

# *Astérisque*

AST

## **Pages préliminaires**

*Astérisque*, tome 74 (1980), p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1980\\_\\_74\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__1_0)

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Les articles qui suivent ont été pour la plupart exposés lors des journées S.M.F. qui ont eu lieu au KLEEBACH du 5 au 10 mars 1979. Les sujets abordés lors de ce colloque étaient tous en rapport avec les marches aléatoires : théorèmes quotients, loi des grands nombres, théorèmes locaux, récurrence des espaces homogènes, croissance des groupes, applications du théorème ergodique sous-additif aux marches aléatoires.

Les exposés ont été regroupés ici par centre d'intérêt.

Le comité d'organisation remercie les UNIVERSITÉS DE NANCY I et NANCY II pour l'aide financière et matérielle apportée à cette manifestation. Il remercie également la S.M.F. pour la publication de ces actes dans la revue ASTERISQUE et Mesdames A. DRIQUERT, M. JUSTIN , Mlle M. TESOLIN , pour leur participation à la réalisation matérielle de cet ouvrage.



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
1.- PETER GERL - A ratio limit theorem	7
<p>Let <math>G</math> be a topological group, <math>\mu</math> a probability measure on <math>G</math>, write <math>\mu^n</math> for the <math>n</math> fold convolution of <math>\mu</math>. The author is interested in results of the following type :</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu^n(f)}{\mu^n(g)}</math> exist and equals <math>\frac{\Gamma(f)}{\Gamma(g)}</math> for some functions <math>f</math> and <math>g</math> and some measure <math>\Gamma</math>. He gives results in the case <math>G</math> amenable and unimodular and for symmetric <math>\mu</math>.</p>	
2.- YVES GUIVARC'H - Théorèmes quotients pour les marches aléatoires	15
<p>The author is interested in the some problem as in the precedent paper. He states the problem in terms of Markov chains and shows the relation between the measure <math>\Gamma</math> and the solution of the equation : <math>\mu * \Gamma = \Gamma * \mu = c \cdot \Gamma</math>, he solves completely the problem and establishes the existence of <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu^n(f)}{\mu^n(g)}</math> in the following cases :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) <math>G</math> is semi simple with finite center and <math>\mu</math> has bounded density with compact support.</li> <li>b) <math>G</math> is a compact extension of a nilpotent group and <math>\mu</math> has bounded density with compact support.</li> <li>c) <math>G</math> is nilpotent and <math>\mu</math> is atomic with finite support generating <math>G</math>.</li> </ul> <p>In the three cases he precises the nature of the measure <math>\Gamma</math>.</p>	
3.- PHILIPPE BOUGEROL - Comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité sur un espace symétrique.	29
<p>Let <math>G</math> be a semi simple connected, non compact Lie group with finite center and <math>\mu</math> an adapted probability measure invariant by the action of a compact maximal subgroup of <math>G</math>. The author gives an equivalent of <math>\mu^n(f)(n \rightarrow +\infty)</math> with <math>f</math> a continuous function with compact support. He indicates the asymptotic behavior of the potential kernel. We remark a curious analogy with the abelian case.</p>	
4.- YVES GUIVARC'H - Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire.	47
<p>The author generalizes the classic law of large numbers to the locally compact groups. There are two different situations :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) the limit is zero for the amenable Lie groups (for centered measure with first moment).</li> <li>b) the limit is always different from zero for the non amenable Lie groups.</li> </ul>	

	Pages
5.- HUBERT HENNION, BERNARD ROYNETTE - Un théorème de dichotomie pour une marche aléatoire sur un espace homogène.	99
<p>Loynes dichotomic theorem for the recurrent and transient random walks on groups is not true in the case of homogeneous spaces. The authors give sufficient conditions under which the theorem is true. This is the case for the homogeneous spaces of rigid type groups when the probability measure is spreadout. The authors give also a partial converse of their result.</p>	
6.- LÉONARD GALLARDO, VINCENT RIES - Marches aléatoires sur les espaces homogènes du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$ .	123
<p>By technics specific to the motion group, the authors give a classification of the recurrent and transient homogeneous spaces of this groups.</p>	
7.- ALAIN HUARD - Récurrence des marches aléatoires des espaces homogènes récurrents du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$ .	139
<p>The recurrent homogeneous spaces of the motion group are characterized in the precedent paper. The author gives here a broad class of recurrent measures on such homogeneous spaces.</p>	
8.- LÉONARD GALLARDO, RENÉ SCHOTT - Marches aléatoires sur les espaces homogènes de certains groupes de type rigide.	149
<p>Let <math>G</math> be a group which is a semi direct product of a nilpotent simply connected Lie group by a compact group. The authors give a generalization of the notion of polynomial growth for the homogeneous spaces <math>G/H</math> of a rigid type group <math>G</math>, they calculate explicitly the polynomial growth degree of <math>G/H</math> and prove that <math>G/H</math> is recurrent if and only if its polynomial growth degree is at most two.</p>	
9.- R.W. JENKINS - Invariant fonctionnals and polynomial growth.	171
<p>The author gives a new notion of amenability and establishes the relations between these definitions, the polynomial growth and the classic notion of amenability.</p>	
10.- YVES DERRIENNIC - Quelques applications du théorème ergodique sous-additif.	183
<p>This paper enlarges the applications of Kingman's subadditive ergodic theorem notably in this cases : the crossing theorem for the processes with stationnary increments, the entropy of random walks and the law of large numbers. In many situations he calculates limits explicitly by a clever utilization of Kingman's ergodic theorem.</p>	

## INTRODUCTION

C'est en 1970 que débuta le séminaire KGB dont les animateurs avaient un projet ambitieux : résoudre les problèmes restés ouverts après les travaux fondamentaux de la période 1960-65. Ces problèmes concernent le comportement asymptotique,  $n \rightarrow \infty$ , du produit  $S_n(\omega) = X_n(\omega)X_{n-1}(\omega) \dots X_1(\omega)$  dont les facteurs forment une suite de variables aléatoires à valeurs dans un groupe  $G$ . La suite est indépendante et équidistribuée suivant une loi  $\mu$  et le groupe est supposé localement compact à base dénombrable. A chaque instant  $n$  et pour une issue  $\omega$  du hasard,  $S_n(\omega)$  désigne la position occupée par la marche aléatoire de loi  $\mu$  sur  $G$ ; on suppose que le support de  $\mu$  engendre tout le groupe. Les questions qui se posent sont alors : la marche va-t-elle retourner dans chaque voisinage du point de départ ? Va-t-elle visiter une infinité de fois tout ouvert de  $G$  ? Si la réponse est oui, la marche est dite récurrente. Sinon, on dit que la marche est transiente. Un groupe est appelé récurrent s'il porte au moins une marche récurrente. Sinon, le groupe est appelé transient. On peut aussi considérer, lorsque  $G$  opère sur un espace  $E$ , la suite  $S_n(\omega)x$ ,  $x \in E$ , et l'appeler marche aléatoire sur  $E$ . Lorsque  $G$  est abélien le caractère de récurrence s'étudie au moyen de l'analyse de Fourier. Pour le cas général, la classification est beaucoup plus difficile. On connaît cependant maintenant la réponse pour les groupes de Lie connexes et pour les groupes représentables matriciellement ce qui résout une conjecture de Kesten. Cet important résultat a été obtenu par l'"Ecole française de marches aléatoires" qui s'est formée à la suite des premiers travaux du séminaire KGB. Dans ces travaux, un rôle important est joué par les propriétés de croissance, de moyennabilité et d'unimodularité du groupe, propriétés susceptibles d'être caractérisées en termes de structure du groupe. D'autre part, le comportement asymptotique des variables aléatoires  $S_n$  fait intervenir celui des sommes de puissances de convolution  $\sum_{k=0}^n \mu^{k*}$ , problème rattaché à la théorie du potentiel du noyau de convolution associé à  $\mu$ . Alors se pose le problème de la détermination des fonctions invariantes bornées  $f = \mu * f$ , c'est-à-dire la détermination de la frontière de Martin. La solution de ce problème, donnée par Furstenberg dans le cas où  $G$  est semi-simple et  $\mu$  absolument continu par rapport à la mesure de Haar  $m$  de  $G$ , a été étendue aux groupes de Lie

## INTRODUCTION

connexes,  $p$  quelconque, par l'"Ecole française". Lorsque la marche est récurrente et que l'une des mesures  $p^{n*}$  n'est pas étrangère à  $m$ , l'équation de Poisson liée à  $p$  a été complètement discutée et résolue ; cela donne dans le cas dénombrable la solution d'une autre conjecture de Kesten sur la frontière d'une marche récurrente. Les résultats de Kesten et Furstenberg sur la loi des grands nombres et la stricte positivité des limites obtenues ont été étendus en relation avec le théorème ergodique sous-additif de Kingman. Le théorème central limite a été établi dans des situations nouvelles et variées, mais le problème général est encore loin d'être résolu. Enfin, des théorèmes limites quotients et des théorèmes limites locaux ont été établis pour les groupes de Lie semi-simples et pour les groupes de type rigide. Ces théorèmes quotients ont été reliés à l'étude des fonctions propres de l'opérateur de convolution par  $p$ , fonctions dont des représentations ont pu être données dans des situations différentes de celles considérées dans les travaux de Furstenberg et de Margulis.

L'"Ecole française de marches aléatoires" a organisé du 5 au 10 juin 1979 une rencontre à Kleebach, dans le cadre des Journées S.M.F. Ce sont les 10 articles développant des travaux exposés au cours de ces Journées qui constituent le présent fascicule d'Astérisque. On trouvera dans ces articles diverses contributions à la solution des problèmes qui ont été mentionnés.

Antoine BRUNEL  
Université Pierre et Marie Curie  
- Paris -