Astérisque

B. Bonnard
V. Jurdjevic
I. Kupka
G. Sallet

Systèmes de champs de vecteurs transitifs sur les groupes de Lie semi-simples et leurs espaces homogènes

Astérisque, tome 75-76 (1980), p. 19-45
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__75-76__19_0>

SYSTÈMES DE CHAMPS DE VECTEURS TRANSITIFS SUR LES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES ET LEURS ESPACES HOMOGÈNES

par

B. BONNARD

V. JURDJEVIC

I. KUPKA

G. SALLET

-:-:-:-

Ce papier rassemble les résultats exposés dans trois conférences. Il a été décidé d'exposer ces résultats en une seule fois pour des raisons d'économie. En effet, tous les résultats concernent principalement des problèmes de contrôlabilité sur les groupes de Lie semi-simples réels. On dispose d'une machinerie impressionnante sur la géométrie des groupes de Lie semi-simples, les trois conférences utilisent cette connaissance. Il aurait semblé inutile de rappeler à chaque fois les résultats utilisés. L'exposition ci-après est du style "groupe de Lie", plutôt que "groupe de Lie linéaire" encore une fois pour des raisons de concision. Les résultats ont été obtenus indépendamment mais réagissent entre eux, aussi des raccourcis seront parfois utilisés différents en cela de l'exposé original.

Ce papier est divisé en cinq parties.

La première partie énonce des généralités sur les systèmes de Killing, un critère de transitivité pour ces systèmes, et une technique de démonstration de transitivité. Ces deux derniers points sont dûs à JURDJEVIC et KUPKA [9].

La deuxième partie décrit l'infrastructure commune à la suite.

La troisième partie décrit les résultats obtenus par JURJEVIC et KUPKA [9].

La quatrième partie, ceux de SALLET [16].

Enfin, la cinquième, ceux de BONNARD [2].

Ce papier a été rédigé par SALLET ; que les autres auteurs veuillent bien l'en excuser d'avance pour la rédaction.

***

Introduction de la première partie.

En suivant LOBRY [14].

Sur une variété M, connexe, C^{∞}, on appelle polysystème un ensemble F de champs de vecteurs sur M.

Une trajectoire élémentaire de F est une application continue x d'un intervalle $[0,T]$, $T \geqslant 0$ dans M, telle qu'il existe une partition de $[0,T]$, pour laquelle la restriction de x à chaque intervalle de la partition est une trajectoire d'un champ de vecteurs de F.

Si l'on note X_t les groupes locaux à un paramètre correspondant à un champ de vecteurs C^{∞}, l'ensemble des difféormorphismes locaux $\{X_t \mid t \geqslant 0\ X \in F\}$ engendre un pseudo-semi-groupe d'homéomorphismes locaux. Si ce semi-groupe opère transitivement sur M on dira que F est transitif (complètement contrôlable dans la littérature traditionnelle). Comme dans toutes les conférences rédigées ici on s'intéresse soit à des polysystèmes constitués de champs de vecteurs invariants à droite sur un groupe de Lie, ou à des polysystèmes provenant de systèmes précédents pour un groupe de Lie opérant différentiablement sur une variété M, on a spécialisé les définitions à ces cas pour profiter d'un effet simplificateur. Mais il est clair que les notions indiquées se rapportent aux cas les plus généraux.

Généralités sur les polysystèmes de Killing.

On considère un groupe de Lie G, on note $\underline{g}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G invariants à droite. Si le groupe de Lie G opère différentiablement sur une variété M on a naturellement une application σ de $\underline{g}$ dans l'algèbre de Lie $V(M)$ des champs de vecteurs sur M. Si $X \in \underline{g}$, $\sigma(X)$ est le champ de vecteurs induit par le groupe à un paramètre agissant sur M :$(\exp tX\ .)$ On vérifie facilement que σ est un homomorphisme d'algèbre de Lie de $\underline{g}$ dans

$V(M)$. L'ensemble $\sigma(\underline{g})$ que l'on notera $\underline{k}_G(M)$ s'appelle les champs de Killing de M relatifs à G .

A.- DÉFINITIONS.

Définition 1 : Un polysystème de Killing est un sous-ensemble de $\underline{k}_G(M)$.

Remarque 1 : Les polysystèmes de champs de vecteurs invariants à droite sur un groupe de Lie sont des polysystèmes de Killing.

Remarque 2 : A tout polysystème de Killing F on associe donc naturellement un polysystème Γ de champs de vecteurs invariants à droite sur G .

Définition 2 : Soit $\Gamma \subset \underline{g}$; on définit et note $S_+(\Gamma)$ le semi-groupe engendré par les éléments $\exp tX$, où $t \in \mathbb{R}^+$ et $X \in \Gamma$.

Définition 3 : Soit $F = \sigma(\Gamma)$ un polysystème de Killing ; on appelle ensemble d'accessibilité de F à partir du point $q \in M$, $A_F(q) = \overline{S_+(\Gamma).q}$.

Définition 4 : On dira que le polysystème F est transitif, si le semi-groupe $S_+(\Gamma)$ est lui-même transitif sur M , autrement dit pour tout $q \in M$, $A_F(q) = M$.

Définition 5 : Deux polysystèmes de Killing seront dits équivalents si et seulement si pour tout point de M , leurs ensembles d'accessibilité sont identiques. On appelle saturé d'un polysystème F , note $Sat(F)$ le plus grand polysystème de Killing qui lui est équivalent.

Remarque : Si le groupe G opère transitivement sur M , et si le polysystème Γ associé à F est transitif sur G , il est clair que F est transitif sur M . On va donc s'intéresser plus particulièrement aux polysystèmes $\Gamma \subset \underline{g}$.

Si $\Gamma \subset \underline{g}$, on note $Lie(\Gamma)$ l'algèbre de Lie engendré par Γ ; soit maintenant $LS(\Gamma) = Sat(\Gamma) \cap Lie(\Gamma)$.

B.- UN CRITÈRE DE TRANSITIVITÉ.

Critère : Γ sera transitif sur G si et seulement si $LS(\Gamma) = \underline{g}$.

Démonstration : La condition est nécessaire car Γ est équivalent à $\underline{g}$, i.e. $Sat(\Gamma) = \underline{g}$, et $Lie(\Gamma) = \underline{g}$ d'après Nagano [23].

La condition est suffisante car si $LS(\Gamma) = \underline{g}$ alors $Sat(\Gamma)$ est symétrique et vérifie également la condition du rang (ChOW-Krener [23]) , donc $Sat(\Gamma)$, par conséquent Γ sont transitifs sur G .

Remarque : $LS(\Gamma)$ joue pour les semi-groupes connexes de G le rôle de l'algèbre de Lie pour les sous-groupes de Lie de G . C'est en effet $LS(\Gamma)$ qui est significatif, les deux ensembles $Sat(\Gamma)$ et $LS(\Gamma)$ sont trop gros. Si l'on prend dans le tore T , un champ de vecteur à pente irrationnelle alors $Lie(\Gamma) = \underline{g}$ et le système n'est pas transitif.

Remarque 1 : Cependant si $\Gamma = -\Gamma$, Γ est symétrique, alors $S_+(\Gamma)$ est un groupe, connexe par arcs, donc un sous-groupe de Lie de G , son algèbre de Lie est équivalente à Γ , mais comme Γ engendre $S_+(\Gamma)$, cette algèbre de Lie est celle engendrée par Γ . Donc : $LS(\Gamma) = Lie(\Gamma)$.

Remarque 2 : On dit qu'un champ de vecteurs est compact si toute trajectoire est relativement compacte. Si l'on considère un champ de vecteurs invariant à droite cela veut dire que $\{\exp tX / t \in \mathbb{R}\}$ est rélativement compacte.

Comme un champ de vecteurs de Killing compact est poisson-stable si $X \in \Gamma$ alors $\mathbb{R}X \subset \Gamma$.

Un polysystème de champs compacts est donc équivalent à un polysystème symétrique.

C.- MÉTHODE DE DÉMONSTRATION DE LA TRANSITIVITÉ D'UN POLYSYSTÈME.

On part d'un polysystème F que l'on "agrandit" par deux procédures canoniques. On suppose $F \subset \underline{g}$ ce qui n'ôte rien à la généralité des résultats pour les polysystèmes de Killing.

1. Si F_1 est l'enveloppe convexe conique fermée de F, alors F_1 est équivalent à F.

Démonstration : La topologie considérée étant la C^k-convergence uniforme pour les champs de vecteurs, mais ici elle coïncide avec la topologie d'espace vectoriel de $\underline{k}_G(M)$.

F est équivalent à $\overline{F}$ fermeture de F, cela résulte des théorèmes classiques sur les équations différentielles.

F est équivalent à $\mathbb{R}_+ F$ le cône engendré par F : évident.

Enfin F est équivalent à son enveloppe convexe, c'est la méthode bien connue des contrôles relaxés.

2. Soit $X \in \underline{g}$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tX} \in A_{F_1}(e)$ alors si $F_2 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} e^{t\,adX}(F_1)$, F_2 est équivalent à F_1.

Démonstration : adX désigne l'homomorphisme d'algèbre de Lie $Y \longrightarrow [X, Y]$. Il faut montrer que $A_{F_2}(e) = A_{F_1}(e)$ car les champs étant invariants à droite, on a dans G $A_F(q) = A_F(e).q$. Si $Y \in F_1$ il suffit de montrer que : $\exp(e^{tadX} Y) \in A_{F_1}(e) = S_+(F)$. Or, les relations bien connues [7] $e^{tadX} = Ad(\exp tX)$ et $\exp(Ad\sigma . Y) = \sigma \exp Y \sigma^{-1}$ entraînent $\exp(e^{tadX} Y) = \exp tX \ \exp Y \ \exp -tX$; or, par hypothèse $\exp tX$ et $\exp -tX$ appartiennent à $A_{F_1}(e)$, $\exp Y$ aussi, comme $A_{F_1}(e) = S_+(F_1)$ est un semi-groupe, $\exp(e^{tadX} Y) \in A_{F_1}(e)$. CQFD.

Application importante : Si $X \in F$ et si X est compact, d'après la remarque 2 du § B, alors $\forall t \in \mathbb{R}$ $e^{t\,adX}(F) \subset Sat(F)$.

***

Introduction à la deuxième partie.

Il s'agit d'un catalogue de propriétés bien connues sur les groupes et algèbres de Lie semi-simples. Ces propriétés sont éparpillées dans les livres classiques sur ce sujet. Ce paragraphe rassemble et rappelle ces propriétés en même temps fixe les notations des paragraphes suivants.

Les propriétés évoquées se trouvent dans une des références suivantes : [1], [7], [6], [9], [19], [20] .

/ DEUXIÈME PARTIE /

Résumé des résultats classiques sur les algèbres de Lie semi-simples.

Nous rassemblons ici, pour la commodité du lecteur, les résultats classiques bien connus sur les algèbres de Lie semi-simples.

1. Une algèbre de Lie $\underline{g}$ est dite simple si elle n'admet d'autres idéaux que $\{0\}$ et $\underline{g}$.
2. Une algèbre est dite semi-simple si elle est somme directe d'idéaux simples.
3. On note $\operatorname{ad} X : Y \longrightarrow [X, Y]$ et $\operatorname{Kil}(X, Y) = \operatorname{Trace}(\operatorname{ad} x . \operatorname{ad} Y)$ la forme de Killing ; une algèbre de Lie est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing est non dégénérée.
4. Une sous-algèbre $\underline{h}$ d'une algèbre de Lie $\underline{g}$ semi-simple est une algèbre de Cartan si et seulement si :
   i) $\underline{h}$ est une algèbre de Lie commutative maximale dans $\underline{g}$
   ii) pour tout $H \in \underline{h}$, $\operatorname{ad} H$ est un endomorphisme semi-simple.
5. Un élément $X \in \underline{g}$ est dit régulier si la multiplicité de la valeur propre 0 de $\operatorname{ad} X$ est minimum.
6. Les algèbres de Cartan sont les noyaux des applications adjointes des éléments réguliers.
7. Un élément X est dit fortement régulier, s'il est régulier, et si les valeurs propres non nulles de $\operatorname{ad} X$ sont de multiplicité 1 .

8. Soit $\underline{g}_{\mathbb{C}} = \underline{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ les algèbres de Lie complexifiées de l'algèbre de Lie réelle semi-simple $\underline{g}$ et d'une algèbre de Cartan $\underline{h}$.

Soit α une forme linéaire sur $\underline{h}_{\mathbb{C}}$, on considère :

$$\underline{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} = \{X \in \underline{g}_{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \alpha(H)\, X\}$$

α est appelée une racine si $\underline{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \neq \{0\}$.

On note Φ l'ensemble des racines non nulles.

i) on a $\underline{g}_{\mathbb{C}} = \underline{h}_{\mathbb{C}} \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \underline{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$;

ii) la forme de Killing de $\underline{g}_{\mathbb{C}}^{C}$ est non dégénérée sur $\underline{h}_{\mathbb{C}}$, on note H_{α} le vecteur de $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ tel que $\forall H \in \underline{h}_{\mathbb{C}}$ $\mathrm{Kil}_{\mathbb{C}}(H, H_{\alpha}) = \alpha(H)$, les H_{α} engendrent $\underline{h}_{\mathbb{C}}$;

(iii) les $\underline{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ sont tous de dimension 1. Si $\alpha \in \Phi$, les seules racines colinéaires à α sont $\alpha, 0, -\alpha$.

(iv) si (α, β) sont deux racines, telles que $\alpha+\beta \neq 0$ alors : $\mathrm{Kil}(g_{\mathbb{C}}^{\alpha}, g_{\mathbb{C}}^{\beta}) = 0$.

(v) pour chaque $\alpha \in \Phi$, on peut choisir $X_{\alpha} \in \underline{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ tel que :

(1) $[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = H_{\alpha}$

(2) $[X_{\alpha}, X_{\beta}] = N_{\alpha,\beta}\, X_{\alpha+\beta}$ si $\alpha+\beta \neq 0$ où l'on pose par convention $X_{\alpha+\beta} = 0$ si $\alpha+\beta \notin \Phi$

(3) les $N_{\alpha,\beta}$ sont des constantes réelles vérifiant :

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \quad .$$

Les éléments (X_{α}, H_{α}) constituent une base de Weyl de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ modulo $\underline{h}_{\mathbb{C}}$.

9. On dit qu'une algèbre de Lie semi-simple est compacte si sa forme de Killing est définie négative.

Soit $\underline{u}$ l'algèbre de Lie réelle : on a la somme directe orthogonale pour la forme de Killing

$$\underline{u} = \Big(\sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}_i H_{\alpha}\Big) \overset{\perp}{\bigoplus_{\alpha \in \Phi}} \mathbb{R}(X_{\alpha} - X_{-\alpha}) \overset{\perp}{\bigoplus_{\alpha \in \Phi}} \mathbb{R}_i (X_{\alpha} + X_{-\alpha})$$

il est facile de vérifier que $\underline{u}$ est compacte, et que sa complexifiée est $\underline{g}_{\mathbb{C}}$.

Réciproquement, toute algèbre de Lie compacte s'écrit sous cette forme. On parlera de base de Weyl modulo $\underline{h}$;

10. Soit σ la conjugaison dans $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\underline{g}$. Il existe une forme réelle compacte de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$, $\underline{u}$ telle que si τ est la conjugaison dans $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\underline{u}$, $\sigma\tau = \tau\sigma$.
Si l'on note $\theta = \sigma\tau$, θ est un automorphisme involutif de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$, qui laisse stable $\underline{g}$ et $\underline{u}$; θ induit donc la décomposition $\underline{g} = \underline{k} + \underline{p}$ et $\underline{u} = \underline{k} + i\,\underline{p}$ où $\underline{k}$ est une sous-algèbre maximale compacte de $\underline{g}$ et $\underline{p}$ un sous-espace vectoriel de $\underline{g}$.

11. Soit $\underline{h}_o = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R} H_\alpha$. $\underline{h}_o$ est un espace vectoriel réel, sur lequel les racines prennent des valeurs réelles. On peut choisir un ordre sur $\underline{h}_o$, ce qui induit un ordre sur $\underline{h}_o^*$, et donc sur Φ.

12. σ induit une anti-involution sur $\underline{h}_{\mathbb{C}}^*$ par :

$$\forall H \in \underline{h}_{\mathbb{C}} \quad (\sigma^*\alpha\, H) = \overline{\alpha(\sigma(H))} \ ,$$

une racine est dite réelle si $\sigma^*\alpha = \alpha$, imaginaire si $\sigma^*\alpha = -\alpha$. On désigne par Φ_- les racines imaginaires non nulles, et π la projection sur $\ker(\sigma^* - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(\sigma^* + \mathrm{Id})$. Alors $\pi(\Phi\setminus\Phi_-) = \Sigma$ est un système de racines (non forcément réduit) dans $\ker(\sigma^* - \mathrm{Id})$. On note si $t \in \Sigma$, $\Phi(t) = \pi^{-1}(t) \cap \Phi$. On peut choisir l'ordre dans Φ de telle façon qu'il soit compatible avec σ c'est-à-dire :

$$\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \alpha \notin \Phi \ \Rightarrow \ \sigma^*\alpha > 0 \ .$$

13. Une racine positive est dite primitive (ou fondamentale, ou simple) si elle n'est pas somme de deux racines positives.

14. Une racine α est dite maximale si $\alpha > 0$ et pour tout $\beta \in \Phi$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta \notin \Phi$.

15. Une racine α est dite réelle maximale si $\alpha > 0$ et pour tout $\beta \in (\Phi\setminus\Phi_-)$ $\beta > 0$ $\alpha + \beta \in \Phi$.

16. Les racines primitives forment une base de $\underline{h}_o$. On note Δ l'ensemble des racines primitives.
L'espace vectoriel $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} (\underline{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \oplus \underline{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha})$ engendre l'algèbre de Lie $\underline{g}_{\mathbb{C}}$.

17. Si $\underline{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple réelle, $\underline{h}$ une sous-algèbre de

Cartan, il existe une décomposition de Cartan $\underline{g} = \underline{k} + \underline{p}$, dans laquelle $\underline{h}$ est θ stable. $\underline{h}$ se décompose donc en $\underline{h} = \underline{h}_k + \underline{h}_p$.

18. On dit que $\underline{h}$ est une algèbre de Cartan fondamentale si et seulement si $\underline{h}_k$ est abélienne maximale dans $\underline{k}$.

Toute algèbre de Lie réelle semi-simple admet des algèbres de Cartan fondamentales ; il suffit pour cela de considérer le centralisateur dans $\underline{g}$ d'une algèbre abélienne maximale de $\underline{k}$.

Il est équivalent de dire :

(i) $\underline{h}$ est fondamentale

(ii) aucune racine de $(\underline{g}_{\mathbb{C}}, \underline{h}_{\mathbb{C}})$ ne s'annule identiquement sur $\underline{h}_k$

(iii) il existe un élément régulier dans $\underline{h}_k$

(iv) aucune racine de $(\underline{g}_{\mathbb{C}}, \underline{h}_{\mathbb{C}})$ est réelle.

19. Etant donné deux racines simples α et β de $(\underline{g}_{\mathbb{C}}, \underline{h}_{\mathbb{C}})$, alors $-\beta(H_\alpha) = N^2_{\alpha,\beta}$, et $\dfrac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}$ est un entier que l'on appelle entier de Cartan.

20. L'entier $\dfrac{4\beta(H_\alpha)\alpha(H_\beta)}{\alpha(H_\alpha)\beta(H_\beta)}$ prend la valeur $0, 1, 2, 3$.

Si l'on représente les éléments de Δ par des points, si chaque couple de points (α, β) est joint par l'entier précédent, si, en outre, quand cet entier est supérieur à 1, on indique par une flèche pointant vers celle-ci la plus courte racine, on obtient le graphe de Dynkin-Loxeter de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$. Chaque composante connexe du graphe correspond aux idéaux de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$.

La connaissance du graphe détermine entièrement à un isomorphisme près l'algèbre de Lie $\underline{g}_{\mathbb{C}}$.

21. Si $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ est simple, alors $(\underline{g}_{\mathbb{C}}, \underline{h}_{\mathbb{C}})$ n'a qu'une racine maximale σ (resp. minimale) et réciproquement.

Si $\pi(\sigma) \in \Phi$, $\pi(\sigma)$ est l'unique racine réelle maximale, $-\pi(\sigma)$ minimale réelle.

Si $\pi(\sigma) \notin \Phi$, aucune racine n'est extrémale réelle.

22. σ envoie $\underline{g}^\alpha_{\mathbb{C}}$ sur $\underline{g}^{\sigma^*\alpha}_{\mathbb{C}}$

On note $\underline{g}^\alpha = (\underline{g}^\alpha_{\mathbb{C}} \oplus \underline{g}^{\sigma^*\alpha}_{\mathbb{C}}) \cap \underline{g}$ si α n'est pas réelle

$\underline{g}^\alpha = \underline{g}^\alpha_{\mathbb{C}} \cap \underline{g}$ si α est réelle

on a alors : $\underline{g} = \underline{h} \oplus_{\alpha \in \Phi} \underline{g}^\alpha$.

***

Introduction à la troisième partie.

L'importance de disposer de critère de transitivité pour des systèmes n'est plus à prouver. Or, malheureusement on ne dispose que de peu de résultats dans cette direction. De plus, il est vain de vouloir espérer obtenir un critère nécessaire et suffisant algébrique correspondant au critère de KALMAN pour les systèmes linéaires.

Le théorème donné ici fournit une condition suffisante algébrique pour la transitivité de système $\{X+uY\}$ invariants à droite. Dans un certain sens cette condition qui n'est pas nécessaire est cependant la meilleure possible.

/ TROISIÈME PARTIE / Accessibilité sur les groupes de Lie semi-simples et leurs espaces homogènes

KUPKA-JURDJEVIC [9] [17]

Théorème. - Soit G un groupe de Lie semi-simple réel, de centre fini, et soit $\underline{g}$ son algèbre de Lie. Si X et Y sont éléments de $\underline{g}$, le polysystème invariant à droite sur G $\{X+uY \mid u\in\mathbb{R}\}$ est transitif sur G si :

1) Y est fortement régulier

si $\underline{h} = \ker(\operatorname{ad} Y)$ est l'algèbre de Cartan correspondant à Y, on a :

$$\underline{g}_{\mathbb{C}} = \underline{h}_{\mathbb{C}} \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \underline{g}^{\alpha}_{\mathbb{C}} \quad \text{décomposition en espaces de racines,}$$

on a alors $X = X_o + \sum_{\alpha\in\Phi} X_\alpha$ la décomposition de X adaptée à cette somme directe

2) si α est extrémal et $\pi(\alpha)\neq 0$ alors $X_\alpha \neq 0$ [π est défini au II n°12]

3) si α est une racine primitive $X_\alpha \neq 0$ et $X_{-\alpha}\neq 0$

4) si α est une racine réelle non nulle, maximale réelle alors $\mathrm{Kil}(X_\alpha, X_{-\alpha}) < 0$.

Démonstration (les plus grands traits seulement).

Tout d'abord si $\Gamma = \{X, Y, -Y\}$ alors Γ est équivalent au système considéré. En effet, le système considéré dans le théorème est la droite affine passant par X et de direction $\mathbb{R}Y$. L'enveloppe conique, convexe fermée est donc le demi-plan de frontière $\mathbb{R}Y$, contenant X . Ce demi-plan est clairement l'enveloppe convexe conique fermée engendrée par Γ . Γ est donc équivalent au système du théorème.

On va montrer que $LS(\Gamma) = \underline{g}$.

La démonstration se fait par récurrence sur Σ (voir II n°12) : on suppose que $LS(\Gamma) \supset \bigoplus_{\substack{\pi(\alpha)>t \\ \pi(\alpha)<-t}} \underline{g}^{\alpha} = E_t$, et on montre que $LS(\Gamma) \supset \underline{g}_{\alpha}$ pour $\alpha \in \Phi(t)$ ou $\alpha \in \Phi(-t)$.

On suppose $t > 0$. Pour montrer cela, on fait une récurrence descendante sur $\Phi(t)$ et $\Phi(-t)$; les démonstrations étant symétriques, on considère $\beta \in \Phi(t)$ telle que pour tout $\alpha \in \Phi(t)$, $\alpha > \beta$ alors $\underline{g}^{\alpha} \in LS(\Gamma)$. Il faut montrer que $\underline{g}^{\beta} \subset LS(\Gamma)$. Pour cela, on procède par plusieurs étapes que nous indiquerons ici sans démonstration, basées sur quelques lemmes techniques. Le fait que Y est fortement régulier est essentiel dans ces démonstrations.

<u>Lemme 1.- On suppose que</u> $\gamma, \delta, \gamma - \delta$ <u>sont des racines, que</u> $\underline{g}^{\gamma} \subset LS(\Gamma)$, <u>et telles qu'il existe</u> $Z \in LS(\Gamma)$ <u>pour lequel</u> $Z_{-\gamma+\delta} \neq 0$. <u>Alors il existe</u> $Z' \in LS(\Gamma)$ <u>tel que</u> $Z'_{\gamma} \neq 0$.

<u>Lemme 2.- Soit</u> $t \in \Phi \cap \Sigma$ <u>ou</u> $t = 0$. <u>Si</u> $E_t \subset LS(\Gamma)$, <u>s'il existe un</u> $Z \in LS(\Gamma)$ <u>tel que ou bien</u> $Z_t = 0$ <u>ou</u> $Z_t \neq 0$ <u>et</u> $-Z_t \in LS(\Gamma)$ <u>alors</u> $LS(\Gamma) \supset \underline{g}^{\alpha}$ <u>pour tout</u> $\alpha \in \Phi(t)$ <u>tel que</u> $Z_{\alpha} \neq 0$.

<u>Lemme 3.- Si</u> $t \in \Sigma \cap \Phi$ <u>ou</u> $t = 0$, <u>alors</u> $Z_t \in LS(\Gamma)$ <u>pour tout</u> $Z \in LS(\Gamma)$ (<u>on suppose</u> $E_t \subset LS(\Gamma)$) ; (<u>voir la cinquième partie une démonstration dans un cas particulier du lemme 2 et 3</u>).

<u>Première étape</u> : On montre qu'il existe $Z \in LS(\Gamma)$ tel que $Z_{\beta} \neq 0$

<u>Deuxième étape</u> : Si $\underline{g}^{t} \subset LS(\Gamma)$ alors pour toute racine γ de $\Phi(t)$ vérifiant la condition de la première étape $\underline{g}^{\gamma} \subset LS(\Gamma)$.

<u>Troisième étape</u> : On a une arborescence de cas que l'on règle par des démonstrations.

1. si $t \notin \Phi$:

on démontre alors que cela entraîne que $LS(\Gamma) \supset \underline{g}^{\gamma}$ pour les racines vérifiant les conditions de la première étape. On conclut à l'aide de la démonstration de la deuxième étape que $\underline{g}^{\beta} \subset LS(\Gamma)$.

2. si $t \in \Phi$:

2.1. si t est réel minimal on montre alors que $\underline{g}^{t} \subset LS(\Gamma)$ ce qui nous ramène à la deuxième puis première étape. On utilise ici le fait que $X \in LS(\Gamma)$ et que $\mathrm{Kil}(X_t, X_{-t}) < 0$.

2.2 si t n'est pas réel maximal

2.2.1. si $X_t \neq 0$ alors $LS(\Gamma) \supset \underline{g}^{t}$ qui renvoie à la deuxième étape

2.2.2. si $X_t = 0$

2.2.2.1. si $X_\beta \neq 0$ alors directement on montre que $\underline{g}^{\beta} \subset LS(\Gamma)$

2.2.2.2. si $X_\beta = 0$; β n'est donc pas maximal (à cause de la condition 2 du théorème β n'est pas minimal car $\pi(\beta) = t > 0$. Il existe donc une racine primitive ρ telle que $\beta + \rho \notin \Phi$ mais $\underline{g}^{\beta+\rho} \subset LS(\Gamma)$ par hypothèse de récurrence descendante, et de récurrence. On applique le lemme 1 au cas $\beta+\rho$, β , $-\rho$. A cause de la condition 3) du théorème $X_{-\rho} \neq 0$ on en déduit que il existe $Z \in LS(\Gamma)$ pour lequel $Z_\beta \neq 0$.
Si $Z = 0$, alors comme $Z_\beta \neq 0$ le lemme 2 permet de conclure $\underline{g}^{\beta} \subset LS(\Gamma)$.
Si $Z_t \neq 0$ on est ramené à la démonstration du 2.2.1 où l'on remplace X par Z .

Ceci termine la récurrence et montre que :

$$LS(\Gamma) \supset \sum_{\pi(\alpha) \neq 0} \underline{g}^{\alpha}$$

$V = \sum_{\pi(\alpha) \neq 0} \underline{g}^{\alpha}$ est un espace vectoriel. V est symétrique et donc le semi-groupe $S_+(V)$ est en fait un groupe, c'est un sous-groupe connexe par arcs de par sa dé-

finition, et donc d'après le théorème de GOTO, c'est un sous-groupe de Lie de G. Son algèbre de Lie est celle engendrée par V, $\{V\}_{LA}$. $S_+(\{V\}_{LA}) = S_+(V) \subset S_+(\Gamma)$ et donc $\{V\}_{LA} \subset LS(\Gamma)$. On a $X = X_o + \sum_{\alpha\in\Phi} X_\alpha$ où $X_o \in \underline{h}$ comme les H_α engendrent $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ on peut écrire : $X_o = \sum_{\alpha\in\Phi} X_o(\alpha)$ où $X_o(\alpha) \in [\underline{g}^\alpha_{\mathbb{C}}, \underline{g}^{-\alpha}_{\mathbb{C}}] = \mathbb{C} H_\alpha$.
Mais $X_o \in \underline{g}$ donc $\pi X_o = X_o$ où π est la projection $\frac{Id + \sigma}{2}$.
En résumé on peut écrire :

$$X = \Big(\sum_{\alpha\in\Phi_-} \pi X_o(\alpha) + \sum_{\alpha\in\Phi_-} X_\alpha \Big) + \Big(\sum_{\alpha\in\Phi\setminus\Phi_-} \pi X_o(\alpha) + \sum_{\alpha\in\Phi\setminus\Phi_-} X_\alpha \Big) .$$

Soit $X = X^1 + X^2$. $X^2 \in V \subset LS(\Gamma)$ et donc puisque $LS(\Gamma)$ est un cône et que $X \in LS(\Gamma)$ et $-X^2 \in LS(\Gamma)$, $X - X^2 = X^1 \in LS(\Gamma)$.

Posons : $X^1_o = \sum_{\alpha\in\Phi_-} \pi X_o(\alpha)$ et $X^1_1 = \sum_{\alpha\in\Phi_-} X_\alpha$, mais $X_o(\alpha) = \lambda_\alpha [Y_\alpha, Y_{-\alpha}]$ où $Y_\alpha \in \underline{g}^\alpha_{\mathbb{C}}$ pour $\alpha\in\Phi_-$, donc $X_o(\alpha) = \lambda_\alpha [Y_\alpha, Y_{\sigma_*\alpha}]$ et $\sigma X_o(\alpha) = \sigma(\lambda_\alpha)[\sigma Y_\alpha, \sigma Y_{\sigma*\alpha}] = +X_o(\alpha)$ d'où $\lambda_\alpha \in i\mathbb{R}$.
Comme G a un centre fini, il est alors facile de voir que $X^1_o = \sum_{\alpha\in\Phi_-} i\lambda_\alpha [Y_\alpha, Y_{-\alpha}]$ où $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ est un champ de vecteurs compact. Comme on montre que $\sum_{\pi(\alpha)\neq 0} \underline{g}^\alpha \subset LS(\Gamma)$ par la récurrence précédente, on peut appliquer le lemme 3 à $t = 0$, et à $X^1 \in LS(\Gamma)$. On en déduit $X^1_o \in LS(\Gamma)$, mais X^1_o est compact, donc poisson-stable, donc $\mathbb{R}X^1_o \subset LS(\Gamma)$, on applique donc le lemme 2 avec $t = 0$ à $Z = X^1$. On en déduit que $\underline{g}^\alpha \subset LS(\Gamma)$ pour tout $\alpha\in\Phi_-$ tel que $X_\alpha \neq 0$. D'après la condition 3) du théorème on a donc :

$$LS(\Gamma) \supset \sum_{\alpha\in\Delta} \underline{g}^\alpha \oplus \underline{g}^{-\alpha} \quad (\Delta \text{ racines positives}) .$$

Soit $\Lambda = \big(\sum_{\alpha\in\Delta} \underline{g}^\alpha \oplus \underline{g}^{-\alpha} \big)_{LA}$ l'algèbre de Lie engendrée dans $\underline{g}$, alors $\Lambda_{\mathbb{C}}$ contient $\underline{g}^\alpha_{\mathbb{C}}$ et $\underline{g}^{-\alpha}_{\mathbb{C}}$, d'après le théorème de Jacobson-Serre-Harish-Chandra [II n°16] $\Lambda_{\mathbb{C}} = \underline{g}_{\mathbb{C}}$, et donc $\Lambda = \underline{g}$ soit $LS(\Gamma) = \underline{g}$ CQFD.

<u>Proposition</u>. - <u>Soit un groupe</u> G <u>produit</u> $G' \times Z$ <u>où</u> G' <u>est un groupe de Lie semi-simple de centre fini et</u> Z <u>est soit</u> $\mathbb{R}$ <u>soit</u> S^1. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux éléments de</u> $\underline{g}$, <u>telles que les composantes</u> X' <u>et</u> Y' <u>dans</u> $\underline{g}'$ <u>vérifient les</u>

conditions du théorème, et tels que la composante de Y suivant Z est non nulle alors le système invariant à droite $\{X+u\,Y \mid u \in \mathbb{R}\}$ est transitif sur G.

Démonstration : On peut toujours supposer que la composante de X suivant Z est nulle. La démonstration du théorème entraîne que $LS(\{X+u\,Y\}) \supset \underline{g}'$, comme la composante de Y est non nulle $LS(\{X+u\,Y\}) \supset \underline{g}' \oplus \underline{z} = \underline{g}$.

Remarque : La proposition précédente donne donc un critère de contrôlabilité sur $GL(n, \mathbb{R})$.

Corollaire.- Si un groupe de Lie semi-simple de centre fini G opère différentiablement et transitivement sur une variété connexe M, si A et B sont deux champs de Killing tels que leurs champs invariants à droite associés vérifient les conditions du théorème, alors $\{A+u\,B\}$ est transitif sur M.

Conclusion : L'importance du critère de transitivité obtenu est souligné par la remarque suivante : les polysystèmes invariants à droite tels que $\{A+u\,B\}$ soient transitifs ne forment pas un sous-ensemble semi-algébrique de $\underline{g} \times \underline{g}$ (voir [10] et la conférence de I. KUPKA dans ces actes). Il est donc vain de vouloir espérer un critère du type KALMAN pour les systèmes non linéaires. De plus, les conditions 1), 2) et 3) du théorème sont génériques. Seule 4) ne l'est pas, mais si un couple X et Y vérifie 1), 2) et 3) et viole la condition 4), alors on peut montrer que $\{X+u\,Y\}$ n'est pas transitif. Ainsi donc le critère est le meilleur possible dans cette direction tout au moins.

***

Introduction à la quatrième partie.

On va d'abord énoncer un type de problème qui concerne les deux dernières parties.

Soit une variété M connexe, un certain sous-ensemble $\mathcal{C} \subset V(M)$ et soit $X \in \mathcal{C}$ un champ de vecteurs. Existe-t-il un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{C}$ tel que le système $\{X, Y\}$ soit transitif sur M ? Ce problème est assez naturel, il correspond à l'idée que si un système ne fonctionne pas, il est intéressant si le système est coûteux de le réparer en lui adjoignant quelques modifications partielles.

Si la formulation du problème est naturelle et correspond à un problème concret, par contre, elle est beaucoup trop générale pour espérer être résolue. Il faut donc particulariser ce problème. Poser cette question n'est pas vide de sens, car on sait [17] que l'on peut "contrôler" sur une variété à l'aide d'un couple de champs de vecteurs. Cependant, ici la situation se complique car l'on conçoit bien que si le champ X est mal approprié on ne pourra pas forcément trouver un champ Y convenant.

Cette partie va donc poser et résoudre le problème suivant :

Etant donné un groupe de Lie G semi-simple de centre fini, compact ou de type intérieur, on considère la classe $\mathcal{C}$ des champs de vecteurs invariants à droite compacts sur G. Si $X \in \mathcal{C}$ et si aucune composante de X sur les composantes simples de $\underline{g}$ n'est nulle alors il existe $Y \in \mathcal{C}$ solution du problème posé. Si X n'est pas de cette forme alors aucun $Y \in \underline{g}$ convient. Il est à remarquer que si un Y existe, alors l'ensemble des Y convenant est un ouvert dense [15] [12].

Comme corollaire immédiat si l'on considère les espaces riemanniens symétriques compacts, ou de type intérieur, et la classe des champs de Killing compacts ont le même résultat.

Pour terminer, remarquons que la troisième partie a une incidence sur la quatrième. Si l'on considère le même problème sur les mêmes groupes de Lie, mais la classe étant l'algèbre de Lie $\underline{g}$ tout entière, alors on a encore le même type de réponse. Il faut que X n'ait aucune composante simple nulle sur $\underline{g}$.

/ QUATRIÈME PARTIE / G. SALLET [16]

Nous résumerons sous le terme de problème de mariage dans une classe considérée le problème évoqué dans l'introduction.

On a alors le :

Théorème. - Le problème de mariage pour les groupes de Lie compacts est complètement résolu dans la classe des champs de vecteurs invariants à droite : si un champ de vecteurs X est en position générale, on peut toujours lui associer un champ de vecteurs Y résolvant le problème, si le centre du groupe est ≤ 2. Si X n'est pas en position générale, ou si le centre du groupe est de dimension < 2, le problème n'a pas de solution.

Esquisse de démonstration : Puisque les groupes de Lie sont compacts, il suffit de démontrer que l'algèbre de Lie engendrée par $\{X, Y\}$ est $\underline{g}$. Un groupe de Lie compact G est de la forme : $G = \mathbb{T}^n \times K$ où K est un groupe de Lie compact semi-simple. Il est clair que si $n > 2$ on ne peut engendrer l'algèbre de Lie $\underline{g} = \mathbb{R}^n \oplus \underline{k}$ avec deux éléments. Si $n \leq 2$, on dira que X est en position générale si aucune composante de X dans la décomposition $\underline{g} = \mathbb{R}^n \oplus \underline{k}_1 \oplus \ldots \oplus \underline{k}_p$ où les $\underline{k}_i$ sont les composantes simples de $\underline{k}$, n'est nulle. Il est clair que si l'on sait résoudre le problème sur K, le problème est résolu sur G. En effet, si $X = C_1 + X_1$ ($C_1 \neq 0$ si $n=2$, quelconque si $n \leq 1$) alors $Y = C_2 + Y_2$ où C_2 est linéairement indépendant de C_1, et Y_2 tel que $\{Y_1, Y_2\}_{LA} = \underline{k}$, est bien tel que $\{X, Y\}_{LA} = \underline{g}$.

On est donc ramené à résoudre le problème sur $\underline{k}$. Mais $\underline{k}$ étant compacte, on peut décomposer $\underline{k}$ en une somme directe orthogonale pour la forme de Killing :

$$\underline{u} = \underline{h} \overset{\perp}{\underset{\alpha \in \Phi}{\oplus}} (\mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) \overset{\perp}{\underset{\alpha \in \Phi}{\oplus}} \mathbb{R}_i(X_\alpha + X_{-\alpha}) \qquad \text{(II n°9)}$$

et $\underline{h} = \underset{\alpha \in \Delta}{\oplus} \mathbb{R} H_\alpha$ où Δ est un ensemble de racines primitives de Φ.

Quitte à modifier X par un automorphisme d'algèbre de Lie, on peut toujours supposer que $X \in \underline{h}$. Soit maintenant H un élément fortement régulier de $\underline{h}$. Comme on a, si l'on pose : $E_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ $F_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$, $\mathrm{adH}\, E_\alpha = \alpha(H)\, F_\alpha$ et $\mathrm{adH}\, F_\alpha = -\alpha(H)\, E_\alpha$, si $Z \in \underline{k}$ est tel que $\mathrm{Kil}(Z, F_\alpha) \neq 0$, $\forall \alpha \in \Delta$, Z sera cyclique pour adH dans l'espace vectoriel $\overset{\perp}{\sum\limits_{\alpha\in\Delta}} (\mathbb{R} E_\alpha \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R} F_\alpha)$, qui engendre $\underline{k}$ (II n°16) et donc $\{H, Z\}_{LA} = \underline{k}$. On a alors le lemme :

<u>Lemme</u>. - <u>Si</u> $W = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} F_\alpha$ <u>il existe un ouvert dense de réels</u> t <u>tels que</u> :

Ad(expt W).X <u>engendre avec</u> H <u>l'algèbre de Lie</u> $\underline{k}$.

Il suffit d'examiner pour tout $\alpha \in \Delta$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Kil}(F_\alpha\, ,\ \mathrm{Ad}(\mathrm{expt}\, W)\, X) &= \mathrm{Kil}(X, \mathrm{Ad}(\exp -tW)\, F_\alpha) \\ &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^n}{n!}\ \mathrm{Kil}(X,\ \mathrm{ad}^n\, W.F_\alpha)\end{aligned}$$

et de montrer qu'un terme de cette série est non nul.

La somme $\underline{h} = \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R} H_\alpha$ n'est pas orthogonale mais $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p$, les Δ_i correspondant aux composantes simples de la décomposition de $\underline{k}$, la somme $\underline{h} = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_i} (\bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta_i} \mathbb{R}\, H_\alpha)$ est orthogonale, mais X dans cette décomposition est en position générale. Les diagrammes de Dynkin-Coxeter étant connexes, les propriétés des $N_{\alpha,\beta}$ font que $\mathrm{Kil}(X, \mathrm{ad}^n W.F_\alpha) \neq 0$ pour un certain indice.

On a maintenant une conséquence immédiate pour les groupes de Lie de type intérieur. On dit qu'un groupe de Lie G est de type intérieur s'il possède une involution de Cartan θ qui est dans le groupe $\mathrm{Int}(\underline{g})$ des automorphismes intérieurs. C'est équivalent à **G** possède une algèbre de Cartan qui est compacte (c'est l'algèbre de Cartan fondamentale de G (II n°4)).

<u>Théorème</u>. - <u>Le problème de mariage pour les champs de vecteurs invariants à droite de type compact sur les groupes de Lie de centre fini de type intérieur est complètement résolu</u>. <u>Si</u> $X \in \mathcal{C}$ <u>est en position générale</u>, <u>il existe toujours</u> $Y \in \mathcal{C}$ <u>résolvant le problème</u>, <u>sinon il n'y a aucune solution</u>.

Esquisse de démonstration : On pourrait donner une démonstration comme pour le cas compact exhibant explicitement le champ Y mais si l'on écrit une décomposition de Cartan :

$$\underline{g} = \underline{k} + \underline{p} \qquad \text{et} \qquad \underline{u} = \underline{k} + i\,\underline{p}$$

X étant compact, $X \in \underline{k}$ (on peut toujours le supposer).
La démonstration du cas compact montre qu'il existe $Z = K + iP \in \underline{u}$ tel que $\{X, e^{t\,ad(K+iP)}H\}_{LA} = \underline{u}$ où H est un élément fortement régulier $H \in \underline{k}$. Il est clair alors qu'il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $\{X, e^{t'ad(K+P)}H\}_{LA} = \underline{g}$, $e^{t\,ad(K+p)}H$ est un champ de vecteurs compact car conjugué d'un élément de $\underline{k}$ (G est de centre fini). Les champs étant compacts, le système est transitif sur G. CQFD.

Remarque : Si X n'est pas de type compact, le résultat subsiste. La décomposition choisie (H est compact) pour l'algèbre de Cartan engendrée par H, font qu'il n'y a pas de racine réelle, il suffit donc de vérifier les conditions 3) du théorème KUPKA-JURDJEVIC de la troisième partie, c'est-à-dire $Kil(X, e^{-t ad(Z)}X_\alpha) \neq 0$ et $Kil(X, e^{-t' ad(Z)}X_{-\alpha}) \neq 0$, avec un lemme identique à celui du cas compact (de démonstration identique car ce sont les propriétés des $N_{\alpha,\beta}$ qui jouent essentiellement avec la connexité des graphes de Dynkin-Coxeter) on obtient ce résultat pour un ensemble de t générique dans $\mathbb{R}$.

H étant compact, la famille $\{X, e^{t\,ad\,Z}H\}$ est équivalente à $\{X, e^{t\,ad\,Z}H, -e^{t\,ad\,Z}H\}$ ce qui permet d'appliquer le théorème de la troisième partie.

Conclusion :

Le problème du mariage est donc résolu pour les champs de vecteurs invariants à droite pour les groupes de Lie compacts et les groupes de Lie de type intérieurs (à centre fini). Il manque les groupes de Lie dont les composantes simples sont de type extérieur, c'est-à-dire :

$$SL(n,\mathbb{R}),\ SU^*(2n),\ SO_o(2p+1, 2q+1),\ e_{6(6)}\ \ e_{6(-26)}.$$

Depuis le problème a été résolu pour les champs de vecteurs compacts sur $SL(n,\mathbb{R})$ par BONNARD [3]. Enfin l'auteur de ces lignes, par une technique améliorée de la remarque précédente et (II n°18) a une démonstration pour tous les groupes de Lie réels à centre fini, pour les champs de vecteurs invariants à droite (y compris les groupes de Lie complexes).

***

Introduction de la cinquième partie.

Dans cette cinquième partie on résoud le problème du mariage des champs de vecteurs de "déplacements symplectiques" sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Si l'on considère le groupe G des déplacements symplectiques c'est-à-dire le produit semi-direct du groupe symplectique $Sp(n,\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}^{2n}$, ce groupe induit des champs de Killing sur $\mathbb{R}^{2n}$ que l'on appellera champs de vecteurs de déplacements symplectiques.

En outre, on établit des conditions nécessaires de contrôlabilité sur $Sp(n,\mathbb{R})$, ou sur des produits directs de groupes symplectiques qui ne se réduisent pas au critère de la troisième partie. Ces conditions nécessaires utilisent la classification des systèmes hamiltoniens de la mécanique.

/CINQUIÈME PARTIE/ B. BONNARD [2]

Le groupe symplectique $Sp(n,\mathbb{R})$ est un groupe de Lie simple de type intérieur. On peut donc utiliser les résultats des parties précédentes et la classification des systèmes hamiltoniens.

On choisit une algèbre de Cartan fondamentale $\underline{h}$ et un élément X fortement régulier dans $\underline{h}$ alors :

$$\underline{g} = \underline{h} \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi \\ \alpha>0}} \mathbb{R}_i\,(X_\alpha - X_{-\alpha}) \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi \\ \alpha>0}} \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha})$$

où les α sont les racines de $(\underline{g}^{\mathbb{C}}, \underline{h}^{\mathbb{C}})$ et $X_\alpha \in \underline{g}^{\alpha}_{\mathbb{C}}$. Ceci car toutes les racines sont imaginaires (II n°22).

Un critère de transitivité pour $Sp(n,\mathbb{R})$.

1) $X\in \underline{h}$ X est fortement régulier

2) si $Y = H + \sum_{\alpha\in\Phi} y_\alpha X_\alpha$ si $(y_\alpha, y_{-\alpha}) \neq (0,0)$ pour un ensemble Θ de racines tel que $\left(\sum_{\alpha\in\Theta} \mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}X_{-\alpha}\right)$ engendre $\underline{g}$

alors $\{X, Y\}$ est transitif sur $\underline{g}$.

Démonstration :

X étant compact, $\{X, Y\}$ est équivalent à $\Gamma = \{X, -X, Y\}$ et donc d'après le critère C de la première partie $e^{t\,ad X} Y \in LS(\Gamma)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si g est une fonction continue, non négative alors si la limite existe :

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} g(t)\, e^{t\,ad\,X} Y \in LS(\Gamma) \text{ puisque } LS(\Gamma) \text{ est cône convexe fermé.}$$

Comme $ad X . X_\alpha = \alpha(X)$ et que $\alpha(X)$ est imaginaire pur, on voit que si l'on choisit $g(t) = 1$, on obtient $H \in LS(\Gamma)$ mais H est compact, donc $Y - H \in LS(\Gamma)$ et $\sum_{\alpha \in \Phi} y_\alpha X_\alpha \in LS(\Gamma)$, on recommence avec cet élément et une fonction $g(t) = 1+\varepsilon \cos[t\,\alpha(X)]$, puis $g(t) = 1+\varepsilon \sin[t\alpha(X)]$ on en déduit qu'avec $\varepsilon = \pm 1$, $\pm(X_\alpha + X_{-\alpha})$ et $\pm i(X_\alpha - X_{-\alpha})$ sont dans $LS(\Gamma)$ pour $\alpha \in \Theta$ et donc $LS(\Gamma) \supset \sum_{\alpha \in \Theta} \mathbb{R}(X_\alpha + X_{-\alpha}) + \mathbb{R}\, i(X_\alpha - X_{-\alpha})$, $LS(\Gamma) = \underline{g}$ CQFD .

C'est le cas, par exemple, si $\Theta = \Lambda$ les racines primitives, mais il y a d'autres cas.

Forme normale d'un champ de vecteurs invariant à droite sur $Sp(n,\mathbb{R})$.

Un élément de $\underline{Sp}(n,\mathbb{R})$ admet une forme de Jordan réduite, adaptée à la structure symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$ et les blocs élémentaires sont déterminés au moins au signe près par les diviseurs élémentaires [5].

Définition : On définit les blocs élémentaires non nuls de $\underline{Sp}(n,\mathbb{R})$ qui sont les suivants :

type 1 $\quad \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{bmatrix}$ si $a \neq 1$ ou $\pm \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$

type 2 $\quad \begin{bmatrix} B_o & 0 \\ 0 & -{}^tB_o \end{bmatrix}$ où $B_o = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$

$\lambda > 0$ ou $\lambda = 0$ et n impair > 1

type 3 $\qquad \begin{bmatrix} B_o & 0 \\ 0 & -{}^tB_o \end{bmatrix} \qquad B_o = \begin{bmatrix} D_2 & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D_2 \end{bmatrix}$

où $D_2 = \begin{bmatrix} \alpha & +\beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ $\alpha, \beta > 0$ $\quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

type 4 $\qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 1 & \alpha \\ & O & & 1 & \iddots & 0 \\ & & & \alpha & & 0 \\ \hline 0 & & -\alpha & & & \\ & \iddots & -1 & & O & \\ -\alpha & -1 & 0 & & & \end{array}\right] \qquad \alpha > 0$

type 5 $\qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & 0 \\ & O & & & \iddots & 1 \\ & & & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 1 & & & \\ & \iddots & & & O & \\ 1 & & 0 & & & \end{array}\right]$

tout élément de $\underline{Sp}(n,\mathbb{R})$ sans bloc de Jordan nul se met en bloc de cette forme par un automorphisme d'algèbre de Lie. On choisit l'algèbre de Lie fondamentale :

$$\underline{h} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & \alpha_1 & & 0 \\ & O & & & \ddots & \\ & & & 0 & & \alpha_n \\ \hline -\alpha_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & O & \\ 0 & & -\alpha_n & & & \end{array}\right] \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

On a alors le :

<u>Théorème</u>. - <u>Soit</u> A <u>un élément fortement régulier de</u> <u>h</u> , B <u>un bloc élé-</u>

mentaire non nul de $sp(n,\mathbb{R})$ alors le système $\{A, B\}$ est transitif sur $sp(n,\mathbb{R})$.

Démonstration : Il suffit de vérifier que B satisfait aux conditions du critère (voir par exemple [2], Proposition II.2.2.) pour que A soit fortement régulier, il faut et il suffit que les nombres $\pm 2\alpha_i$, $\pm(\alpha_i-\alpha_j)$, $\pm(\alpha_i+\alpha_j)$ soient deux à deux distincts.

Proposition. - Soit G le produit semi-direct de $\mathbb{R}^{2n}$ et $sp(n,\mathbb{R})$. L'algèbre de Lie $\underline{g}$ est le produit semi-direct de $\mathbb{R}^{2n}$ et $sp(n,\mathbb{R})$.

Soient $(0,A)$ et (b,B) deux éléments de $\underline{g}$ tels que $b \neq 0$ A et B vérifient les conditions du théorème précédent et spectre ad $A \cap$ spectre $A = \emptyset$. Alors : $\{(0,A),(b,B)\}$ engendre l'algèbre de Lie $\underline{g}$.

Démonstration : Soit P_A le polynôme caractéristique de A ; ses racines sont les $\pm i\alpha_j$. Les racines non nulles du polynôme caractéristique de $\mathrm{ad}A$ sont $\pm i\alpha_j$, $\pm(\alpha_i-\alpha_j)$, $\pm(\alpha_i+\alpha_j)$. D'autre part :

$$P_A(\mathrm{ad}(0,A)).(b,B) = (P_A(A).b,\ P_A(\mathrm{ad}A)B) = (0, P_A(\mathrm{ad}A)B)$$

il est donc clair que $P_A(\mathrm{ad}A)B$ vérifie encore les conditions du critère et donc $\{P_A(\mathrm{ad}A).B, A\}$ engendrent $Sp(n,\mathbb{R})$. Comme $Sp(n,\mathbb{R})$ opère de façon transitive sur $\mathbb{R}^{2n}$, $\{(0,A),(b,B)\}$ engendre bien $\underline{g}$.

Théorème. - Soit $(0,X)$ un champ de vecteurs de Killing symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$, tel que X mis sous forme canonique, n'ait pas de bloc élémentaire nul, alors il existe (b,Y) un champ de vecteurs de Killing symplectique compact tel que le système $\{(0,X),(b,Y)\}$ soit transitif sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Démonstration : (esquisse)

Il est clair que dans ce qui a été dit auparavant c'était le type intérieur et la semi-simplicité qui étaient importants. On peut écrire les critères et les théorèmes pour $Sp(n_1,\mathbb{R}) \times \ldots \times Sp(n_p,\mathbb{R})$ $n_1+\ldots+n_p = n$.

Mettre X sous forme de Jordan c'est le mettre dans $\underline{Sp}(n_1,\mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus \underline{Sp}(n_p,\mathbb{R})$.

On choisit A fortement régulier dans $\underline{h}$ et tel que $\overline{\{\exp tA\,;\, t\in\mathbb{R}\}}$ soit un tore de dimension n. On peut donc toujours se ramener au cas $(0,A)$ (b,B) où $b\neq 0$ et B bloc élémentaire. On sait d'après le théorème précédent que $\{A,B\}$ est transitif sur $Sp(n,\mathbb{R})$, $Sp(n,\mathbb{R})$ opérant transitivement sur $\mathbb{R}^{2n}\setminus\{0\}$, les champs de Killing $\{A,B\}$ opèrent transitivement sur $\mathbb{R}^{2n}\setminus\{0\}$.

A s'écrit dans $\underline{h}$ $A = \sum_{\alpha_i\in\Delta} \alpha_i H_i$. D'après la première partie les systèmes $\{A,B\}$ et $\{H_{\alpha_i}, B\}_{\alpha_i\in\Delta}$ sont équivalents. On a alors le :

<u>Lemme</u>. - <u>Il existe</u> $\varepsilon > 0$ <u>tel que la famille</u> $\{(0,H_{\alpha_i}), (b,B)_{\alpha_i\in\Delta}\}$ <u>soit contrôlable sur la boule unité fermée de</u> $\mathbb{R}^{2n}$ <u>pour</u> $\|b\| < \varepsilon$.

Autrement dit, tout point de la boule unité peut être joint à tout autre point par des trajectoires positives du système (sortant peut-être de la boule d'ailleurs).

On peut supposer que (b,B) n'est pas compact car sinon les $(0,H_{\alpha_i})$ l'étant aussi, la proposition précédente entraîne que le système invariant à droite est transitif sur le groupe de Lie des déplacements symplectiques et donc le système de Killing associé transitif sur $\mathbb{R}^{2n}$, le lemme est alors évidemment vérifié.

Le système $\{A,B\}$ est contrôlable sur le compact S^{2n-1}, il existe donc $\varepsilon > 0$ [18] tel que $\{Ax, Bx+b\}$ soit contrôlable sur S^{2n-1} pour tout $\|b\| < \varepsilon$, le champ $\{Bx+b\}$ étant supposé non compact les trajectoires du système qui "sortent" de la boule sont denses dans la boule. L'ensemble des points dont les trajectoires positives et négatives sortent de la boule, est un ensemble contrôlable. Le système a la propriété du rang d'après la proposition précédente, et donc la boule unité est contrôlable par le système. <u>CQFD</u> (fin de démonstration du Lemme).

Enfin, en faisant une étude cas par cas [2], on montre que tout point de $\mathbb{R}^{2n}$ peut être recalé dans la boule unité, et que tout point de $\mathbb{R}^{2n}$ est accessible à partir de la boule unité. Par un automorphisme d'homothetie on voit alors que l'on peut s'affranchir de la condition $\|b\| < \varepsilon$, d'où la conclusion.

Conclusion de la cinquième partie.

On voit que aussi bien dans la quatrième partie que dans la cinquième, de nombreux théorèmes restent à écrire, en particulier l'utilisation du théorème et des techniques KUPKA-JURDJEVIC ouvre de nouveaux horizons.

Pour terminer, signalons les rapports qu'il y a à étudier un système $\{A+uB\}$ et des paires $\{X,Y\}$. Par une remarque due à BONNARD, si $\{A+uB\}_{u\in\mathbb{R}}$ est transitif sur un groupe de Lie G, alors il existe N tel que $\{A+uB - N\leqslant u\leqslant N\}$ est encore transitif. La contrôlabilité du système $\{A+uB\}$ est donc équivalente à celle de $\{A-u_1B,\ A+u_1B\}$ pour u_1 assez grand.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ARAKI. - On root systems and the infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces. J. of Math. Osaka City Univ., Vol.13 (1962), pp.1-34.

[2] B. BONNARD. - Contrôlabilité sur le groupe symplectique et couples de champs de vecteurs hamiltoniens contrôlables sur $\mathbb{R}^{2n}$. Thèse 3ème cycle (1978), Univ. de Metz.

[3] B. BONNARD. - Controllable pairs of vector fields on $SL(n,\mathbb{R})$. Control Theory Center of Warwick, report n°78 (1979).

[4] B. BONNARD. - On right invariant control systems. Control theory Center of Warwick, report n°79 (1979).

[5] CIAMPI. - Classical hamiltonian systems. Queen's papers in pure and Applied Maths, n°31.

[6] H. FREUDENTHAL-DE VRIES. - Linear Lie groups. Academic Press.

[7] S. HELGASON. - Differential geometry and symmetric spaces. Academic Press.

[8] V. JURDJEVIC and I. KUPKA. - Accessibility on semi-simple Lie groups and their homogenous spaces. A paraître.

[9] V. JURDJEVIC and I. KUPKA. - Accessibility-Examples, Counterexamples. A paraître.

[10] V. JURDJEVIC and I. KUPKA.- Control systems subordinated to a group action. A paraître.

[11] V. JURDJEVIC and H. SUSSMANN.- Control systems on Lie groups. J. Diff. Equations, vol.12 (1972), pp.313-329.

[12] C. LOBRY.- Controllability of Nonlinear systems on compact manifolds. SIAM J. on Control, vol.12 n°1 (1974), pp.1-4.

[13] C. LOBRY.- Dynamical polysystems and control theory in geometric methods in system theory. NATO advanced study series, D. REIDEL Publishing Co, 1973.

[14] G. SALLET.- Couples de champs de Killing complètement contrôlables sur les sphères et les espaces euclidiens. Thèse 3ème cycle Univ. de Metz (1976).

[15] G. SALLET.- Pairing vector fields on semi-simple Lie groups and Riemannian symmetric spaces. A paraître.

[16] H.J. SUSSMANN, N. LEVITT.- On controllability by means of two vector fields systems. SIAM J. on Control (13), (1975).

[17] H.J. SUSSMANN.- Some properties of vector fields systems that are not altered by small perturbations. J. Differential Equations 20 (1976), pp.292-315.

[18] Séminaire Sophics Lie, Paris.

[19] G. WARNER.- Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups. Vol.I Grundlehren, Springer-Verlag Bd 188.

[20] R.W. BROCKETT.- System theory on group manifolds and coset spaces. SIAM J. on Control, vol.10 (1972), pp.265-284.

[21] W. BOOTHBY.- A transitivity problem from control theory. J. Differential Equations 17 (1975), pp.296-307.

[22] C. LOBRY.- Bases mathématiques de la théorie des systèmes asservis non linéaires. Publication Bordeaux I (1976).

[23] B. BONNARD.- Sur la contrôlabilité sur le groupe symplectique et couples de champs de vecteurs hamiltoniens. A paraître.

-:-:-:-

B. BONNARD
U.E.R. de Math. et Info.
Université de Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE

V. JURDJEVIC
Department of Mathematics
University of Toronto
TORONTO M 5 S 101 (Canada)

I. KUPKA
Laboratoire de Math. Pures
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX

G. SALLET
Université de Metz
Département de Mathématiques
Ile du Saulcy
57000 METZ