Astérisque

YVES DERRIENNIC

Quelques applications du théorème ergodique sous-additif

Astérisque, tome 74 (1980), p. 183-201
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__183_0>

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME ERGODIQUE SOUS-ADDITIF

Yves DERRIENNIC

I - Introduction

Le but de cet article est d'enrichir la collection des applications possibles du théorème ergodique sous-additif de Kingman. Dans l'étude des marches aléatoires sur les groupes localement compacts s'introduisent de façon naturelle des fonctions qui donnent naissance à des suites sous-additives qui peuvent être traitées à l'aide de ce théorème. Souvent, il apparaît que les résultats ainsi obtenus s'étendent aux processus à accroissements stationnaires qui sont plus généraux que les marches aléatoires.

Les principales applications présentées dans cet article sont les suivantes :

- le théorème du trajet (en anglais appelé "range") et du trajet multiple pour des processus à accroissements stationnaires avec le calcul explicite de la limite, ce qui n'était connu jusqu'à présent que pour des marches aléatoires, c'est-à-dire des processus à accroissements indépendants et équidistribués.
- l'étude de l'oscillation des processus à accroissements stationnaires, qui conduit à retrouver une formule élégante récemment obtenue par Marcus et Petersen ([17]) qui explicite dans une certaine mesure le lemme ergodique maximal.
- l'étude de l'entropie des marches aléatoires introduite par Avez ([2] , [3]), qui conduit à la réciproque du théorème d'Avez suivant lequel la nullité de l'entropie implique la propriété de Liouville pour la marche aléatoire.
- les lois des grands nombres ; des formules explicites sont données dans certains cas particuliers, mais les résultats les plus importants dans cette direction sont bien sûr ceux de Guivarc'h ([12]).

Diverses autres questions sont aussi envisagées.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de rappeler avec précision le théorème de Kingman. La formulation choisie est celle des suites sous-additives sur un système dynamique plutôt que celle des processus sous-additifs ; il n'y a là qu'une différence de vocabulaire.

Théorème ergodique sous-additif ([14] [15] [8])

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et θ une transformation mesurable préservant la mesure P. Si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions intégrables, sous-additive, c'est-à-dire $g_{n+k} \leq g_n + g_k \circ \theta^n$ pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, si $\inf_n \frac{1}{n} \int_\Omega g_n \, dP > -\infty$, alors la suite $\frac{1}{n} g_n$ converge P. p. s. et dans L^1 vers une limite ξ qui est invariante sous θ et qui vérifie pour tout ensemble mesurable invariant A $\int_A \xi \, dP = \lim_n \frac{1}{n} \int_A g_n \, dP$.

Sans reprendre ici la discussion approfondie de ce résultat, il est nécessaire de souligner que dans les applications, il est important de savoir calculer la limite ξ ; en particulier dans le cas où, θ étant ergodique, cette limite est la constante $\gamma = \inf_n \frac{1}{n} \int_\Omega g_n \, dP = \lim_n \frac{1}{n} \int_\Omega g_n \, dP$. Or la démonstration de Kingman basée sur une décomposition naturelle des suites sous-additives fournit un moyen d'approche de cette limite. Voici cette décomposition.

Théorème de décomposition des suites sous-additives :

Si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite sous-additive de fonctions intégrables telle que $\gamma = \inf_n \frac{1}{n} \int_\Omega g_n \, dP > -\infty$, il existe une fonction intégrable f vérifiant pour tout n $\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \theta^i \leq g_n$ et $\int_\Omega f \, dP = \gamma$. La suite sous-additive $(g_n)_n$ est donc la somme de la suite additive $(\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \theta^i)_{n\geq 1}$ et de la suite sous-additive positive $(g_n - \sum_{i=0}^{n-1} f \circ \theta^i)_{n\geq 1}$ qui est telle que

$$\frac{1}{n} \left(g_n - \sum_{i=0}^{n-1} f \circ \theta^i\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P.p.s. } L^1} 0.$$

En général, cette décomposition n'est pas unique ; toute fonction f qui est une valeur d'adhérence de la suite $f_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (g_i - g_{i-1} \circ \theta)$ (où $g_o = 0$) dans la topologie faible de L^1 (la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$) convient. (Sous les hypothèses précédentes, une telle valeur d'adhérence existe).

Dans la démonstration originale de Kingman la valeur d' adhérence de la suite f_m était prise dans le bidual de L^1, $(L^\infty)^*$ pour la topologie $\sigma((L^\infty)^*, L^\infty)$. Mais il résulte de l'article récent de Akcoglu et Sucheston [1] que la valeur d'adhérence de la suite f_m peut être prise dans L^1 pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$. D'autres modes de convergence "faible" pour des sous-suites de la suite f_m sont aussi considérés par Burkholder [4] et Del Junco [5]. S'il est possible de calculer une valeur d'adhérence de la suite (f_m), en particulier si celle-ci converge même en un sens très faible, alors cela donne aussitôt la valeur de la limite de $\frac{1}{n} g_n$.

Dans la suite G est un groupe localement compact à base dénombrable et $(X_n)_{n\geq 1}$ un processus stationnaire à valeurs dans G. On pose $S_n = X_1 X_2 \ldots X_n$, l'opération du groupe étant notée multiplicativement. Si G est abélien, l'opération est notée additivement et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La distribution commune des variables X_n est une mesure de probabilité sur G notée μ. $(S_n)_{n\geq 1}$ est appelé processus à accroissements stationnaires, de loi μ, issu de e élément neutre du groupe. Si de plus les variables X_n sont indépendantes $(S_n)_{n\geq 1}$ est la marche aléatoire de loi μ sur G issue de e ; la distribution de S_n est alors la $n^{\text{ème}}$ puissance de convolution μ^n. On pose $\Omega = G^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_G^{\otimes \mathbb{N}}$ où $\mathcal{B}_G$ est la tribu borélienne de G ; la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui est la distribution conjointe du processus stationnaire $(X_n)_{n\geq 1}$ est notée P. On sait que les variables aléatoires X_n peuvent être identifiées aux projections canoniques de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur G ; on supposera toujours cette identification faite. Si les variables X_n sont indépendantes, P est la mesure produit $\mu^{\otimes \mathbb{N}}$. La translation unité ("shift") est la transformation θ de l'espace Ω définie par $X_n(\theta\,\omega) = X_{n+1}(\omega)$ pour tout $n \geq 1$ et

et $\omega \in \Omega$; c'est une transformation mesurable qui, en raison de la stationnarité du processus, laisse la mesure P invariante. La sous-tribu de $\mathcal{F}$ formée des ensembles invariants sous θ est notée J. On note toujours m une mesure de Haar à droite fixée sur G. Si $(S_n)_{n\geq 1}$ est une marche aléatoire, cette mesure m est invariante pour la marche : $m * \mu = m$.

II - Le trajet

Commençons par considérer le cas où G est un groupe discret. Le trajet à l'instant n du processus à accroissements stationnaires $(S_n)_{n\geq 1}$ est la variable aléatoire à valeurs entières R_n définie par $R_n(\omega) = \text{card}\,\{S_k(\omega) \mid 1 \leq k \leq n\}$. C'est le nombre de points distincts visités par le processus $(S_n)_{n\geq 1}$ entre l'instant 1 et l'instant n. (En Anglais, R_n est appelé "range").

Théorème :

La suite $(\frac{1}{n} R_n)$ converge P. p. s. et dans L^1 vers l'espérance conditionnelle $E[1_A / J]$ de l'indicatrice 1_A de l'évènement $A = \bigcap_{n\geq 1} \{S_n \neq e\}$. Si le processus (X_n) est ergodique, la limite est simplement la constante $P(A)$.

Démonstration : La suite (R_n) est sous-additive (pour le système $(\Omega, \mathcal{F}, P, \theta)$) ; en effet $R_{n+\ell}(\omega) \leq R_n(\omega) + \text{card}\,\{S_k(\omega) \mid n+1 \leq k \leq n+\ell\}$; comme $\{S_k(\omega) \mid n+1 \leq k \leq n+\ell\}$ est le translaté par $S_n(\omega)$ de $\{S_k(\theta^n\omega) \mid 1 \leq k \leq \ell\}$ on a $\text{card}\,\{S_k(\omega) \mid n+1 \leq k \leq n+\ell\} = R_\ell(\theta^n\omega)$. Les variables R_n sont positives et intégrables donc la convergence de $\frac{1}{n} R_n$ P. p. s. et dans L^1 résulte du théorème de Kingman. Pour calculer la limite, cherchons la décomposition de la suite sous-additive (R_n). Pour cela, comme l'indique le théorème de décomposition rappelé dans l'introduction, cherchons une valeur d'adhérence faible de $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (R_i - R_{i-1} \circ \theta)$ où $R_o = 0$. Ce problème est très simple car

$$(R_{n+1} - R_n \circ \theta)(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } X_1(\omega) \notin \{S_k(\omega) \mid 2 \leq k \leq n+1\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et donc la suite $(R_{n+1} - R_n \circ \theta)$ est convergente en décroissant vers $1_A \circ \theta$.

D'après le théorème de décomposition la limite de $\frac{1}{n} R_n$ est donc $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_A \circ \theta^i = E[1_A / J]$.

La probabilité $P(A)$ est la probabilité de non retour du processus S_n au point de départ. Ce résultat était connu pour les marches aléatoires ([13], [24]). Le raisonnement précédent peut être raffiné pour obtenir un résultat relatif au trajet multiple, qui a été étudié dans le cadre des marches aléatoires par Pitt ([20]). Le trajet d'ordre j à l'instant n est la variable aléatoire $R_n^{(j)}$ égale au nombre de points visités exactement j fois par le processus (S_k) entre l'instant 1 et l'instant n.

Théorème :

La suite $\frac{1}{n} R_n^{(j)}$ converge P. p. s. et dans L^1 vers $E[1_{B_{j-1}} - 1_{B_j} / J]$ où B_j est l'évènement $B_j = \{\omega \mid S_n(\omega) = e$ exactement j fois, $n = 1, 2 \ldots\}$. Si le processus (X_n) est ergodique, la limite est la constante $P(B_{j-1}) - P(B_j)$. Dans le cas d'une marche aléatoire, cette constante vaut $(1 - r)^2 r^{j-1}$ où $(1 - r)$ est la probabilité $P(A)$ de non retour au point de départ.

Démonstration : La suite $(R_n^{(j)})_n$ n'est pas sous-additive, mais si $T_n^{(j)}$ égale le nombre de points visités au moins une fois et au plus j fois par le processus S_k avec $1 \leq k \leq n$, la suite $(T_n^{(j)})_n$ est sous-additive : $T_{n+\ell}^{(j)} \leq T_n^{(j)} + T_\ell^{(j)} \circ \theta^n$ et de plus $T_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} R_n^{(i)}$. Comme $T_n^{(j)}$ est positive et intégrable, d'après le théorème de Kingman $\frac{1}{n} T_n^{(j)}$ converge p. s. et dans L^1 ; par différence, il en est de même pour $\frac{1}{n} R_n^{(j)}$. Pour calculer la limite, on cherche la décomposition de la suite $T_n^{(j)}$. Pour cela, comme précédemment, on étudie la suite $T_{n+1}^{(j)} - T_n^{(j)} \circ \theta$:

$$(T_{n+1}^{(j)} - T_n^{(j)} \circ \theta)(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } X_1(\omega) \text{ n'est pas revisité par } S_k(\omega) \\ \qquad \text{pour } k = 2, \ldots, n+1. \\ -1 \text{ si } X_1(\omega) \text{ est revisité exactement j fois par } S_k(\omega) \\ \qquad \text{pour } k = 2, \ldots, n+1. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La suite $(T_{n+1}^{(j)} - T_n^{(j)} \circ \theta)(\omega)$ converge donc vers $(1_A - 1_{B_j}) \circ \theta$ (où $A = \bigcap_{n\geq 1} \{S_n \neq e\}$). D'après le théorème de décomposition, on obtient $\lim_n \frac{1}{n} T_n^{(j)} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1_A - 1_{B_j}) \circ \theta^i = E\left[1_A - 1_{B_j} / J\right]$, et $\lim_n \frac{1}{n} R_n^{(j)} = \lim_n \frac{1}{n} T_n^{(j)} - \lim_n \frac{1}{n} T_n^{(j-1)} = E\left[1_{B_{j-1}} - 1_{B_j} / J\right]$. Dans le cas ergodique, la limite est constante et vaut $P(B_{j-1}) - P(B_j)$. Dans le cas d'une marche aléatoire, le calcul de $P(B_j)$ est immédiat : $P(B_j) = r^j (1 - r)$, d'où $P(B_{j-1}) - P(B_j) = (1 - r)^2 r^{j-1}$.

Si le processus $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas stationnaire mais si sa loi de probabilité P est équivalente à une loi de probabilité Q invariante sous θ (c'est-à-dire pour laquelle $(X_n)_{n\geq 1}$ est stationnaire) alors la convergence P. p. s. dans les théorèmes précédents est encore vraie. Par exemple les théorèmes du trajet sont vrais pour la chaîne de Markov $(S_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{Z}$ issue de O dont la probabilité de transition est :

$$P\left[S_{n+1} = k + 1 \mid S_n = k\right] = p_k > \frac{1}{2}$$

$$P\left[S_{n+1} = k - 1 \mid S_n = k\right] = 1 - p_k > 0$$

avec $\lim_{k\to+\infty} p_k = p_+ > \frac{1}{2}$ et $\lim_{k\to-\infty} p_k = p_- > \frac{1}{2}$.

En effet, dans ce cas la loi de probabilité conjointe P des accroissements $(S_{n+1} - S_n)$ est telle que $\lim_n \theta^n P = Q$ où Q est la mesure produit $(p_+ \delta_1 + (1 - p_+) \delta_{-1})^{\otimes \mathbb{N}}$ (δ désigne les mesures de Dirac) ; Q est invariante sous θ et équivalente à P. Le théorème du trajet pour cette chaîne de Markov a été étudié par Palmgren ([19]). On peut aussi remarquer que la suite additive $\sum_{i=1}^{n} 1_A \circ \theta^i$ obtenue dans la décomposition de la suite sous-additive R_n a la signification suivante : $\sum_{i=1}^{n} 1_A \circ \theta^i (\omega)$ égale le nombre de points distincts visités par $S_1(\omega) \ldots S_n(\omega)$ qui ne sont pas revisités par $S_{n+1}(\omega)$, $S_{n+2}(\omega)$, ...

Dans le cas où G est un groupe localement compact à base dénombrable quelconque, on peut donner un sens au théorème du trajet en définissant pour une

mesure positive finie λ arbitraire sur G :

$$R_{\lambda,n}(\omega) = \sup_{1\leq i\leq n} (\lambda * \delta_{S_i^{-1}(\omega)})(G) \quad ;$$

c'est la masse totale du sup. des mesures translatées de λ par les points $S_i^{-1}(\omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Dans le cas discret, le trajet $R_n(\omega)$ égale $R_{\lambda,n}(\omega)$ avec $\lambda = \delta_e$. On vérifie comme précédemment que la suite $R_{\lambda,n}$ est sous-additive, positive et intégrable, donc la suite $\frac{1}{n} R_{\lambda,n}$ converge p. s. et dans L^1. De plus

$$(R_{\lambda,n+1} - R_{\lambda,n} \circ \theta)(\omega) = \sup_{1\leq i\leq n+1} (\lambda * \delta_{S_i^{-1}(\omega)})(G) - \sup_{2\leq i\leq n+1} (\lambda * \delta_{S_i^{-1}(\omega)})(G)$$

$$= (\lambda - \inf(\lambda, \sup_{1\leq i\leq n} \lambda * \delta_{S_i^{-1}(\theta\omega)}))(G) \quad ;$$

cette suite est décroissante et converge quand $n \to \infty$ vers $(\lambda - \inf(\lambda, \sup_{1\leq i} \lambda * \delta_{S_i^{-1}(\theta\omega)}))(G)$. Cette fonction de ω engendre une suite additive convenable pour la décomposition de $R_{\lambda,n}$ et permet donc le calcul de la limite de $\frac{1}{n} R_{\lambda,n}$. En général cela ne donne pas un résultat très explicite mais si λ est la restriction de la mesure de Haar à droite m à un ensemble mesurable E, $\lambda = 1_E \cdot m$ le résultat se simplifie :

$$(\lambda - \inf(\lambda, \sup_{1\leq i} \lambda * \delta_{S_i^{-1}(\theta\omega)}))(G) = m\left(E \cap \left[\bigcap_{i=1}^{\infty} E^c \cdot S_i^{-1}(\theta\omega)\right]\right)$$

$$= m\{x \in E \mid x S_i(\theta\omega) \notin E \text{ pour tout } i \geq 1\}.$$

Si de plus le processus $(X_n)_{n\geq 1}$ est ergodique, la limite de $\frac{1}{n} R_{\lambda,n}$ est la constante obtenue en intégrant cette fonction de ω par rapport à P ; cette constante vaut donc $\int_E P[x S_i \notin E \text{ pour tout } i \geq 1]\, m(dx)$. Si $(S_n)_{n\geq 1}$ est une marche aléatoire, ce nombre est la capacité de l'ensemble E pour cette marche ([21],[24]). Ceci est tout à fait similaire à une remarque de Spitzer pour le mouvement brownien ([25]). En résumé, nous avons donc :

<u>Théorème</u> :

<u>Si le processus</u> (X_n) <u>est ergodique</u>, <u>si</u> E <u>est un ensemble mesurable de</u> G, <u>alors la suite</u> $\frac{1}{n} \sup_{1\leq i\leq n} ((1_E \cdot m) * \delta_{S_i^{-1}(\omega)})(G)$ <u>converge P. p. s. et dans</u> L^1 <u>vers la constante</u> $\int_E P\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} (x S_i \notin E)\right] m(dx)$.

III - L'oscillation

Considérons le groupe additif des réels $G = R$. Appelons oscillation à l'instant $n+1$ du processus à accroissements stationnaires $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la variable aléatoire réelle $O_n = M_{n+1} - I_{n+1}$ où $M_{n+1} = \max_{1\leqslant k\leqslant n+1} S_k$ et $I_{n+1} = \min_{1\leqslant k\leqslant n+1} S_k$. On a $O_{n+1} \leqslant M_{n+1} - I_{n+1} + \max_{n+1\leqslant k\leqslant n+\ell+1} S_k - \min_{n+1\leqslant k\leqslant n+\ell+1} S_k$ l'égalité n'étant réalisée que si $S_{n+1} = M_{n+1} = \min_{n+1\leqslant k\leqslant n+\ell+1} S_k$; il est clair que $\max_{n+1\leqslant k\leqslant n+\ell+1} S_k - \min_{n+1\leqslant k\leqslant n+\ell+1} S_k = O_1 \circ \Theta^n$. Donc la suite O_n est sous-additive : $O_{n+1} < O_n + O_1 \circ \Theta^n$. La suite O_n est positive ; si O_1 est intégrable le théorème de Kingman entraîne que $\frac{1}{n} O_n$ converge. Cela n'est pas surprenant car $\int O_1 \, dP = \int_\Omega |X_1| \, dP$ et donc, si O_1 est intégrable, la loi forte des grands nombres est vraie pour le processus (X_n). Alors $\lim_n \frac{1}{n} S_n = E\,[X_1/J]$ P.p.s. et

sur $\{E\,[X_1/J]>0\}$ $\quad \frac{1}{n} M_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\,[X_1/J]$

$\frac{1}{n} I_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

sur $\{E\,[X_1/J]<0\}$ $\quad \frac{1}{n} M_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{1}{n} I_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\,[X_1/J]$

sur $\{E\,|X_1/J|=0\}$ $\quad \frac{1}{n} M_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{1}{n} I_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $\frac{1}{n} O_n \xrightarrow[n\to\infty]{} |E\,[X_1/J]|$

Il est plus intéressant de chercher la décomposition de la suite sous-additive O_n. Comme l'indique le théorème de décomposition on étudie la suite $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (O_n - O_{n-1} \circ \Theta)$. Calculons :

$(O_{n+1} - O_n \circ \Theta)(\omega)$; si $M_{n+2}(\omega) > X_1(\omega) > I_{n+2}(\omega)$ alors

$(O_{n+1} - O_n \circ \Theta)(\omega) = 0$; si $M_{n+2}(\omega) = X_1(\omega)$ alors

$(O_{n+1} - O_n \circ \Theta)(\omega) = X_1(\omega) - I_{n+2}(\omega) - M_{n+1} \circ \Theta(\omega) + I_{n+1} \circ \Theta(\omega) = - M_{n+1} \circ \Theta(\omega)$

car dans ce cas $X_1(\omega) + I_{n+1} \circ \Theta(\omega) = I_{n+2}(\omega)$.

Si $X_1(\omega) = I_{n+2}(\omega)$ alors

$(O_{n+1} - O_n \circ \Theta)(\omega) = M_{n+2}(\omega) - X_1(\omega) - M_{n+1} \circ \Theta(\omega) + I_{n+1} \circ \Theta(\omega) = I_{n+1} \circ \Theta(\omega)$

car dans ce cas $X_1(\omega) + M_{n+1} \circ \Theta(\omega) = M_{n+2}(\omega)$. En résumé

$$(O_{n+1} - O_n \circ \Theta)(\omega) = \begin{cases} -M_{n+1} \circ \Theta(\omega) & \text{si } M_{n+1} \circ \Theta(\omega) < 0 \\ I_{n+1} \circ \Theta(\omega) & \text{si } I_{n+1} \circ \Theta(\omega) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite M_n est croissante, notons M sa limite ; la suite I_n est décroissante, notons I sa limite. La suite $O_{n+1} - O_n \circ \Theta$ est donc convergente et $\lim_n (O_{n+1} - O_n \circ \Theta) = -M \circ \Theta . 1_{\{M \circ \Theta < 0\}} + I \circ \Theta . 1_{\{I \circ \Theta > 0\}}$ P.p.s.

Si O_1 est intégrable, d'après le théorème de décomposition, cette variable aléatoire engendre une suite additive qui convient pour la décomposition de la suite sous-additive O_n et de plus

$$\lim_n \frac{1}{n} O_n = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-M.1_{\{M<0\}} + I.1_{\{I>0\}}) \circ \Theta^i$$
$$= E\left[-M.1_{\{M<0\}} + I.1_{\{I>0\}} / J\right]$$

Ainsi est obtenu le :

<u>Théorème</u> : <u>Si</u> $(X_n)_{n \geqslant 1}$ <u>est un processus réel stationnaire intégrable, si</u> $M = \sup_{1 \leqslant k} \sum_{i=1}^{k} X_i$, $I = \inf_{1 \leqslant k} \sum_{i=1}^{k} X_i$, <u>alors</u>

$$E\left[-M.1_{\{M<0\}} + I.1_{\{I>0\}} / J\right] = \left|E\left[X_1/J\right]\right|$$

<u>Corollaire</u> : $1_{\{E[X_1/J]>0\}}.E[X_1/J] = 1_{\{E[X_1/J]>0\}}.E[I.1_{\{I>0\}}/J]$,

$1_{\{E[X_1/J]<0\}}.E[X_1/J] = 1_{\{E[X_1/J]<0\}} E[M.1_{\{M<0\}}/J]$, et $\int_\Omega X_1 \, dP = \int_{\{I>0\}} I \, dP + \int_{\{M<0\}} M \, dP$

<u>Démonstration</u> : Ces formules résultent immédiatement du théorème. Il suffit d'utiliser l'invariance sous Θ des ensembles $\{E[X_1/J] > 0\}$, $\{E[X_1/J] < 0\}$ et d'observer que $P(\{E[X_1/J] > 0\} \cap \{M < 0\}) = 0$, $P(\{E[X_1/J] < 0\} \cap \{M > 0\}) = 0$.

La dernière égalité du corollaire a été prouvée récemment par une méthode directe par Marcus et Petersen. Ces deux auteurs déduisent de cette égalité une intéressante discussion du lemme ergodique maximal de Hopf ([17]).

Si G est un groupe localement compact à base dénombrable engendré par un voisinage compact V de l'élément neutre e, on peut encore définir l'oscillation d'un processus à accroissements stationnaires $(S_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans G. Comme dans [12] on définit $\delta_V(x) = \inf\{n>0 \ / \ x \in V^n\}$ et $d_V(x,y) = \delta_V(x^{-1}\, y)$; la fonction d_V vérifie l'inégalité triangulaire et est invariante à gauche. Si l'on pose $O_n = \text{diamètre}_{d_V} \{S_k \ / \ 1\leq k\leq n+1\} = \sup\{d_V(S_\ell, S_k)/\ell, k \in \{1,\dots,n+1\}\}$ la suite O_n est sous-additive et positive. Si de plus $\delta_V(X_1)$ est P-intégrable les hypothèses du théorème de Kingman sont réunies et donc $\frac{1}{n}\, O_n$ converge P.p.s. et dans L^1.

IV - L'entropie

Considérons un groupe G discret et une mesure de probabilité μ sur G à support fini. Avez définit l'entropie de la marche aléatoire de loi μ sur G comme le nombre $\lim_n -\frac{1}{n} \sum_{x\in G} \mu^n(x) \operatorname{Log} \mu^n(x) = h(\mu)$ (on pose $t \operatorname{Log} t = 0$ pour $t = 0$). Cette limite existe car la suite numérique $-\sum_{x\in G} \mu^n(x) \operatorname{Log} \mu^n(x)$ est sous-additive et positive. Le principal intérêt de cette notion réside dans le résultat suivant :

<u>Théorème</u> (Avez [3]) : <u>Si le support de μ engendre G, si $h(\mu) = 0$, les constantes sont les seules fonctions bornées μ-harmoniques (i.e. solutions de l'équation $\sum_{y\in G} f(xy)\, \mu(y) = f(x)$ pour tout $x \in G$).</u>

La sous-additivité de la suite $(-\sum_{x\in G} \mu^n(x) \operatorname{Log} \mu^n(x))$ repose sur l'inégalité évidente $\mu^{n+m}(xy) \geq \mu^n(x)\, \mu^m(y)$. Suivant une observation de J.P. Conze cette simple inégalité implique que la suite $H_n = -\operatorname{Log} \mu^n(S_n)$ est sous-additive (il n'y a pas d'ambiguité dans la définition de H_n car P.p.s. $\mu^n(S_n) > 0$). En effet $\mu^{n+m}(S_{n+m}) \geq \mu^n(X_1 \dots X_n)\ \mu^m(X_{n+1} \dots X_{n+m})$ et $\mu^m(X_{n+1} \dots X_{n+m}) = \mu^m(S_m \circ \Theta^n)$. Comme les variables aléatoires H_n sont positives, en appliquant le théorème de Kingman on obtient le :

Théorème : Si G est discret, si μ est une probabilité telle que $\sum_{x \in G} \mu(x) \operatorname{Log} \mu(x)$ soit fini, en particulier si le support de μ est fini, alors $\frac{1}{n} H_n = -\frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu^n(S_n)$ converge P.p.s. et dans L^1 vers l'entropie $h(\mu)$ de la marche aléatoire (S_n) de loi μ sur G.

Cherchons, comme dans les exemples précédents, une décomposition de la suite sous-additive H_n. Pour cela étudions $H_{n+1} - H_n \circ \Theta = \operatorname{Log} \dfrac{\mu^n(S_n \circ \Theta)}{\mu^{n+1}(S_{n+1})}$. Il va résulter du lemme suivant que cette suite converge P.p.s.

Lemme : Posons pour $a, y \in G$,

$$q_n(a,y) = \begin{cases} \dfrac{\mu^n(a^{-1}y)}{\mu^{n+1}(y)} & \text{si } \mu^{n+1}(y) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $a \in G$, la suite $q_n(a, S_{n+1}(\omega))$ converge P.p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire $q(a,\omega)$ telle que $\int_\Omega q(a,\omega)\, P(d\omega) \leq 1$

Démonstration : On a d'abord

$$\int_\Omega q_n(a, S_{n+1}(\omega))\, P(d\omega) = \sum_{y;\mu^{n+1}(y)>0} \mu^n(a^{-1}y) \leq 1$$

De plus $q_n(a, S_{n+1})$ est une sur-martingale renversée :

$$E\left[q_n(a,S_{n+1}) \,/\, S_{n+2}, S_{n+3}, \ldots\right] \leq q_{n+1}(a, S_{n+2})$$

En effet d'après la propriété de Markov

$$E\left[q_n(a,S_{n+1}) \,/\, S_{n+2}, S_{n+3}, \ldots\right] = E\left[q_n(a, S_{n+1})/S_{n+2}\right] \quad ;$$

de plus si $x \in G$ est tel que $\mu^{n+2}(x) > 0$ on a

$$E\left[q_n(a,S_{n+1}) \,/\, S_{n+2} = x\right] = \sum_{y;\mu^{n+1}(y)>0} q_n(a,y) \frac{\mu^{n+1}(y)\, \mu(y^{-1}x)}{\mu^{n+2}(x)}$$

$$= \frac{1}{\mu^{n+2}(x)} \sum_{y;\mu^{n+1}(y)>0} \mu^n(a^{-1}y)\, \mu(y^{-1}x) \leq q_{n+1}(a,x)$$

Il résulte donc du théorème des martingales que $q_n(a,S_n)$ converge P.p.s. et dans L^1 et la limite vérifie l'inégalité annoncée. (ce résultat apparaît dans [18] pour une chaîne de Markov).

Corollaire : Sous les hypothèses du théorème précèdent la suite

$$(H_{n+1} - H_n \circ \Theta)(\omega) = \mathrm{Log}\, \frac{\mu^n(S_n \circ \Theta(\omega))}{\mu^{n+1}(S_{n+1}(\omega))}$$

converge P.p.s. vers la variable aléatoire $\mathrm{Log}(q(X_1(\omega),\omega))$ qui est intégrable.

De plus l'entropie de μ vaut $h(\mu) = \int_\Omega \mathrm{Log}(q(X_1(\omega),\omega))\, P(d\omega)$.

Démonstration : $\dfrac{\mu^n(S_n \circ \Theta(\omega))}{\mu^{n+1}(S_{n+1}(\omega))} = q_n\,(X_1(\omega),\, S_{n+1}(\omega))$.

D'après le lemme $(H_{n+1} - H_n \circ \Theta)(\omega)$ converge donc P.p.s. vers $\mathrm{Log}\,(q(X_1(\omega),\omega))$.

D'après le théorème de décomposition $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (H_n - H_{n-1} \circ \Theta)$ admet une valeur d'adhérence dans L^1 pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$; cette valeur d'adhérence ne peut être que $\mathrm{Log}(q(X_1(\omega),\omega))$ qui est donc intégrable et qui engendre une suite additive convenable pour la décomposition de la suite sous-additive H_n. Donc

$$\lim_n \frac{1}{n} H_n = h(\mu) = \int_\Omega \mathrm{Log}(q(X_1(\omega),\omega))\, P(d\omega).$$

Le principal intérêt de cette formule est de conduire à la réciproque du théorème d'Avez :

Théorème : Si $\sum_{x \in G} \mu(x) \mathrm{Log}\, \mu(x)$ est fini, en particulier si le support de μ est fini, et si les fonctions μ-harmoniques bornées sont constantes, alors l'entropie $h(\mu) = 0$

Démonstration : Considérons d'abord le cas où μ vérifie l'hypothèse supplémentaire $\mu(e) > 0$. Alors on sait ([9]) que les variables asymptotiques pour la chaîne S_n sont invariantes P.p.s. L'hypothèse faite sur les fonctions μ-harmoniques bornées implique que les variables invariantes pour (S_n) sont P.p.s. constantes. Comme $q(a,\omega) = \lim_n \dfrac{\mu^n\,(a^{-1}\, S_{n+1}(\omega))}{\mu^{n+1}(S_{n+1}(\omega))}$ est asymptotique pour la chaîne (S_n), elle est constante P.p.s. quel que soit $a \in G$. Notons cette constante $q(a)$. Alors

$$h(\mu) = \sum_{a \in G} \mathrm{Log}\, q(a)\, \mu(a).$$

Comme d'après le lemme $q(a) \leqslant 1$ on a

$$0 \leqslant h(\mu) = \sum_{a \in G} \mathrm{Log}\, q(a)\, \mu(a) \leqslant 0 \quad .$$

Si $\mu(e) = 0$, on pose, pour $\alpha \in]0,1[$, $\mu_\alpha = \alpha\delta_e + (1-\alpha)\mu$. Les harmoniques pour μ_α sont exactement les harmoniques pour μ. D'après la première partie de la démonstration $h(\mu_\alpha) = 0$. Il résulte de la concavité de la fonction $\beta(t) = -t \operatorname{Log} t$ $(t \in]0,1])$, $\beta(0) = 0$ que

$$\sum_{x \in G} \beta(\mu_\alpha^n(x)) \geqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-\alpha)^i \alpha^{(n-i)} \left(\sum_{x \in G} \beta(\mu^i(x)) \right).$$

La suite $\sum_{x \in G} \beta(\mu^n(x))$ étant sous additive,

$$\inf_n \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \beta(\mu^n(x)) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \beta(\mu^n(x)) = h(\mu)$$

et $\sum_{x \in G} \beta(\mu_\alpha^n(x)) \geqslant h(\mu) \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-\alpha)^i (\alpha^{n-i}) i \right) = n(1-\alpha)\, h(\mu)$

donc $h(\mu_\alpha) \geqslant (1-\alpha)\, h(\mu)$.

V - Lois des grands nombres

Considérons un groupe G localement compact à base dénombrable engendré par un voisinage compact V de e. Posons $\delta_V(x) = \inf\{n \geqslant 1 \mid x \in V^n\}$. Suivant Guivarc'h ([12]) une loi des grands nombres pour la marche aléatoire sur G de loi μ est un énoncé donnant la convergence p.s. de la suite $\frac{1}{n}\delta_V(S_n)$ ainsi que la valeur de la limite. Comme $\delta_V(xy) \leqslant \delta_V(x) + \delta_V(y)$ la suite $\delta_V(S_n)$ est sous-additive ; sous l'hypothèse d'intégrabilité $\int_G \delta_V(x)\, \mu(dx) < \infty$ le théorème de Kingman implique donc que $\frac{1}{n}\delta_V(S_n)$ converge p.s. et dans L^1 vers une limite constante γ. Le calcul de la limite γ est en général difficile ; γ dépend fortement de la structure du groupe considéré ([12]).

Suivant le théorème de décomposition, si la suite $\delta_V(S_{n+1}) - \delta_V(S_n \circ \theta) = \delta_V(S_{n+1}) - \delta_V(X_1^{-1} S_{n+1})$ converge alors l'intégrale de sa limite égale γ. Cette méthode ne semble pas être très générale. Par exemple, prenons $G = \mathbb{Z}^3$ et pour V l'ensemble des points de coordonnées égales à 1, 0 ou -1. Alors $\delta_V(x) \sim \|x\|$. Si μ est équirépartie sur V on sait que $\|S_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et que S_n visite p.s. une infinité de fois toute demi-droite de $\mathbb{Z}^3$. Il est clair donc

que $\|S_n\| - \|S_n - X_1\|$ ne converge pas p. s.

Cette méthode s'applique cependant si G est le groupe libre sur les d générateurs $\{a_1 \dots a_d\}$ $(d \geqslant 2)$. Notons $a_{-1} \dots a_{-d}$ les inverses des générateurs. Prenons $V = \{e, a_1, \dots, a_d, a_{-1}, \dots, a_{-d}\}$; alors $\delta_V(x)$ est la longueur de l'écriture minimale de x, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $x = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ avec $i_\ell \in \{\pm 1, \dots, \pm d\}$. Supposons μ adaptée sur G (i.e. le support de μ engendre G). On sait alors que la marche aléatoire (S_n) de loi μ sur G est transitoire et $\delta(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ([6]). On peut montrer de plus que S_n "converge" p.s. vers une variable aléatoire S_∞ à valeurs dans l'espace F des mots infinis réduits $a_{i_1} \dots a_{i_\ell} \dots$ $(i_\ell \in \{\pm 1, \dots, \pm d\}$; $i_\ell + i_{\ell+1} \neq 0$ pour tout $\ell \geqslant 1)$; si (x_n) est une suite de G telle que $\delta(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, on dit qu'elle converge vers le mot infini réduit $a_{i_1} \dots a_{i_\ell} \dots$ si pour tout ℓ il existe N tel que l'écriture réduite de x_n commence par $a_{i_1} \dots a_{i_\ell}$ pour tout $n \geqslant N$. La convergence de S_n est montrée dans [7] sous l'hypothèse supplémentaire que le support de μ est fini. Pour ce résultat l'hypothèse d'adaption suffit. En effet, notons pour tout mot réduit $a_{i_1} \dots a_{i_\ell}$, $C_{a_{i_1} \dots a_{i_\ell}}$ l'ensemble des $z \in G \cup F$ dont l'écriture réduite commence par $a_{i_1} \dots a_{i_\ell}$. Considérons deux mots réduits $a_{i_1} \dots a_{i_\ell} a_{i_{\ell+1}}$ et $a_{i_1} \dots a_{i_\ell} a'_{i_{\ell+1}}$ avec $a'_{i_{\ell+1}} \neq a_{i_{\ell+1}}$. Alors la probabilité de visiter k fois $C_{a_{i_1} \dots a_{i_{\ell+1}}}$ et $C_{a_{i_1} \dots a_{i_\ell} a'_{i_{\ell+1}}}$ après la dernière sortie de l'ensemble fini $\{x \in G \mid \delta(x) \leqslant \ell + j\}$ est plus petite que $(\mu\{x \in G \mid \delta(x) \geqslant 2(j+1)\})^k$ car après la dernière sortie de $\{x \in G \mid \delta(x) \leqslant \ell + j\}$ le passage de $C_{a_{i_1} \dots a_{i_\ell} a_{i_{\ell+1}}}$ à $C_{a_{i_1} \dots a_{i_\ell} a'_{i_{\ell+1}}}$ ne peut s'effectuer qu'en un seul saut. Comme j peut être pris aussi grand qu'on veut, la probabilité de visiter une infinité de fois $C_{a_{i_1} \dots a_{i_\ell} a_{i_{\ell+1}}}$ et $C_{a_{i_1} \dots a_{i_\ell} a'_{i_{\ell+1}}}$ est nulle et donc S_n converge p.s. vers S_∞ prenant ses valeurs dans F.

<u>Lemme</u> :

<u>Pour tout</u> $x \in G$ <u>la suite</u> $\delta(S_n) - \delta(x^{-1} S_n)$ <u>converge p.s. Si l'écriture réduite de</u> x <u>est</u> $a_{i_1} \dots a_{i_k}$ <u>alors la limite vaut</u> :

$$\begin{array}{lll} k & \underline{\text{si}} & S_\infty \in C_{a_1 \ldots a_k} \\ 2\ell - k & \underline{\text{si}} & S_\infty \in C_{a_1 \ldots a_\ell} \setminus C_{a_1 \ldots a_{\ell+1}} \qquad \ell = 1, \ldots, k-1 \\ -k & \underline{\text{si}} & S_\infty \notin C_{a_1} \end{array}$$

<u>Démonstration</u> : C'est un raisonnement élémentaire reposant sur la convergence p.s. de S_n vers S_∞.

Notons $L(x, \omega) = \lim_n \delta(S_n) - \delta(x^{-1} S_n)$ p.s.

<u>Théorème</u> :

<u>Si</u> μ <u>est adaptée sur</u> G, <u>si</u> $\sum_{x \in G} \delta(x) \mu(x) < \infty$, <u>alors la variable aléatoire</u> $L(X_1(\omega), \omega)$ <u>est</u> P-<u>intégrable</u>. <u>Son intégrale égale</u> $\lim_n \frac{1}{n} \delta(S_n)$ <u>et vaut</u> :

$$\int_\Omega L(X_1(\omega), \omega) P(d\omega) = \sum_{\substack{x = a_1 \ldots a_k \\ x \in G}} \mu(x) \left(\sum_{\ell=1}^{k-1} (2\ell - k) P\left[S_\infty \in C_{a_1 \ldots a_\ell} \setminus C_{a_1 \ldots a_{\ell+1}}\right] \right.$$

$$\left. + k \left(P\left[S_\infty \in C_{a_1 \ldots a_k}\right] + P\left[S_\infty \in C_{a_1}\right] - 1\right)\right]$$

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème de décomposition sous l'hypothèse $\sum_{x \in G} \delta(x) \mu(x) < \infty$ la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\delta(S_{i+1}) - \delta(S_i \circ \theta))$ admet une sous-suite qui converge faiblement dans L^1. Comme $\delta(S_{i+1}) - \delta(S_i \circ \theta) = \delta(S_{i+1}) - \delta(X_1^{-1} S_{i+1})$ converge p.s. vers $L(X_1(\omega), \omega)$ cette valeur d'adhérence ne peut être que cette variable aléatoire qui est donc intégrable. Elle engendre une suite additive convenable pour la décomposition de la suite sous-additive $\delta(S_n)$ donc $\frac{1}{n} \delta(S_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_\Omega L(X_1(\omega), \omega) P(d\omega)$.
L'expression de cette intégrale s'obtient directement à partir du lemme.

Dans le cas où $\mu(x)$ ne dépend que de $\delta(x)$ la dernière formule se simplifie. Si $\delta(x) = k$ posons $\mu(x) = \mu_k$. Pour des raisons évidentes de symétrie

$$P\left[S_\infty \in C_{a_1 \ldots a_k}\right] = \frac{1}{(2d)(2d-1)^{k-1}}$$

$$P\left[S_\infty \in C_{a_1 \dots a_k} \setminus C_{a_1 \dots a_k\, a_{k+1}}\right] = \frac{1}{(2\,d)\,(2\,d-1)^k}$$

car il y a $(2\,d)\,(2\,d-1)^{k-1}$ éléments de G de longueur k. Par un calcul élémentaire

$$\int_\Omega L(X_1(\omega),\omega)P(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k\,\frac{4d-2}{(2d-1)^2-1}\left(1-\frac{1}{(2d-1)^k}\right)\right](2d-1)^{k-1}\,(2d)\,\mu_k$$

Cette formule est analogue à celle récemment trouvée par Sawyer dans le contexte très voisin des marches aléatoires isotropes sur un arbre homogène [22]. Dans le cas $d = 2$, μ équirépartie sur les générateurs et les inverses, on retrouve $\frac{1}{n}\,\delta\,(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ p.s., résultat obtenu précédemment par Fürstenberg [11].

Dans le cas général si l'on pose $d_V\,(x, y) = \delta_V\,(x^{-1}\,y)$ on a $\delta_V\,(S_n) = d_V\,(e, S_n)$. Cela suggère de considérer aussi les suites $d_V\,(g^n, S_n)$ où g est fixé dans G. On a $d_V\,(g^{n+k}, S_{n+k}) \leqslant d_V\,(g^{n+k}, S_n\,g^k) + d_V\,(S_n\,g^k, S_{n+k})$; par l'invariance à gauche de d_V, $d_V\,(S_n\,g^k, s_{n+k}) = d_V\,(g^k, S_k) \circ \theta^n$. Si de plus d_V est invariante à droite $d_V\,(g^{n+k}, S_n\,g^k) = d_V\,(g^n, S_n)$ et dans ce cas $d_V\,(g^n, S_n)$ est une suite sous-additive. Sous l'hypothèse $\int_G \delta_V\,(x)\,\mu\,(dx) < \infty$ le théorème de Kingman implique la convergence de $\frac{1}{n}\,d_V\,(g^n, S_n)$. Le calcul de la limite d'une telle suite (en particulier la caractérisation des cas où il existe un $g \in G$ unique tel que $\lim_n \frac{1}{n}\,d_V\,(g^n, S_n) = 0$) semble être aussi un problème intéressant.

VI - Quelques remarques

D'autres suites sous-additives peuvent être associées de façon naturelle à un processus à accroissements stationnaires $(S_n)_{n\geqslant 1}$. Par exemple si S_n est à valeurs réelles et si $A_n\,(\omega)$ est la longueur de la plus longue suite croissante de termes successifs parmi $S_1\,(\omega), \dots, S_n\,(\omega)$, alors la suite A_n est sous-additive. Si S_n est à valeurs dans un groupe G et si ψ est une fonction à valeurs réelles définies sur l'espace des mesures positives finies sur G, vérifiant

$$\psi(\sup(\lambda_1, \lambda_2)) \leqslant \psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2)$$

alors pour toute mesure positive finie λ la suite $\psi(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} (\lambda * \delta_{S_k^{-1}(\omega)}))$ est sous additive.

Le théorème de Kingman a été étendu à des processus sous-additifs multidimensionnels par Smythe [23]. Cela peut être appliqué à l'étude des processus à accroissements stationnaires à temps multidimensionnel. Par exemple dans [10] est étudié le trajet d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ à temps bidimensionnel : si $S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ le trajet $R_{m,n}$ est défini par $R_{m,n} = \text{card}\,\{S_{p,q} \mid 1 \leqslant p \leqslant m,\ 1 \leqslant q \leqslant n\}$. Le résultat de [23] implique immédiatement que $\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \frac{1}{m\,n} R_{mn}$ existe p.s.

Dans les exemples de suites sous-additives g_n traités précédemment, il apparaît que la suite $g_{n+1} - g_n \circ \theta$ converge (donc aussi la suite $f_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (g_i - g_{i-1} \circ \theta)$), la convergence ayant lieu en un sens plus fort que le sens faible dans L^1. A priori, cela pourrait laisser penser que sous des hypothèses assez larges la suite f_m converge en un sens plus fort que le sens faible (soit p.s. ou en probabilité). L'exemple suivant montre qu'un tel résultat n'est pas possible. Prenons pour (S_n) la marche aléatoire de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, les X_i sont indépendantes équidistribuées, $P[X_1 = 1] = P[X_1 = -1] = \frac{1}{2}$. La suite $S_n^+ = \max(S_n, 0)$ est sous-additive et

$$S_{n+1}^+ - S_n^+ \circ \theta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S_{n+1} < 0 \\ -1 & \text{si} \quad S_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad X_1 = -1 \\ 0 & \text{si} \quad S_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad X_1 = +1 \\ X_1 & \text{si} \quad S_{n+1} > 0 \end{cases}$$

donc $S_{n+1}^+ - S_n^+ \circ \theta = X_1 (1_{\{S_{n+1}>0\}} + 1_{\{S_{n+1}=0,\ X_1=-1\}})$. Comme $P[S_n = 0] \sim 1/\sqrt{\frac{\pi}{2} n}$, $1_{\{S_{n+1}=0\}}$ converge vers 0 dans L^1. L'étude de la convergence de $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} S_{n+1}^+ - S_n^+ \circ \theta$ se ramène donc à celle de la suite $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} 1_{\{S_{n+1}>0\}}$.

Or $\sum_{n=1}^{m} 1_{\{S_{n+1}>0\}}$ est le nombre de visites à la demi-droite $[1, +\infty[$ entre l'instant 2 et l'instant m+1. D'après la loi classique de l'arcsinus, la suite $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} 1_{\{S_{n+1}>0\}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition $\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ $(x \in [0, 1])$. D'autre part, par un calcul immédiat, on obtient que si A est l'évènement $A = [X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_k = \varepsilon_k]$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$

$$\int_A 1_{\{S_{n+1}>0\}} dP = P(A)\, P\Big(\sum_{i=k+1}^{n+1} X_i > -(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} P(A)$$

Comme les évènements du type de A engendrent la tribu $\mathcal{F} = \sigma(X_1, X_2, \ldots)$ et que la suite $1_{\{S_{n+1}>0\}}$ est bornée par 1, il en résulte que $1_{\{S_{n+1}>0\}}$ et aussi $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} 1_{\{S_{n+1}>0\}}$ convergent faiblement dans L^1 vers la constante $\frac{1}{2}$. Le sens de cette convergence ne peut être renforcé en aucune façon car sinon la convergence en loi n'aurait pas lieu vers une variable non constante. Donc $S^+_{n+1} - S^+_n \circ \theta$ et $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (S^+_{n+1} - S^+_n \circ \theta)$ convergent faiblement dans L^1 mais en aucun sens plus fort. Cet exemple montre de plus que la convergence au sens faible dans L^1 de la suite $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (g_i - g_{i-1} \circ \theta)$, et même celle de $(g_n - g_{n-1} \circ \theta)$, n'impliquent pas l'unicité de la décomposition de la suite sous-additive (g_n). En effet dans ce cas, quel que soit $a \in [0, 1]$ la suite additive $(a\, S_n)$ convient pour décomposer (S^+_n). Par contre, il est clair que la convergence au sens faible dans L^1 de la suite $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (g_i - g_{i-1} \circ \theta)$ résulte de l'unicité de la décomposition de la suite sous-additive (g_n) considérée.

Références

[1] AKCOGLU - SUCHESTON (1978) : A ratio ergodic theorem for superadditive processes. Z. Wahr. verw. Geb. vol. 44, 269-278

[2] AVEZ A. (1974) : Théorème de Choquet-Deny pour les groupes à croissance non exponentielle. C.R.A.S. Paris, t. 279, Sér. A, 25-28

[3] AVEZ A. (1974) : Croissance des groupes de type fini et fonctions harmoniques. Lecture Notes n° 532 (Théorie ergodique) Springer

[4] BURKHOLDER D. (1973) : Discussion de [15].

[5] DEL JUNCO A. (1977) : On the decomposition of a subadditive stochastic process. Ann. Probability, vol. 5, 289-302

[6] DERRIENNIC - GUIVARC'H (1973) : Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables. C.R.A.S. Paris, t. 277, Sér. A, 613-615

[7] DERRIENNIC Y. (1975) : Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin. Z. Wahr. Verw. Geb. Vol. 32, 261-276

[8] DERRIENNIC Y. (1975) : Sur le théorème ergodique sous-additif. C.R.A.S. Paris Sér. A, t. 281, 985-988

[9] DERRIENNIC Y. (1976) : Lois "zéro ou deux" pour les processus de Markov. Applications aux marches aléatoires. Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, Vol. 12, n° 2, 111-129

[10] ETEMADI N. (1976) : The range of a random walk in two dimensional time. Ann. Probability, Vol. 4, n° 5, 836-843

[11] FURSTENBERG H. (1971) : Random walks on discrete subgroups of Lie groups. Advanc. Proba. and related topics, Vol. 1, 3-63

[12] GUIVARC'H Y. (1976) : Une loi des grands nombres pour les groupes de Lie. Séminaire de Probabilités, Rennes, 60 p et Astérisque (présent volume)

[13] JAIN - BRUITT (1971) : The range of random walk. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. Vol. 3, 31-50

[14] KINGMAN J.F.C. (1968) : The ergodic theory of subadditive processes. J. Roy. Stat. Soc. Sér. B, Vol. 30, 499-510

[15] KINGMAN, J.F.C. (1973) : Subadditive ergodic theory. Ann. Probability, Vol 1, 883-909

[16] KINGMAN J.F.C. (1976) : Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour. Lecture Notes n° 539, 168-223, Springer

[17] MARCUS - PETERSEN (1978) : Balancing ergodic averages. Preprint.

[18] OREY S. (1971) : Limit theorems for Markov chain transition probabilities. London : Van Nostrand

[19] PALMGREN B. (1976) : On the range of transient Markov chains. Conférence de Vilnius

[20] PITT J. (1974) : Multiple points of transient random walks. Proc. Amer. Math. Soc. Vol 43 n° 1, 195-199

[21] REVUZ D. (1975) : Markov chains. North-Holland. Mathematical Library

[22] SAWYER S. (1978) : Isotropic random walks in a tree. Z. Wahr. Verw. Geb. Vol. 42, 279-292

[23] SMYTHE R.T. (1976) : Multiparameter subadditive processes. Ann. Probability Vol 4 n° 5, 772-782

[24] SPITZER F. (1964) Principles of random walk. Amsterdam : Van Nostrand.

[25] SPITZER F. (1973) : Discussion de [15].

Yves DERRIENNIC
Faculté des Sciences
6, avenue Le Gorgeu
29283 BREST