

Astérisque

ANDREA BACCIOTTI

**Caractérisation géométrique de processus
optimaux avec contrôle initial**

Astérisque, tome 75-76 (1980), p. 11-18

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__75-76__11_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__75-76__11_0)

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DE PROCESSUS OPTIMAUX AVEC CONTRÔLE INITIAL

par

Andrea BACCIOTTI

-:-:-:-

Il est bien connu que dans le cas d'un processus de contrôle linéaire autonome :

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in \mathbb{R}^n, u \in Q \subset \mathbb{R}^m \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

le principe de Maximum de Pontrjagin (PMP) constitue une condition nécessaire et suffisante d'extrémalité, c'est-à-dire une condition assurant que une trajectoire de (1) demeure à tout instant sur la frontière de l'ensemble des points atteignables ([4], [8], [10]) ; cela est une conséquence du fait que si tous les contrôles mesurables et localement intégrables sont admissibles, alors l'ensemble des points atteignables est convexe à tout instant ([10]).

Il est aussi bien connu que chaque trajectoire de (1) optimale dans le sens du temps minimum est extrémale ; de plus, si le système est propre ([8]), optimalité et extrémalité sont équivalentes, et le PMP va constituer ainsi un outil très profitable pour le problème du temps minimum.

Si l'on ne peut pas garantir la convexité de l'ensemble des points atteignables, le schéma ci-dessus n'est plus applicable ; cela arrive par exemple lorsqu'il s'agit d'étudier un processus de contrôle non linéaire, mais peut arriver aussi dans le cas d'un système linéaire, lorsqu'il est donné tout un ensemble V (en général, non convexe) d'états initiaux possibles (on dira aussi "contrôles initiaux").

Dans le cas du processus (1), une autre condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour le problème du temps minimum est donnée par la méthode de la programmation dynamique, qui conduit à l'équation de Bellman ([3]) :

$$(2) \quad \max_{u \in Q} \langle \text{grad } T(x), Ax + Bu \rangle = 1$$

où $T(\cdot)$ est la fonction du temps minimum (voir ci-dessous). Du point de vue théorique l'équation de Bellman est désavantageuse par rapport au PMP : sa détermination exige en effet deux hypothèses restrictives, à savoir que l'ensemble des états atteignables soit fermé à tout instant (ce qui entraîne l'existence des trajectoires optimales) et, surtout, que $T(\cdot)$ soit différentiable. Cette dernière hypothèse, après avoir été la cible de nombreuses critiques, a été reconsidérée dans quelques études récentes ([5], [6], [7], [12], [13]).

Dans ce travail on va s'occuper du PMP par rapport au problème du temps minimum, dans le cas d'un système linéaire avec un ensemble V de contrôles initiaux en général non convexe. D'abord on établit le PMP comme une condition nécessaire, en suivant la ligne de démonstration de [10], mais en employant seulement des outils locaux (donc, applicables en cas de non-convexité) ; ensuite, on considère le problème de la suffisance du PMP, sous des hypothèses semblables à celles de la programmation dynamique. Sur la question de la suffisance du PMP, voir aussi [2], [9], [11].

Considérons le processus de contrôle linéaire :

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B u(t) , & x \in \mathbb{R}^n , & t \geq 0 \\ x(0) \in V \end{cases}$$

où A est une matrice $n \times n$ et B une matrice $n \times m$, V est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et les fonctions de contrôle $t \rightarrow u(t)$ sont continues par morceaux (c'est-à-dire avec un nombre fini de discontinuités) à valeurs dans $Q = \{u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m : |u_i| \leq 1\}$ pour $t \geq 0$; supposons que chaque fonction de contrôle soit continue à droite en $t = 0$ et continue à gauche pour $t > 0$. La trajectoire de (3) correspondante au contrôle $t \rightarrow u(t)$ et à l'état initial $x(0) \in V$ s'écrit :

$$(4) \quad t \rightarrow x(t) = \exp(tA) x(0) + \int_0^t \exp[(t-s)A] B u(s) ds .$$

Soit $T > 0$; dénotons par $R(T)$ l'ensemble des points atteignables à l'instant T et posons par convention $R(0) = V$ et $R = \bigcup_{t \geq 0} R(t)$. On voit aisément que $R(T)$ est compact quel que soit $T \geq 0$, et que la fonction $t \rightarrow R(t)$ est Hausdorff-continue .

Définition 1. - On dit qu'une trajectoire $t \rightarrow x(t)$ de (3) est extrême à l'instant $T > 0$, si $x(T) \in \partial R(T)$.

La notion d'extrémalité est de nature géométrique . On notera que si $t \rightarrow x(t)$ est extrême à l'instant T , elle est extrême même à tout instant $t < T$.

Définition 2. - Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ et soit $x \in \partial W$. Un vecteur $z \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ s'appelle une normale sortante à W en x si :

$$\langle z, y-x \rangle \leq 0 (\|x-y\|) , \quad y \in W .$$

Si ∂W est une variété différentiable dans le voisinage de x , évidemment W a une normale sortante en x ; si W a un coin en x , W a des normales sortantes en x seulement si W est situé dans la partie convexe du coin .

Définition 3. - On dit que (3) a une évolution régulière à l'instant $T > 0$ si l'ensemble $R(T)$ a une normale sortante en chaque point $x \in \partial R(T)$.

Si V est convexe, alors $R(T)$ est convexe quel que soit $T \geq 0$ et le système a une évolution régulière à tout instant . Il est possible qu'un processus de contrôle ait une évolution régulière seulement jusqu'à un certain instant ou, aussi, seulement à partir d'un certain instant : cela peut être vérifié sur des simples exemples .

Définition 4. - La fonction $x \rightarrow T(x) = \inf \{ T : x \in R(T) \} : R \rightarrow \mathbb{R}^+$ s'appelle fonction du temps minimum .

Si $x \in V$ et $y \in R \setminus V$, on a $0 = T(x) < T(y)$; donc si $\text{grad } T$ existe dans un point $x \in V$, on a $\text{grad } T(x) = 0$. En général, $\text{grad } T$ n'existe pas dans les points de ∂V .

Définition 5. - On dit qu'une trajectoire $t \rightarrow x(t)$ de (3) est optimale à l'instant T (dans le sens du temps minimum) si $T(x(T)) = T$ ou, d'une façon équivalente, si $x(T) \in \{x : T(x) = T\}$.

On voit que si $t \rightarrow x(t)$ est optimale à l'instant T , elle est optimale aussi à tout instant $t < T$.

Définition 6. - On dit que le système (3) est propre (ou autoaccessible, ou localement contrôlable) si $\forall t \in \text{int } R(T)$ quel que soit $T > 0$.

En [1] on montre que si le système est propre et si $T(.) \in C^1(R \setminus V)$, alors :

$$(4) \quad \{x : T(x) = T\} = \partial R(T), \text{ quel que soit } T > 0.$$

En conséquence une trajectoire de (3) est extrême à l'instant T si et seulement si elle est optimale à T . De plus, $\text{grad } T(x) \neq 0$ quel que soit $x \in R \setminus V$ et $T(.)$ est supérieurement non bornée.

Théorème 1. - Supposons que le processus de contrôle (3) soit propre et qu'il ait une évolution régulière à tout instant ; soit $t \rightarrow x^*(t)$ une trajectoire de (3) correspondante au contrôle $t \rightarrow u^*(t)$. Si $t \rightarrow x^*(t)$ est extrême à l'instant T alors :

- (i) $x^*(0) \in \partial V$ et $x^*(t) \in R \setminus V$ quel que soit t , $0 < t \leq T$;
- (ii) il existe une fonction $t \rightarrow z(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jamais nulle telle que, quel que soit t , $0 \leq t \leq T$,

$$(5) \quad \langle z(t), Bu^*(t) \rangle = \max_{u \in Q} \langle z(t), Bu \rangle ;$$

- (iii) le vecteur $z(t)$ est une normale sortante à $R(t)$ en $x^*(t)$, quel que soit t , $0 \leq t \leq T$.

Idée de la démonstration. -

(i) Il découle du fait que le système est propre et du fait que $v \rightarrow \exp(TA)v + \int_0^T \exp[(T-s)A] Bu^*(s) ds$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(ii) On définit $t \rightarrow z(t)$ comme une solution de l'équation adjointe $\dot{z} = -A^t z$ (t dénote la transposition) avec la condition que $z(T)$ soit une normale sortante à $R(T)$ en $x^*(T)$. La (5) est montrée par l'absurde, d'une façon analogue au cas classique (voir [10]), et en employant le théorème de la moyenne.

(iii) Soit $x \in R(t_0)$, $t_0 < T$ et soit $t \rightarrow x(t)$ la trajectoire définie par $t \in [t_0, T]$ correspondante au contrôle $t \rightarrow u^*(t)$ et telle que $x(t_0) = x$. On voit aisément que :

$$\langle z(t_0), x - x^*(t_0) \rangle = \langle z(T), x(T) - x^*(T) \rangle$$

et que $\|x - x^*(t_0)\|$ est un infiniment petit du même ordre que $\|x(T) - x^*(T)\|$. En étant $z(T)$ une normale sortante à $R(T)$ en $x^*(T)$, la propriété est montrée.

Le théorème 1 peut être généralisé au cas non autonome. On doit aussi observer que l'hypothèse que (3) soit propre a été employée seulement dans la démonstration de (i).

Il découle du théorème 1 que $z(0)$ est une normale sortante à V en $x^*(0)$: ceci peut être interprété comme une condition de transversalité. La (5) est équivalente au PMP dans le cas linéaire. Si $V = \{x_0\}$, la (5) est suffisante afin que $t \rightarrow x^*(t)$ soit extrême ; d'une façon symétrique, si $Q = \{u_0\}$ la (i) est suffisante afin que $t \rightarrow x^*(t)$ soit extrême. En général, la (5) toute seule n'est pas une condition suffisante d'extrémalité.

Si $T(.) \in C^1(R \setminus V)$, l'ensemble des conditions (i), (ii), (iii) (avec des petites modifications) résulte suffisant pour l'extrémalité d'une trajectoire.

Théorème 2.- Supposons que le système (3) soit propre et que $T(.) \in C^1(R \setminus V)$. Soit $t \rightarrow x^*(t)$ une trajectoire de (3) définie par $0 \leq t \leq T$ et correspondante au contrôle $t \rightarrow u^*(t)$, telle que :

- (i) $x^*(0) \in \partial V$ et $x^*(t) \in R \setminus V$ quel que soit t , $0 < t \leq T$;
- (ii) il existe une fonction $t \rightarrow z(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z(t) \neq 0$, telle que (5) vaut, quel que soit t , $0 \leq t \leq T$;
- (iii') $z(t)$ est une normale sortante à $R(T(x^*(t)))$ en $x^*(t)$, quel que soit t , $0 \leq t \leq T$.

Alors $t \rightarrow x^*(t)$ est extrême à T .

Démonstration. - On doit observer d'abord que si les hypothèses du théorème sont vérifiées, l'égalité (4) vaut ; en écrivant la formule de Taylor de $T(\cdot)$.

On voit alors que le système a une évolution régulière quel que soit $t > 0$, et que $\text{grad } T(x^*(t))$ est l'unique normale sortante à $R(T(x^*(t)))$ en $x^*(t)$,

$0 < t \leq T$. Le sens de (iii') est ainsi clair ; si $t \rightarrow x^*(t)$ est extrême, la condition (iii') devient la condition (iii) du théorème 1. Puisque $R(t)$ est fermé à tout instant $t > 0$, quel que soit $x \in R \setminus V$ il existe une trajectoire optimale dont x est le point final. Cela entraîne que l'équation de Bellman (2) est valable ([3]).

Pour comparaison entre (2) et (5) on obtient alors :

$$\langle \text{grad } T(x^*(t)), Ax^*(t) + Bu^*(t) \rangle = 1, \quad 0 < t \leq T.$$

En intégrant sur l'intervalle (h, T) , lorsque h tend vers zéro, on obtient $T(x^*(T)) = T$. Ceci signifie que la trajectoire $t \rightarrow x^*(t)$ est optimale, donc, extrême.

En général, il n'est pas possible de remplacer l'hypothèse (iii') par une hypothèse plus faible et plus simplement vérifiable, telle que, par exemple, la condition de transversalité :

$$(6) \quad z(0) \text{ est une normale sortante à } V \text{ en } x^*(0).$$

Exemple 1. - Considérons le système ($n = 2$) :

$$(7) \quad \dot{x} = u, \quad \dot{y} = w$$

avec $Q = \{(u, w) : -1 \leq u \leq 1, -1 \leq w \leq 1\}$; V est l'ensemble représenté sur la figure 1. La trajectoire correspondante au contrôle $u \equiv 1$ et $w \equiv 0$ et à l'état initial $x = 0, y = 1$ vérifie (i), (ii) et (6), mais elle n'est pas extrême.

Si $T(\cdot) \in C^1(W)$, $W \subset R \setminus V$, le théorème 2 est valable, en remplaçant l'hypothèse (i) par la suivante : $x^*(0) \in \partial V$ et $x^*(t) \in W$ quel que soit t , $0 \leq t \leq T$.

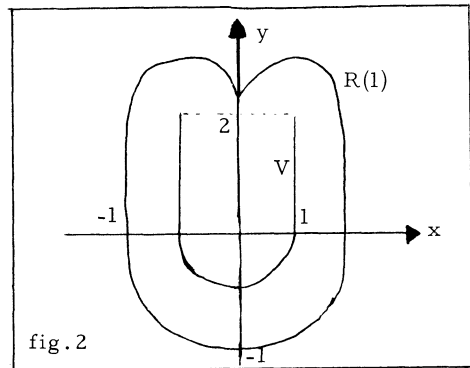
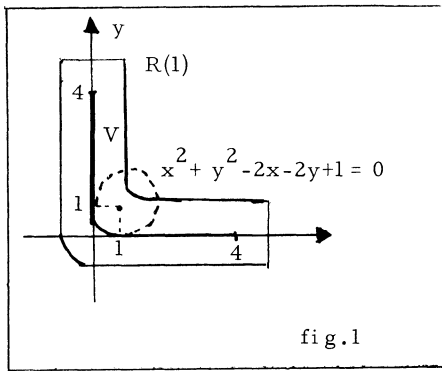
Comme nous l'avons déjà observé, les hypothèses que le système soit propre et que $T(\cdot)$ soit différentiable, régularisent le système du point de vue du rapport entre extrémalité et optimalité ; en général, le théorème 2 n'est pas valable en absence de ces hypothèses.

Exemple 2. - Considérons le système (7) avec $Q = \{(u, w) : 0 \leq w \leq 2, |u| \leq w\}$

et $V = \{(1, 0), (0, 3)\}$. Choisissons $z(t) = (1, 0)$; la trajectoire correspondante au contrôle $u \equiv 2$, $w \equiv -2$ et à l'état initial $(0, 3)$ vérifie (i), (ii) et (iii') quel que soit $t > 0$, mais si $T > 1$ elle n'est pas extrémale.

Le théorème 2 permet d'encadrer des situations qui ne sont pas comprises dans les résultats de [2] et [11].

Exemple 3.- Considérons le système (7) avec $Q = \{(u, w) : u^2 + w^2 \leq 1\}$ et soit V l'ensemble représenté sur la figure 2. La trajectoire correspondante au contrôle $u \equiv 0$, $w \equiv 1$ et à l'état initial $(0, -1)$ vérifie les hypothèses du théorème 2, tant qu'elle reste dans l'ensemble de différentiabilité de $T(\cdot)$. Cette trajectoire est donc extrémale.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] BACCIOTTI. - Una nota su ottimalità e estremalità. Boll. UMI, à paraître.
- [2] BLAGODATSKIH. - Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. Tome 38 (1974), pp. 615-624.
- [3] BOLTYANSKII. - Mathematical Methods of Optimal Control. Holt, Rinehart & Winston (1970).
- [4] CONTI. - Problemi di controllo e di controllo ottimale. UTET (1974).
- [5] HÁJEK. - Math. Systems Theory 6 (1973) pp. 289-301.
- [6] HÁJEK. - Funkcialaj Ekvacioj 20 (1976) pp. 97-114.
- [7] HÁJEK. - Siam J. on Control 9 (1971) pp. 339-350.
- [8] HERMES-LASALLE. - Functional Analysis and Time Optimal Control. Academic Press (1969).
- [9] KUN. - Avtom. i telem. 5 (1974) pp. 31-37.
- [10] LEE-MARKUS. - Foundations of Optimal Control Theory. Wiley (1967).
- [11] LOJASIEWICZ. - The Sufficiency of Maximum Principle.
- [12] PETROV. - J. of Applied Math. and Mech. 34 (1970) pp. 785-791.
- [13] PRONOZIN. - Avtom. i Telem. 12 (1972) pp. 22-32.

-:-:-:-

Andrea BACCIOTTI
Universita di Siena
Istituto di Matematica
Facolta di Scienze matematiche,
Fisiche e Naturali
Via del Capitano, 15
53100 SIENA