HECTOR J. SUSSMANN

Les semi-groupes sous-analytiques et la régularité des commandes en boucle fermée

Astérisque, tome 75-76 (1980), p. 219-226
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__75-76__219_0>

LES SEMI-GROUPES SOUS-ANALYTIQUES ET LA RÉGULARITÉ DES COMMANDES EN BOUCLE FERMÉE

par

Hector J. SUSSMANN

-:-:-:-

SOMMAIRE. - Nous énonçons un théorème sur les générateurs infinitésimaux des semi-groupes F de transformations d'une variété analytique M, qui satisfont quelques hypothèses dont la plus importante est la sous-analyticité. La conclusion du théorème est que l'on peut toujours associer à un tel F un générateur infinitésimal "analytique par morceaux". Nous donnons un exemple d'application de ce résultat pour démontrer l'existence d'une commande optimale en boucle fermée analytique par morceaux pour une classe de problèmes de contrôle.

I. - ÉNONCÉ DU THÉORÈME.

Soit f une application. Nous désignerons par $\mathrm{Dom}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$) le domaine (resp. l'image) de f. Si f et g sont des applications, la composition $f \circ g$ est définie par :

(1) $$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x : x \in \mathrm{Dom}(g) \text{ et } g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

(2) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{pour} \quad x \in \mathrm{Dom}(f \circ g) .$$

Une application f étant un ensemble de couples ordonnés, la relation d'inclusion entre applications est bien définie. On voit aisément que l'inclusion $f \subseteq g$ est vraie si et seulement si $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ et $f(x) = g(x)$ pour $x \in \mathrm{Dom}(f)$. L'application identique d'un ensemble X sur lui-même sera désignée par Id_X.

Soit M un ensemble. Toute application f telle que $\mathrm{Dom}(f) \cup \mathrm{Im}(f) \subseteq M$ sera appelée une application partielle de M dans M. Un semi-groupe partiel à un paramètre dans M est une famille $F = \{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ d'applications partielles de M dans M, telle que :

(3) $$f_t \circ f_s \subseteq f_{t+s} \quad \text{pour} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

(4) $$\emptyset \neq f_o = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}(f_o)}$$

(5) $$\mathrm{Dom}(f_t) \cup \mathrm{Im}(f_t) \subseteq \mathrm{Dom}(f_o) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}$$

(6) pour chaque $x \in \mathrm{Dom}(f_o)$, l'ensemble $\{t : x \in \mathrm{Dom}(f_t)\}$ est un intervalle.

Soit F un semi-groupe partiel à un paramètre dans M. L'ensemble $\mathrm{Dom}(f_o)$ sera appelé le domaine du semi-groupe F, et on le désignera par $\mathrm{Dom}(F)$. Si $x \in \mathrm{Dom}(F)$, l'ensemble :

(7) $$I^F(x) = \{t : x \in \mathrm{Dom}(f_t)\}$$

est l'intervalle de définition de la trajectoire de F qui passe par x.

L'application :

$$\xi_x^F : I^F(x) \longrightarrow \mathrm{Dom}(F)$$

définie par :

$$\xi_x^F(t) = f_t(x)$$

est la trajectoire de F passant par x. L'ensemble :

$$G(F) = \{(x, y, t) : x \in \mathrm{Dom}(f_t) \text{ et } f_t(x) = y\}$$

est le graphe de F.

L'ensemble vide étant une application partielle de M dans M, la définition de semi-groupe partiel permet qu'il y ait des $t \neq 0$ tels que $f_t = \emptyset$. Dans cet article, on s'intéressera surtout aux semi-groupes partiels F tels que $f_t = \emptyset$ pour $t < 0$. Un tel semi-groupe sera dit positif.

Si $x \in \mathrm{Dom}(F)$, on dira que la trajectoire ξ_x^F aboutit à un point y si l'intervalle $I^F(x)$ est fermé à droite et borné à droite, et $\xi_x^F(\sup I^F(x)) = y$. On dira que le semi-groupe F est terminal si, pour chaque $x \in \mathrm{Dom}(F)$, la trajectoire ξ_x^F aboutit à un point y.

On voit alors que, pour un semi-groupe partiel F, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(I) F est positif et terminal,

(II) pour chaque $x \in \mathrm{Dom}(F)$, l'intervalle $I^F(x)$ est de la forme : $[0, T^F(x)]$, $T^F(x)$ étant un nombre réel non négatif.

Lorsque F satisfait (I) (ou (II)), les points x tels que $T^F(x) = 0$ seront dits <u>points terminaux</u> de F, et l'ensemble $\mathrm{Term}(F)$ des points terminaux sera appelé <u>l'ensemble terminal</u> de F.

Supposons maintenant que M soit un espace topologique. On dira qu'un semi-groupe partiel F est <u>continu</u> si toutes les trajectoires ξ_x^F, $x \in \mathrm{Dom}(F)$, sont des applications continues dans M. Si M est une variété différentiable, on dira que F est <u>Lipschitzien</u> si toutes les trajectoires ξ_x^F sont des applications localement lipschitziennes.

Si M est une variété analytique, on dira que F est <u>sous-analytique</u> si le graphe $G(F)$ est un sous-ensemble sous-analytique de $M \times M \times \mathbb{R}$.

<u>Exemple</u> : Soit $M = \mathbb{R}^2$, et soient x, y les coordonnées usuelles. Soit X le "champ vectoriel discontinu" défini de la façon suivante :

$$X(x,y) = -\frac{x}{|x|}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{|y|}\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{si} \quad x \neq 0\,, \quad y \neq 0$$

$$X(x,0) = -\frac{x}{|x|}\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{si} \quad x \neq 0\,,$$

$$X(0,y) = -\frac{y}{|y|}\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{si} \quad y \neq 0\,.$$

Pour chaque point $p \in M$, soit $\xi_p : [0, T(p)] \longrightarrow M$ la "courbe intégrale" de X telle que $\xi_p(0) = p$. Cette courbe est définie jusqu'à un temps $T(p)$ tel que $\xi_p(T(p)) = (0,0)$. (On voit aisément que $T(x,y) = 2|x| + |y|$ si $y \neq 0$, $T(x,0) = |x|$). Mettons $f_t(p) = \xi_p(t)$, pour $0 \leq t \leq T(p)$, $f_t = \emptyset$ pour $t < 0$. Soit $F = \{f_t : t \in \mathbb{R}\}$. Alors F est un semi-groupe partiel positif, terminal, Lipschitzien et sous-analytique dans M. L'ensemble terminal de F est réduit au point $(0,0)$.

L'exemple précédent montre que, si $F = \{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ est un semi-groupe partiel positif Lipschitzien sous-analytique, il est bien possible que les applications f_t aient des points de discontinuité. On voit aussi qu'il peut bien y avoir plusieurs trajectoires différentes aboutissant au même point p. Il est donc évident qu'on ne peut pas, en général, prolonger les trajectoires ξ_p^F d'une façon "naturelle" pour des temps négatifs.

Remarquons aussi que le semi-groupe F décrit ci-dessus est associé au champ vectoriel X, qui mériterait bien d'être appelé le "générateur infinitésimal" de F. Le champ X est discontinu, mais il est "analytique par morceaux". Le théorème principal de ce travail dit que cette situation n'est pas exceptionnelle, et que <u>tout</u> semi-groupe partiel positif terminal Lipschitzien et sous-analytique a un "générateur infinitésimal analytique par morceaux".

Nous donnons d'abord une définition précise de la notion de "champ vectoriel analytique par morceaux". Soit S un sous-ensemble de la variété analytique M. Un <u>champ vectoriel analytique par morceaux</u>, avec domaine S, est une 8-tuple.

$$\bar{X} = (P, P_1, P_2, P_3, X, \pi, \Sigma, E) \tag{8}$$

telle que :

i) P est une partition finie ou dénombrable de S,

ii) les éléments de P sont des sous-variétés analytiques connexes de M,

iii) $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ et les ensembles P_1, P_2, P_3 sont mutuellement disjoints,

iv) X est un champ vectoriel partiel défini sur l'ensemble $\cup P_1$ (c'est-à-dire que, pour chaque $x \in \cup P_1$, $X(x)$ appartient à l'espace tangent au point x),

v) la restriction X/N de X à chaque sous-variété $N \in P_1$ est un champ vectoriel analytique sur N (et donc tangent à N),

vi) π est une application de P_1 dans P, ayant la propriété suivante : si $N \in P_1$, $N' = \pi(N)$ et si, pour $x \in N$, on désigne par γ_x la courbe intégrale maximale de X/N telle que $\gamma_x(0) = x$, et par

$I(x) = (a(x), b(x))$ l'intervalle de définition de γ_x , alors :

(a) $b(x) < \infty$ pour $x \in N$,

(b) la limite :

$$\gamma_x(b(x)) = \lim_{t \to b(x)-} \gamma_x(t)$$

existe pour $x \in N$, et appartient à N' ,

(c) les applications $x \to b(x)$ et $x \to \gamma_x(b(x))$ sont analytiques,

vii) Σ est une application de P_2 dans P_1 ,

viii) $E = \{E_N : N \in P_2\}$ est une famille d'applications. Pour $N \in P_2$, E_N est une application continue de l'ensemble :

$$\mathrm{Dom}(E_N) = \{(x, t) : x \in N,\ 0 \leq t < \varepsilon(x)\},$$

$\varepsilon : N \to \mathbb{R}_+$ étant une fonction continue à valeurs positives, dans la variété $\Sigma(N)$. E_N est analytique sur l'ensemble $\{(x, t) \in \mathrm{Dom}(E_N) : t > 0\}$ et, pour chaque $x \in N$, la courbe $t \to E_N(x, t)$, $t > 0$ est une trajectoire de $X/\Sigma(N)$.

Si $\overline{X}$ est un champ vectoriel analytique par morceaux avec domaine S , donné par (8) , alors l'ensemble :

$$\mathrm{Term}(\overline{X}) = \cup P_3$$

sera appelé <u>l'ensemble terminal de</u> $\overline{X}$. Une <u>trajectoire</u> de $\overline{X}$ est une application continue γ d'un intervalle I , à valeurs dans S , telle que, pour tout $t \in I$, $t \neq \sup I$, on a $\gamma(t) \in S - \mathrm{Term}(\overline{X})$ et, si $\gamma(t) \in N \in P$, alors :

(a) si $N \in P_1$, il existe un $\alpha > 0$ tel que $\gamma / (t, t+\alpha)$ est une trajectoire de X / N ,

(b) si $N \in P_2$, il existe un $\alpha > 0$ tel que $\gamma(t+s) = E_N(\gamma(t), s)$ pour $0 < s < \alpha$.

On démontre aisément l'<u>existence</u> et l'<u>unicité</u> <u>locale</u> des trajectoires de $\overline{X}$ <u>dans le sens positif du temps</u>, si la condition initiale appartient à $S - \mathrm{Term}(\overline{X})$. On voit aussi que, pour $x \in S$, il y a une <u>trajectoire maximale unique</u> telle que $\gamma(0) = x$, I étant un intervalle tel que $\inf I = 0 \in I$. Cette trajectoire est définie jusqu'au premier temps $t \geqslant 0$ tel que la limite $\lim_{s \to t-} \gamma(s)$ n'existe pas, ou bien elle existe et appartient à $\mathrm{Term}(\bar{X})$. Nous désignerons par $\gamma_x^{\bar{X}}$ cette trajectoire maximale.

Pour chaque $t \geqslant 0$, nous définissons un ensemble D_t et une application : $f_t : D_t \longrightarrow S$ par :

$$D_t = \{x : \gamma_x^{\bar{X}}(t) \text{ est défini}\}$$

$$f_t(x) = \gamma_x^{\bar{X}}(t) \quad \text{pour} \quad x \in D_t .$$

Pour $t < 0$, on définit $f_t = \emptyset$. Soit :

$$F^{\bar{X}} = \{f_t : t \in \mathbb{R}\} .$$

Alors $F^{\bar{X}}$ est un semi-groupe partiel à un paramètre, et $\mathrm{Dom}(F^{\bar{X}}) = S$. L'ensemble des points terminaux de $F^{\bar{X}}$ est précisément $\mathrm{Term}(\bar{X})$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème. La preuve (qui est très longue) sera publiée ailleurs.

THEOREME 1. - Soit F un semi-groupe partiel sous-analytique, Lipschitzien, positif et terminal dans une variété analytique M. Il existe alors un champ vectoriel $\bar{X}$, analytique par morceaux, tel que $F = F^{\bar{X}}$.

II. - APPLICATION A LA THÉORIE DU CONTRÔLE.

On peut appliquer le théorème 1 à la théorie du contrôle de la façon suivante. Etant donné un système :

(9) $$\dot{x} = f(x,u) \quad , \quad x \in M \quad , \quad u \in U$$

dont l'espace des états est la variété analytique M, on définit d'abord la notion de commande en boucle fermée (c. b. f.). Une c. b. f. est un ensemble $\mathfrak{F}$ de trajectoires de (9), ayant la propriété suivante :

Si x est le point initial d'une trajectoire $\gamma \in \mathfrak{F}$, alors :

(a) γ est unique,

(b) la restriction de γ à n'importe quel intervalle de la forme $\{t : t \geq t_o\} \cap \mathrm{Dom}(\gamma)$ appartient aussi à $\mathfrak{F}$.

Si $\mathfrak{F}$ est une c. b. f., on associe à $\mathfrak{F}$ un semi-groupe positif continu $\mathrm{Sem}(\mathfrak{F})$. Le domaine de $\mathrm{Sem}(\mathfrak{F})$ est l'ensemble S des points initiaux des trajectoires appartenant à $\mathfrak{F}$.

Si $x \in S$, et $t \geq 0$, et si $\gamma \in \mathfrak{F}$ est telle que $\gamma(t_o) = x$, alors on définit $f_t(x) = \gamma(t_o + t)$. (Si $\gamma(t_o + t)$ n'est pas défini, alors $f_t(x)$ n'est pas défini). Pour $t < 0$, on met $f_t = \emptyset$. Alors $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ est un semi-groupe positif continu, que nous désignons par $\mathrm{Sem}(\mathfrak{F})$. On dira que $\mathfrak{F}$ est <u>Lipschitzienne</u> si chaque $\gamma \in \mathfrak{F}$ est Lipschitzienne, et que $\mathfrak{F}$ est <u>terminale</u> si $\mathrm{Sem}(\mathfrak{F})$ est terminal. (Ces conditions seront toujours satisfaites si, par exemple, les trajectoires $\gamma \in \mathfrak{F}$ sont définies sur des intervalles compacts, et si U est compact et $f : M \times U \longrightarrow TM$ est continue). On voit alors que, <u>si $\mathfrak{F}$ est Lipschitzienne et terminale, alors la sous-analyticité de $\mathrm{Sem}(\mathfrak{F})$ entraîne la conclusion que $\mathfrak{F}$ est la famille des trajectoires d'un champ vectoriel analytique par morceaux</u>. On a de cette façon un "théorème de régularité" pour les c. b. f.

Naturellement, ce théorème n'est important que si l'on réussit à trouver des situations intéressantes où l'on arrive à démontrer qu'une c. b. f. $\mathfrak{F}$ est sous-analytique. Ici, on se bornera à donner un exemple particulièrement simple. (Une liste plus détaillée sera publiée ailleurs).

Considérons d'abord le problème du temps optimal pour un système :

$$\dot{x} \in A(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad , \tag{10}$$

où $A(x)$ est, pour chaque x un ensemble compact, convexe, à intérieur non vide. Supposons aussi que l'ensemble :

$$A = \{(x, u) : u \in A(x)\}$$

soit défini par :

$$A = \{(x, u) : \varphi(x, u) \leq 0\} \quad ,$$

φ étant une fonction analytique réelle, telle que $(\mathrm{grad}_u \varphi)(x, u) \neq 0$ chaque fois que $\varphi(x, u) = 0$. Ajoutons l'hypothèse que, pour chaque x , la surface

$\{u : \varphi(x, u) = 0\}$ est à courbure strictement positive.

On voit alors que le Principe du Maximum détermine d'une façon unique, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, et chaque covecteur $\lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, la valeur $u(x, \lambda) \in A(x)$ de la commande qui minimise le Hamiltonien et que $u(x, \lambda)$ est une fonction analytique de (x, λ).

Soit $x_o \in \mathbb{R}^n$ et soit $\mathfrak{F}_o$ la famille de toutes les trajectoires optimales qui aboutissent à x_o. Si x est le point initial d'une trajectoire $\gamma \in \mathfrak{F}_o$, soit $S(x)$ l'ensemble de toutes les valeurs de λ_o telles que $\|\lambda_o\| = 1$ et qu'il existe une $\gamma \in \mathfrak{F}_o$ dont x est le point initial, et qui satisfait le principe du maximum avec une variable adjointe $t \to \lambda(t)$ dont la valeur terminale est λ_o. Alors $S(x)$ est compact pour chaque x. Soit $\lambda(x)$ le premier élément de $S(x)$ par rapport à l'ordre léxicographique. Soit γ_x la trajectoire correspondante. Soit $\mathfrak{F} = \{\gamma_x\}$. On voit alors que $\mathfrak{F}$ est sous-analytique. Le théorème 1 entraîne donc le résultat de régularité : pour un système qui satisfait nos hypothèses il existe, pour chaque x_o, un champ vectoriel $\overline{X}$, analytique par morceaux, et terminal, tel que $\mathrm{Term}(\overline{X}) = \{x_o\}$, et que :

(a) les trajectoires de $\overline{X}$ sont optimales, et

(b) le domaine de $\overline{X}$ est l'ensemble de tous les x tels qu'il existe une trajectoire optimale de x à x_o.

-:-:-:-

Hector J. SUSSMANN
Mathematics Department
Rutgers University
New Brunswick
NEW JERSEY 08903 (U.S.A.)