leftrightarrow \exists n\ [(\underline{0},n) \in W_\Phi \wedge x \in C_{\underline{0},n} \wedge C_{\underline{0},n} \cap A = \emptyset]. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse (i), cette dernière expression définit un ensemble Π^1_1 . Par suite, $\bar{A}^{\Phi}$ est un ensemble Σ^1_1 .

Montrons la seconde assertion. Soient donc A_1 et A_2 deux ensembles Σ^1_1 , et $(B_n)_{n\in\omega}$ une suite d'éléments de Φ tels que $A_1 \subset \bigcup_n B_n$, et $\bigcup_n B_n \cap A_2 = \emptyset$. D'après la propriété de régularité, chaque ensemble B_n est équivalent, modulo un ensemble T-maigre (où T est la topologie engendrée par les ensembles Σ^1_1 de X), à la réunion d'une suite $B_{n,p}$ d'élements du noyau séparateur $S(\Phi)$. Considérons un ensemble $B_{n,p}$. C'est un ensemble Σ^1_1 qui est contenu dans l'ensemble B_n à un ensemble T-maigre près. Comme $B_n \cap A_2 = \emptyset$ on en déduit que $B_{n,p} \cap A_2$ est un ensemble T-maigre. Mais $B_{n,p} \cap A_2$ est un ensemble Σ^1_1 , donc T-ouvert. Par le théorème de Baire pour T (lemme 2.6), on en déduit que $B_{n,p} \cap A_2 = \emptyset$.

Nous venons de montrer que l'ensemble $B = \bigcup_{n,p} B_{n,p}$ était disjoint de A_2 , donc complètement contenu dans le complémentaire de $\bar{A}_2^{\Phi}$, par définition de ce dernier. Maintenant nous pouvons remarquer que pour chaque n l'ensemble B_n est contenu dans l'ensemble $\bigcup_p B_{n,p}$, à un ensemble T-maigre près. Par suite l'ensem - ble A_1 , qui est contenu dans l'ensemble $\bigcup_n B_n$, est contenu dans $B = \bigcup_{n,p} B_{n,p}$ à un ensemble T-maigre près. Il s'ensuit que l'ensemble $A_1 \cap \bar{A}_2^{\Phi}$ est un ensemble T-maigre. Nous avons déjà montré que l'ensemble $\bar{A}_2^{\Phi}$ est Σ^1_1 . Par suite $A_1 \cap \bar{A}_2^{\Phi}$ est un ensemble Σ^1_1 , donc T-ouvert. Une deuxième application du lemme 2.6 montre que $A_1 \cap \bar{A}_2^{\Phi} = \emptyset$.

(b) Nous allons maintenant démontrer les propriétés (i) et (ii). pour cela, nous allons établir le résultat suivant : <u>Si</u> A_1 <u>et</u> A_2 <u>sont deux</u> Σ^1_1 de X , <u>et</u> A_1 <u>est séparable de</u> A_2 <u>par un élément de</u> Φ_σ , <u>alors</u> A_1 <u>est séparable de</u> A_2 <u>par un ensemble</u> Δ^1_1 <u>dont le code appartient à l'ensemble</u> H <u>suivant</u> :

$$H = \{(\underline{0},n) \in W : \exists \beta \in \Delta^1_1\ [\forall m\ (\underline{0},\beta(m)) \in W_\Phi \wedge C_{\underline{0},n} = \bigcup_m C_{\underline{0},\beta(m)}]\} .$$

Remarquons que ce résultat termine la démonstration de (i) et de (ii). En effet d'une part chaque élément à code dans H est clairement Δ^1_1 et dans Φ_σ. Par suite le résultat précédent entraîne la propriété de séparation pour la famille Φ_σ. D'autre part, en appliquant le résultat précédent au couple formé d'un ensemble Δ^1_1 dans Φ_σ et de son complémentaire, on en déduit que H coïncide avec l'ensemble des codes d'éléments Δ^1_1 de Φ_σ. Ceci prouve l'assertion (ii). Mais d'après cette assertion, W_{Φ_σ} est clairement un ensemble Π^1_1, ce qui termine la démonstration du fait que Φ_σ est séparante (et donc aussi $\Phi_{\sigma c}$, par la proposition 2.3 (i)).

Il nous faut donc établir le résultat (b). Par le résultat (a), nous savons que $\overline{A}_2^\Phi \cap A_1 = \emptyset$. Par suite pour chaque point $x \in A_1$, il existe un élément de $S(\Phi)$ contenant x et disjoint de A_2. Considérons alors la relation suivante :

$$R(n,x) \leftrightarrow x \notin A_1 \vee [\, (\underline{0},n) \in W_\Phi \wedge x \in C_{\underline{0},n} \wedge C_{\underline{0},n} \cap A_2 = \emptyset \,] .$$

R est une relation Π^1_1, et pour chaque x il existe un n tel que $R(n,x)$. Par uniformisation, il existe une fonction Δ^1_1-récursive totale $f : X \to \omega$ telle que pour chaque x, $R(f(x),x)$. Considérons l'image $S_1 = f(A_1)$. C'est un ensemble Σ^1_1 d'entiers, et d'après la définition de R, S_1 est contenu dans l'ensemble Π^1_1 $S_2 = \{n : [\, (\underline{0},n) \in W_\Phi \wedge C_{\underline{0},n} \cap A_2 = \emptyset \,]\}$. L'ensemble S_1 peut éventuellement être vide (si par exemple A_1 l'est), mais ce n'est pas le cas de S_2 (car l'ensemble des $B_{n,p}$ de la démonstration de (a) n'est pas vide). Choisissons $n_o \in S_2$, et soit S un ensemble Δ^1_1 qui sépare $S_1 \cup \{n_o\}$ de $\omega - S_2$. Nous posons $\beta(n) = n$ si $n \in S$, $\beta(n) = n_o$ si $n \notin S$. β est un réel Δ^1_1, et pour chaque m, $(\underline{0},\beta(m)) \in W_\Phi$. Par suite l'ensemble $C = \bigcup_m C_{\underline{0},\beta(m)}$ est à code dans H. Mais d'après les propriétés de S_1 et S_2, C sépare l'ensemble A_1 de l'ensemble A_2, ce qui démontre le résultat (b).

(c) Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à établir la propriété de régularité pour la famille $\Phi_{\sigma c}$. Nous allons établir cette propriété relativement à la topologie T engendrée par les ensembles Σ^1_1 de X, le résultat relativisé se démontrant de la même manière. Soit donc $A = X - \bigcup_n B_n$, où chaque ensemble B_n est un élément de Φ . Chaque B_n est équivalent à une union $\bigcup_p B_{n,p}$ où les ensembles $B_{n,p}$ sont dans le noyau $S(\Phi)$. Par suite, il suffit de montrer que si $A = X - \bigcup_n C_n$, avec $C_n \in S(\Phi)$, alors A est équivalent à la réunion d'une suite d'élements de $S(\Phi_{\sigma c})$. Chaque ensemble C_n est un ensemble Σ^1_1 , et par suite l'ensemble $A = X - \bigcup_n C_n$ est un ensemble T-fermé, qui est donc équivalent à son T-intérieur. Il nous suffit donc de montrer que le T-intérieur de A est égal à une réunion d'éléments de $S(\Phi_{\sigma c})$, ou encore que tout Σ^1_1 non vide A_1 contenu dans A peut être séparé de $X - A$ par un élément de $S(\Phi_{\sigma c})$. Soit donc A_1 un ensemble Σ^1_1 contenu dans A . Comme clairement $A = \bar{A}^{\Phi}$, on en déduit que $A_1 \subset \bar{A}_1^{\Phi} \subset A$. Nous aurons donc démontré (c) si nous pouvons prouver que $\bar{A}_1^{\Phi} \in S(\Phi_{\sigma c})$. D'après (a), $\bar{A}_1^{\Phi}$ est un ensemble Σ^1_1 . Mais si A_2 est un ensemble Σ^1_1 disjoint de $\bar{A}_1^{\Phi}$, alors en appliquant (b) au couple $(A_2, \bar{A}_1^{\Phi})$, on en déduit que $\bar{A}_1^{\Phi}$ peut être séparé de A_2 par un élément Δ^1_1 de $\Phi_{\sigma c}$. Donc on a bien $\bar{A}_1^{\Phi} \in S(\Phi_{\sigma c})$, et le théorème est entièrement démontré. ⊣

<u>COROLLAIRE 2.9</u>. <u>Soit</u> Φ <u>une famille régulière de parties de l'espace</u> X . <u>Alors pour chaque espace Polonais</u> Y , Φ_σ <u>satisfait les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>Calcul de la complexité</u>. <u>Pour chaque borélien</u> $B \subset X \times Y$, <u>l'ensemble</u> $H = \{y \in Y : B_y \in \Phi_\sigma\}$ <u>est coanalytique</u>.

(ii) <u>Biséparation</u>. <u>Pour tout couple d'analytiques</u> A^1 <u>et</u> A^2 <u>de l'espace</u> $X \times Y$, <u>tels que pour chaque</u> $y \in Y$, <u>la coupe</u> A^1_y <u>est séparable de la coupe</u> A^2_y <u>par un élément de</u> Φ_σ , <u>il existe un borélien</u> B <u>de</u> $X \times Y$, <u>à coupes éléments de</u> Φ_σ , <u>qui sépare</u> A^1 de A^2 .

(iii) <u>Commutativité avec la réunion dénombrable</u>. <u>Si</u> B <u>est un borélien de</u> $X \times Y$ <u>dont les coupes sont dans</u> Φ_σ , <u>alors</u> B <u>est la réunion d'une suite</u> B_n de <u>boréliens dont les coupes sont dans</u> Φ , <u>ce qui peut encore s'écrire, avec les notations de 2.3.</u>, $\underset{\sim}{\Delta}^1_1 \cap s(\Phi_\sigma) = (\underset{\sim}{\Delta}^1_1 \cap s(\Phi))_\sigma$.

<u>DÉMONSTRATION</u>. (i) et (ii) proviennent de la proposition 2.2 appliquée à la famille Φ_σ , qui est séparante d'après le théorème 2.8. (iii) se démontre de manière très analogue à la démonstration de la proposition 2.2, en utilisant la caractérisation

2.8. (ii) de l'ensemble W_{Φ_σ}. Ramenons-nous au cas où Φ est sans paramètre, $Y = \omega^\omega$, et B est un ensemble Δ^1_1 de $X \times \omega^\omega$ à coupes dans Φ_σ (le cas général étant analogue). Alors pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$, l'ensemble B_α est un ensemble $\Delta^1_1(\alpha)$ et dans Φ_σ. Par suite pour chaque α, il existe un réel $\beta \in \Delta^1_1(\alpha)$ qui satisfait la relation Π^1_1 R suivante :

$R(\beta,\alpha) \leftrightarrow \forall n\ (\alpha,\beta(n)) \in W_\Phi \wedge B_\alpha = \bigcup_n C_{\alpha,\beta(n)}$, d'après la caractérisation de W_{Φ_σ}. Par uniformisation, il existe une fonction Δ^1_1-récursive totale $f : \omega^\omega \to \omega^\omega$ telle que pour tout α, $(f(\alpha),\alpha) \in R$. On définit alors une suite de boréliens (en fait d'ensembles Δ^1_1) B_n en posant $(x,\alpha) \in B_n \leftrightarrow x \in C_{\alpha,(f(\alpha))(n)}$. Il est alors immédiat de vérifier, d'après la définition de R, que chaque B_n est à coupes dans Φ, et que $B = \bigcup_n B_n$. $\dashv$

Le corollaire qui suit précise les propriétés de clôture de la classe des familles régulières.

COROLLAIRE 2.10

(i) Si Φ est une famille régulière, la famille $\Phi_{\sigma c}$ l'est aussi.

(ii) Si Φ est régulière, la famille Φ_σ l'est aussi.

(iii) Si (Φ_n) est une suite de familles régulières, $\Phi = \bigcup_n \Phi_n$ est régulière.

(iv) Si (Φ_n) est une suite de familles régulières héréditaires, $\bigcap_n \Phi_n$ est régulière héréditaire.

(v) Pour chaque ordinal $\xi < \aleph_1$, définissons une famille Φ_ξ par $\Phi_0 = \Phi$, $\Phi_{\xi+1} = (\Phi_\xi)_{\sigma c}$, $\Phi_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \Phi_\xi$ lorsque λ est limite. Alors chaque famille Φ_ξ est régulière dès que Φ l'est, avec paramètre $<\alpha_0,\alpha_\xi>$, où α_0 est le paramètre de Φ et α_ξ est un réel quelconque, tel que $|\alpha_\xi| = \xi$.

De plus, soit $\varphi((\alpha,n),E)$ la formule suivante :

$$\varphi((\alpha,n),E) \leftrightarrow (\alpha,n) \in W_\Phi \wedge \exists \beta \in \Delta^1_1(<\alpha_0,\alpha>)[\forall m(<\alpha_0,\alpha>,\beta(m)) \in E \wedge \wedge\ C_{\alpha,n} = X - \bigcup_m C_{<\alpha_0,\alpha>,\beta(m)}] .$$

φ est une formule $\Pi^1_1(\alpha_0)$, qui définit inductivement une suite W^ξ_Φ d'ensembles, par $W^0_\Phi = \{(\alpha,n) : \varphi((\alpha,n),\emptyset)\}$, $W^{\xi+1}_\Phi = \{(\alpha,n) : \varphi((\alpha,n),W^\xi_\Phi)\}$, $W^\lambda_\Phi = \bigcup_{\xi<\lambda} W^\xi_\Phi$ lorsque λ est limite. On a alors l'égalité, pour tout ordinal ξ, $W_{\Phi_\xi} = W^\xi_\Phi$.

(vi) Par contre, la classe des familles régulières n'est pas close par l'opération qui à Φ associe Φ_c . En fait, il existe une famille régulière Φ , close par intersections dénombrables, qui n'est pas séparante. Par suite, la famille Φ_c correspondante n'est pas régulière.

DÉMONSTRATION. (i) est la partie (iii) de l'énoncé du théorème 2.8.

(ii) Si Φ est régulière, W_{Φ_σ} est coanalytique, par la partie (ii) du théorème 2.8. D'autre part, on a clairement $S(\Phi) \subset S(\Phi_\sigma)$, et chaque élément de Φ_σ est approximable par les unions dénombrables de parties de $S(\Phi)$ d'après la propriété de régularité de Φ . Donc Φ_σ est régulière. Remarquons que ce résultat n'est pas très intéressant dans la pratique.

(iii) La démonstration est tout à fait analogue à celle que nous avons faite dans le cas des familles séparantes. Il suffit de voir que $\bigcup_n S_\alpha(\Phi_n) \subset S_\alpha(\Phi)$, pour tout α de la forme $<\beta_o , \gamma>$ où β_o code la suite des paramètres des Φ_n .

(iv) Supposons que Φ est une famille régulière héréditaire, et est sans paramètre (pour simplifier les notations). On vérifie alors sans difficulté que $S_\alpha(\Phi)$ est formé de tous les ensembles $\Sigma^1_1(\alpha)$ qui sont contenus dans un élément $\Delta^1_1(\alpha)$ de Φ (si de plus Φ est séparante sans paramètre, alors $S_\alpha(\Phi) = \Sigma^1_1(\alpha) \cap \Phi$) . Soit $C_\alpha(\Phi)$ la réunion des éléments $\Delta^1_1(\alpha)$ de Φ . La propriété de régularité devient : Pour chaque $A \in \Phi$ et pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$, A a la propriété de Baire pour $T(\alpha)$ et $A - C_\alpha(\Phi)$ est $T(\alpha)$-maigre. En effet cette condition est clairement nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, considérons un ensemble A possèdant cette propriété. Il existe une suite d'ensembles $\Sigma^1_1(\alpha)$ A_n tels que $A \sim_\alpha \bigcup_n A_n$. Mais alors comme $A - C_\alpha(\Phi)$ est $T(\alpha)$-maigre, $A_n - C_\alpha(\Phi)$ est aussi $T(\alpha)$-maigre, pour chaque entier n .Nous affirmons que $C_\alpha(\Phi)$ est $\Pi^1_1(\alpha)$. En effet

$$x \in C_\alpha(\Phi) \longleftrightarrow \exists n \, [(\alpha,n) \in W_\Phi \quad \wedge \quad x \in C_{\alpha,n}] .$$

Par suite l'ensemble $A_n - C_\alpha(\Phi)$ est $\Sigma^1_1(\alpha)$ et $T(\alpha)$-maigre , donc est vide (lemme 2.6.) . Ceci montre que $A_n \subset C_\alpha(\Phi)$, donc $A_n = \bigcup_p A_{n,p}$, où chaque $A_{n,p}$ est élément de $S_\alpha(\Phi)$. Donc A satisfait la propriété de régularité, puisque $A \sim_\alpha \bigcup_{n,p} A_{n,p}$. Ceci posé, soit $\Phi = \bigcap_n \Phi_n$, où les familles Φ_n sont régulières et héréditaires, supposées sans paramètre pour simplifier. Nous supposons de plus que la relation $(\alpha,n) \in W_{\Phi_m}$ est Π^1_1 (le cas général étant analogue). Il est alors facile de démontrer (par un argument d'uniformisation analogue à celui de la proposition 2.3 (iv)) que $C_\alpha(\Phi) = \bigcap_n C_\alpha(\Phi_n)$. D'après le résultat précédent, on en déduit immédiatement que Φ a la propriété de régularité.

(v) La démonstration est immédiate d'après les résultats du théorème 2.8, qui résolvent le cas où ξ est successeur, et d'après (iii), qui résoud le cas où ξ est limite. Pour obtenir le résultat effectif, c'est-à-dire montrer que $\langle\alpha_o, \alpha_\xi\rangle$ est un paramètre pour Φ_ξ , il suffit de remarquer que, d'après les propriétés générales des définitions inductives positives, (cf Cenzer [1]), la relation $\gamma \in WO \wedge (\alpha,n) \in W_\Phi^{|\gamma|}$ est $\Pi^1_1(\alpha_o)$. Ce résultat (v) est certainement le plus intéressant du corollaire, puisqu'il permet de démontrer que toutes les familles de la hiérarchie borélienne construite sur une famille régulière Φ sont régulières et donc satisfont les conclusions du corollaire 2.9.

(vi) Nous allons anticiper sur le chapitre 3 pour donner ici le contrexemple cherché. Considérons, dans $\mathbb{R}$, la famille Φ_o des parties analytiques relativement compactes. Nous montrerons que cette famille est régulière sans paramètre. Soit $A_o \subset]0,1[$ un ensemble Σ^1_1 non $\underset{\sim}{\Delta}^1_1$, et considérons $A = \bigcup_n (n + A_o)$. A est un ensemble Σ^1_1 , non borélien, et non relativement compact. La famille Φ est formée de Φ_o augmentée de l'ensemble A . Clairement Φ n'est pas séparante puisque l'ensemble A n'est contenu dans aucun ensemble borélien de Φ . Cependant clairement $C_\alpha(\Phi_o) = \mathbb{R}$, et par suite A satisfait la propriété de régularité relativement à chaque $S_\alpha(\Phi_o)$. De plus, puisque A n'est pas borélien, $W_\Phi = W_{\Phi_o}$ est un ensemble Π^1_1 ; Donc Φ est régulière (sans paramètre). On vérifie immédiatement que $\Phi \neq \Phi_\delta$. Par suite Φ_c ne peut pas être régulière. Sinon par le théorème 2.8 (i), la famille $\Phi_{c\sigma c} = \Phi$ serait séparante. $\dashv$

REMARQUE. D'après le contrexemple précédent, il existe donc des familles régulières et non séparantes. Nous discuterons le problème inverse, c'est-à-dire l'existence de familles séparantes et non régulières à la fin du chapitre 3, dans le paragraphe consacré aux limites de notre travail.

Pour terminer l'étude des propriétés générales des familles régulières, nous allons étudier une nouvelle opération sur les familles de parties des espaces récursivement présentés.

DÉFINITION 2.11. Soient X_1 et X_2, deux espaces r.p., Φ_1 une famille de parties de X_1, Φ_2 une famille de parties de X_2. La famille des rectangles à côtés respectifs dans Φ_1 et Φ_2, notée $\Phi_1 \times \Phi_2$, est définie par

$\Phi_1 \times \Phi_2 = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \Phi_1 \wedge A_2 \in \Phi_2\}$.

THÉORÈME 2.12. Si Φ_1 et Φ_2 sont deux familles régulières, la famille $\Phi_1 \times \Phi_2$ est régulière.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, nous allons supposer Φ_1 et Φ_2 régulières sans paramètre. Soit $X = X_1 \times X_2$. Comme

$$(\alpha,n) \in W^X_{\Phi_1\times\Phi_2} \leftrightarrow \exists m_1 \ \exists m_2 \ [\ (\alpha,m_1) \in W^{X_1}_{\Phi_1} \ \wedge \ (\alpha,m_2) \in W^{X_2}_{\Phi_2} \ \wedge$$

$$\wedge \ \ C^X_{\alpha,n} = C^{X_1}_{\alpha,m_1} \times C^{X_2}_{\alpha,m_2}] ,$$

l'ensemble $W^X_{\Phi_1\times\Phi_2}$ est clairement Π^1_1.

Nous devons prouver la propriété de régularité. Nous allons le faire pour la topologie T, le résultat relativisé étant analogue.

Nous allons tout d'abord établir que si l'ensemble A_1 est dans le noyau séparateur $S(\Phi_1)$, et A_2 dans le noyau séparateur $S(\Phi_2)$, alors le rectangle $A_1 \times A_2$ est dans $S(\Phi_1 \times \Phi_2)$. Soit B un ensemble Σ^1_1 disjoint de $A_1 \times A_2$. Nous voulons prouver qu'il existe un ensemble Δ^1_1 de $\Phi_1 \times \Phi_2$, soit $C_1 \times C_2$, où $C_1 \in \Delta^1_1 \cap \Phi_1$ et $C_2 \in \Delta^1_1 \cap \Phi_2$, tel que $A_1 \times A_2 \subset C_1 \times C_2$ et $(C_1 \times C_2) \cap B = \emptyset$. Considérons l'ensemble $B_1 = \{x \in X_1 : A_2 \cap B_x \neq \emptyset\}$. L'ensemble B_1 est un ensemble Σ^1_1 de X_1, qui est par hypothèse disjoint de l'ensemble A_1. Comme $A_1 \in S(\Phi_1)$, il existe un ensemble C_1 qui est Δ^1_1 et dans Φ_1, tel que $A_1 \subset C_1$ et $C_1 \cap B_1 = \emptyset$. Considérons alors l'ensemble $B_2 = \{x \in X_2 : C_1 \cap B_x \neq \emptyset\}$ B_2 est un ensemble Σ^1_1 dans X_2. Nous affirmons que $B_2 \cap A_2 = \emptyset$. En effet sinon il existe $x_2 \in A_2$ tel que $C_1 \cap B_{x_2} \neq \emptyset$, donc il existe $x_1 \in C_1$,

$x_2 \in A_2$, tels que $(x_1,x_2) \in B$. Mais alors $B_{x_1} \cap A_2 \neq \emptyset$, donc $x_1 \in B_1$, ce qui contredit $B_1 \cap C_1 = \emptyset$. Comme l'ensemble A_2 est dans le noyau séparateur $S(\Phi_2)$, il existe $C_2 \in \Delta^1_1 \cap \Phi_2$ tel que $A_2 \subset C_2$ et $B_2 \cap C_2 = \emptyset$. L'ensemble $C_1 \times C_2$ est Δ^1_1 , dans $\Phi_1 \times \Phi_2$, et sépare $A_1 \times A_2$ de B .

Pour démontrer la propriété de régularité, il nous faut maintenant établir un lien entre la topologie T^X sur l'espace r.p. $X = X_1 \times X_2$ et les topologies T^{X_i} sur les espaces facteurs, $T^{X_1 \times X_2}$ n'étant, clairement, pas identique à la topologie produit $T^{X_1} \times T^{X_2}$.

<u>LEMME 2.13</u>. (Harrington [1]). <u>Si</u> $A \subset X_1$ <u>est un ensemble maigre pour la topologie</u> T^{X_1} , <u>l'ensemble</u> $A \times X_2$ <u>est maigre pour la topologie</u> $T^{X_1 \times X_2}$.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Il suffit clairement de le démontrer lorsque A est un ensemble fermé et rare pour T^{X_1} . L'ensemble $A \times X_2$ est alors fermé pour $T^{X_1 \times X_2}$, cette topologie étant plus fine que la topologie $T^{X_1} \times T^{X_2}$. Montrons que $A \times X_2$ est rare. Sinon il existe un ensemble Σ^1_1 non vide $B \subset A \times X_2$. Mais alors la projection $\pi_{X_1}(B)$ est un ensemble Σ^1_1 non vide contenu dans A , ce qui contredit l'hypothèse que A est rare. $\dashv$

Pour terminer la démonstration du théorème 2.12., considérons un rectangle $E = E_1 \times E_2$, où $E_1 \in \Phi_1$ et $E_2 \in \Phi_2$. Il existe alors une suite $(A^1_n)_{n\in\omega}$ et une suite $(A^2_n)_{n\in\omega}$ d'ensembles tels que $A^1_n \in S(\Phi_1)$, $A^2_n \in S(\Phi_2)$ et $E_1 \sim \bigcup_n A^1_n$, $E_2 \sim \bigcup_n A^2_n$. D'après ce qui précède, les ensembles $A^1_n \times A^2_m$ sont dans $S(\Phi_1 \times \Phi_2)$. Il nous suffit donc d'établir que $E \sim \bigcup_n \bigcup_m (A^1_n \times A^2_m)$. On a $E - \bigcup_n \bigcup_m A^1_n \times A^2_m = E_1 \times E_2 - \bigcup_n \bigcup_m A^1_n \times A^2_m \subset [(E_1 - \bigcup_n A^1_n) \times X_2] \cup [X_1 \times (E_2 - \bigcup_m A^2_m)]$ et d'après le lemme 2.13 ce dernier ensemble est $T^{X_1 \times X_2}$-maigre. De même, $\bigcup_n \bigcup_m A^1_n \times A^2_m - E_1 \times E_2 \subset [(\bigcup_n A^1_n - E_1) \times X_2] \cup [X_1 \times (\bigcup_m A^2_m - E_2)]$, et par le lemme 2.13 ce dernier ensemble est $T^{X_1 \times X_2}$-maigre. $\dashv$

Le théorème 2.12. et le corollaire 2.10 suffisent à établir que toutes les classes de la hiérarchie de Borel construite à partir d'une famille rectangle $\Phi_1 \times \Phi_2$, où Φ_1 et Φ_2 sont régulières, sont des familles séparantes, à l'exception peut-être de la famille rectangle $\Phi_1 \times \Phi_2$ elle-même. Nous ne savons pas si $\Phi_1 \times \Phi_2$ est séparante dès que Φ_1 et Φ_2 le sont. Nous avons cependant le résultat partiel suivant :

<u>THÉORÈME 2.14</u>. <u>Soient</u> Φ_1 , Φ_2 <u>deux familles régulières</u>. <u>La famille</u> $\Phi = (\Phi_1)_{\sigma c} \times (\Phi_2)_{\sigma c}$ <u>est séparante (et régulière)</u>.

<u>DÉMONSTRATION</u>. La famille Φ est clairement régulière, d'après les propriétés de clôture du corollaire 2.10 (i) et du théorème 2.12.

Pour montrer que Φ est séparante, il suffir donc de prouver la propriété de séparation. Pour simplifier, nous allons supposer Φ_1 et Φ_2 sans paramètre, et démontrer la séparation pour les ensembles Σ^1_1 .Soit donc A un ensemble Σ^1_1 de $X_1 \times X_2$, B un autre ensemble Σ^1_1 , et E_1 , E_2 deux éléments de $(\Phi_1)_{\sigma c}$ et $(\Phi_2)_{\sigma c}$ respectivement, tels que $A \subset E_1 \times E_2$, et $(E_1 \times E_2) \cap B = \emptyset$. Nous pouvons supposer que A est rectangle, en remplaçant si nécessaire A par $\pi_{X_1}(A) \times \pi_{X_2}(A)$, qui est Σ^1_1 et encore contenu dans $E_1 \times E_2$. Soit donc $A = A_1 \times A_2$, avec $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$. Nous allons d'abord établir que $(\bar{A}_1^{\Phi_1} \times \bar{A}_2^{\Phi_2}) \cap B = \emptyset$ .Pour cela nous approximons E_1 par un ensemble $F_1 \in (S(\Phi_1))_{\sigma c}$ et E_2 par un ensemble $F_2 \in (S(\Phi_2))_{\sigma c}$. Ceci est possible puisque Φ_1 et Φ_2 sont régulières. Les ensembles $A_1 - F_1$ et $A_2 - F_2$ sont alors T-ouverts et T-maigres, et par suite $A_1 \subset F_1$ et $A_2 \subset F_2$. Il s'ensuit, comme dans la démonstration du théorème 2.8, que $\bar{A}_1^{\Phi_1} \subset F_1$ et $\bar{A}_2^{\Phi_2} \subset F_2$. Mais alors $(\bar{A}_1^{\Phi_1} \times \bar{A}_2^{\Phi_2}) \cap B$ est un ensemble Σ^1_1 contenu dans l'ensemble $B \cap (F_1 \times F_2)$, lui-même contenu dans l'ensemble $(F_1 \times F_2) - (E_1 \times E_2)$, et par le lemme 2.13 cet ensemble est maigre pour $T^{X_1 \times X_2}$. On en déduit par le lemme 2.6 que $(\bar{A}_1^{\Phi_1} \times \bar{A}_2^{\Phi_1}) \cap B$ est vide. Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que $\bar{A}_1^{\Phi_1} \in S((\Phi_1)_{\sigma c})$ et $\bar{A}_2^{\Phi_2} \subset S((\Phi_2)_{\sigma c})$, et par suite que $\bar{A}_1^{\Phi_1} \times \bar{A}_2^{\Phi_2} \in S(\Phi)$, d'après le théorème 2.12. Par suite on peut séparer $\bar{A}_1^{\Phi_1} \times \bar{A}^{\Phi_2}$, et à fortiori A , de B par un ensemble Δ^1_1 dans Φ . $\dashv$

Avant de passer, au chapitre 3, à l'étude des applications des notions et des résultats de ce chapitre, nous allons terminer le chapitre 2 en faisant une digression sur une notion connexe, celle de séparation faible.

DÉFINITION 2.15. Une famille Φ de parties de l'espace X est faiblement séparante, avec paramètre α_o, si Φ satisfait les deux propriétés suivantes :

1) $W_\Phi \in \Pi^1_1(\alpha_o)$.

2) Pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$, si A est un ensemble $\Sigma^1_1(\alpha)$ de Φ, disjoint d'un ensemble $\Sigma^1_1(\alpha)$ B, il existe un élément $\Delta^1_1(<\alpha_o, \alpha>)$ de Φ qui sépare A de B.

Il est clair qu'une famille séparante est faiblement séparante. Nous montrerons au chapitre 3 que l'inverse n'a pas nécessairement lieu. Cependant ces deux notions coïncident lorsque Φ est une famille héréditaire.

En utilisant les techniques de la proposition 2.2; on montre que les familles faiblement séparantes satisfont les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.16. Soit Φ une famille faiblement séparante de parties de l'espace r.p. X, et Y un espace polonais auxiliaire. Alors :

(i) Si B est un borélien de l'espace $X \times Y$, l'ensemble H des points y de Y pour lesquels la coupe B_y est dans Φ est un ensemble coanalytique.

(ii) Si A est un ensemble analytique de l'espace $X \times Y$, dont les coupes sont dans Φ, et A' est un ensemble analytique disjoint de A, il existe un borélien B à coupes dans Φ qui sépare A de A'.

Le fait d'être faiblement séparante, pour une famille Φ, est une propriété des parties analytiques de Φ. Nous allons démontrer que cette propriété est équivalente à une autre propriété, a priori plus forte, concernant les ensembles coanalytiques de la famille Φ_c, lorsque Φ satisfait certaines propriétés de clôture. Pour cela, nous introduisons quelques définitions :

DÉFINITION 2.17. Soit A un ensemble $\Pi^1_1(\alpha_o)$. Une résolution de A est une application $\Delta^1_1(\alpha_o)$-récursive f de l'espace X dans ω^ω, telle que $A = f^{-1}(WO)$. A la résolution f est associée une famille $(A^f_\xi)_{\xi < \aleph_1}$ d'ensembles, définie par $A^f_\xi = f^{-1}(WO_\xi)$, que nous appellerons approximations de A relativement à f.

Il est bien connu qu'un ensemble $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$ admet toujours au moins une résolution. D'autre part, la version effective d'un résultat de Burgess [1] assure que si f et g sont deux résolutions d'un même ensemble $\Pi^1_1(\alpha_o)$, les approximations correspondantes coïncident pour un ensemble clos d'ordinaux dénombrables qui, pour tout $\alpha \in \omega^\omega$, est cofinal sous $\omega_1^{<\alpha_o,\alpha>}$. La démonstration de ce résultat utilise le théorème suivant de Moschovakis (cf Kechris [1]).

<u>THÉORÈME de la borne effective (Moschovakis)</u> <u>Soit</u> $G \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ <u>un ensemble</u> Σ^1_1 <u>qui est universel pour les ensembles analytiques de</u> ω^ω <u>et qui satisfait de plus que si</u> $A \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ <u>est</u> Σ^1_1, <u>il existe une fonction récursive totale</u> $g : \omega^\omega \to \omega^\omega$ <u>telle que pour chaque</u> $\beta \in \omega^\omega$, $\alpha \in A_\beta \leftrightarrow \alpha \in G_{g(\beta)}$. <u>Il existe alors une fonction récursive totale</u> h <u>de</u> ω^ω <u>dans</u> ω^ω <u>qui est telle que si</u> β <u>satisfait</u> $G_\beta \subset WO$, <u>alors</u> $h(\beta) \in WO$ <u>et pour tout</u> $\alpha \in G_\beta$, $|\alpha| < |h(\beta)|$.

Considérons maintenant une famille Φ de parties de l'espace X, et soit A un ensemble $\Pi^1_1(\alpha)$ dans Φ. Les deux problèmes naturels concernant une résolution de A sont alors les suivants :

(i) Que peut-on dire, étant donnée une résolution f de A, de l'ensemble des ordinaux ξ pour lesquels A^f_ξ est un élément de Φ ?

(ii) Existe-t-il une résolution f de A pour laquelle toutes les approximations A^f_ξ sont dans Φ ?

Supposons l'ensemble W_Φ $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$. Si on peut résoudre positivement le problème (ii) pour tous les éléments de la famille Φ_c, il est facile de vérifier que Φ est faiblement séparante. Le résultat qui suit est une sorte de réciproque, dans le cas où Φ est close par intersections dénombrables. Nous ne donnons l'énoncé que lorsque Φ est sans paramètre, l'énoncé relativisé étant laissé au lecteur.

<u>THÉORÈME 2.18</u>. <u>Soit</u> Φ <u>une famille de parties de</u> X <u>qui est faiblement séparante sans paramètre, et qui est close par intersection dénombrable. Si</u> A <u>est un ensemble</u> $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$ <u>élément de la famille</u> Φ_c, <u>alors</u> :

(i) <u>Pour toute résolution</u> f <u>de</u> A, <u>il existe un ensemble clos cofinal d'ordi-</u>

naux ξ pour lesquels l'approximation A^f_ξ est dans Φ_c.

(ii) Il existe une résolution f de A pour laquelle toutes les approximations A^f_ξ sont dans Φ_c.

<u>DÉMONSTRATION.</u> Nous allons supposer pour simplifier que A est Π^1_1, le résultat relativisé se démontrant de la même façon. La partie (i) se déduit immédiatement de la partie (ii) grâce au résultat de Burgess indiqué précédemment. Nous allons donc construire une résolution de A pour laquelle toutes les approximations sont dans Φ_c.

Par un Δ^1_1-isomorphisme de X dans ω^ω, nous nous ramenons au cas où $X = \omega^\omega$. Soit f une résolution quelconque de A, et soit G l'ensemble universel Σ^1_1 du théorème de la borne effective de Moschovakis.

L'ensemble $D = \{\beta : G_\beta \subset A\}$ est Π^1_1. Comme $\omega^\omega - A \in \Phi$, il existe, pour tout β dans D, un ensemble $\Delta^1_1(\beta)$ dans Φ_c, soit C_β, tel que $G_\beta \subset C_\beta \subset A$ par la propriété de séparation faible de Φ. Par uniformisation, il existe une fonction Π^1_1-récursive partielle f_o, définie sur D, telle que pour tout $\beta \in D$, $(\beta, f_o(\beta)) \in W_\Phi$ $\wedge$ $G_\beta \subset \omega^\omega - C_{\beta, f_o(\beta)} \subset A$.

Nous définissons $E(\alpha,\beta)$ par $E(\alpha,\beta) \leftrightarrow \beta \in D \wedge \alpha \in C_{\beta, f_o(\beta)}$. E est un ensemble Σ^1_1.

Par l'hypothèse faite sur G, il existe une fonction récursive totale f_1, telle que $G_{f_1(\beta)} = f^{-1}(G_\beta)$. Définissons alors

$B(\alpha,\beta) \leftrightarrow \alpha \in G_\beta \vee \exists\gamma\, [E(\gamma, f_1(\beta)) \wedge \alpha = f(\gamma)]$. B est un ensemble Σ^1_1 et par suite il existe une fonction récursive totale f_2 telle que $\forall\beta$ $B_\beta = G_{f_2(\beta)}$.

Nous allons prouver que si β est tel que $G_\beta \subset WO$, alors $B_\beta \subset WO$. Supposons donc que $G_\beta \subset WO$. **Alors puisque** f est une résolution de A, $f^{-1}(G_\beta) = G_{f_1(\beta)}$ est contenu dans A. Ceci prouve que $f_1(\beta) \in D$, et par suite

$E_{f_1(\beta)} = \omega^\omega - C_{f_1(\beta),\, f_o \circ f_1(\beta)}$ est contenu dans A. Mais alors

$B_\beta = G_\beta \cup f(E_{f_1(\beta)})$ est contenu dans WO. Soit h la fonction récursive totale donnée par le théorème de la borne effective, et soit f_3 la fonction récursive totale $f_3(\beta) = h(f_2(\beta))$. La fonction f_3 satisfait : <u>Si</u> $G_\beta \subset WO$, <u>alors</u> $f_3(\beta) \in WO$, <u>pour chaque</u> α <u>de</u> G_β , $|\alpha| < |f_3(\beta)|$, <u>et l'ensemble</u> $f^{-1}(G_\beta)$ <u>peut être séparé de l'ensemble</u> $\omega^\omega - A^f_{|f_3(\beta)|}$ <u>par un élément</u> $\Delta^1_1(\beta)$ <u>de</u> Φ_c . En effet si $G_\beta \subset WO$, alors $G_{f_2(\beta)} = B_\beta \subset WO$, donc $h(f_2(\beta)) = f_3(\beta) \subset WO$ et pour chaque $\alpha \in G_\beta$, $|\alpha| < |f_3(\beta)|$. D'autre part l'ensemble $f^{-1}(G_\beta) = G_{f_1(\beta)}$ est alors contenu dans A , donc $f_1(\beta) \in D$ et par suite l'ensemble $E_{f_1(\beta)}$ est un élément Δ^1_1 de Φ_c qui contient $f^{-1}(G_\beta)$. Enfin $f(E_{f_1(\beta)})$ est contenu dans $B = G_{f_2(\beta)}$, et par suite pour chaque $\alpha \in f(E_{f_1(\beta)})$, $|\alpha| < |h(f_2(\beta))| = |f_3(\beta)|$, donc $E_{f_1(\beta)} \subset f^{-1}(WO_{|f_3(\beta)|})$.

Pour terminer la démonstration, nous allons itérer un nombre dénombrable de fois l'opération qui a β associe $f_3(\beta)$. Pour faire cela de manière effective, nous allons utiliser le théorème de récursion (cf Moschovakis [1] , § 7A). Notons $\alpha \leqslant^\star \beta \leftrightarrow \beta \in WO \wedge |\alpha| \leqslant |\beta|$. Pour chaque entier ε , code d'une fonction récursive partielle $\{\varepsilon\} : \omega^\omega \to \omega$, nous définissons $C(\alpha,\beta,\varepsilon)$ par

$$C(\alpha,\beta,\varepsilon) \leftrightarrow \{\varepsilon\}(\beta) \text{ est défini} \wedge \exists\gamma\, [\, \{\varepsilon\}(\gamma) \text{ est défini} \wedge \gamma \leqslant^\star \{\varepsilon\}(\beta) \wedge \alpha \leqslant^\star \{\varepsilon\}(\gamma)] .$$

L'ensemble C est Σ^1_1 , et par suite il existe une fonction récursive totale f_4 telle que $\alpha \in C_{\beta,\varepsilon} \leftrightarrow \alpha \in G_{f_4(\beta,\varepsilon)}$. Considérons deux fonctions récursives totales θ et θ' telles que

Si $\alpha , \beta \in WO$, $\theta(\alpha,\beta) \in WO$ et $|\theta(\alpha\ \beta)| = |\alpha|\ \omega + |\beta|$ et si $\alpha \notin WO$ ou $\beta \notin WO$, $\theta(\alpha,\beta) \notin WO$; et de même si $\forall\, i\ (\alpha)_i \in WO$, $\theta'(\alpha) \in WO$ et $|\theta'(\alpha)| = \sum_i |(\alpha)_i|$, et si $\exists i\ (\alpha)_i \notin WO$, $\theta'(\alpha) \notin WO$. Par ailleurs soit S la fonction s.m.n. telle que $\{\varepsilon\}(n,\alpha) \cong \{S(\varepsilon,n)\}(\alpha)$.

Nous considérons alors la récursion suivante :

$$\begin{cases} \{\varepsilon\}(0,\beta) = \beta . \\ \{\varepsilon\}(n+1,\beta) \cong \theta(\{\varepsilon\}(n,\beta),\ f_3 \circ f_4(\beta,S(\varepsilon,n))) . \end{cases}$$

Par le théorème de récursion, il existe ε qui satisfait cette récursion, et on vérifie sans difficulté par récurrence que $\{\varepsilon\}$ est une fonction récursive totale. Notons alors pour chaque i, e_i la fonction récursive totale $e_i(\beta) = \{\varepsilon\}(i,\beta)$, et enfin soit g définie par $g(\beta) = \theta'(\langle e_i(\beta), i \in \omega\rangle)$. Nous allons montrer que la fonction $F = g \circ f$ satisfait les conditions cherchées. Pour montrer que F est une résolution de A, il suffit de montrer que $g^{-1}(WO) = WO$, et par le choix de θ', il suffit de montrer que pour chaque i, $e_i{-1}(WO) = WO$. Par le choix de θ, il suffit clairement de montrer que pour chaque n, en admettant que $e_n(\beta) \in WO$ pour $\beta \in WO$, l'ensemble $G_{f_4(\beta,S(\varepsilon,n))}$ est contenu dans WO. Mais par définition de f_4, cet ensemble est $C_{\beta,S(\varepsilon,n)}$; et si $\alpha \in C_{\beta,S(\varepsilon,n)}$, alors il existe γ tel que $\alpha \leqslant^{\star} S(\varepsilon,n)(\gamma) = e_n(\gamma)$ et tel que $\gamma \leqslant^{\star} S(\varepsilon,n)(\beta) = e_n(\beta)$, donc $\alpha \in WO$. Ceci montre, par récurrence sur n, que $e_n^{-1}(WO) = WO$ et par suite que F est une résolution de l'ensemble A.

Nous allons maintenant montrer que si α_1 et α_2 sont dans WO, et pour un entier i, $|\alpha_1| \leqslant |e_i(\alpha_2)|$, alors pour tout $k \geqslant i$, $|e_k(\alpha_1)| \leqslant |e_{k+1}(\alpha_2)|$. En effet les e_i sont clairement croissantes en i, c'est-à-dire si $\alpha \in WO$ et $i \leqslant j$, $|e_i(\alpha)| \leqslant |e_j(\alpha)|$. Donc si $|\alpha_1| \leqslant |e_i(\alpha_2)|$ on a aussi $|\alpha_1| \leqslant |e_k(\alpha_2)|$, ce qui signifie que $\alpha_1 \in C_{\alpha_2,S(\varepsilon,k)}$. Mais alors

$$e_k(\alpha_1) \leqslant f_3 \circ f_4(\alpha_2,S(\varepsilon,k)) \leqslant e_{k+1}(\alpha_2) .$$

D'après ce résultat; il s'ensuit en particulier que si α_1, α_2 sont dans WO et $|\alpha_1| \leqslant |\alpha_2|$, alors $|g(\alpha_1)| \leqslant |g(\alpha_2)|$. Par suite l'ordinal $|g(\alpha)|$ ne dépend que de l'ordinal $|\alpha|$. Nous pouvons donc définir une fonction $H : \aleph_1 \to \aleph_1$ par $H(\xi) = |g(\alpha)|$ pour un (tous les) α tel que $\xi = |\alpha|$. H est une fonction croissante de $\aleph_1$ dans $\aleph_1$, et de plus si $\eta < H(\xi)$, alors $H(\eta) \leqslant H(\xi)$. Ceci vient du fait que si $\eta = |\alpha_1|$ et $\xi = |\alpha_2|$, on a $H(\xi) = \sup_i |e_i(\alpha_2)|$, et par suite il existe un entier i tel que $|\alpha_1| \leqslant |e_i(\alpha_2)|$. Par le résultat précédent, $|g(\alpha_1)| \leqslant |g(\alpha_2)|$. Soit Δ la clôture de l'image de H, c'est-à-dire $\xi \in \Delta \leftrightarrow \forall \eta < \xi\ H(\eta) \leqslant \xi$. L'ensemble Δ est clos cofinal. Nous allons montrer que si $\beta \in A$, on a $|F(\beta)| < \xi \leftrightarrow |f(\beta)| < \sup(\xi \cap \Delta)$, ce qui montrera que les A^F_ξ sont de la forme A^f_η, pour $\eta \in \Delta$. Supposons d'abord que $|F(\beta)| < \xi$.

Comme $|F(\beta)| = H(|f(\beta)|)$ et $|F(\beta)| > |f(\beta)|$, on a clairement $|F(\beta)| \in \Delta \cap \xi$, donc $|f(\beta)| < \sup(\xi \cap \Delta)$. Réciproquement si $|f(\beta)| < \sup(\xi \cap \Delta)$, alors pour un ordinal $\eta < \xi$ on a $|f(\beta)| < H(\eta)$ et par suite $|F(\beta)| \leqslant H(\eta)$, donc $|F(\beta)| < \xi$. Il nous reste à montrer que pour chaque ξ, A^F_ξ est un élément de Φ_c. D'après le résultat précédent, il suffit de prouver que chaque A^f_ξ est élément de Φ_c lorsque $\xi \in \Delta$. Mais puisque $\Phi = \Phi_\delta$, il suffit de le prouver pour chaque ordinal ξ de la forme $H(\eta)$. Soit alors β_o tel que $|\beta_o| = \eta$ et soit $B_n = \{\alpha \in A : |f(\alpha)| \leqslant |e_n(\beta_o)|\}$. On a clairement $A^f_\xi = \bigcup_n B_n$, et par suite il suffit de prouver que pour chaque n, il existe un ensemble C_n dans Φ_c tel que $B_n \subset C_n \subset B_{n+1}$, car alors $A^f_\xi = \bigcup_n C_n$ sera aussi un élément de Φ_c. Mais par le premier résultat obtenu dans cette démonstration, il existe un élément C_n de Φ_c qui sépare l'ensemble $f^{-1}(G_{f_4(\beta_o,S(\varepsilon,n))})$ de l'ensemble $\omega^\omega - A^f_{|f_3\circ f_4(\beta_o,S(\varepsilon,n))|}$, et cet élément C_n convient puisque si $\alpha \in B_n$, alors par définition de B_n, $f(\alpha) \in C_{\beta_o,S(\varepsilon,n)} = G_{f_4(\beta_o,S(\varepsilon,n))}$, donc $B_n \subset C_n$, et d'autre part si $\alpha \in C_n$, alors $|f(\alpha)| \leqslant |f_3\circ f_4(\beta_o,S(\varepsilon,n))| \leqslant |e_{n+1}(\beta_o)|$, donc $C_n \subset B_{n+1}$. Ceci termine la démonstration de ce théorème. $\dashv$

COROLLAIRE 2.19. <u>Soient</u> Φ_o <u>et</u> Φ_1 <u>deux familles faiblement séparantes de l'espace</u> X , <u>closes par intersections dénombrables</u> . <u>La famille</u> $\Phi_o \cap \Phi_1$ <u>est faiblement séparante</u>.

<u>DÉMONSTRATION</u> . On a clairement $W_{\Phi_o \cap \Phi_1} = W_{\Phi_o} \cap W_{\Phi_1}$, et il suffit donc de démontrer la propriété de séparation. Supposons pour simplifier que les familles Φ_o et Φ_1 sont dans paramètre, et soit $A_1 \in \Phi_o \cap \Phi_1$ et A_2 deux Σ^1_1 disjoints.

D'après le théorème précédent, il existe une résolution Δ^1_1 f du complémentaire E de A_1 telle que pour tout ξ, $E^f_\xi \in (\Phi_o)_c$. D'après le résultat (effectivisé) de Burgess, l'ensemble $D = \{\xi : E^f_\xi \in (\Phi_1)_c\}$ est cofinal à ω_1^{CK}. Enfin il existe $\xi < \omega_1^{CK}$ tel que $A_2 \subset E^f_\xi$ par le théorème de la borne. Soit $\xi_1 \in D$ tel que $\xi \leqslant \xi_1 < \omega_1^{CK}$. L'ensemble $X - E^f_{\xi_1}$ est à la fois Δ^1_1, dans

Φ_o , dans Φ_1 , et sépare A_1 de A_2 . $\dashv$

Le théorème 2.18 nous a donc permis de démontrer un résultat de clôture par intersection pour les familles faiblement séparantes. Nous en verrons au chapitre 3 une autre application, à un résultat de clôture par intersection pour des familles régulières .

CHAPITRE 3

EXEMPLES DE FAMILLES RÉGULIÈRES

La littérature, depuis les travaux de Lusin et Suslin, contient de nombreux exemples de familles pour lesquels les propriétés de complexité, de séparation et de commutativité avec la réunion dénombrable ont été étudiées. Nous allons dans ce chapitre passer ces différentes propriétés en revue et essayer de résoudre, pour chaque famille, le problème de sa régularité. Les résultats du chapitre 2 pourront alors être utilisés pour obtenir de nouvelles propriétés pour lesquelles nous saurons résoudre les différents problèmes.

EXEMPLE 1. La famille $P(X)$.

La première famille séparante considérée dans la littérature est la famille de toutes les parties de l'espace X. Le théorème de séparation correspondant est le célèbre théorème de Suslin [1] et la version effective en est le théorème de Kleene.

Le problème de savoir si la famille $P(X)$ est ou non régulière est un problème indécidable dans la théorie des ensembles habituelle. Nous avons vu que si une famille Φ satisfait la propriété de régularité pour une topologie de Harrington $T(\alpha)$, alors les éléments de Φ ont la propriété de Baire relativement à cette topologie. Ceci nous amène à définir la famille suivante :

DÉFINITION 3.1. La famille $\mathcal{R}$ des parties régulières de l'espace X est la famille de toutes les parties $A \subset X$ qui possèdent la propriété de Baire relativement à toutes les topologies de Harrington $T(\alpha)$, pour $\alpha \in \omega^\omega$.

PROPOSITION 3.2. La famille $\mathcal{R}$ est régulière sans paramètre. C'est la plus grande famille ayant cette propriété.

DÉMONSTRATION. D'après ce qui précède, toute famille Φ régulière sans paramètre est contenue dans la famille $\mathcal{R}$. Par ailleurs $\mathcal{R}$ est clairement close par complémentaire et par opération A de Suslin, et par suite $\mathcal{R}$ contient tous les analytiques. On en déduit immédiatement, par le théorème de Suslin-Kleene, que $S_\alpha(\mathcal{R}) = \Sigma^1_1(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \omega^\omega$. Par suite la propriété de régularité pour la famille $\mathcal{R}$ est exactement la propriété de Baire relativement à toutes les topologies $T(\alpha)$. ⊣

Que peut-on dire de la famille $\mathcal{R}$? On peut monter que cette famille jouit de propriétés très analogues à la famille des parties ayant la propriété de Baire dans ω^ω, par une simple adaptation des démonstrations :

- $\mathcal{R}$ est une tribu close par opération A de Suslin. Par suite $\mathcal{R}$ contient la plus petite famille engendrée par les ensembles analytiques, close par opération A et complémentaire.
- Avec l'axiome du choix, on construit facilement un ensemble qui n'est pas dans $\mathcal{R}$, donc $\mathcal{R} \neq P(X)$ (pour $X = \omega^\omega$, ou X non dénombrable).
- Si $V = L$, il existe un ensemble Δ^1_2 qui n'est pas dans $\mathcal{R}$ (cf Moschovakis [1], § 5 A).
- Par contre, moyennant l'axiome P.D. de détermination des jeux projectifs, tout ensemble projectif est élément de $\mathcal{R}$ (cf Moschovakis [1], chap. 6)
- Enfin, dans le modèle de Lévy-Solovay (cf Solovay [1]), $\mathcal{R} = P(X)$.

Les résultats du théorème 2.8 ne sont pas très intéressants à appliquer à la famille régulière $\mathcal{R}$, qui est close par les opérations envisagées. Par contre, nous allons utiliser les théorèmes 2.12 et 2.14 pour résoudre un problème de C. Dellacherie concernant les boréliens des espaces produits. Nous faisons tout d'abord une remarque simple : Soit Φ une famille régulière, et Φ' une sous-famille de la famille Φ ayant les mêmes éléments boréliens. Alors Φ' est encore régulière. La raison en est que d'une part $W_{\Phi'} = W_\Phi$, et d'autre part la définition des noyaux séparateurs ne fait intervenir que les boréliens de la famille considérée, et par suite pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$, $S_\alpha(\Phi') = S_\alpha(\Phi)$. En particulier si Φ est régulière, la famille $\Phi \cap \underset{\sim}{\Delta}^1_1$, des boréliens de Φ est encore régulière. En général, la famille $\Phi \cap \underset{\sim}{\Delta}^1_1$ est bien sûr beaucoup moins intéressante que la famille Φ dans les applications. Cependant, ce n'est pas le cas dans l'application qui suit.

D'après ce qui vient d'être dit, la famille $\underset{\sim}{\Delta}^1_1(X)$ des boréliens de l'espace X est régulière. Par les théorèmes 2.12 et 2.14 nous allons en déduire une solution au problème suivant.

<u>DÉFINITION 3.3. Un ensemble</u> B <u>d'un produit d'espaces polonais</u> $X_1 \times X_2$ <u>est dit potentiellement</u> $- \underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ <u>(c'est-à-dire potentiellement dans la</u> ξème <u>classe multiplicative de la hiérarchie borélienne), s'il existe deux topologies d'espaces polonais</u> T_1 <u>et</u> T_2 , <u>sur</u> X_1 <u>et</u> X_2 <u>respectivement, plus fines que les topologies initiales, et telles que</u> B <u>soit un ensemble</u> $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ <u>dans la topologie produit</u> $T_1 \times T_2$.

Le problème de C. Dellacherie est de caractériser les ensembles potentiellement $- \underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ parmi tous les ensembles boréliens de $X_1 \times X_2$. Le théorème qui suit fournit une réponse <u>effective</u> à ce problème, en indiquant, pour chaque borélien B , une topologie produit <u>test</u> pour que B soit potentiellement $- \underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$. Notons $\theta_\alpha(X)$, pour chaque espace r.p. X , la topologie engendrée par les ensemble $\Delta^1_1(\alpha)$ de X .

<u>THÉORÈME 3.4. Soient</u> X_1 , X_2 <u>deux espaces r.p., et soit</u> B <u>un ensemble</u> $\Delta^1_1(\alpha)$ <u>de l'espace</u> $X_1 \times X_2$. <u>Il y a alors équivalence entre</u> :

(i) B <u>est potentiellement</u> $- \underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$.

(ii) $B \in (\underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_1) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_2))_\xi$.

(iii) B <u>est</u> $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ <u>dans la topologie produit</u> $\theta_\alpha(X_1) \times \theta_\alpha(X_2)$.

<u>DÉMONSTRATION</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soient T_1 et T_2 les deux topologies polonaises pour lesquelles B est $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ dans $T_1 \times T_2$. Comme T_1 et T_2 sont deux topologies polonaises plus fines que les topologies polonaises initiales sur X_1 et X_2 , les ouverts élémentaires pour ces topologies sont des boréliens des espaces X_1 et X_2 respectivement. Par suite on a clairement $B \in (\underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_1) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_2))_\xi$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). D'après le théorème 2.12, appliqué aux familles régulières $\underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_1)$ et $\underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_2)$, la famille $\underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_1) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_2)$ est une famille régulière, et d'après le corollaire 2.10 (v), il en est de même de chaque famille $(\underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_1) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_2))_\xi$. L'égalité $W^\xi_\Phi = W_{\Phi_\xi}$ de ce corollaire, appliquée à $\Phi = \underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_1) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_2)$ montre alors que si B est un ensemble $\Delta^1_1(\alpha)$, et $B \in (\underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_1) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(X_2))_\xi$, alors $B \in (\Delta^1_1(\alpha)(X_1) \times \Delta^1_1(\alpha)(X_2))_\xi$, et par suite B est $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ dans la topologie $\theta_\alpha(X_1) \times \theta_\alpha(X_2)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Il suffit clairement de prouver que si X est un espace r.p., $\Theta_\alpha(X)$ est une topologie polonaise sur X plus fine que la topologie initiale. Or $\theta_\alpha(X)$ est clairement plus fine que la topologie initiale, et est à base dénombrable. D'autre part, la base de $\theta_\alpha(X)$ étant formée d'ensembles ouverts fermés, $\theta_\alpha(X)$ est une topologie régulière, donc métrisable séparable. Pour montrer que $\theta_\alpha(X)$ est polonaise, on peut utiliser l'analogue du lemme 2.6 pour montrer que chaque ensemble $\theta_\alpha(X)$ - fermé est un espace de Baire pour $\theta_\alpha(X)$. La démonstration, en tout point semblable au lemme 2.6 est laissée au lecteur. On plonge alors $(X,\theta_\alpha(X))$ dans 2^ω en associant à x la suite $\varphi(x) = (1_{A_n}(x))_{n\in\omega}$, où $(A_n)_{n\in\omega}$, est une énumération des ensembles $\Delta^1_1(\alpha)$ de X . L'application φ est une application borélienne injective de X sur son image $\varphi(X)$, qui est donc borélienne dans 2^ω . D'autre part φ est un homéomorphisme de $(X,\theta_\alpha(X))$ sur $\varphi(X)$, et il suffit donc de montrer que $\varphi(X)$ est un G_δ de 2^ω . Pour cela on applique le critère de Hurewicz : Pour qu'un coanalytique de 2^ω soit un G_δ , il faut et il suffit qu'il ne contienne pas de fermé homéomorphe à $\mathbb{Q}$. Mais un tel fermé donnerait, par image réciproque, un $\theta_\alpha(X)$ - fermé homéomorphe à $\mathbb{Q}$, donc qui ne serait pas un espace de Baire. $\dashv$

<u>EXEMPLE 2</u>. <u>La base canonique de</u> X .

Un second exemple très simple de famille ayant la propriété de séparation est le cas d'une famille qui n'est formée que d'ensembles Δ^1_1 . La condition de séparation est alors automatiquement vérifiée, et la famille $\Phi \subset \Delta^1_1$ est séparante (sans paramètre) dès que $W_\Phi \in \Pi^1_1$.

En fait, cette condition est également suffisante pour que Φ soit régulière.

PROPOSITION 3.5. *Soit $\Phi \subset \Delta^1_1$ une famille telle que $W_\Phi \in \Pi^1_1$. Alors Φ est régulière (sans paramètre).*

DÉMONSTRATION. Le résultat est immédiat : En effet on a toujours $\Delta^1_1 \cap \Phi \subset S_\alpha(\Phi)$ pour toute famille Φ et tout $\alpha \in \omega^\omega$. Par suite si $\Phi \subset \Delta^1_1$, $S_\alpha(\Phi)$ contient Φ , et la propriété de régularité est vérifiée. $\dashv$

La démonstration de la proposition précédente est tout à fait triviale. Par contre, l'application du théorème fondamental 2.8 fournit dans ce cas particulier des résultats qui ne le sont pas.

Considérons la famille Φ_o formée des éléments de la base canonique $(N(n,X))_{n\in\omega}$ de l'espace X . Il est clair que Φ_o satisfait $W_{\Phi_o} \in \Pi^1_1$, puisque $(\alpha,n) \in W_{\Phi_o} \iff (\alpha,n) \in W \wedge \exists m\ (C_{\alpha,n} = N(m,X))$. Par suite Φ_o est une famille régulière. Comme la hiérarchie de Borel construite à partir de Φ_o est la hiérarchie des classes de Borel sur X , le théorème 2.8 permet d'en déduire les propriétés des analytiques et des boréliens des espaces produits dont les coupes sont de classe de Borel donnée. C'est ce cas particulier qui est à la base de notre notion de famille régulière.

Pour énoncer nos résultats, nous devons tout d'abord introduire les classes effectives Σ^o_ξ , Π^o_ξ , pour $\xi < \aleph_1$, et pour cela coder de manière un peu différente les boréliens de l'espace X (cf Kechris [1]).

On définit inductivement la relation " α code un borélien de X " et la relation " α code B_α " comme étant les plus petits ensembles satisfaisant les clauses suivantes :

(i) $\alpha(0) = 0$ implique α code $N(\alpha(1),X)$.

(ii) $\alpha = 1^\frown \beta$ et β code un borélien B_β implique α code $X - B_\beta$.

(iii) $\alpha = 2^\frown < \beta_n , n \in \omega >$ et pour chaque n , β_n code un borélien B_{β_n} implique $B_\alpha = \bigcup_n B_{\beta_n}$.

On vérifie que la relation " α code un borélien" est Π^1_1 , que l'application $\alpha \mapsto B_\alpha$ est bien une fonction, et qu'elle est surjective sur les boréliens de X . Un théorème difficile de Kleene assure que si on se restreint aux codes récursifs en un réel α_o , on obtient exactement les boréliens qui sont $\Delta^1_1(\alpha_o)$ (C'est l'une des versions effectives possibles du théorème de Suslin).

La construction inductive des codes fournit immédiatement la notion de ξ -code , définie par : α est un 0-code si $\alpha(0) = 0$, et α est un ξ -code pour $\xi > 0$, si $\alpha = 1^\frown 2^\frown < \beta_n\ , n \in \omega >$, où pour chaque n , β_n est un η_n-code pour un ordinal $\eta_n < \xi$.

On vérifie alors sans difficulté que l'ensemble des boréliens qui admettent un ξ -code est exactement la classe $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi$. Ceci permet de définir les analogues effectifs de la classe $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi$: Si α_o est un réel quelconque, on définit $\Pi^o_\xi(\alpha_o)$ comme étant la classe des boréliens qui admettent un ξ -code qui est récursif en α_o . De même, $\Sigma^o_\xi(\alpha_o) = (\Pi^o_\xi(\alpha_o))_c$.

Pour simplifier, nous allons énoncer nos résultats pour les ensembles Σ^1_1 et Δ^1_1 , les énoncés relativisés étant laissés au lecteur. Par suite, nous ne nous intéresserons qu'aux classes Σ^o_ξ , Π^o_ξ , pour les ordinaux $\xi < \omega_1^{CK}$, où ω_1^{CK} est l'ordinal de Church-Kleene, le premier ordinal qui n'admet pas de code $\alpha \in WO$ qui soit récursif. On peut montrer que l'on a $\Delta^1_1 = \bigcup_{\xi<\omega_1^{CK}} \Sigma^o_\xi = \bigcup_{\xi<\omega_1^{CK}} \Pi^o_\xi$.

<u>THÉORÈME 3.6</u>. <u>Soit</u> X <u>un espace r.p.</u>, ξ <u>un ordinal</u> $< \omega_1^{CK}$. <u>Alors</u> :

(i) $W_{\underset{\sim}{\Sigma}^o_\xi}$ <u>et</u> $W_{\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi}$ <u>sont des ensembles</u> Π^1_1 .

(ii) <u>Si</u> A_1 , A_2 <u>sont deux ensembles</u> Σ^1_1 , <u>et</u> A_1 <u>est séparable de</u> A_2 <u>par un ensemble</u> $\underset{\sim}{\Sigma}^o_\xi$ (<u>respt</u> $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi$) , <u>alors il existe</u> $\alpha_o \in \Delta^1_1$ <u>tel que</u> A_1 <u>soit séparable de</u> A_2 <u>par un ensemble</u> $\Sigma^o_\xi(\alpha_o)$ (<u>respt</u> $\Pi^o_\xi(\alpha_o)$).

<u>DÉMONSTRATION</u> : Pour (i), il suffit de remarquer que d'après le théorème 2.8, les classes $\underset{\sim}{\Sigma}^o_\xi$ et $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi$ sont séparantes. (ii) s'en déduit aussi, dès que l'on a démontré (iii), c'est-à-dire dès que l'on sait que $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi \cap \Delta^1_1 = \bigcup_{\alpha_o\in\Delta^1_1} \Pi^o_\xi(\alpha_o)$. Mais

cette dernière égalité est une conséquence presque immédiate de l'égalité $W^{\xi}_{\Phi_o} = W_{(\Phi_o)_\xi}$ donnée par le corollaire 2.10 (v), et dont nous laissons la démonstration au lecteur. ⊣

Le corollaire 2.9 fournit alors les résultats suivants :

THÉORÈME 3.7 Soient X et Y deux espaces polonais, ξ un ordinal dénombrable.

(i) Pour chaque borélien $B \subset X \times Y$, les ensembles $\{y \in Y : B_y$ est de classe additive $\xi\}$ et $\{y \in Y : B_y$ est de classe multiplicative $\xi\}$ sont des ensembles coanalytiques de Y.

(ii) Si A^1 et A^2 sont des ensembles analytiques dans $X \times Y$, et pour chaque $y \in Y$ on peut séparer la coupe A^1_y de la coupe A^2_y par un ensemble $\underset{\sim}{\Sigma}^o_\xi$ (resp^t $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi$), alors il existe un borélien à coupes $\underset{\sim}{\Sigma}^o_\xi$ (resp^t $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi$) qui sépare A^1 de A^2.

(iii) Pour qu'un borélien de $X \times Y$ soit à coupes $\underset{\sim}{\Sigma}^o_\xi$ (resp^t $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi$) dans $X \times Y$, il faut et il suffit qu'il soit dans la $\xi^{\text{ième}}$ classe de Borel additive (resp^t multiplicative) de la hiérarchie borélienne construite à partir des ensembles rectangles de la forme $U \times H$, où U est un ouvert d'une base de l'espace X, et H est un borélien de l'espace Y. En particulier, B est un borélien de l'espace $X \times Y$ à coupes $\underset{\sim}{\Sigma}^o_\xi$ (resp^t $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi$) si et seulement si il existe une topologie polonaise plus fine sur l'espace Y telle que B soit $\underset{\sim}{\Sigma}^o_\xi$ (res^t $\underset{\sim}{\Pi}^o_\xi$) dans $X \times Y$, où Y est muni de cette topologie plus fine.

Le résultat (iii) du théorème 3.7 fournit un moyen très commode de ramener l'étude des boréliens de coupes de classe de Borel donnée, à l'étude de la hiérarchie borélienne dans les espaces polonais. Pour des applications directes ou indirectes de cette méthode, nous renvoyons le lecteur à l'article de Louveau [4].

EXEMPLE 3. FAMILLES RÉGULIÈRES HÉRÉDITAIRES.

La plupart des propriétés sur les coupes d'analytiques et de boréliens étudiées dans la littérature correspondent à des familles héréditaires, c'est-à-dire closes par sous-ensembles : Outre la propriété d'être bien ordonné pour l'ordre induit par l'ordre de $\mathbb{R}$, Lusin [1] étudie la propriété d'être réduit à un point (étude de l'ensemble d'unicité, chap. IV) et la propriété d'être dénombrable. Les propriétés d'être fini, d'être de cardinalité $\leqslant n$, ont été étudiées par Novikov [1] , et Ljapunov [1]. D'autres propriétés, comme d'être claisemé, ont été étudiées par Kozlova [1], [2], [3] et Ljapunov [1]. Pour les propriétés d'être de mesure 0 , d'être maigre, les travaux les plus complets sont ceux de Kechris [2] , bien que ce dernier ne donne pas les conséquences "classiques" de ses théorèmes effectifs. La propriété d'être relativement compact remonte aux travaux de Kozlova [3], et celle d'être relativement K_σ aux travaux de Kechris [4] . Dans ce dernier travail, un certain nombre de σ-idéaux engendrés par des ensembles fermés sont étudiés, ainsi que dans le travail de Louveau [1], toujours du point de vue effectif.

Il est à noter qu'en écartant les propriétés qui correspondent à des σ-idéaux (dont le traitement est plus difficile, et utilise soit des techniques de dérivation, soit des techniques de jeux associés), les propriétés restantes parmi la liste précédente ont la caractéristique d'être engendrées par des propriétés sur les ensembles fermés, c'est-à-dire qu'un ensemble E a la propriété P si et seulement si son adhérence $\bar{E}$ l'a .

Le travail de Cenzer et Mauldin [1] dépasse ce cadre en l'englobant. Cenzer et Mauldin définissent une classe de familles, les familles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotones, pour lesquelles ils démontrent la propriété de biséparation. Nous allons maintenant étudier la régularité de ces familles.

<u>DÉFINITION 3.8</u> <u>Une famille</u> Φ <u>de parties de l'espace</u> X <u>est dite</u> $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$<u>-monotone s'il existe un ensemble coanalytique</u> T <u>de l'espace produit</u> X^ω <u>tel que</u> $A \in \Phi \leftrightarrow A^\omega \subset T$. <u>L'ensemble</u> T <u>est appelé le test pour</u> Φ . <u>Si</u> T <u>est un ensemble</u> $\Pi^1_1(\alpha_o)$, <u>nous dirons que</u> Φ <u>a pour paramètre</u> α_o .

La définition précédente est particulièrement intéressante à cause de la proposition suivante (cf Dellacherie [2]) :

PROPOSITION 3.9 (Dellacherie - dans une version non effective). Soit Φ_o une famille héréditaire de fermés de X, qui est telle que $\{\alpha \in \omega^\omega : F_\alpha \in \Phi_o\}$ est $\Pi^1_1(\alpha_o)$, où F est un ensemble Π^o_1 de $X \times \omega^\omega$ qui est universel pour les fermés de X. La famille héréditaire Φ engendrée par Φ_o, c'est-à-dire la famille des parties E de X telles que $\bar{E} \in \Phi_o$, est alors $\underset{\smile}{\Pi}^1_1$-monotone, avec paramètre α_o.

DÉMONSTRATION Définissons T par $(x_n)_{n\in\omega} \in T \leftrightarrow \overline{\{x_n, n\in\omega\}} \in \Phi_o$. Clairement T est un ensemble $\Pi^1_1(\alpha_o)$, puisque

$(x_n)_{n\in\omega} \in T \leftrightarrow \exists \alpha \in \Delta^1_1(<x_n, n\in\omega>) [\overline{\{x_n, n\in\omega\}} = F_\alpha \wedge F_\alpha \in \Phi_o]$.

D'autre part T est un test pour Φ, car

$A \in \Phi \leftrightarrow \bar{A} \in \Phi_o \leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\omega} [(\forall n\ x_n \in A) \rightarrow \overline{\{x_n, n\in\omega\}} \in \Phi_o] \leftrightarrow A^\omega \subset T$. ⊣

De cette proposition on déduit facilement que les familles introduites précédemment sont $\underset{\smile}{\Pi}^1_1$-monotone (en fait sans paramètre).

Le théorème qui suit est une version effective du résultat de Cenzer et Mauldin. D'autres démonstrations de ce résultat sont dues à Burgess [1] et à Dellacherie [2].

THÉORÈME 3.10 (Cenzer et Mauldin). Soit Φ une famille $\underset{\smile}{\Pi}^1_1$-monotone de parties de l'espace X, avec paramètre α_o. La famille Φ est séparante, avec paramètre α_o.

DÉMONSTRATION

(i) L'ensemble W_Φ est clairement $\Pi^1_1(\alpha_o)$, puisque

$(\alpha,n) \in W_\Phi \leftrightarrow (\alpha,n) \in W \wedge (C_{\alpha,n})^\omega \subset T$.

(ii) Pour démontrer la propriété de séparation, et puisque Φ est héréditaire, nous devons prouver que tout ensemble $\Sigma^1_1(\alpha)$ de Φ est contenu dans un ensemble $\Delta^1_1(<\alpha_o, \alpha>)$ de Φ. Supposons pour simplifier que T est Π^1_1, et soit A un ensemble Σ^1_1 dans Φ (le cas relativisé étant analogue).

Soit $A^{(n)} = \{(x_p)_{p\in\omega} : x_n \in A\}$. On a $A^\omega = \bigcap_n A^{(n)}$, et puisque A est dans Φ, $\bigcap_n A^{(n)} \subset T$. On peut alors trouver par Δ^1_1-sélection un ensemble Δ^1_1 $B \subset \omega \times X$ tel que pour tout n, $A^{(n)} \subset B_n$, et $\bigcap_n B_n \subset T$. Par le théorème 2.14 sur les ensembles rectangles, on en déduit l'existence d'un ensemble Δ^1_1 $B^\star \subset \omega \times X$, tel que pour tout n, $A \subset B^\star_n$ et $B^{\star(n)}_n \subset B_n$. L'ensemble Δ^1_1 $C = \bigcap_n B^\star_n$ convient, puisque $A \subset C$, et $C^\omega = \bigcap_n C^{(n)} \subset \bigcap_n B^{\star(n)}_n \subset \bigcap_n B_n \subset T$, donc C est un ensemble Δ^1_1 de Φ contenant A. $\dashv$

Revenons aux propriétés qui correspondent à des σ-idéaux. Celles que nous avons introduites précédemment sont toutes, hormis la propriété d'être de mesure 0, de la forme Φ_σ, pour une famille héréditaire Φ engendrée par des ensembles fermés qui est $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotone. Ceci explique l'intérêt qu'il y a à étudier les familles Φ_σ, pour Φ famille $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotone, et donc d'étudier, au vu du théorème 2.8, la régularité des familles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotones.

Nous avons déjà rencontré une telle famille, la famille $P(X)$ (qui a pour test X^ω !), et nous avons vu que nous devions imposer des restrictions pour obtenir des résultats de régularité. Nous allons faire de même dans le cas général. Rappelons que la famille $\mathcal{R}$ des parties régulières de X a été définie comme étant la famille des parties ayant la propriété de Baire pour toutes les topologies de Harrington $T(\alpha)$.

<u>THÉORÈME 3.11.</u> <u>Soit</u> Φ <u>une famille</u> $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$<u>-monotone de parties de</u> X, <u>avec paramètre</u> α_o. <u>La famille</u> $\Phi \cap \mathcal{R}$ <u>est régulière</u>, <u>avec paramètre</u> α_o.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Nous avons déjà vu que $W_\Phi = W_{\Phi\cap\mathcal{R}}$ est $\Pi^1_1(\alpha_o)$. Nous devons démontrer la propriété d'approximation. Supposons pour simplifier que $\alpha_o = \underline{0}$, et démontrons la propriété de régularité relativement à la topologie T, le résultat relativisé se démontrant de manière analogue.

Puisque d'après le théorème 3.10, Φ est séparante, et Φ est héréditaire, on a $S(\Phi) = S(\Phi \cap \mathcal{R}) = \Sigma^1_1 \cap \Phi$. Soit $E \in \Phi \cap \mathcal{R}$. Nous devons trouver une suite $(A_n)_{n\in\omega}$ d'ensembles Σ^1_1 dans $S(\Phi \cap \mathcal{R})$, c'est-à-dire dans Φ, tels que $E \sim \bigcup_n A_n$. Puisque $E \in \mathcal{R}$, il existe une suite de Σ^1_1, $(A_n)_{n\in\omega}$, tels que $E \sim \bigcup_n A_n$. Il reste à voir que $A^\omega_n \subset S$, où S est le test de Φ. Pour cela, considérons, pour n fixé, l'ensemble $A^\omega_n - S$. C'est un ensemble Σ^1_1 de l'espace X^ω, qui est contenu dans l'ensemble $A_n^\omega - E^\omega$, puisque $E \in \Phi$, donc $E^\omega \subset S$. Mais l'ensemble $A_n - E$ est un ensemble maigre pour T (dans X). Une application répétée du lemme sur les espaces produits (lemme 2.13), montre alors que $A_n^\omega - E^\omega$ est maigre pour la topologie T sur X^ω. Par le lemme 2.6, on en déduit que $A_n^\omega - S = \emptyset$, c'est-à-dire que $A_n \in \Phi$. $\dashv$

Si Φ est une famille $\underset{\sim}{\Pi}{}_1^1$-monotone, soit $\Phi_{\mathcal{R}}$ la famille, appelée famille <u>régularisée</u> de Φ, définie par $E \in \Phi_{\mathcal{R}} \leftrightarrow \exists E' \in \Phi \cap \mathcal{R}\ (E \subset E')$. Notons que pour la plupart des applications intéressantes, on a $\Phi_{\mathcal{R}} = \Phi$ (et que ceci est toujours vrai dans le modèle de Lévy-Solovay !). Nous pouvons déduire, par le théorème 2.8 et ses corollaires, les résultats suivants :

<u>THÉORÈME 3.12</u>. <u>Soit</u> Φ <u>une famille</u> $\underset{\sim}{\Pi}{}_1^1$<u>-monotone dans l'espace</u> X . <u>La famille</u> $(\Phi_{\mathcal{R}})_\sigma$ <u>satisfait les propriétés suivantes</u>, <u>pour tout espace Polonais</u> Y :

(i) <u>Si</u> A <u>est un ensemble analytique du produit</u> X x Y , <u>l'ensemble</u> $H = \{y \in Y : A_y \in (\Phi_{\mathcal{R}})_\sigma\}$ <u>est coanalytique</u>.

(ii) <u>Si</u> A <u>est un ensemble analytique de</u> X x Y <u>dont les coupes sont éléments de</u> $(\Phi_{\mathcal{R}})_\sigma$, <u>il existe un borélien</u> B , <u>à coupes dans</u> $(\Phi_{\mathcal{R}})_\sigma$, <u>qui contient</u> A .

(iii) <u>Si</u> B <u>est un borélien (resp^t un analytique) de</u> X x Y <u>à coupes dans</u> $(\Phi_{\mathcal{R}})_\sigma$, <u>il existe une suite</u> $(B_n)_{n\in\omega}$ <u>de boréliens (resp^t d'analytiques) de</u> X x Y <u>à coupes dans</u> Φ, <u>tels que</u> $B = \bigcup_n B_n$.

<u>REMARQUES</u>. 1) Dans le cas particulier où Φ est une famille $\underset{\sim}{\Pi}{}_1^1$-monotone engendrée par des ensembles fermés (et dans ce cas $\Phi_{\mathcal{R}} = \Phi$), les résultats du théorème 3.12 ont été obtenus indépendamment par Hillard [1], par une technique de dérivation.

2) Nous verrons dans le paragraphe final de ce chapitre qu'on ne peut sans dommage remplacer $\Phi_{\mathcal{R}}$ par Φ dans le théorème 3.12.

3) Supposons pour simplifier que Φ est sans paramètre, et que $\Phi = \Phi_{\mathcal{R}}$. On voit alors sans peine que la réunion de tous les ensembles Δ_1^1 dans Φ_σ coïncide avec l'ensemble $\Pi_1^1\ C(\Phi)$ introduit dans la démonstration du corollaire 2.10 (iv). Cependant, ce n'est que pour des familles particulières qu'une théorie complète

des ensembles projectifs effectifs qui sont dans Φ_σ peut être faite, et que l'on sait résoudre par exemple le problème du plus grand ensemble d'une classe effective donnée qui est dans Φ_σ (cf Kechris [2],[3] et [4], et Louveau [1]).

Le théorème 3.11 admet une généralisation intéressante, grâce au théorème 2.14.

<u>THÉORÈME 3.13</u>. <u>Soit</u> Φ_o <u>une famille</u> $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$<u>-monotone dans l'espace</u> X , <u>et</u> Φ <u>une famille régulière dans</u> X . <u>La famille</u> $\Phi_o \cap \Phi_{\sigma c}$ <u>est une famille régulière</u>. (<u>Le théorème</u> 3.11 <u>correspond à</u> $\Phi = \mathcal{R}$) .

<u>DÉMONSTRATION</u>. Puisque $W_{\Phi_0 \cap \Phi_{\sigma c}} = W_{\Phi_0} \cap W_{\Phi_{\sigma c}}$, le calcul de la complexité est immédiat. Pour prouver la propriété de régularité, supposons Φ_0 et Φ sans paramètre, et considérons la topologie T .

Soit $E \in \Phi_0 \cap \Phi_{\sigma c}$. Nous devons trouver une suite de Σ^1_1 , $(A_n)_{n\in\omega}$, du noyau séparateur $S(\Phi_0 \cap \Phi_{\sigma c})$, tels que $E \sim \bigcup_n A_n$. Puisque Φ est régulière, $\Phi_{\sigma c}$ est régulière (théorème 2.8), et par suite il existe une suite $(A_n)_{n\in\omega}$ d'éléments du noyau séparateur $S(\Phi_{\sigma c})$ tels que $E \sim \bigcup_n A_n$. Par la démonstration du théorème 3.11, puisque A_n est Σ^1_1 et $A_n - E$ est T-maigre, $A_n \in \Phi_0$. Il suffit donc de prouver que si $A \in \Phi_0$ et $A \in S(\Phi_{\sigma c})$, alors A est dans le noyau séparateur $S(\Phi_0 \cap \Phi_{\sigma c})$. Soit donc B un ensemble Σ^1_1 disjoint de A . Nous devons séparer A de B par un élément Δ^1_1 de $\Phi_0 \cap \Phi_{\sigma c}$. Considérons l'ensemble $\bar{A}^\Phi$. D'après la démonstration du théorème 2.8, l'ensemble $\bar{A}^\Phi$ est aussi un élément de $S(\Phi_{\sigma c})$, et $\bar{A}^\Phi \cap B = \emptyset$. Comme ceci a lieu pour tout ensemble Σ^1_1 disjoint de A , on en déduit que $\bar{A}^\Phi = \bar{A}^T$ est l'adhérence de A pour la topologie T , et que par suite $\bar{A}^\Phi - A$ est un fermé T-rare. Mais en utilisant de nouveau le résultat de la démonstration du théorème 3.11, comme $A \in \Phi_0$, on en déduit que $\bar{A}^\Phi \in \Phi_0$. Donc nous avons trouvé un ensemble Σ^1_1 , $\bar{A}^\Phi$, qui sépare A de B et qui est dans Φ_0 et dans $\Phi_{\sigma c}$. Comme Φ_0 et $\Phi_{\sigma c}$ sont deux familles séparantes (théorème 3.10 et théorème 2.8) et sont closes par intersection dénombrable, la famille $\Phi_0 \cap \Phi_{\sigma c}$ est faiblement séparante (avec même paramètre, <u>0</u> en l'occurence), d'après le théorème 2.19. Mais puisque $\bar{A}^\Phi$ est Σ^1_1 , dans $\Phi_0 \cap \Phi_{\sigma c}$ et disjoint de B , on peut séparer $\bar{A}^{\Phi}$ de B par un élément Δ^1_1 de $\Phi_\Theta \cap \Phi_{\sigma c}$. ⊣

Nous allons donner un exemple d'application de ces résultats, celui des familles modestes de Dellacherie [2] .

DÉFINITION 3.14 (Dellacherie). Soit Φ_0 une famille héréditaire de fermés de l'espace X . Φ_0 est dite famille modeste si pour un ensemble Π^0_1 F de $X \times \omega^\omega$, universel pour les fermés de X , l'ensemble $F_{\Phi_0} = \{\alpha \in \omega^\omega : F_\alpha \in \Phi_0\}$ est $\Pi^1_1(\alpha_0)$. Le réel α_0 est appelé un paramètre pour Φ_0 .

Il y a de nombreux exemples de familles modestes : la famille des ensembles de cardinalité $\leqslant n$, de cardinalité finie, la famille des fermés rares, la famille des compacts sont modestes. D'autres exemples peuvent être trouvés dans Kechris [4] et Louveau [1] .

D'après la proposition 3.9, si Φ_0 est une famille modeste, la famille héréditaire Φ engendrée par Φ_0 est $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotone. On peut donc appliquer le théorème 3.13 à la famille $\Phi \cap \underset{\sim}{\Pi}^0_1$, qui n'est bien sûr rien d'autre que la famille Φ_0 .

COROLLAIRE 3.15. Soit Φ_0 une famille de fermés modeste de l'espace r.p. X . La famille Φ_0 est régulière, et par suite, pour chaque espace Polonais Y :

(i) si B est un borélien de l'espace $X \times Y$ $\{y \in Y : B_y \in (\Phi_0)_\sigma\}$ et $\{y \in Y : B_y \in (\Phi_0)_{\sigma c}\}$ sont des ensembles coanalytiques.

(ii) Si A^1 , A^2 sont deux ensembles analytiques de $X \times Y$, et pour chaque $y \in Y$ la coupe A^1_y est séparable de la coupe A^2_y par un élément de $(\Phi_0)_\sigma$, il existe un ensemble borélien B à coupes dans $(\Phi_0)_\sigma$ qui sépare A^1 de A^2 .

(iii) Si B est un borélien à coupes dans $(\Phi_0)_\sigma$, B est la réunion d'une suite de boréliens B_n à coupes dans Φ_0 .

Il faut noter que le théorème 3.12 et le corollaire 3.15, bien que donnant des résultats très proches, ne parlent pas des mêmes familles, et ne sont pas directement réductibles l'un à l'autre (sauf pour la partie (i) des résultats), la raison en étant qu'en général l'adhérence coupe par coupe d'un borélien d'un espace produit est un analytique qui n'est pas nécessairement borélien. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considérer les résultats du théorème 3.12 concernant les ensembles à coupes relativement K_σ , et les résultats du corollaire 3.15 concernant les ensembles à coupes K_σ .

EXEMPLE 4. LES FAMILLES A ENVELOPPES.

Dans son article [1] , J.P. Burgess définit de manière syntaxique une classe de familles qui possèdent d'intéressantes propriétés de séparation, et dont la classe des familles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotone est un cas particulier. La définition qui suit correspond essentiellement à celle de Burgess, légèrement transformée pour les besoins de notre propos.

Soit X un espace r.p.. A chaque couple (n,p) , où n est un entier, et p est soit un entier soit ω , nous associons l'espace $X_{n,p} = X^n \times X^p$, muni de sa présentation récursive canonique. Si A est une partie de X , nous notons $A^{(n,p)} = \{((x_i)_{i<n},(y_j)_{j<p}) : \forall i < n \ \ \forall j < p \ (x_i \notin A \ \wedge \ y_j \in A)\}$. Ces notations gardent leur sens naturel si n ou p est nul.

DÉFINITION 3.16

(i) Soit $\alpha_0 \in \omega^\omega$, et pour chaque n soit T_n une partie $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$ de l'espace $X_{\alpha_0(n),\omega}$. Nous dirons qu'une famille Φ de parties de X est une famille de Burgess de test $<\alpha_0,(T_n)_{n\in\omega}>$ si Φ est définie par

$$A \in \Phi \leftrightarrow \forall n \ (A^{(\alpha_0(n),\omega)} \subset T_n) \ .$$

Si β_0 est un réel tel que la relation (dans $\omega \times X^\omega \times X^\omega$)

$$R(n,(x_p)_{p\in\omega},(y_q)_{q\in\omega}) \leftrightarrow ((x_i)_{i<\alpha_0(n)},(y_q)_{q\in\omega}) \in T_n$$

est $\Pi^1_1(\beta_0)$, le réel $<\alpha_0 , \beta_0>$ est appelé un paramètre pour Φ .

(ii) Si de plus il existe un réel α_1 et pour chaque n une partie T'_n de $X_{\alpha_0(n),\alpha_1(n)}$ tels que Φ soit la famille de Burgess de test $<\alpha_0 , (T_n)_{n\in\omega}>$ donné par $((x_i)_{i<\alpha_0(n)},(y_j)_{j\in\omega}) \in T_n \leftrightarrow ((x_i)_{i<\alpha_0(n)} ,(y_j)_{j<\alpha_1(n)}) \in T'_n$,

<u>alors nous dirons que</u> Φ <u>est une famille de Burgess bornée</u>, <u>de test</u> $<\alpha_o, \alpha_1, (T'_n)_{n\in\omega}>$ <u>et de paramètre</u> $<\alpha_o, \alpha_1, \beta_o>$.

Avec cette définition, les travaux de Burgess [1], effectivisés, permettent de démontrer le résultat suivant.

<u>THÉORÈME 3.17</u> (<u>Burgess</u>). <u>Soit</u> Φ <u>une famille de Burgess</u>, <u>de paramètre</u> $<\alpha_o, \beta_o>$. <u>La famille</u> Φ <u>est faiblement séparante</u>, <u>avec même paramètre</u>.

En fait, Burgess démontre directement, pour ce type de familles, la propriété d'existence de bonnes résolutions pour les ensembles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$ de Φ_c (cf la fin du § 2). La technique de démonstration qu'il utilise est celle dont nous nous sommes inspirés pour établir le théorème 2.18.

Le résultat précédent ne peut pas être amélioré en général : Il est possible de trouver une famille de Burgess Φ qui n'est pas séparante, non plus que la famille Φ_σ correspondante (ce qui entraîne que Φ n'est pas non plus régulière). Un exemple simple de cette situation est le suivant.

Soit $X = \omega^\omega$, et pour $\alpha \in \omega^\omega$, $n \in \omega$, définissons α/n par

$$\alpha/n(k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k = <m,p> \wedge \alpha(<m,p>) = 0 \wedge \alpha(<p,n>) = 0 \\ \qquad \wedge\ \alpha(<n,p>) \neq 0 , \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que si la relation $\underset{\alpha}{\leqslant}$ codée par α, définie par $p \underset{\alpha}{\leqslant} q \leftrightarrow \alpha(<p,q>) = 0$ est un ordre sur son domaine, alors α/n code l'ordre $\underset{\alpha}{\leqslant}$ restreint aux prédécesseurs de n pour $\underset{\alpha}{\leqslant}$. D'autre part, l'application $(\alpha,n) \to \alpha/n$ est récursive.

Considérons le test $<\alpha_o, (T_n)_{n\in\omega}>$ défini par :

- $\alpha_o(0) = 1$, $T_0 = \{ (\alpha, (\beta_i)_{i\in\omega}) : \exists i\ (\beta_i \neq \alpha/i)\}$.
- Pour $n > 0$, $\alpha_0(n) = 0$, $T_n = X^\omega$.

La famille de Burgess associée à ce test est la famille des parties A de ω^ω qui satisfont $\forall\alpha\ [\forall i\ (\alpha/i \in A) \to \alpha \in A]$. Par le résultat de Burgess, c'est une famille faiblement séparante sans paramètre. Par contre, si nous considérons l'ensemble A_1 formé des codes de bons ordres de type d'ordre $\leqslant 1$, nous voyons qu'il existe un plus petit élément de Φ contenant A_1, à savoir l'ensemble WO des codes de bons ordres. Mais WO est un Π^1_1 non borélien, donc en posant $A_2 = \omega^\omega$ - WO, nous obtenons un couple (A_0, A_1) d'ensembles Σ^1_1, qui satisfait que A_0 est séparable de A_1 par un élément de Φ, sans l'être par un élément borélien de Φ (ni même par un borélien de Φ_σ). Donc ni Φ ni Φ_σ ne sont séparantes.

De ce contrexemple, on déduit qu'il est nécessaire d'imposer de fortes conditions supplémentaires sur les familles de Burgess pour espérer obtenir la propriété de séparation. En particulier on a $\alpha_o \leqslant \underline{1}$ dans le contrexemple précédent, et par suite cette condition n'est pas à elle seule suffisante. Par contre, si on impose la condition plus forte $\alpha_0 = \underline{0}$, on voit facilement que l'on trouve alors exactement les familles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotones de Cenzer et Mauldin, qui sont séparantes. La condition précisée dans la définition qui suit est intermédiaire entre ces deux extrêmes, et comme nous le verrons correspond à de nombreux exemples naturels.

DÉFINITION 3.18 *Nous dirons qu'une famille de Burgess* Φ *est une famille à enveloppes si d'une part* Φ *est bornée, de test* $\langle \alpha_o, \alpha_1, (T_n)_{n\in\omega}\rangle$, *et d'autre part pour tout* n, $\alpha_0(n) \leqslant 1$.

La terminologie adoptée est justifiée par la proposition suivante.

PROPOSITION 3.19. *Soit* Φ *une famille à enveloppes, de paramètre* $\langle \alpha_o, \alpha_1, \beta_0\rangle$. *Pour chaque ensemble* H *qui est contenu dans un élément de* Φ, *il existe un plus petit élément* $\tilde{H}$ *de* Φ *qui contient* H, *appelé l'enveloppe de* H. *De plus, si* H *est* $\Sigma^1_1(\alpha)$, *son enveloppe* $\tilde{H}$ *est* $\Sigma^1_1(\langle \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \alpha\rangle)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\langle \alpha_0, \alpha_1, (T_n)_{n\in\omega}\rangle$ le test de Φ, et soit $H \subset X$, et $A_0 \in \Phi$ tels que $H \subset A_0$. Nous définissons pour chaque n une opération φ_n sur les parties de X en posant :

- si $\alpha_0(n) = 0$, $\varphi_n(A) = A \cup H$.
- si $\alpha_0(n) = 1$,

$\varphi_n(A) = A \cup H \cup \{x \in X : \exists (y_i)_{i<\alpha_1(n)} \ \forall i(y_i \in A) \ \wedge \ (x,y_0,\ldots,y_{\alpha_1(n)-1}) \notin T_n\}$.

Soit $\prec$ l'ordre sur les entiers $<p,q>$ donné par

$<p,q> \prec <p',q'> \leftrightarrow p + q < p' + q' \ \vee \ (p + q = p' + q' \ \wedge \ p < p')$.

C'est un ordre de type ω avec premier élément $<0,0>$. Si $<p,q> \neq <0,0>$, nous notons $<p,q>'$ le prédécesseur de $<p,q>$ dans $\prec$.

Définissons $H_{<p,q>}$ par $H_{<0,0>} = \varphi_0(\emptyset) = H$, et si $<p,q> \neq <0,0>$, $H_{<p,q>} = \varphi_p(H_{<p,q>'})$. Enfin soit $\tilde{H} = \bigcup_{p,q} H_{<p,q>}$. Il est clair que la suite $H_{<p,q>}$ est croissante, et que si H est $\Sigma^1_1(\alpha)$, la suite est uniformément $\Sigma^1_1(<\alpha_0 ,\alpha_1 ,\beta_0 ,\alpha>)$; il suffit donc de prouver que $\tilde{H}$ est bien l'enveloppe de H . Tout d'abord, soit $A \in \Phi$ tel que $H \subset A$. D'après la définition des opérations φ_n , on a $\varphi_n(A) = A$. Par récurrence sur $\prec$, on en déduit facilement que $\tilde{H} \subset A$. Il reste à prouver que $\tilde{H} \in \Phi$, c'est-à-dire que pour tout n , $\tilde{H}^{\alpha_0(n),\alpha_1(n)} \subset T_n$. Si $\alpha_0(n) = 0$, nous devons vérifier que $\tilde{H}^{\alpha_1(n)} \subset T_n$. Mais nous savons que $H \subset A_0$, donc par ce qui précède $\tilde{H} \subset A_0$, et par suite $\tilde{H}^{\alpha_1(n)} \subset A_0^{\alpha_1(n)} \subset T_n$. Si $\alpha_0(n) = 1$, nous devons prouver que $\tilde{H}^{(1,\alpha_1(n))} \subset T_n$, c'est-à-dire que si $y_0,\ldots,y_{\alpha_1(n)-1}$ sont dans $\tilde{H}$, et $(x,(y_i)_{i<\alpha_1(n)}) \notin T_n$, alors $x \in \tilde{H}$. Les y_i étant en nombre fini, il existe un entier $<p,q>$ tel que $\forall i < \alpha_1(n)$, $y_i \in H_{<p,q>}$. Soit q' tel que $<p,q> \prec <n,q'>$. On a $\forall i < \alpha_1(n)$ $y_i \in H_{<n,q'>'}$, donc $x \in \varphi_n(H_{<n,q'>'}) = H_{<n,q'>}$. ⊣

<u>REMARQUE</u>. D'après la démonstration qui précède, on voit bien ce qui sépare les familles que nous avons appelées familles à enveloppes des familles de Burgess générales qui satisfont $\alpha_0 \leqslant \underline{1}$. Pour ces dernières, il est encore possible de définir inductivement une notion d'enveloppe, mais on ne peut prouver en général que l'induction s'arrête à l'ordinal ω . Ainsi, dans le contrexemple indiqué plus haut, l'induction se poursuit jusqu'à $\aleph_1$. On ne peut plus alors affirmer que l'opération $H \to \tilde{H}$ conserve l'analycité des ensembles, fait qui est fondamental dans ce qui suit.

<u>THÉORÈME 3.20</u> <u>Soit</u> Φ <u>une famille de Burgess à enveloppes dans l'espace r.p.</u> X ,

<u>avec paramètre</u> $<\alpha_0, \alpha_1, \beta_0>$. <u>Alors</u> :

(i) <u>La famille</u> Φ <u>est séparante</u>, <u>avec même paramètre</u>.

(ii) <u>La famille</u> $\Phi \cap \mathcal{R}$ <u>est régulière</u>, <u>avec même paramètre</u>.

<u>DÉMONSTRATION</u> On vérifie sans difficulté que $W_\Phi = \{(\alpha,n) \in W : \forall k \; C_{\alpha,n}^{(\alpha_0(k),\alpha_1(k)} \subset T_k\}$ est $\Pi^1_1(<\alpha_0, \alpha_1, \beta_0>$. Nous allons prouver les propriétés de séparation et de régularité relativement aux ensembles Σ^1_1 , et en supposant pour simplifier α_0 et α_1 Δ^1_1 , et $\beta_0 = \underline{0}$, le cas général étant tout à fait semblable.

(i) Supposons que A_1 et A_2 sont deux ensembles Σ^1_1 , et que l'on peut séparer A_1 de A_2 par un élément E de Φ . Par la proposition 3.19, l'ensemble $\check{A}_1$ existe, est Σ^1_1 , et dans Φ . De plus, on a $\tilde{A}_1 \subset E$, donc $\tilde{A}_1$ est disjoint de A_2 . Par la séparation faible de Φ , il existe un ensemble Δ^1_1 de Φ qui sépare $\tilde{A}_1$ de A_2 .

(ii) Puisque Φ est séparante sans paramètre, le noyau $S(\Phi)$ contient les éléments Σ^1_1 de Φ . Si E est un élément de $\Phi \cap \mathcal{R}$, E est, à un ensemble T-maigre près, la réunion d'une suite $(A_n)_{n\in\omega}$ d'ensembles Σ^1_1 . Les ensembles $\tilde{A}_n$ sont Σ^1_1 et dans Φ , donc dans $S(\Phi)$. Nous allons montrer que E est, à un ensemble T-maigre près, la réunion des $\tilde{A}_n$, ce qui prouvera la régularité de Φ (relativement à la topologie T , mais encore une fois, le résultat relativisé est tout à fait analogue).

Puisque $A_n \subset \tilde{A}_n$, il est clair que $E - \bigcup_n \tilde{A}_n$ est T-maigre. Il reste donc à montrer que chaque $\tilde{A}_n - E$ est aussi T-maigre. Fixons n , et raisonnons par l'absurde. Si $\tilde{A}_n - E$ est non T-maigre, alors comme $\tilde{A}_n = \bigcup_{p,q} (A_n)_{<p,q>}$ (où les $(A_n)_{<p,q>}$ sont les ensembles définis dans la démonstration de 3.19), il existe un premier $<p_0, q_0>$ pour l'ordre $\prec$ tel que $(A_n)_{<p_0,q_0>} - E$ ne soit pas T-maigre. On ne peut avoir $<p_0, q_0> = <0,0>$, puisque $(A_n)_{<0,0>} = A_n$ est par hypothèse tel que $A_n - E$ est T-maigre. Donc $<p_0, q_0>'$ existe, et $(A_n)_{<p_0, q_0>'} - E$ est T-maigre. D'autre part, on ne peut avoir $\alpha_0(p_0) = 0$, car sinon $(A_n)_{<p_0, q_0>'} = (A_n)_{<p_0, q_0>}$. Donc $\alpha_0(p_0) = 1$ et

$(A_n)_{<p_0,q_0>} = (A_n)_{<p_0,q_0>'} \cup \{x : \exists (y_i)_{i<\alpha_1(p_0)} (\forall i\ y_i \in (A_n)_{<p_0,q_0>'}) \wedge$ $\wedge (x,(y_i)) \notin T_{p_0}\}$. Puisque $(A_n)_{<p_0,q_0>} - E$ n'est pas T-maigre, il existe un ensemble Σ^1_1 B tel que (a) $(A_n)_{<p_0,q_0>} \cap B \neq \emptyset$, et (b) $B \cap E$ est T-maigre . Soit alors

$D = \{(x,(y_i)_{i<\alpha_1(p_0)}) : \forall i\ y_i \in (A_n)_{<p_0,q_0>'} \wedge (x,(y_i)) \notin T_{p_0} \wedge x \in B\}$.

L'ensemble D est Σ^1_1 dans $X \times X^{\alpha_1(p_0)}$,et d'après (a) est non vide. Par suite, pour obtenir la contradiction cherchée, il suffit de prouver que D est T-maigre. Pour cela, remarquons que si $(x,(y_i))$ est dans D , alors ou bien l'un des y_i est dans $(A_n)_{<p_0,q_0>'} - E$, qui est T-maigre, ou bien, si tous les y_i sont dans E , alors comme $E \in \Phi$, x est aussi dans E , donc dans $E \cap B$, qui est aussi T-maigre. Le lemme sur les topologies produits (lemme 2.13) permet alors de conclure. $\dashv$

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer le corollaire de ce résultat, concernant les familles $(\Phi \cap \mathcal{R})_\sigma$, où Φ est une famille à enveloppes. C'est l'analogue du théorème 3.12. Nous allons plutôt indiquer quelques exemples intéressants de familles à enveloppes.

(i) Les familles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotones sont un cas particulier de familles à enveloppes, celui des familles satisfaisant $\alpha_0 = \underline{0}$.

(ii) La famille des relations d'équivalence sur X^2 est une famille à enveloppes. Il suffit de vérifier que cette famille admet le test :

- $\alpha_0(0) = 1$, $\alpha_1(0) = 0$ et $T_0 = \{(x_0,x_1) : x_0 \neq x_1\}$.
- $\alpha_0(1) = 1$, $\alpha_1(1) = 1$ et $T_1 = \{(x_0,x_1) , (x'_0,x'_1) : x_0 \neq x'_1 \vee x_1 \neq x'_0\}$.
- $\alpha_0(2) = 1$, $\alpha_1(2) = 2$ et
  $T_2 = \{(x_0,x_1) , (x'_0,x'_1) , (x''_0,x''_1) : x_0 \neq x'_0 \vee x'_1 \neq x''_0 \vee x_1 \neq x''_1\}$.
- $\alpha_0(n) = 0$, $\alpha_1(n) = 1$ et $T_n = X$, pour $n > 2$.

(iii) Nous laissons au lecteur le soin de trouver un test pour les familles à enveloppes suivantes :

- La famille des rectangles de l'espace X^n .
- La famille des ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$.
- La famille des filtres, celle des filtres non principaux, dans 2^ω .

REMARQUE. La classe des familles à enveloppes est pratiquement la classe la plus générale de familles "primaires" pour lesquelles nous savons résoudre le problème de la régularité, et par suite à partir desquelles nous pouvons, par les opérations de réunion dénombrable, de passage aux familles rectangles, de construction des classes de la hiérarchie borélienne au-dessus d'une famille, et dans certains cas d'intersection dénombrable, obtenir les familles dont nous savons qu'elles sont régulières.

Cependant, il existe d'autres familles de Burgess, de paramètre $\alpha_0 \leqslant 1$, pour lesquelles l'induction construisant les enveloppes a un ordinal de clôture $\leqslant \omega$, et il est possible de modifier la démonstration de 3.20 pour englober ces familles. Nous ne développerons pas ce point plus avant. Remarquons simplement que la famille des fermés de X est un exemple de telle famille, avec pour test

- $\alpha_0(0) = 1$, $T_0 = \{(x,(y_i) :$ la suite (y_i) ne converge pas vers $x\}$.
- $\alpha_0(n) = 0$, $T_n = X^\omega$ pour $n > 0$.

Les considérations précédentes permettent de donner une autre démonstration du corollaire 3.15 sur les familles modestes.

L'une des applications le plus intéressantes que Burgess donne de ses résultats concerne les relations d'équivalence. Disons qu'une relation d'équivalence E sur ω^ω est <u>grossière</u> s'il n'est pas possible de trouver un ensemble parfait non vide P de ω^ω , tel que les éléments de P soient deux à deux E-inéquivalents. L'un des problèmes centraux de cette théorie consiste à calculer le nombre de classes d'équivalence des relations grossières.

Le résultat fondamental de Silver (cf Harrington [1]) assure que si E est grossière et $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$, E a au plus $\aleph_0$ classes. La démonstration de Harrington de ce résultat est le premier exemple de résultat de théorie descriptive utilisant les topologies que nous avons appelées topologies de Harrington (via la notion de forcing associée. Une rédaction sans forcing peut être trouvée dans Louveau [3]). Par le résultat de Burgess, toute relation d'équivalence $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$ est l'intersection de $\aleph_1$ relations d'équivalence boréliennes. En utilisant le théorème de Silver, Burgess en déduit que si E est $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$ et grossière, E a au plus $\aleph_1$ classes.

Nous allons utiliser nos résultats de manière analogue, à l'étude des relations d'équivalences analytiques à classes de rang de Borel borné.

Stern [1] a prouvé que <u>moyennant l'hypothèse</u> $\forall\alpha\ \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$, <u>tout coanalytique qui admet une résolution telle que les approximations soient bornées en rang de Borel est en fait borélien</u>.

Par ailleurs nos résultats sur les familles à enveloppes et les classes de Borel entrainent le résultat suivant :

<u>COROLLAIRE 3.21</u>. <u>Soit</u> E <u>une relation d'équivalence analytique dont les classes sont</u> $\underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_0}$, <u>pour un ordinal</u> $\xi_0 < \aleph_1$. <u>Il existe une résolution</u> f <u>du complémentaire</u> $A = (\omega^\omega \times \omega^\omega) - E$, <u>telle que chaque ensemble</u> $E^f_\xi = (\omega^\omega \times \omega^\omega) - A^f_\xi$ <u>soit une relation d'équivalence borélienne dont les classes sont</u> $\underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_0}$.

<u>DÉMONSTRATION</u>. La famille des relations d'équivalence et la famille des ensembles à sections $\underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_0}$ sont deux familles faiblement séparantes,et closes par intersection dénombrable. Par suite le corollaire 2.19 montre que la famille des relations d'équivalence à classes $\underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_0}$ est aussi faiblement séparante. Le théorème 2.18 permet alors de conclure. $\dashv$

Ce corollaire permet de donner une démonstration simple d'un autre résultat de Stern[1]. Considérons une relation d'équivalence E analytique à coupes $\underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_0}$ et grossière. Les relations d'équivalence E^f_ξ du corollaire 3.21 sont boréliennes et grossières, donc par le théorème de Silver, ont un nombre dénombrable de classes. Comme ces classes sont $\underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_0}$, chaque E^f_ξ est $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{\xi_0+1}$, et par suite chaque A^f_ξ est $\underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_0+1}$. Le résultat précédent de Stern montre alors que moyennant l'hypothèse

$\forall\alpha \in \omega^\omega\ \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$, l'ensemble A , donc aussi E , est borélien. En appliquant de nouveau le théorème de Silver, on en déduit le résultat suivant.

COROLLAIRE 3.22. (Stern [1]). Si $\forall\alpha \in \omega^\omega\ \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$, toute relation d'équivalence analytique à classes bornées en rang de Borel et grossière a au plus $\aleph_0$ classes.

5. CONTREXEMPLES.

Nous allons terminer ce chapitre en essayant d'indiquer par des exemples les limites de notre travail.

Le premier contrexemple est particulièrement intéressant en ce qu'il montre que des hypothèses de régularité sur les ensembles considérés sont nécessaires. Dans le théorème 3.12, nous avons prouvé que si Φ est une famille $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$-monotone dans l'espace X , et B est un borélien de $X \times Y$ à coupes dans $(\Phi \cap \mathcal{R})_\sigma$, il existe une suite de boréliens de $X \times Y$ qui sont à coupes dans Φ et dont la réunion est B . Nous allons voir que l'on ne peut pas éliminer $\mathcal{R}$ dans ce résultat : Plus précisément, nous allons construire une famille $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$-monotone (sans paramètre) pour laquelle l'énoncé précédent, où $\Phi \cap \mathcal{R}$ est remplacé par Φ , devient indécidable relativement à la théorie des ensembles habituelle. l'exemple est celui de la famille des graphes : On considère $X_0 = X_1 = \omega^\omega$, et $X = X_0 \times X_1$. Un graphe dans X est le graphe d'une application partielle de X_0 dans X_1 ou d'une application partielle de X_1 dans X_0 . La famille Φ_G des graphes dans X est clairement une famille $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$-monotone, avec test T donné par $((x_0^0, x_0^1), (x_1^0, x_1^1), (x_2^0, x_2^1), (x_3^0, x_3^1)) \in T \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (x_0^0 \neq x_1^0) \vee (x_0^1 = x_1^1) \vee (x_2^0 = x_3^0) \vee (x_2^1 \neq x_3^1)$.
Considérons alors l'énoncé E suivant : "Tout ensemble borélien de X réunion dénombrable d'éléments de Φ_G est réunion dénombrable d'ensembles boréliens de la famille Φ_G " . On a alors :

PROPOSITION 3.20. L'énoncé E est indécidable. Plus précisément :

(i) L'énoncé E est vrai dans le modèle de Lévy-Solovay.

(ii) L'énoncé $\neg E$ est une conséquence de ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

DÉMONSTRATION. (i) L'énoncé E est un cas très particulier de l'énoncé sur les boréliens à coupes dans $(\Phi_G)_\sigma$, dont nous savons, puisque dans le modèle de Lévy-Solovay $\mathcal{R} = P(X)$, qu'il est vrai dans ce modèle (théorème 3.12).

(ii) Supposons maintenant l'hypothèse du continu. Soit $<$ un bon ordre de type $\aleph_1$ sur ω^ω , $A = \{(x_0, x_1) : x_0 < x_1\}$ et $A_1 = X - A_0$.

L'ensemble A est à coupes verticales dénombrables, et par suite, par l'axiome du choix, est réunion dénombrable de graphes de X_0 dans X_1 . De même A_1 est à coupes horizontales dénombrables, donc réunion dénombrable de graphes de X_1 dans X_0 . Par suite l'ensemble $X = A_0 \cup A_1$ est élément de la famille $(\Phi_G)_\sigma$. Par contre X n'est pas réunion de graphes boréliens : Pour le voir, il suffit de remarquer que tout graphe borélien est maigre dans X . $\dashv$

Le résultat qui précède est une justification, a posteriori, de l'introduction de la famille $\mathcal{R}$ des parties régulières. Mais il y a plus : le résultat montre qu'on ne peut pas espérer de résultats généraux sur les familles satisfaisant les propriétés de complexité, de biséparation et de commutativité avec la réunion dénombrable sans introduire une propriété de régularité sur ces familles. C'est donc aussi une justification a posteriori de notre notion de "famille régulière", et de notre méthode consistant à aborder ces problèmes par l'étude d'une propriété de régularité.

Le second contrexemple va montrer que la propriété de régularité choisie n'est sans doute pas assez restrictive, ne permettant pas d'englober dans une même théorie tous les exemples "naturels" de familles séparantes.

Considérons $X = [0,1]$ et μ la mesure de Lebesgue sur X . La famille Φ_μ est la famille des parties μ-négligeables de $[0,1]$.

PROPOSITION 3.12. La famille Φ_μ est une famille séparante (sans paramètre), close par union dénombrable, et $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1 \cap \Phi_\mu$ n'est pas régulière.

DÉMONSTRATION. Le fait que Φ_μ est une famille séparante peut être trouvé dans l'article de Kechris [2]. Le calcul de la complexité est dû à Tanaka [1], et le résultat de séparation à Tanaka [2].

La démonstration du fait que $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1 \cap \Phi_\mu$ n'est pas régulière copie la démonstration classique de l'existence d'un G_δ dense de mesure nulle. Soit $\alpha_o \in \omega^\omega$, et considérons la réunion $C_\mu(\alpha_o)$ de tous les ensembles $\Delta^1_1(\alpha_o)$ de mesure nulle. L'ensemble $C_\mu(\alpha_o)$ est $\Pi^1_1(\alpha_o)$. Par ailleurs comme Φ_μ est séparante, le noyau séparateur $S_{\alpha_o}(\Phi_\mu \cap \underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1)$ est formé exactement des ensembles $\Sigma^1_1(\alpha_o)$ contenus dans $C_\mu(\alpha_o)$. Par suite pour que $\Phi_\mu \cap \underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1$ soit régulière avec paramètre α_o, il faut que pour chaque ensemble analytique de mesure nulle A, l'ensemble $A - C_\mu(\alpha_o)$ soit $T(\alpha_o)$-maigre. Pour terminer la démonstration, on construit un analytique dans $X - C_\mu(\alpha_o)$ qui n'est pas $T(\alpha_o)$-maigre - en fait qui est $T(\alpha_o)$-dense dans $X - C_\mu(\alpha_o)$. Pour cela on choisit une suite $(x_n)_{n\in\omega}$ de points dans $X - C_\mu(\alpha_o)$ qui est dense pour $T(\alpha_o)$ et on choisit pour chaque m une suite ε^m_n de réels positifs avec $\sum_n \varepsilon^m_n = 2^{-m}$. Soit $O_m = \bigcup_n B(x_n, \varepsilon^m_n)$. Les ouverts O_m sont a fortiori $T(\alpha_o)$-ouverts, et denses dans $X - C_\mu(\alpha_o)$. Par suite $A = \bigcap_m [O_m \cap (X - C_\mu(\alpha_o))]$ est un G_δ $T(\alpha_o)$-dense dans $X - C_\mu(\alpha_o)$. Enfin $\mu(A) \leqslant \mu(O_m) \leqslant 2^{-m}$ pour tout m, donc $A \in \Phi_\mu \cap \underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1$. $\dashv$

REMARQUE. La démonstration précédente, plus le fait que la mesure μ est effectivement régulière, en ce sens que tout $\Sigma^1_1(\alpha)$ de mesure nulle est contenu dans un G_δ de mesure nulle qui est $\Delta^1_1(\alpha)$ (cf Kechris [2]), permet en fait de montrer que la famille $\Phi_\mu \cap G_\delta$ n'est pas non plus régulière. Par contre la famille $\Phi_\mu \cap \underset{\sim}{\Pi}{}^0_1$, qui est une famille modeste, est régulière par le corollaire 3.15.

L'exemple précédent montre que la notion de régularité que nous avons introduite ne permet pas de faire une théorie générale des familles séparantes. Restreignons-nous aux familles qui sont héréditaires. Le problème général peut être alors exprimé de la façon suivante : Considérons, pour une famille $\mathcal{R}_o$ fixée, la classe $\mathcal{C}_{\mathcal{R}_o}$ des familles de la forme $\Phi_{\mathcal{R}_o} = \{A \subset X : \exists B \in \Phi \cap \mathcal{R}_o \ (A \subset B)\}$, où Φ varie dans la classe $\mathcal{C}_{sep}$ des familles héréditaires séparantes. Pour quelles familles $\mathcal{R}_o$ a-t-on que pour toute $\Phi \in \mathcal{C}_{sep}$, $(\Phi_{\mathcal{R}_o})_\sigma$ est séparante, et commute avec la réunion dénombrable ?

Le seul résultat positif connu est pour $\mathcal{R}_o = \underset{\sim}{\Pi}^o_1$, car dans ce cas $\Phi_{\mathcal{R}_o}$ est une famille $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotone, et le résultat sur $(\Phi_{\mathcal{R}_o})_\sigma$ est le théorème 3.12. Par contre, les autres cas sont ouverts, les plus intéressants étant sans doute les cas extrêmes, c'est-à-dire le cas $\mathcal{R}_o = \underset{\sim}{\Delta}^1_1$ d'une part, et le cas $\mathcal{R}_o = P(X)$ dans le modèle de Lévy-Solovay d'autre part.

Bien entendu, on peut également essayer de résoudre les problèmes précédents de manière plus restreinte, en remplaçant la classe des familles séparantes héréditaires par des classes moins vastes. Dans cette direction d'étude, une classe certainement très intéressante à étudier, qui contient la classe des familles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotones, est la classe $\mathcal{C}_{cal}$ des familles qui sont formées des ensembles de calibre nul, pour un calibre donné sur l'espace X , classe qui est définie et étudiée par Dellacherie dans [2] . Cette classe contient, outre les familles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotones, l'exemple Φ_μ considéré précédemment, ainsi que les familles Φ_f des ensembles de capacité nulle pour une capacité f de Choquet sur X . Les mêmes problèmes qu'indiqué précédemment pour la classe $\mathcal{C}_{sep}$ sont également ouverts pour la classe $\mathcal{C}_{cal}$.

APPENDICE 1. GÉNÉRALISATION AUX ESPACES MESURES ABSTRAITS.

Comme promis dans l'introduction, nous allons montrer brièvement comment étendre nos résultats en remplaçant l'espace Polonais auxiliaire Y par un espace mesuré abstrait.
L'intérêt de la théorie effective apparaît ici clairement : Il va nous suffire d'étendre les deux propositions 2.2. et 2.9. à ce cadre.

Considérons donc un espace mesuré abstrait Y, c'est-à-dire une structure $\langle Y, \mathcal{B}_Y \rangle$, où Y est un ensemble et $\mathcal{B}_Y$ est une σ-algèbre de parties de Y.
Si Φ est une famille quelconque de parties d'un ensemble E, notons $A(\Phi)$ la famille des parties obtenues par opération A de Suslin à partir de la famille Φ, $CA(\Phi)$ la famille $(A(\Phi))_c$, et $BiA(\Phi)$ la famille $A(\Phi) \cap CA(\Phi)$.
Dans l'espace produit $X \times Y$, où X est l'espace Polonais de base, et Y est un espace mesuré abstrait, la famille qui va jouer le rôle des ensembles analytiques est la famille $A(\underset{\sim}{\Sigma}{}^0_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$, et celle qui va jouer le rôle des ensembles boréliens est la famille $BiA(\underset{\sim}{\Sigma}{}^0_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$, qui est en général distincte de la plus petite tribu engendrée par la famille $\underset{\sim}{\Delta}{}^1_1(X) \times \mathcal{B}_Y$.
Les propositions 2.2 et 2.9 s'étendent à ce cadre de la manière suivante :

THÉORÈME A 1. Soit Φ une famille de parties de l'espace Polonais X, Y un espace mesuré abstrait.

a) Si Φ est une famille séparante, alors

(i) Pour tout ensemble $B \in BiA(\underset{\sim}{\Sigma}{}^0_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$, l'ensemble $H = \{y \in Y : B_y \in \Phi\}$ est un ensemble dans $CA(\mathcal{B}_Y)$.

(ii) Si A^1 et A^2 sont deux éléments de $A(\underset{\sim}{\Sigma}{}^0_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$, et pour chaque $y \in Y$, A^1_y est séparable de A^2_y par un élément de Φ, il existe un élément $B \in BiA(\underset{\sim}{\Sigma}{}^0_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$, à coupes dans Φ, qui sépare A^1 de A^2.

b) Si Φ est une famille régulière, alors

(i) Pour tout ensemble $B \in BiA(\underset{\sim}{\Sigma}{}^0_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$, l'ensemble $H = \{y \in Y : B_y \in \Phi_\sigma\}$ est dans $CA(\mathcal{B}_Y)$.

(ii) Si A^1 et A^2 sont deux éléments de $A(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$, et pour chaque y de Y , A^1_y est séparable de A^2_y par un élément de Φ_σ , il existe un élément $B \in BiA(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$, à coupes dans Φ_σ , qui sépare A^1 de A^2.

(iii) Si B est un élément de $BiA(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$ à coupes dans Φ_σ , B est la réunion d'une suite $(B_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de $BiA(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$ à coupes dans Φ .

Ce théorème permet clairement d'étendre tous nos résultats au cadre des espaces abstraits.

DÉMONSTRATION. Dans tous les cas, l'idée de base est la même : Il s'agit par une technique de transfert, de se ramener au cas où Y est une partie de 2^ω , et d'utiliser dans cet espace les résultats d'uniformisation du chapitre 1.

(a,i). Soit B un élément de $BiA(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \mathcal{B}_Y)$. Clairement, il existe une suite $(E_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de $\mathcal{B}_Y$, telle que B soit encore élément de $BiA(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \{E_n, n \in \omega\})$. Considérons l'application $\varphi : Y \to 2^\omega$ définie par $\varphi(y)(n) = 0$ si $y \notin E_n$, et $\varphi(y)(n) = 1$ si $y \in E_n$. L'application φ est un isomorphisme bimesurable entre Y muni de la tribu engendrée par les E_n et son image $Y' = \varphi(Y)$ dans 2^ω , muni de sa tribu borélienne. (L'application φ n'est pas nécessairement injective sur Y . Par isomorphisme bimesurable, nous voulons dire que le quotient $\hat{Y}$ de Y par la relation d'équivalence "appartenir au même atome de la tribu" est isomorphe, par l'application $\hat{\varphi}$ induite, à l'image Y') . Considérons alors l'ensemble $B' \subset X \times 2^\omega$ défini par
$(x,\alpha) \in B' \leftrightarrow \exists\, y \in Y\ (\alpha = \varphi(y) \wedge (x,y) \in B)$. Clairement B' est élément de $BiA(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(Y'))$. De plus si $H = \{y \in Y : B_y \in \Phi\}$ et $H' = \{\alpha \in Y' : B'_\alpha \in \Phi\}$, on a clairement $H = \varphi^{-1}(H')$. Par suite il suffit de prouver que l'ensemble H' est élément de $CA(\underset{\sim}{\Delta}^1_1(Y'))$. Nous nous sommes donc bien ramenés au cas où Y est une partie de 2^ω munie de sa tribu borélienne. Bien entendu, l'ensemble $Y' \subset 2^\omega$ est a priori arbitraire. Pour pouvoir utiliser les résultats du chapitre 1, nous devons maintenant nous ramener à l'espace 2^ω . La technique est la suivante : Puisque B' est à la fois dans $A(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(Y'))$ et dans $CA(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(Y'))$, il existe deux ensembles A et G de $X \times 2^\omega$, tels que

$B' = A \cap (X \times Y') = G \cap (X \times Y')$, et tels que A soit dans $A(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(2^\omega)) = \underset{\sim}{\Sigma}^1_1(X \times 2^\omega)$ et G dans $CA(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(2^\omega) = \underset{\sim}{\Pi}^1_1(X \times 2^\omega)$. Considérons $H'' = \{\alpha \in 2^\omega : \exists D \in \Phi\ A_\alpha \subset D \subset G_\alpha\}$. Puisque pour $\alpha \in Y'$, $A_\alpha = G_\alpha$, on en déduit immédiatement que $H' = H'' \cap Y'$. Il suffit donc de démontrer que l'ensemble H'' est un ensemble coanalytique dans 2^ω . Soit $\alpha_o \in \omega^\omega$ un réel tel que A soit $\Sigma^1_1(\alpha_o)$, que G soit $\Pi^1_1(\alpha_o)$, et que Φ soit séparante avec paramètre α_o . On a alors :

$$\alpha \in H'' \leftrightarrow \exists D \in \Phi\ (A_\alpha \subset D \subset G_\alpha) ,$$
$$\leftrightarrow \exists D \in \Phi \cap \Delta^1_1(<\alpha_o, \alpha>)\ (A_\alpha \subset D \subset G_\alpha) ,$$
$$\leftrightarrow \exists n\ [(<\alpha_o , \alpha> , n) \in W_\Phi \wedge A_\alpha \subset C_{<\alpha_o,\alpha>,n} \subset G_\alpha] ,$$

et par la propriété de séparation de Φ , H'' est $\Pi^1_1(\alpha_o)$.

La démonstration de (a,ii) est très analogue : On commence par se ramener au cas où les ensembles A^1 et A^2 sont dans $A(\underset{\sim}{\Sigma}^o_1(X) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(Y'))$, pour une partie Y' de 2^ω . On sait que pour chaque $\alpha \in Y'$, A^1_α est séparable de A^2_α par un élément de Φ . On considère alors deux ensembles $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$ D^1 et D^2 tels que $A^1 = D^1 \cap (X \times Y')$ et $A^2 = D^2 \cap (X \times Y')$, et l'ensemble $Y'' \subset 2^\omega$ défini par $\alpha \in Y'' \leftrightarrow D^1_\alpha$ est séparable de D^2_α par un élément de Φ . Par le même argument que précédemment, Y'' est coanalytique, et d'après l'hypothèse Y' est contenu dans Y'' . Soit α_o un réel tel que $D^1 \in \Sigma^1_1(\alpha_o)$, $D^2 \in \Sigma^1_1(\alpha_o)$, $Y'' \in \Pi^1_1(\alpha_o)$ et Φ est séparante avec paramètre α_o , et considérons la relation R définie par $(\alpha,n) \in R \leftrightarrow \alpha \in Y'' \wedge (<\alpha_o,\alpha>,n) \in W_\Phi \wedge D^1_\alpha \subset C_{<\alpha_o,\alpha>,n}$ $\wedge D^2_\alpha \cap C_{<\alpha_o,\alpha>,n} = \emptyset$.

R est une relation $\Pi^1_1(\alpha_o)$, et pour chaque $\alpha \in Y''$, il existe d'après ce qui précède un entier n tel que $(\alpha,n) \in R$. Par uniformisation (cf chapitre 1), il existe une fonction $\Pi^1_1(\alpha_o)$-récursive partielle f , définie sur Y'' à valeurs dans ω , telle que $\forall \alpha \in Y''\ R(\alpha,f(\alpha))$. Posons $B' = \{(x,\alpha) : \alpha \in Y''$ $\wedge\ x \in C_{(<\alpha_o,\alpha>,f(\alpha))}\}$. Clairement B' est à coupes dans Φ et sépare $D^1 \cap (X \times Y'')$ de $D^2 \cap (X \times Y'')$. Pour terminer la démonstration, il suffit donc de prouver que B' est élément de $BiA(\underset{\sim}{\Delta}^1_1(X \times Y''))$, c'est-à-dire, puisque

$Y'' \in \Pi^1_1(\alpha_0)$, que $B' \in \underset{\sim}{\Pi}^1_1$ et que $(X \times Y'') - B' \in \underset{\sim}{\Pi}^1_1$. D'après la définition de B' , il est clair que $B' \in \Pi^1_1(\alpha_0)$. D'autre part

$(x,\alpha) \in (X \times Y'') - B' \leftrightarrow \alpha \in Y'' \wedge x \notin C_{<\alpha_0,\alpha>,f(a)}$, donc $(X \times Y'') - B'$ est aussi $\Pi^1_1(\alpha_0)$ d'après les propriétés du codage $<W,C>$ et du fait que f est $\Pi^1_1(\alpha_0)$-récursive.

b) Puisque Φ est une famille régulière, la famille Φ_σ est séparante (théorème 2.8) et par suite (b,i) et (b,ii) sont des conséquences de (a,i) et (a,ii).

Pour démontrer (b,iii) , on se ramène comme précédemment au cas où $B \in BiA(\underset{\sim}{\Sigma}^0_1(X) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(Y'))$ pour une partie Y' de 2^ω . On sait que pour chaque $\alpha \in Y'$, $B_\alpha \in \Phi_\sigma$, et on veut trouver une suite $(B_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de $BiA(\underset{\sim}{\Sigma}^0_1(X) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(Y'))$, à coupes dans Φ , tels que $B = \bigcup_n B_n$. Soient A et G tels que $B = A \cap (X \times Y') = G \cap (X \times Y')$, et $A \in \underset{\sim}{\Sigma}^1_1$, $G \in \underset{\sim}{\Pi}^1_1$. Soit α_0 un réel tel que $A \in \Sigma^1_1(\alpha_0)$, $G \in \Pi^1_1(\alpha_0)$ et Φ soit régulière avec paramètre α_0 . D'après le théorème 2.8 (ii), pour chaque $\alpha \in Y'$ il existe un réel $\beta \in \Delta^1_1(<\alpha_0,\alpha>$ tel que $\forall m\ (<\alpha_0,\alpha>, \beta(m)) \in W_\Phi$ et $A_\alpha = G_\alpha = \bigcup_m C_{<\alpha_0,\alpha>,\beta(m)}$. Considérons alors l'ensemble Y'' défini par

$\alpha \in Y'' \leftrightarrow \exists \beta \in \Delta^1_1(<\alpha_0,\alpha>)\ [\ \forall m\ (<\alpha_0,\alpha>, \beta(m)) \in W_\Phi) \wedge$

$\wedge\ (A_\alpha \subset \bigcup_m C_{<\alpha_0,\alpha>,\beta(m)} \subset G_\alpha)]$. Y'' est un ensemble $\Pi^1_1(\alpha_0)$ qui contient Y' d'après ce qui précède. D'autre part par $\Pi^1_1(\alpha_0)$-uniformisation, il existe une fonction $\Pi^1_1(\alpha_0)$-récursive partielle, définie sur Y'' à valeurs dans ω^ω , et telle que pour chaque $\alpha \in Y''$, $f(\alpha)$ satisfasse :

(★) $\forall m\ (<\alpha_0,\alpha>, f(\alpha)(m)) \in W_\Phi$;

et (★★) $A_\alpha \subset \bigcup_m C_{<\alpha_0,\alpha>,f(\alpha)(m)} \subset G_\alpha$.

On définit alors B'_n par $(x,\alpha) \in B'_n \leftrightarrow \alpha \in Y'' \wedge x \in C_{<\alpha_0,\alpha>,f(\alpha)(n)}$, et soit $B_n = B'_n \cap (X \times Y')$. Les ensembles B_n sont clairement à coupes dans Φ d'après (★) , et $B = \bigcup_n B_n$ d'après (★★) . Il reste à vérifier que chaque B_n est élément de $BiA(\underset{\sim}{\Sigma}^0_1(X) \times \underset{\sim}{\Delta}^1_1(Y'))$,et ceci résulte du fait que chaque B'_n est $\Pi^1_1(\alpha_0)$ et de complémentaire dans $X \times Y''$ $\Pi^1_1(\alpha_0)$, ce qui se montre comme précédemment en (a,ii) . ⊣

APPENDICE 2. GÉNÉRALISATION AUX AUTRES NIVEAUX DE LA HIÉRARCHIE DE LUSIN.

A la différence des résultats concernant le premier niveau de la hiérarchie projective, les résultats que nous allons présenter maintenant sont très fragmentaires. La raison en est que les problèmes soulevés par cette généralisation semblent atteindre les limites de nos connaissances actuelles des propriétés des ensembles projectifs, même en présence de nouveaux axiomes rajoutés à la théorie des ensembles habituelle.

Tout d'abord, on ne peut espérer étendre nos techniques qu'à des classes de la hiérarchie projective qui sont closes par projection (donc les classes $\underset{\sim}{\Sigma}^1_n$) , et qui de plus satisfont l'analogue du théorème de séparation de Suslin. Cela amène à ne pas retenir des axiomes du type $V = L$, ou $V = L[\mu]$, qui impliquent la séparation pour les classes $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$, $n \geqslant 2$ (cf Moschovakis [1], §5,A).

L'axiome qui semble opératoire ici et que nous retiendrons est l'axiome P.D. de <u>détermination des jeux projectifs</u>, dont les conséquences en théorie descriptive peuvent être trouvées dans Moschovakis [1], chapitre 6 . L'axiome P.D. entraîne en particulier que les classes $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$, $n \in \omega$, ont la propriété de séparation. C'est donc pour ces classes que nous allons discuter, pour une famille Φ de parties d'un espace Polonais X , les propriétés qui suivent.

<u>DÉFINITION A 2.1.</u> <u>Soit</u> Γ <u>une classe d'ensembles,</u> Φ <u>une famille de parties de l'espace Polonais</u> X .

<u>La famille</u> Φ <u>a la propriété de</u> <u>Γ-définissabilité si pour tout espace Polonais auxiliaire</u> Y , <u>et pour tout ensemble</u> B <u>élément de</u> $\Delta = \Gamma \cap \Gamma_c$ <u>contenu dans</u> $X \times Y$, <u>l'ensemble</u> $H_B = \{y \in Y : B_y \in \Phi\}$ <u>est dans</u> Γ_c .

<u>La famille</u> Φ <u>a la propriété de</u> <u>Γ-biséparation si pour tout espace Polonais auxiliaire</u> Y , <u>et pour tout couple</u> A^1 , A^2 <u>d'éléments de</u> Γ <u>contenus dans</u> $X \times Y$, <u>tels que pour chaque</u> $y \in Y$ <u>la coupe</u> A^1_y <u>est séparable par un élément de</u> Φ <u>de la coupe</u> A^2_y , <u>il existe un élément</u> B <u>de</u> Δ <u>à coupes dans</u> Φ <u>qui</u>

<u>sépare</u> A^1 <u>de</u> A^2 .

<u>Enfin la famille</u> Φ <u>a la propriété de</u> Γ<u>-commutativité avec la réunion dénombrable si pour tout espace Polonais auxiliaire</u> Y <u>et pour tout élément</u> $B \in \Gamma$, <u>contenu dans</u> $X \times Y$ <u>et à coupes dans</u> Φ_σ , <u>il existe une suite</u> $(B_n)_{n\in\omega}$ <u>d'éléments de</u> Γ <u>à coupes dans</u> Φ <u>telle que</u> $B = \bigcup_n B_n$.

Les propriétés que nous avons étudiées jusqu'à maintenant sont, avec cette terminologie, les propriétés de $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$-définissabilité, $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$-biséparation et $\underset{\sim}{\Delta}^1_1$-commutativité avec la réunion dénombrable. Moyennant l'axiome P.D. , nous allons maintenant discuter les propriétés de $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$-définissabilité, $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$-biséparation et $\underset{\sim}{\Delta}^1_{2n+1}$-commutativité, pour $n \geqslant 1$.

1. $\underset{\sim}{\Sigma}^1_3$<u>-biséparation</u>.

Pour pouvoir étendre nos techniques au cas de la classe $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$, il est clair qu'il est nécessaire de posséder deux outils. Le premier est un résultat analogue au théorème d'uniformisation du chapitre 1. Ceci ne pose pas de problème : Moyennant l'axiome P.D. , on peut sans difficulté montrer que les classes $\underset{\sim}{\Pi}^1_{2n+1}$ (et leurs classes relativisées) sont des classes dites "de Spector" (cf Moschovakis [1], § 4D) pour lesquelles l'analogue du théorème 1.5 est vrai (cf Louveau [2]). L'autre outil nécessaire est un analogue, pour les classes $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$, des topologies de Harrington, satisfaisant au théorème de Baire. La difficulté est ici beaucoup plus grande : Tout d'abord, dans l'état des connaissances sur la hiérarchie projective, l'axiome P.D. n'est pas suffisant, et nous devons accepter un axiome de détermination des jeux, l'axiome $AD(L[\mathbb{R}])$ (cf Kechris et Martin [1]), qui atteint les limites de toute crédibilité. Deuxièmement, cet axiome ne donne de renseignements que pour $n = 1$, c'est-à-dire pour la classe $\underset{\sim}{\Sigma}^1_3$. On peut montrer alors que les ensembles $\underset{\sim}{\Sigma}^1_3$ dans un espace r.p. X , sont exactement les projections sur X des fermés de l'espace $X \times (\aleph_\omega^{L[\mathbb{R}]})^\omega$, où $\aleph_\omega^{L[\mathbb{R}]}$ est muni de la topologie discrète (cf Kechris et Martin [1]) . Ce résultat a permis à Kechris [5] de définir, pour la classe $\underset{\sim}{\Sigma}^1_3$, des analogues convenables des topologies de

Harrington, satisfaisant au théorème de Baire. Malheureusement, et c'est la troisième difficulté, ces topologies ne sont plus à base dénombrable, mais à base de cardinalité $\geqslant \aleph_2$, et ce n'est que dans un cas très particulier, celui des classes de la hiérarchie borélienne, qu'il est possible de se ramener au dénombrable.

THÉORÈME A 2.2. (Kechris [5]). Supposons $AD(L[\mathbb{R}])$. Les classes $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ de la hiérarchie borélienne, et par suite la classe $\underset{\sim}{\Delta}^1_1$, satisfont les propriétés de $\underset{\sim}{\Sigma}^1_3$-définissabilité, $\underset{\sim}{\Sigma}^1_3$-biséparation et $\underset{\sim}{\Delta}^1_3$-commutativité. Ces propriétés sont conséquences de la propriété suivante :

Si A_1 et A_2 sont deux ensembles Σ^1_3 de l'espace Polonais r.p. X , et A_1 est séparable de A_2 par un ensemble $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$, alors A_1 est séparable de A_2 par un ensemble $\Pi^0_\xi(\alpha)$, où α est un réel Δ^1_3 . En particulier

$$\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi \cap \Delta^1_3 = \bigcup_{\alpha\in\Delta^1_3} \Pi^0_\xi(\alpha) \text{ , et } \underset{\sim}{\Delta}^1_1 \cap \Delta^1_3 = \bigcup_{\alpha\in\Delta^1_3} \Delta^1_1(\alpha) .$$

Ce beau résultat de Kechris termine ce que nous savons dire et de la $\underset{\sim}{\Sigma}^1_3$-biséparation, et de la généralisation directe de nos techniques. En particulier, le problème de la $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$-biséparation de la classe $\underset{\sim}{\Delta}^1_1$ est un problème ouvert pour $n \geqslant 2$.

2. $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$-définissabilité et $\underset{\sim}{\Delta}^1_{2n+1}$-commutativité.

Pour ces deux propriétés, les résultats sont meilleurs que pour la propriété précédente. D'une part, l'axiome P.D. va être suffisant pour obtenir les résultats. D'autre part, les résultats sont obtenus pour tous les niveaux $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$, $n \in \omega$.

Les résultats sont fondés sur le résultat suivant de Louveau [7], qui est une conséquence du célèbre théorème de "base stratégique" de Moschovakis ([1], § 6 E).

THÉORÈME A 2.3. Supposons l'axiome P.D. Alors pour tout entier n ,

$$\underset{\sim}{\Delta}^1_1 \cap \Delta^1_{2n+1} = \bigcup_{\alpha\in\Delta^1_{2n+1}} \Delta^1_1(\alpha)$$

Ce résultat (qui se relativise sans difficulté), et l'analogue du théorème 1.5

permettent alors de démontrer le résultat suivant.

COROLLAIRE A 2.4. Supposons l'axiome P.D. , et soit Φ une famille de parties de l'espace r.p. X qui n'est formée que d'ensembles boréliens.

(i) Si W_Φ est coanalytique, Φ satisfait la propriété de $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$-définissabilité pour tout $n \in \omega$ (Pour un entier n fixé, on pourrait seulement supposer W_Φ dans $\underset{\sim}{\Pi}^1_{2n+1}$) .

(ii) Si Φ est régulière, Φ satisfait la propriété de $\underset{\sim}{\Delta}^1_{2n+1}$-commutativité avec la réunion dénombrable, pour tout $n \in \omega$.

Le corollaire A 2.4 s'applique en particulier aux classes $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$. Il généralise alors une partie des résultats du théorème de Kechris A 2.2.

DÉMONSTRATION DE A 2.4. (i) Soit B un ensemble $\underset{\sim}{\Delta}^1_{2n+1}$ de l'espace $X \times Y$. Nous voulons montrer que l'ensemble $H_B = \{y \in Y : B_y \in \Phi\}$ est $\underset{\sim}{\Pi}^1_{2n+1}$. Pour cela, nous pouvons sans perte de généralité supposer que $Y = \omega^\omega$, et le résultat relativisé se démontrant de la même manière que B est Δ^1_{2n+1} dans $X \times \omega^\omega$, et W_Φ est Π^1_{2n+1} . Pour chaque réel α , si la coupe B_α est dans Φ , B_α est un ensemble borélien et $\Delta^1_{2n+1}(\alpha)$. Par suite, par le théorème A 2.3, B_α est un ensemble $\Delta^1_1(<\alpha_o ,\alpha>)$ pour un réel α_o qui est $\Delta^1_{2n+1}(\alpha)$. On en déduit la définition suivante de l'ensemble H_B , qui est clairement Π^1_{2n+1} :

$$\alpha \in H_B \leftrightarrow \exists \alpha \in \Delta^1_{2n+1}(\alpha) \ \exists n \ [(<\alpha_o ,\alpha> ,n) \in W_\Phi \wedge B_\alpha = C_{<\alpha_o ,\alpha>,n}] .$$

(ii) Comme précédemment, nous supposons que $Y = \omega^\omega$, que B est un ensemble Δ^1_{2n+1} et que Φ est régulière sans paramètre. Pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$, nous savons que B_α est élément de Φ_σ . Par suite, B_α est en particulier borélien et $\Delta^1_{2n+1}(\alpha)$, donc par le théorème A 2.3, B est $\Delta^1_1(<\alpha_o ,\alpha>)$ pour un réel α_o qui est $\Delta^1_{2n+1}(\alpha)$. Par suite, d'après le théorème 2.8 (ii), on peut trouver un réel β qui est $\Delta^1_1(<\alpha_o ,\alpha>)$, donc a fortiori $\Delta^1_{2n+1}(\alpha)$, et qui satisfait la relation R suivante :

$$R(\alpha , \alpha_o ,\beta) \leftrightarrow \forall m \ (<\alpha_o ,\alpha> ,\beta(m) \in W_\Phi \wedge B_\alpha = \bigcup_m C_{<\alpha_o ,\alpha>,\beta(m)}) .$$

Mais cette relation R est Π^1_{2n+1} , et par suite, par Δ^1_{2n+1}-uniformisation, il existe une application (f_o, f_1), Δ^1_{2n+1}-récursive, de ω^ω dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$, telle que pour chaque $\alpha \in \omega^\omega$ on ait $R(\alpha, f_o(\alpha), f_1(\alpha))$. Définissons alors la suite $(B_n)_{n\in\omega}$ par

$$(x,\alpha) \in B_n \leftrightarrow x \in C_{<f_o(\alpha),\alpha>, f_1(\alpha)(n)} .$$

Chaque ensemble B_n est clairement Δ^1_{2n+1} et à coupes dans Φ, et d'après le choix de (f_o, f_1), $B = \bigcup_n B_n$. $\dashv$

3. Quelques résultats particuliers.

Les résultats qui précèdent n'apportent de réponse, dans les meilleurs des cas, que pour des familles Φ formées d'ensembles boréliens, ce qui est une limitation très sérieuse. Il est cependant possible d'apporter des réponses complètes, moyennant l'axiome P.D., dans certains cas particuliers, lorsqu'il est possible d'associer à la famille Φ un jeu infini à information parfaite. Nous n'écrirons pas les résultats, renvoyant le lecteur à la littérature existante, qui contient les résultats de type effectif permettant, comme lors de la démonstration du corollaire A 2.4, d'en déduire les propriétés cherchées.

L'étude de la famille des parties dénombrables se trouve dans Kechris [3] (les ensembles dénombrables étant boréliens, on peut utiliser A 2.4). Les ensembles maigres et les ensembles de mesure 0 sont étudiés dans Kechris [2]. Dans Kechris [4] et dans Louveau [1], des résultats analogues sont établis pour d'autres σ-idéaux engendrés par des ensembles fermés.

Cependant, une théorie générale, analogue à celle que nous avons essayé de présenter pour le premier niveau de la hiérarchie projective, reste à faire.

COMMENTAIRES

Introduction.

Les différents thèmes d'étude sur les analytiques et les boréliens des espaces produits que nous présentons dans l'introduction sont une tentative de systématisation de propriétés étudiées pour des familles particulières.

Le calcul de la complexité, et le problème connexe de génération, proviennent des travaux de Lusin sur les cribles ([1] ; p.178 et suivantes). Les problèmes concernant l'uniformisation des boréliens plans par des graphes boréliens conduisent également à étudier ce problème de la complexité (nature de l'ensemble d'unicité, Lusin [1], chapitre IV, résultats de Novikov et Kunugui sur les boréliens à coupes compactes, cf. Dellacherie [1]).

La propriété de commutativité avec la réunion dénombrable provient du résultat de Lusin [1] sur les boréliens à coupes dénombrables, qui sont des unions dénombrables de graphes boréliens. Mais ce résultat faisant intervenir la notion de graphe borélien est généralement considéré comme un résultat d'uniformisation. La première considération explicite de ce problème, à notre connaissance, est due à Dellacherie [1], qui donne une belle démonstration du résultat pour les boréliens à coupes compactes (dû à Kunugui) et conjecture le résultat pour tous les boréliens à coupes de classe de Borel donnée.

Les propriétés d'uniformisation sont au coeur de la théorie descriptive. Nous n'avons pas voulu aborder ces problèmes ici, car ils ne rentrent pas dans le cadre que nous nous sommes fixés. L'article bibliographique de Wagner [1] et l'article de Dellacherie [1] peuvent être consultés à ce sujet.

La propriété de biséparation que nous introduisons est nouvelle. La raison en est que les auteurs étudiant ce genre de problèmes s'intéressaient avant tout à des propriétés héréditaires des ensembles, pour lesquelles la propriété de biséparation peut prendre une forme beaucoup plus simple : est-ce que tout analytique à coupes dans Φ est contenu dans un borélien à coupes dans Φ ? C'est la propriété étudiée par Cenzer et Mauldin [1] sous le nom de "faithful extension property". Reconnaissant que cette propriété ne permettait pas d'étudier des familles par ailleurs intéressantes (en particulier dès que l'espace ambiant X est élément de Φ) . Cenzer et Mauldin introduisent aussi la notion de "fully faithful extension property", qui correspond à la propriété d'approximation dont nous parlons dans l'introduction, et que nous étudions à la fin du chapitre 2 . Nous pensons que les résultats du chapitre 2 montrent l'intérêt qu'il y a à considérer plutôt une propriété de biséparation, comme celle que nous introduisons.

Nous pouvons faire des commentaires analogues pour ce qui concerne les versions effectives des problèmes précédents : sans être systématiquement étudiées, le calcul de la complexité et la commutativité avec la réunion dénombrable sont établies pour des familles particulières : travaux de Tanaka et Kechris sur la mesurabilité et la propriété de Baire, résultats sur les ensembles dénombrables (cf. Kechris [3]) , résultats de Moschovakis [1] sur les ouverts et les fermés Δ^1_1 .

Chapitre 1. Pour la longue histoire de la découverte des fonctions récursives, de leur utilisation pour la théorie descriptive sur ω , puis de la confrontation - et finalement la symbiose - avec la théorie descriptive classique, nous renvoyons le lecteur aux notes historiques du livre de Moschovakis [1] . Nous n'indiquons ici que quelques remarques concernant le théorème 1.5. Tel qu'il est présenté ici, il semble qu'il apparaisse pour la première fois dans Louveau [2] , pour résoudre des problèmes d'uniformisation concernant les coanalytiques plans. Cependant, ce n'est qu'une version (sans doute déjà connue, si non utilisée) de résultats du "folklore" de la théorie descriptive effective, concernant l'uniformisation des ensembles Δ^1_1 (cf. Moschovakis [1], § 4 D). De plus les démonstrations sont rigoureusement parallèles. L'intérêt de ce résultat renforcé (fonctions Π^1_1-récursives partielles au lieu de fonctions Δ^1_1-récursives) pour la généralisation à un cadre "abstrait" apparaît pour la première fois dans Louveau [4] .

Chapitre 2. La notion de famille séparante (définition 2.1.) est nouvelle. Il ne s'agit pas seulement d'une traduction en théorie effective de la propriété de biséparation définie dans l'introduction : l'originalité principale de cette définition provient, à notre avis, de l'association des deux propriétés de complexité et de biséparation effective. Bien que ces deux propriétés soient a priori sans rapport entre elles, on voit bien dans la démonstration de la proposition 2.2. comment la complexité des boréliens de Φ est utilisée pour démontrer la biséparation dans les espaces produits. Réciproquement, la démonstration du théorème A1 montre que, au moins dans le cadre abstrait, la propriété de biséparation effective est utilisée pour effectuer le calcul de la complexité dans les espaces produits. C'est donc la somme de ces deux propriétés qui donne à la notion de famille séparante son efficacité. D'ailleurs ceci peut être précisé sur un autre exemple : la notion de "fully faithful extension property" de Cenzer et Mauldin n'inclut pas la propriété de complexité. Il en résulte que Cenzer et Mauldin ne savent pas si cette notion est close par réunion finie (Cenzer et Mauldin [1], Problème 1), ce qui contraste avec notre proposition 2.3.(ii).

La notion de famille régulière est également nouvelle. La propriété de régularité que nous introduisons provient directement du résultat de régularité démontré dans Louveau [4] pour les classes $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$. La forme un peu compliquée que nous lui donnons ici est motivée par la partie (iii) du théorème fondamental 2.8., c'est-à-dire la volonté d'obtenir un résultat de clôture par l'opération qui à Φ associe $\Phi_{\sigma c}$.

Bien entendu, cette notion, comme le résultat de régularité, reposent sur la possibilité d'utiliser le théorème de Baire pour les topologies de Harrington. Comme nous l'avons déjà indiqué, cette idée originale provient de la très belle démonstration de L. Harrington [1] du théorème de Silver sur les relations coanalytiques. Harrington utilise ces topologies via une notion de forcing, qui a été utilisée précédemment par Gandy. Mais seule la partie "théorème de Baire" du forcing de Harrington est réellement utilisée (on peut d'ailleurs aisément traduire la démonstration de Harrington pour en éliminer les considérations de forcing, cf. Louveau [3]). C'est pourquoi nous avons appelé ces topologies, topologies de Harrington.

La démonstration originale que nous avons donnée pour les classes $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ utilisait également des jeux infinis à information parfaite (cf. Louveau [2] pour la classe $\underset{\sim}{\Pi}^0_3$, et [5] pour le cas général), qui ne permettaient pas d'éliminer pour autant les considérations de régularité. Il apparaît que celles-ci se prêtent mieux que les jeux à la généralisation à une famille quelconque Φ, et c'ést ce qui nous a amené à abandonner ceux-ci.

Le résultat sur les familles rectangles (théorème 2.12) est motivé par le problème de C. Dellacherie (cf.Définition 3.3), auquel nous apportons une réponse (théorème 3.4), qu'en tant qu'analyste il ne considérera pas comme très satisfaisante !

Enfin la digression sur la notion d'approximation est fortement motivée par les travaux de Burgess [1], auquel nous empruntons l'idée de la démonstration du théorème 2.18.

Chapitre 3.

Exemple 1. Nous n'avons pas donné de démonstration des propriétés de la famille $\mathcal{R}$ des parties régulières, bien que ces démonstrations ne puissent pas être trouvées dans la littérature. C'est que cela nous aurait entraîné trop loin du sujet central de ce travail. Par ailleurs on peut démontrer ces résultats par des adaptations relativement triviales des démonstrations connues pour la propriété de Baire usuelle, démonstrations dont nous indiquons les références pour le lecteur intéressé.

Exemple 2. Cet exemple, des classes de la hiérarchie borélienne, est celui qui nous a servi de modèle pour tout notre travail. Les résultats concernant ces classes ont une longue histoire : pour la classe $\underset{\sim}{\Pi}^0_1$ le calcul de complexité est dû à Novikov (cf. aussi Kunugui [1]), et les résultats de séparation et de commutativité à Tschegolkov, Tschoban et Dellacherie [1], (cf. Arsenin, Ljapunov et Tschegolkov [1], Dellacherie [1], Tschoban [1]). Arsenin a effectué le calcul de la complexité pour la classe $\underset{\sim}{\Sigma}^0_2$, et Saint-Raymond [1] a obtenu la séparation et la commutativité pour cette même classe, par une technique de dérivation. Les résultats effectifs correspondants sont dûs à Moschovakis [1] pour la classe $\underset{\sim}{\Pi}^0_1$, à Louveau [2] pour la classe $\underset{\sim}{\Sigma}^0_2$. Ces auteurs travaillant dans le cadre des espaces métriques compacts, les propriétés sont en fait établies pour les classes des compacts et des ensembles K_σ, mais il est facile d'en déduire les résultats pour les fermés et les F_σ (cf. Louveau [2]).

Pour la classe $\underset{\sim}{\Pi}^0_3$, le premier résultat est dû à Bourgain [1], effectuant le calcul de la complexité grâce à un critère sur les ensembles $F_{\sigma\delta}$ qui utilise la compacité. Puis, indépendamment, Bourgain [2] par des techniques de théorie classique, et Louveau [2] par des techniques effectives, ont démontré les propriétés de séparation et de commutativité pour la classe $\underset{\sim}{\Pi}^0_3$. La démonstration donnée dans Louveau [2], si elle utilise la théorie effective, ne préfigure pas la démonstration du cas général (Louveau [4]), car elle n'utilise pas les topologies de Harrington : dans ce cas particulier, il est encore possible de démontrer le résultat par une technique de "capacitabilité effective" (utilisant donc la compacité). Une démonstration directe de ce type n'est pas connue pour les classes $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$, $\xi \geqslant 4$.

<u>Exemple 3</u>. La plupart des résultats initiaux, dont nous donnons les références page 49, ont été obtenus par une technique de dérivation, suivant en cela la technique inaugurée par Lusin ([1], chapitre IV) pour le problème des boréliens à coupes dénombrables. Une systématisation de cette technique est due à Hillard [1].

Les travaux sur les <u>familles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$-monotones</u> de Cenzer et Mauldin [1] représentent le premier essai de systématisation des propriétés de séparation dans les espaces produits. Malheureusement, ces auteurs ont "l'intuition", comme ils le déclarent, que ces notions sont intéressantes spécialement pour les propriétés héréditaires, intuition qui ne paraît confirmée ni par les travaux sur les classes de Borel, ni par le travail de Burgess sur les relations d'équivalence et sur d'autres propriétés de type combinatoire. Par suite, le cadre proposé par Cenzer et Mauldin, "faithful extension property" et "fully faithful extension property", ne nous paraît pas très adéquat, comme nous l'avons déjà dit à propos de la notion de famille séparante.

La démonstration de Burgess du théorème de Cenzer et Mauldin (théorème 3.10) est plus générale mais très proche de la démonstration originale. Celle que nous donnons ici est un peu différente. Par contre, la démonstration de Dellacherie [2], qui utilise un théorème de capacitabilité généralisée, est d'esprit très différent, et ouvre un domaine inexploré, celui des ensembles de calibre nul pour un calibre donné sur un espace métrique compact (cf. les remarques à la fin du chapitre 3).

Exemple 4. Pour la notion de famille à enveloppes, et les résultats de ce paragraphe, nous nous sommes inspirés de manière très libre du beau travail de Burgess [1], qui contient également des résultats n'entrant pas dans le cadre de notre discussion, comme des applications à la théorie des ensembles invariants par l'action d'un groupe.

L'application que nous donnons à la théorie des relations d'équivalence n'utilise qu'une faible partie de nos résultats. Nous l'avons donnée principalement pour avoir l'occasion de parler des résultats récents de Stern [1].

BIBLIOGRAPHIE

ARSENIN W.J., LJAPUNOV A.A., TSCHEGOLKOV E.A.,

1- "Arbeiten zur descriptiven Mengenlehre", Math. Forschungsberichte VEB Deutschen Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955 (Traduction allemande d'articles parus en russe dans Uspehi. Matem. Nauk, t. V, Fasc. 5 (39) , Moscou 1950).

BOURGAIN J.

1- " $F_{\sigma\delta}$-sections of Borel sets" (à paraître dans Fund Math).

2- "Borel sets with $F_{\sigma\delta}$-sections" (à paraître dans Fund Math).

BURGESS J.P.

1- "A reflection phenomenon in descriptive set theory" (à paraître dans Fund. Math.).

CENZER D.

1- "Monotone inductive definitions over the continuum", J. Symb. Logic 41 (1) 1976, 188-198.

CENZER D. et MAULDIN R.D.

1- "Faithful extensions of analytic sets to Borel sets" (à paraître)

DELLACHERIE C.

1- "Ensembles analytiques : théorèmes de séparation et applications", Sém. Proba. IX, Lecture Notes in Math. 465, Springer, Heidelberg 1975, 336-372.

2- "Un cours sur les ensembles analytiques" (à paraître dans les proceedings de l'école d'été de Londres sur les ensembles analytiques, 1978).

HARRINGTON L.

1- "A powerless proof of a theorem of Silver" (non publié)

HILLARD G.

1- "Une généralisation du théorème de Saint-Raymond sur les boréliens à coupes K_σ ", C.R. Acad. Sci. Paris, t.288 (1979) 749-751.

KECHRIS A.S.

1- "Lecture Notes on Descriptive Set Theory",M.I.T. , Cambridge, Mass. (non publié).

2- "Measure and category in effective descriptive set theory" Ann. of Math. Logic 5 (1973), 337-384.

3- "The theory of countable analytical sets", Trans. Amer. Math. Soc. 202 (1975), 259-297.

4- "On a notion of smallness for subsets of the Baire space", (à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.)

5- "A basis theorem for Δ^1_3 Borel sets" (non publié).

KECHRIS A.S., et MARTIN D.A.

1- "On the theory of Π^1_3 sets of reals", Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 149-151.

KOZLOVA Z.I.

1- "Sur les ensembles plans analytiques ou mesurables B " Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 4 (1940), 479-500 (en russe, résumé en français).

2- "Sur la séparabilité multiple", Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 27 (2), 1940,110-114.

3- "On coverings of certain A-Sets", Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 11 (1950), 421-442 (en russe).

KUNUGUI K.

1- "Contributions à la théorie des ensembles boréliens et analytiques III", J.Fac. Sci. Hokkaïdo Imp. Univ. 8, 1939/40, 79-108.

LJAPUNOV A.A.

1- Sur la séparabilité des ensembles analytiques", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 3(5) , 1934, 276-280 (en russe, résumé en français).

LOUVEAU A.

1- " σ-idéaux engendrés par des ensembles fermés et théorèmes d'approximation" T.A.M.S. 257 (1), 1980, 143-169.

2- "Recursivity and compactness", Higher Set Theory, Lecture Notes in Math. 669, Springer, Heidelberg (1978), 303-337.

3- "Relations d'équivalence coanalytiques, d'après Harrington" Sém. Choquet d'Init. à l'Analyse, 16ème année, n° 19 (1976/77), Inst. H. Poincarré, Paris.

4- "A separation theorem for Σ_1^1 sets" (à paraître dans Trans. Amer Math. Soc.).

5- "La hiérarchie borélienne des ensembles Δ_1^1 ", C.R. Acad. Sc. Paris 285 (1977), 601-604.

6- "Familles séparantes pour les ensembles analytiques". C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. 288 (7), 1979, 391-394.

7- "A basis result for Δ_{2n+1}^1 sets", (non publié).

LUSIN N.N.

1- "Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications", Seconde édition, 1972, Chelsea Publishing Comp., New York.

MOSCHOVAKIS Y.N.

1- "Descriptive Set Theory" (à paraître chez North Holland, Amsterdam).

NOVIKOV P.S.

1- "Sur une propriété des ensembles analytiques", Dolk. Akad. Nauk. SSSR, 3 (5), 1934, 273-276, (en russe, résumé en français).

SAINT-RAYMOND J.

1- "Boréliens à coupes K_σ ", Bull. Soc. Math. France, 104, (1976).

SOLOVAY R.M.

1- "A model of set-theory in which every set is Lebesgue measurable", Ann. of Math. 92 (1970), 1-56.

STERN J.

1- "Definable families of Borel sets of bounded rank", (non publié).

SUSLIN M.

1- "Sur une définition des ensembles mesurables- B sans nombres transfinis", C.R. Acad. Sci. Paris 164 (1917), 88-91.

TANAKA H.

1- "Some results in the descriptive set theory", Public. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A, 3 (1967) , 11-52 .

2- "A basis result for Π^1_1 sets of positive measure", Comment. Math. Univ. St. Paul 16 (1968), 155-127.

TSCHOBAN M.M.

1- "On B -measurable sections", Sov. Mat. Dolk., 13 (1972), 1473-1478.

WAGNER D.H.

1- "Survey on measurable selection theorems", Siam J. Control Optimization, 15 (1977), 859-903.

Alain LOUVEAU
EQUIPE d'ANALYSE - Univ. PARIS VI
Tour 46 - 4ème Etage
4, place Jussieu
75230 - PARIS CEDEX 05

ANALYTIC AND BOREL SETS IN PRODUCT SPACES.

Abstract.

This paper is devoted to the general study of the Borel and analytic sets, in products of two Polish Spaces, the sections of which possess a given property $\mathbb{P}$.

We are particularly interested in separation results for analytic sets, and in the following "Borel selection" type of problems : Let $\mathbb{P}_\sigma$ be the property of being the countable union of sets having property $\mathbb{P}$. What conditions on $\mathbb{P}$ imply that every Borel set with sections possessing property $\mathbb{P}_\sigma$ is the union of a sequence of Borel sets with sections possessing property $\mathbb{P}$?

The paper contains numerous applications of the general theory, as well as a discussion of possible extensions to abstract measured spaces, and to higher levels of the projective hierarchy.

The methods used in the proofs being those of Effective Descriptive Set Theory, we also present the basic notions of this theory necessary for our purposes.