Astérisque

MICHEL FLIESS

Une approche algébrique du développement fonctionnel des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées

Astérisque, tome 75-76 (1980), p. 95-103

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__75-76__95_0>

UNE APPROCHE ALGÉBRIQUE DU DÉVELOPPEMENT FONCTIONNEL DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES FORCÉES

par

Michel FLIESS

-:-:-:-

ABSTRACT. - Let :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{q}(t) = A_o(q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i(q) \\ y(t) = b(q) \qquad [q(0) \ \text{given}] \end{array}\right.$$

be a non-linear differential system, where $A_o, A_1, \ldots, A_n$ are analytic vector fields and b is an analytic function. The output y is a causal analytic functional of the inputs $u_1, \ldots, u_n$, i.e. y is given by the following non-commutative power series

$$g = b|_o + \sum_{\nu \geq 0} \ \sum_{j_o, \ldots, j_\nu = 0} A_{j_o} \ldots A_{j_\nu} b|_o \, x_{j_\nu} \ldots x_{j_o} .$$

This is used to derive the Volterra series expansion in closed form. The proofs are essentially of algebraic nature and generalize W. Gröbner's works on Lie series.

I. - PRÉSENTATION DES RÉSULTATS.

Considérons le système différentiel :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{q}(t) \ (= dq/dt) = A_o(q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i(q) \\ y(t) = b(q) \quad . \end{array}\right.$$

L'état q appartient à une variété analytique réelle Q, de dimension finie N [$q(0)$ est donné]. Les champs de vecteurs $A_o, A_1, \ldots, A_n$ et la fonction $b : Q \to \mathbb{R}$ sont analytiques, définis dans un voisinage de $q(0)$. Les entrées (ou commandes, ou contrôles) $u_1, \dots, u_n : [0, T[\to \mathbb{R}$ sont, pour simplifier, supposées continues par morceaux.

On montre (cf. [7]) que la sortie y est une <u>fonctionnelle causale analytique</u> des entrées $u_1, \dots, u_n$, c'est-à-dire qu'elle est déterminée par la série <u>génératrice</u> g en les indéterminées associatives et non commutatives $x_o, x_1, \dots, x_n$:

$$(2) \qquad g = b|_o + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_o, \dots, j_\nu = 0} A_{j_o} \dots A_{j_\nu} b|_o \, x_{j_\nu} \dots x_{j_o}$$

(la barre $|_o$ indique l'évaluation en $q(0)$).

Les indéterminées non commutatives, que nous rappellerons brièvement, étant encore peu répandues, il est éclairant de traduire (2) dans le langage, plus classique, des séries de Volterra. Pour simplifier les notations, on se limite, en (1), à une seule entrée ($n = 1$) ; la sortie peut alors s'écrire (cf. [8]) :

$$(3) \quad y(t) = h_o(t) + \int_o^t h_1(t, \tau_1) u_1(\tau_1)\, d\tau_1 + \dots + \int_o^t \int_o^{\tau_k} \dots \int_o^{\tau_2} h_k(t, \tau, \dots, \tau_1) u_1(\tau_k) \dots \dots u_1(\tau_1)\, d\tau \dots d\tau_1 ,$$

où $t \geq \tau_k \geq \dots \geq \tau_1 \geq 0$. Ces noyaux de Volterra triangulaires sont de la forme :

$$(4) \begin{cases} h_o(t) = b|_o + \sum_{i_o \geq 1} A_o^{i_o} b|_o \dfrac{t^{i_o}}{i_o!} = e^{tA_o} b|_o \\ h_1(t, \tau_1) = \sum_{i_1, i_2 \geq 0} A_o^{i_1} A_1 A_o^{i_2} b|_o \dfrac{(t-\tau_1)^{i_2} \tau_1^{i_1}}{i_2! \, i_1!} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_k(t, \tau, \dots, \tau_1) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1} \geq 0} A_o^{i_1} A_1 A_o^{i_2} \dots A_1 A_o^{i_{k+1}} b|_o \\ \qquad\qquad \dfrac{(t-\tau_1)^{i_{k+1}} \dots (\tau_2 - \tau_1)^{i_2} \tau_1^{i_1}}{i_{k+1}! \dots i_2! \, i_1!} . \end{cases}$$

Les preuves sont avant tout de nature algébrique, et généralisent les travaux de GRÖBNER [10] sur les séries de Lie. Les techniques employées peuvent passer pour une généralisation non commutative du calcul ombral popularisé en combinatoire par ROTA et son école (cf. [14]).

Terminons en rappelant que le problème du développement fonctionnel des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées est classique non seulement en automatique (cf. BROCKETT [1], DWYER [3], GILBERT [9], LESIAK et KRENER [12], ...), mais aussi en physique (LANGOUCHE, ROEKAERTS et TIRAPEGUI [11], MORTON et CORRSIN [13], UZES [15], ...).

Par manque de place, nous n'aborderons pas le problème de la convergence qui se résoud aisément à partir des majorations de GRÖBNER [10]. Il a été montré par ailleurs (cf. [5, 6]) que la série génératrice (2) s'obtenait algorithmiquement par un calcul symbolique généralisant celui de Heaviside.

II. - RAPPELS SUR LES SÉRIES GÉNÉRATRICES NON COMMUTATIVES.

Soient X^* le monoïde libre engendré par l'ensemble fini : $X = \{x_o, x_1, \dots, x_n\}$ et 1 son élément neutre. On note $\underline{\mathbb{R}} < X >$ et $\underline{\mathbb{R}} \ll X \gg$ les $\mathbb{R}$-algèbres associatives des polynômes et des séries formels, à coefficients réels, en les indéterminées associatives $x_j \in X$ (non commutatives si $n \geq 1$). Un élément $s \in \underline{\mathbb{R}} \ll X \gg$ est noté :

$$s = \Sigma \{(s, w)\, w \mid w \in X^*\}, \text{ où } (s, w) \in \underline{\mathbb{R}} .$$

Pour passer à l'aspect fonctionnel, il faut associer à tout mot $x_{j_\nu} \dots x_{j_o} \in X^*$ <u>l'intégrale itérée</u> (cf. [2]) $\int_o^t d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_o}$ définie par récurrence sur la longueur :

$$\xi_o(\tau) = \tau,\ \xi_i(\tau) = \int_o^\tau u_i(\sigma)\, d\sigma \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\int_o^\tau d\xi_j = \xi_j(\tau) \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

$$\int_o^t d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_o} = \int_o^t d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_o^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \dots d\xi_{j_o} .$$

Alors, sous réserve de convergence, une série $g \in \underline{\mathbb{R}} \ll X \gg$ définit la fonctionnelle causale :

$$(g,1) + \sum_{\nu \geqslant 0} \sum_{j_o,\dots,j_\nu = 0}^{n} (g, x_{j_\nu} \dots x_{j_o}) \int_o^t d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_o} .$$

Une telle fonctionnelle est dite analytique, de série génératrice g .

Il existe des liens remarquables avec les séries de Volterra :

THEOREME (cf. [4, 6]). - La série de Volterra (3) définit une fonctionnelle causale analytique si et seulement si, pour tout $k \geqslant 0$, le noyau triangulaire $h_k(t, \tau_k, \dots, \tau_1)$ est, au voisinage de l'origine, une fonction analytique de $t, \tau_k, \dots, \tau_1$, de sorte que les rayons de convergence des séries entières h_o , $h_1, \dots, h_k, \dots$ soient bornés inférieurement par une quantité strictement positive.

Preuve : Développons $h_k(t, \tau_k, \dots, \tau_1)$ en fonction des variables $t-\tau_k, \dots, \tau_2 - \tau_1 , \tau_1$:

$$h_k = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1} \geqslant 0} h_{k,\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}} \frac{(t-\tau_k)^{\alpha_{k+1}} \dots (\tau_2 - \tau_1)^{\alpha_2} \tau_1^{\alpha_1}}{\alpha_{k+1}! \dots \alpha_1 ! \alpha_1 !} .$$

Or, au mot $x_o^{\alpha_{k+1}} x_1 \dots x_o^{\alpha_2} x_1 x_o^{\alpha_1}$ correspond l'intégrale itérée :

$$\int_o^t \int_o^{\tau_1} \dots \int_o^{\tau_2} \frac{(t-\tau_k)^{\alpha_{k-1}} u_1(\tau_k) \dots (\tau_2 - \tau_1)^{\alpha_2} u_1(\tau_1) \tau_1^{\alpha_1}}{\alpha_{k+1} ! \dots \alpha_2 ! \alpha_1 !} d\tau_k \dots d\tau_1 .$$

On se ramène à la série génératrice :

$$\sum_{k,\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1} \geqslant 0} h_{k,\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1}} x_o^{\alpha_{k+1}} x_1 \dots x_o^{\alpha_2} x_1 x_o^{\alpha_1} .$$

III. - DÉMONSTRATION DES FORMULES (2) et (4).

a) Soient $n+1$ champs de vecteurs formels de la forme :

$$A_j = \sum_{k=1}^{N} \theta_j^k (q^1, \dots, q^N) \frac{\partial}{\partial q^k} \quad (j = 0, 1, \dots, n) .$$

Les θ_j^k sont des séries formelles en les indéterminées commutatives $q^1, \dots, q^N$, donc des éléments de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[[q^1, \dots, q^N]]$ des séries formelles commutatives. On introduit l'application $\Lambda : \mathbb{R}[[q^1, \dots, q^N]] \to \mathbb{R}[[q^1, \dots, q^N]] \langle\langle X \rangle\rangle$, à valeurs dans l'ensemble des séries formelles, à coefficients dans $\mathbb{R}[[q^1, \dots, q^N]]$, en les indéterminées associatives $x_j \in X$, définie par :

$$\Lambda b = b + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \dots, j_\nu = 0}^{n} (A_{j_0} \dots A_{j_\nu} b) x_{j_\nu} \dots x_{j_0} .$$

Le résultat suivant est le pendant non commutatif de la théorie de GRÖBNER [10] :

PROPOSITION. - Λ est un morphisme d'algèbres commutatives, à condition de prendre le mélange (*) comme produit de $\mathbb{R}[[q^1, \dots, q^N]] \langle\langle X \rangle\rangle$.

(*) Le mélange, ou produit de Hurwitz ("shuffle product" en anglais), est une opération classique sur les séries formelles non commutatives. Il se construit par récurrence sur la longueur des mots : $1 ш 1 = 1$; $1 ш x_j = x_j ш 1 = x_j$; $\forall u, v \in X^*$, $\forall x_j, x_k \in X$, $(x_j u) ш (x_k v) = x_j [u ш (x_k v)] + x_k [(x_j u) ш v]$. Par linéarité, on passe à $A\langle\langle X \rangle\rangle$, où A est un anneau :

$$s ш s' = \sum \{(s, w)(s, w') w ш w' \mid w, w' \in X^*\}.$$

Muni de l'addition et de ce produit, $A\langle\langle X \rangle\rangle$ est un anneau commutatif, d'élément unité 1 . Rappelons que le produit de deux fonctionnelles analytiques est encore analytique, de série génératrice le mélange des deux séries génératrices.

Preuve : Pour $b_1, b_2 \in \mathbb{R}[[q^1, \ldots, q^N]]$, il s'agit de prouver :

$$\Lambda(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) = \alpha_1 \Lambda b_1 + \alpha_2 \Lambda b_2 \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Lambda(b_1 b_2) = \Lambda b_1 \text{ш} \Lambda b_2 .$$

La démonstration de la deuxième identité est semblable à celle de GRÖBNER [10], p.16-17. On a :

$$A_{j_o} \ldots A_{j_\nu}(b_1 b_2) = A_{j_o} \ldots A_{j_{\nu-1}}(b_1 A_{j_\nu} b_2 + b_2 A_{j_\nu} b_1),$$

qui traduit la récurrence du mélange.

Posons :

$$q^k(t) = q^k(0) + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_o, \ldots, j_\nu = 0} A_{j_o} \ldots A_{j_\nu} q^k|_o \int_o^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o} \quad (k=1, \ldots, N),$$

$$y(t) = b|_o + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_o, \ldots, j_\nu = 0} A_{j_o} \ldots A_{j_\nu} b|_o \int_o^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o} .$$

La proposition précédente permet de montrer que $y(t) = b(q^1(t), \ldots, q^N(t))$ et que $q = (q^1, \ldots, q^N)$ vérifie (1).

La formule (4) résulte immédiatement de (2) à partir du théorème du §. II sur les liens entre séries de Volterra et séries génératrices.

IV. - DEUX EXEMPLES.

a) Systèmes réguliers (ou bilinéaires)

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = (M_o + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) M_i) q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) . \end{cases}$$

L'état q appartient à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel Q de dimension finie N [$q(0)$ est donné]. Les applications $M_o, M_1, \ldots, M_n : Q \to Q$, $\lambda : Q \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires. Soient les champs de vecteurs :

$$A_j(q) = (q^1, \dots, q^N)\ {}^tM_j \begin{bmatrix} \partial/\partial q^1 \\ \vdots \\ \partial/\partial q^N \end{bmatrix} \qquad (j = 0, 1, \dots, n)$$

(${}^tM_j$ est la matrice transposée) et la fonction :

$$b(q) = \lambda q = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, q^k \,.$$

Dans la série génératrice (2) ainsi déterminée, on vérifie aisément que le coefficient du mot $x_{j_\nu} \dots x_{j_o}$ est $\lambda M_{j_o} \dots M_{j_\nu}\, q(0)$. On retrouve les séries rationnelles non commutatives (cf. [4, 6]).

b) Variante non autonome.

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot q(t) = B_o(t, q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, B_i(t, q) \\ y(t) = c(t, q) \,, \end{cases}$$

identique à (1), à ceci près que les champs de vecteurs B_j et la fonction c pourront aussi dépendre du temps. En ajoutant une dimension q^o, on se ramène à :

$$\begin{cases} \dot q^o(t) = 1 \\ \dot q(t) = B_o(q^o, q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, B_i(q^o, q) \\ y(t) = c(q^o, q) \,, \end{cases}$$

où $q^o(t) = t$. Avec les champs de vecteurs :

$$A_o(t, q) = \frac{\partial}{\partial t} + B_o(t, q)$$

$$A_i(t, q) = B_i(t, q) \qquad (i = 1, \dots, n) \,,$$

on obtient la série génératrice :

$$c|_o + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_o, \dots, j_\nu = 0}^{n} A_{j_o} \dots A_{j_\nu}\, c|_o\, x_{j_\nu} \dots x_{j_o} \,.$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. W. BROCKETT. - Volterra series and geometric control theory. Automatica, 12, 1976, 167-176.

[2] K. T. CHEN. - Iterated path integrals. Bull. Amer. Math. Soc., 83, 1977, 831-879.

[3] T.A. DWYER III. - Analytic evolution equations in Banach spaces, in "Vector Space Measures and Applications". (R. M. Aron et S. Dineen, éd.), t. II, Lect. Notes Math. 645, p. 48-61, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[4] M. FLIESS. - Un outil algébrique : les séries formelles non commutatives, in "Mathematical Systems Theory" (G. Marchesini et S. K. Mitter, éd.), Lect. Notes Econom. Math. Syst. 131, p. 122-148, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[5] M. FLIESS. - Un calcul symbolique non commutatif pour les asservissements non linéaires et non stationnaires in "Optimization Techniques" (J. Céa, éd.), part. 2, Lect. Notes Comput. Sc. 41, p. 496-509, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[6] M. FLIESS. - Séries formelles non commutatives et automatique non linéaire, in "Séries Formelles non Commutatives et Applications", (J. Berstel, éd.), p. 69-118, LITP et ENSTA, Paris, 1978.

[7] M. FLIESS. - Développements fonctionnels en indéterminées non commutatives des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées. C. R. Acad. Sc. Paris, A-287, 1978, 1133-1135.

[8] M. FLIESS. - A note on Volterra series expansions for nonlinear differential systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 25, 1980.

[9] E. G. GILBERT. - Functional expansions for the response of nonlinear differential systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 22, 1977, 909-921.

[10] W. GRÖBNER. - Die Lie-Reihen and ihre Anwendungen (2e édition), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[11] F. LANGOUCHE, D. ROEKAERTS et E. TIRAPEGUI. - Functional integral methods for stochastic fields. Physica, 95 A, 1979, 252-274.

[12] C. LESIAK et A. J. KRENER. - The existence and uniqueness of Volterra series for nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 23, 1978, 1090-1095.

[13] J. B. MORTON et S. CORRSIN. - Consolidated expansions for estimating the response of a randomly driven nonlinear oscillator.

J. Statiscal Physics, 2, 1969, 153-194.

[14] S. M. ROMAN et G. C. ROTA. - The umbral calculus. Adv. Math., 27, 1978, 95-188.

[15] C. A. UZES. - Mechanical response and the initial value problem. J. Math. Phys., 19, 1978, 2232-2238.

-:-:-:-

Michel FLIESS
Université Paris VIII
et Laboratoire des Signaux et Systèmes
C.N.R.S.- E.S.E.
Plateau du Moulon
91190 GIF-SUR-YVETTE