YVES DERRIENNIC

Quelques applications du théorème ergodique sous-additif

Astérisque, tome 74 (1980), p. 183-201
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__183_0>

QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME ERGODIQUE SOUS-ADDITIF

Yves DERRIENNIC

I - Introduction

Le but de cet article est d'enrichir la collection des applications possibles du théorème ergodique sous-additif de Kingman. Dans l'étude des marches aléatoires sur les groupes localement compacts s'introduisent de façon naturelle des fonctions qui donnent naissance à des suites sous-additives qui peuvent être traitées à l'aide de ce théorème. Souvent, il apparaît que les résultats ainsi obtenus s'étendent aux processus à accroissements stationnaires qui sont plus généraux que les marches aléatoires.

Les principales applications présentées dans cet article sont les suivantes :

- le théorème du trajet (en anglais appelé "range") et du trajet multiple pour des processus à accroissements stationnaires avec le calcul explicite de la limite, ce qui n'était connu jusqu'à présent que pour des marches aléatoires, c'est-à-dire des processus à accroissements indépendants et équidistribués.
- l'étude de l'oscillation des processus à accroissements stationnaires, qui conduit à retrouver une formule élégante récemment obtenue par Marcus et Petersen ([17]) qui explicite dans une certaine mesure le lemme ergodique maximal.
- l'étude de l'entropie des marches aléatoires introduite par Avez ([2], [3]), qui conduit à la réciproque du théorème d'Avez suivant lequel la nullité de l'entropie implique la propriété de Liouville pour la marche aléatoire.
- les lois des grands nombres ; des formules explicites sont données dans certains cas particuliers, mais les résultats les plus importants dans cette direction sont bien sûr ceux de Guivarc'h ([12]).

Diverses autres questions sont aussi envisagées.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de rappeler avec précision le théorème de Kingman. La formulation choisie est celle des suites sous-additives sur un système dynamique plutôt que celle des processus sous-additifs ; il n'y a là qu'une différence de vocabulaire.

Théorème ergodique sous-additif ([14] [15] [8])

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et θ une transformation mesurable préservant la mesure P. Si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions intégrables, sous-additive, c'est-à-dire $g_{n+k} \leq g_n + g_k \circ \theta^n$ pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, si $\inf_n \frac{1}{n} \int_\Omega g_n \, dP > -\infty$, alors la suite $\frac{1}{n} g_n$ converge P. p. s. et dans L^1 vers une limite ξ qui est invariante sous θ et qui vérifie pour tout ensemble mesurable invariant A $\int_A \xi \, dP = \lim_n \frac{1}{n} \int_A g_n \, dP$.

Sans reprendre ici la discussion approfondie de ce résultat, il est nécessaire de souligner que dans les applications, il est important de savoir calculer la limite ξ ; en particulier dans le cas où, θ étant ergodique, cette limite est la constante $\gamma = \inf_n \frac{1}{n} \int_\Omega g_n \, dP = \lim_n \frac{1}{n} \int_\Omega g_n \, dP$. Or la démonstration de Kingman basée sur une décomposition naturelle des suites sous-additives fournit un moyen d'approche de cette limite. Voici cette décomposition.

Théorème de décomposition des suites sous-additives :

Si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite sous-additive de fonctions intégrables telle que $\gamma = \inf_n \frac{1}{n} \int_\Omega g_n \, dP > -\infty$, il existe une fonction intégrable f vérifiant pour tout n $\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \theta^i \leq g_n$ et $\int_\Omega f \, dP = \gamma$. La suite sous-additive $(g_n)_n$ est donc la somme de la suite additive $\left(\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \theta^i\right)_{n\geq 1}$ et de la suite sous-additive positive $\left(g_n - \sum_{i=0}^{n-1} f \circ \theta^i\right)_{n\geq 1}$ qui est telle que

$$\frac{1}{n}\left(g_n - \sum_{i=0}^{n-1} f \circ \theta^i\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P.p.s.\ L^1} 0.$$

En général, cette décomposition n'est pas unique ; toute fonction f qui est une valeur d'adhérence de la suite $f_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (g_i - g_{i-1} \circ \theta)$ (où $g_o = 0$) dans la topologie faible de L^1 (la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$) convient. (Sous les hypothèses précédentes, une telle valeur d'adhérence existe).

Dans la démonstration originale de Kingman la valeur d' adhérence de la suite f_m était prise dans le bidual de L^1, $(L^\infty)^*$ pour la topologie $\sigma((L^\infty)^*, L^\infty)$. Mais il résulte de l'article récent de Akcoglu et Sucheston [1] que la valeur d'adhérence de la suite f_m peut être prise dans L^1 pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$. D'autres modes de convergence "faible" pour des sous-suites de la suite f_m sont aussi considérés par Burkholder [4] et Del Junco [5]. S'il est possible de calculer une valeur d'adhérence de la suite (f_m), en particulier si celle-ci converge même en un sens très faible, alors cela donne aussitôt la valeur de la limite de $\frac{1}{n} g_n$.

Dans la suite G est un groupe localement compact à base dénombrable et $(X_n)_{n\geq 1}$ un processus stationnaire à valeurs dans G. On pose $S_n = X_1 X_2 \dots X_n$, l'opération du groupe étant notée multiplicativement. Si G est abélien, l'opération est notée additivement et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La distribution commune des variables X_n est une mesure de probabilité sur G notée μ. $(S_n)_{n\geq 1}$ est appelé processus à accroissements stationnaires, de loi μ, issu de e élément neutre du groupe. Si de plus les variables X_n sont indépendantes $(S_n)_{n\geq 1}$ est la marche aléatoire de loi μ sur G issue de e ; la distribution de S_n est alors la $n^{\text{ème}}$ puissance de convolution μ^n. On pose $\Omega = G^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_G^{\otimes \mathbb{N}}$ où $\mathcal{B}_G$ est la tribu borélienne de G ; la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui est la distribution conjointe du processus stationnaire $(X_n)_{n\geq 1}$ est notée P. On sait que les variables aléatoires X_n peuvent être identifiées aux projections canoniques de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur G ; on supposera toujours cette identification faite. Si les variables X_n sont indépendantes, P est la mesure produit $\mu^{\otimes \mathbb{N}}$. La translation unité ("shift") est la transformation θ de l'espace Ω définie par $X_n(\theta\,\omega) = X_{n+1}(\omega)$ pour tout $n \geq 1$ et et $\omega \in \Omega$; c'est une transformation mesurable qui, en raison de la stationnarité du processus, laisse la mesure P invariante. La sous-tribu de $\mathcal{F}$ formée des ensembles invariants sous θ est notée J. On note toujours m une mesure de Haar à droite fixée sur G. Si $(S_n)_{n\geq 1}$ est une marche aléatoire, cette mesure m est invariante pour la marche : $m * \mu = m$.

II - Le trajet

Commençons par considérer le cas où G est un groupe discret. Le trajet à l'instant n du processus à accroissements stationnaires $(S_n)_{n\geq 1}$ est la variable aléatoire à valeurs entières R_n définie par $R_n(\omega) = \text{card}\{S_k(\omega) \mid 1 \leq k \leq n\}$. C'est le nombre de points distincts visités par le processus $(S_n)_{n\geq 1}$ entre l'instant 1 et l'instant n. (En Anglais, R_n est appelé "range").

Théorème :

La suite $(\frac{1}{n} R_n)$ converge P. p. s. et dans L^1 vers l'espérance conditionnelle $E[1_A / J]$ de l'indicatrice 1_A de l'évènement $A = \bigcap_{n\geq 1} \{S_n \neq e\}$. Si le processus (X_n) est ergodique, la limite est simplement la constante $P(A)$.

Démonstration : La suite (R_n) est sous-additive (pour le système $(\Omega, \mathcal{F}, P, \theta)$) ; en effet $R_{n+\ell}(\omega) \leq R_n(\omega) + \text{card}\{S_k(\omega) \mid n+1 \leq k \leq n+\ell\}$; comme $\{S_k(\omega) \mid n+1 \leq k \leq n+\ell\}$ est le translaté par $S_n(\omega)$ de $\{S_k(\theta^n\omega) \mid 1 \leq k \leq \ell\}$ on a $\text{card}\{S_k(\omega) \mid n+1 \leq k \leq n+\ell\} = R_\ell(\theta^n \omega)$. Les variables R_n sont positives et intégrables donc la convergence de $\frac{1}{n} R_n$ P. p. s. et dans L^1 résulte du théorème de Kingman. Pour calculer la limite, cherchons la décomposition de la suite sous-additive (R_n). Pour cela, comme l'indique le théorème de décomposition rappelé dans l'introduction, cherchons une valeur d'adhérence faible de $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(R_i - R_{i-1} \circ \theta)$ où $R_o = 0$. Ce problème est très simple car

$$(R_{n+1} - R_n \circ \theta)(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } X_1(\omega) \notin \{S_k(\omega) \mid 2 \leq k \leq n+1\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et donc la suite $(R_{n+1} - R_n \circ \theta)$ est convergente en décroissant vers $1_A \circ \theta$.

D'après le théorème de décomposition la limite de $\frac{1}{n} R_n$ est donc $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_A \circ \theta^i = E [1_A / J]$.

La probabilité $P(A)$ est la probabilité de non retour du processus S_n au point de départ. Ce résultat était connu pour les marches aléatoires ([13], [24]). Le raisonnement précédent peut être raffiné pour obtenir un résultat relatif au trajet multiple, qui a été étudié dans le cadre des marches aléatoires par Pitt ([20]). Le trajet d'ordre j à l'instant n est la variable aléatoire $R_n^{(j)}$ égale au nombre de points visités exactement j fois par le processus (S_k) entre l'instant 1 et l'instant n.

Théorème :

La suite $\frac{1}{n} R_n^{(j)}$ converge P. p. s. et dans L^1 vers $E [1_{B_{j-1}} - 1_{B_j} / J]$ où B_j est l'évènement $B_j = \{\omega \mid S_n(\omega) = e$ exactement j fois, $n = 1, 2 \dots\}$. Si le processus (X_n) est ergodique, la limite est la constante $P(B_{j-1}) - P(B_j)$. Dans le cas d'une marche aléatoire, cette constante vaut $(1-r)^2 r^{j-1}$ où $(1-r)$ est la probabilité $P(A)$ de non retour au point de départ.

Démonstration : La suite $(R_n^{(j)})_n$ n'est pas sous-additive, mais si $T_n^{(j)}$ égale le nombre de points visités au moins une fois et au plus j fois par le processus S_k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, la suite $(T_n^{(j)})_n$ est sous-additive : $T_{n+\ell}^{(j)} \leqslant T_n^{(j)} + T_\ell^{(j)} \circ \theta^n$ et de plus $T_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} R_n^{(i)}$. Comme $T_n^{(j)}$ est positive et intégrable, d'après le théorème de Kingman $\frac{1}{n} T_n^{(j)}$ converge p. s. et dans L^1 ; par différence, il en est de même pour $\frac{1}{n} R_n^{(j)}$. Pour calculer la limite, on cherche la décomposition de la suite $T_n^{(j)}$. Pour cela, comme précédemment, on étudie la suite $T_{n+1}^{(j)} - T_n^{(j)} \circ \theta$:

$$(T_{n+1}^{(j)} - T_n^{(j)} \circ \theta)(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } X_1(\omega) \text{ n'est pas revisité par } S_k(\omega) \\ \qquad\qquad \text{pour } k = 2, \dots, n+1. \\ -1 \text{ si } X_1(\omega) \text{ est revisité exactement j fois par } S_k(\omega) \\ \qquad\qquad \text{pour } k = 2, \dots, n+1. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La suite $(T_{n+1}^{(j)} - T_n^{(j)} \circ \theta)(\omega)$ converge donc vers $(1_A - 1_{B_j}) \circ \theta$ (où $A = \bigcap_{n\geqslant 1} \{S_n \neq e\}$). D'après le théorème de décomposition, on obtient $\lim_n \frac{1}{n} T_n^{(j)} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1_A - 1_{B_j}) \circ \theta^i = E\,[1_A - 1_{B_j} / J]$, et $\lim_n \frac{1}{n} R_n^{(j)} = \lim_n \frac{1}{n} T_n^{(j)} - \lim_n \frac{1}{n} T_n^{(j-1)} = E\,[1_{B_{j-1}} - 1_{B_j} / J]$. Dans le cas ergodique, la limite est constante et vaut $P(B_{j-1}) - P(B_j)$. Dans le cas d'une marche aléatoire, le calcul de $P(B_j)$ est immédiat : $P(B_j) = r^j (1 - r)$, d'où $P(B_{j-1}) - P(B_j) = (1 - r)^2 r^{j-1}$.

Si le processus $(X_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas stationnaire mais si sa loi de probabilité P est équivalente à une loi de probabilité Q invariante sous θ (c'est-à-dire pour laquelle $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire) alors la convergence P. p. s. dans les théorèmes précédents est encore vraie. Par exemple les théorèmes du trajet sont vrais pour la chaîne de Markov $(S_n)_{n\geqslant 1}$ sur $\mathbb{Z}$ issue de 0 dont la probabilité de transition est :

$$P\,[S_{n+1} = k + 1 \mid S_n = k] = p_k > \frac{1}{2}$$

$$P\,[S_{n+1} = k - 1 \mid S_n = k] = 1 - p_k > 0$$

avec $\lim_{k\to+\infty} p_k = p_+ > \frac{1}{2}$ et $\lim_{k\to-\infty} p_k = p_- > \frac{1}{2}$.

En effet, dans ce cas la loi de probabilité conjointe P des accroissements $(S_{n+1} - S_n)$ est telle que $\lim_n \theta^n P = Q$ où Q est la mesure produit $(p_+ \delta_1 + (1 - p_+) \delta_{-1})^{\otimes \mathbb{N}}$ (δ désigne les mesures de Dirac) ; Q est invariante sous θ et équivalente à P. Le théorème du trajet pour cette chaîne de Markov a été étudié par Palmgren ([19]). On peut aussi remarquer que la suite additive $\sum_{i=1}^{n} 1_A \circ \theta^i$ obtenue dans la décomposition de la suite sous-additive R_n a la signification suivante : $\sum_{i=1}^{n} 1_A \circ \theta^i(\omega)$ égale le nombre de points distincts visités par $S_1(\omega) \ldots S_n(\omega)$ qui ne sont pas revisités par $S_{n+1}(\omega)$, $S_{n+2}(\omega), \ldots$

Dans le cas où G est un groupe localement compact à base dénombrable quelconque, on peut donner un sens au théorème du trajet en définissant pour une mesure positive finie λ arbitraire sur G :

$$R_{\lambda,n}(\omega) = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} (\lambda * \delta_{S_i^{-1}(\omega)})(G) \quad ;$$

c'est la masse totale du sup. des mesures translatées de λ par les points $S_i^{-1}(\omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Dans le cas discret, le trajet $R_n(\omega)$ égale $R_{\lambda,n}(\omega)$ avec $\lambda = \delta_e$. On vérifie comme précédemment que la suite $R_{\lambda,n}$ est sous-additive, positive et intégrable, donc la suite $\frac{1}{n} R_{\lambda,n}$ converge p. s. et dans L^1. De plus

$$(R_{\lambda,n+1} - R_{\lambda,n} \circ \theta)(\omega) = \sup_{1\leqslant i\leqslant n+1} (\lambda * \delta_{S_i^{-1}(\omega)})(G) - \sup_{2\leqslant i\leqslant n+1} (\lambda * \delta_{S_i^{-1}(\omega)})(G)$$

$$= (\lambda - \inf(\lambda, \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda * \delta_{S_i^{-1}(\theta\omega)}))(G) \quad ;$$

cette suite est décroissante et converge quand $n \to \infty$ vers $(\lambda - \inf(\lambda, \sup_{1\leqslant i} \lambda * \delta_{S_i^{-1}(\theta\omega)}))(G)$. Cette fonction de ω engendre une suite additive convenable pour la décomposition de $R_{\lambda,n}$ et permet donc le calcul de la limite de $\frac{1}{n} R_{\lambda,n}$. En général cela ne donne pas un résultat très explicite mais si λ est la restriction de la mesure de Haar à droite m à un ensemble mesurable E, $\lambda = 1_E \cdot m$ le résultat se simplifie :

$$(\lambda - \inf(\lambda, \sup_{1\leqslant i} \lambda * \delta_{S_i^{-1}(\theta\omega)}))(G) = m(E \cap [\bigcap_{i=1}^{\infty} E^c \cdot S_i^{-1}(\theta\omega)])$$

$$= m\{x \in E \mid x\, S_i(\theta\omega) \notin E \text{ pour tout } i \geqslant 1\}.$$

Si de plus le processus $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est ergodique, la limite de $\frac{1}{n} R_{\lambda,n}$ est la constante obtenue en intégrant cette fonction de ω par rapport à P ; cette constante vaut donc $\int_E P[x\, S_i \notin E \text{ pour tout } i \geqslant 1]\, m(dx)$. Si $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est une marche aléatoire, ce nombre est la capacité de l'ensemble E pour cette marche ([21], [24]). Ceci est tout à fait similaire à une remarque de Spitzer pour le mouvement brownien ([25]). En résumé, nous avons donc :

<u>Théorème</u> :

<u>Si le processus</u> (X_n) <u>est ergodique</u>, <u>si</u> E <u>est un ensemble mesurable de</u> G, <u>alors la suite</u> $\frac{1}{n} \sup_{1\leqslant i\leqslant n} ((1_E \cdot m) * \delta_{S_i^{-1}(\omega)})(G)$ <u>converge P. p. s. et dans</u> L^1 <u>vers la constante</u> $\int_E P[\bigcap_{i=1}^{\infty} (x\, S_i \notin E)]\, m(dx)$.

III - L'oscillation

Considérons le groupe additif des réels $G = \mathbb{R}$. Appelons oscillation à l'instant $n+1$ du processus à accroissements stationnaires $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la variable aléatoire réelle $O_n = M_{n+1} - I_{n+1}$ où $M_{n+1} = \max_{1 \leq k \leq n+1} S_k$ et $I_{n+1} = \min_{1 \leq k \leq n+1} S_k$. On a $O_{n+\ell} \leq M_{n+1} - I_{n+1} + \max_{n+1 \leq k \leq n+\ell+1} S_k - \min_{n+1 \leq k \leq n+\ell+1} S_k$ l'égalité n'étant réalisée que si $S_{n+1} = M_{n+1} = \min_{n+1 \leq k \leq n+\ell+1} S_k$; il est clair que $\max_{n+1 \leq k \leq n+\ell+1} S_k - \min_{n+1 \leq k \leq n+\ell+1} S_k = O_\ell \circ \theta^n$. Donc la suite O_n est sous-additive : $O_{n+\ell} < O_n + O_\ell \circ \theta^n$. La suite O_n est positive ; si O_1 est intégrable le théorème de Kingman entraîne que $\frac{1}{n} O_n$ converge. Cela n'est pas surprenant car $\int O_1 \, dP = \int_\Omega |X_1| \, dP$ et donc, si O_1 est intégrable, la loi forte des grands nombres est vraie pour le processus (X_n). Alors $\lim_n \frac{1}{n} S_n = E[X_1/J]$ P.p.s. et

$$\text{sur } \{E[X_1/J]>0\} \quad \frac{1}{n} M_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} E[X_1/J]$$

$$\frac{1}{n} I_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\text{sur } \{E[X_1/J]<0\} \quad \frac{1}{n} M_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\frac{1}{n} I_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} E[X_1/J]$$

$$\text{sur } \{E|X_1/J|=0\} \quad \frac{1}{n} M_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\frac{1}{n} I_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc $\frac{1}{n} O_n \xrightarrow[n\to\infty]{} |E[X_1/J]|$

Il est plus intéressant de chercher la décomposition de la suite sous-additive O_n. Comme l'indique le théorème de décomposition on étudie la suite $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (O_n - O_{n-1} \circ \theta)$. Calculons :

$(O_{n+1} - O_n \circ \theta)(\omega)$; si $M_{n+2}(\omega) > X_1(\omega) > I_{n+2}(\omega)$ alors

$(O_{n+1} - O_n \circ \theta)(\omega) = 0$; si $M_{n+2}(\omega) = X_1(\omega)$ alors

$(O_{n+1} - O_n \circ \theta)(\omega) = X_1(\omega) - I_{n+2}(\omega) - M_{n+1} \circ \theta(\omega) + I_{n+1} \circ \theta(\omega) = - M_{n+1} \circ \theta(\omega)$

car dans ce cas $X_1(\omega) + I_{n+1} \circ \theta(\omega) = I_{n+2}(\omega)$.

Si $X_1(\omega) = I_{n+2}(\omega)$ alors

$(O_{n+1} - O_n \circ \Theta)(\omega) = M_{n+2}(\omega) - X_1(\omega) - M_{n+1} \circ \Theta(\omega) + I_{n+1} \circ \Theta(\omega) = I_{n+1} \circ \Theta(\omega)$

car dans ce cas $X_1(\omega) + M_{n+1} \circ \Theta(\omega) = M_{n+2}(\omega)$. En résumé

$$(O_{n+1} - O_n \circ \Theta)(\omega) = \begin{cases} - M_{n+1} \circ \Theta(\omega) & \text{si } M_{n+1} \circ \Theta(\omega) < 0 \\ I_{n+1} \circ \Theta(\omega) & \text{si } I_{n+1} \circ \Theta(\omega) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite M_n est croissante, notons M sa limite ; la suite I_n est décroissante, notons I sa limite. La suite $O_{n+1} - O_n \circ \Theta$ est donc convergente et $\lim_n (O_{n+1} - O_n \circ \Theta) = - M \circ \Theta . 1_{\{M \circ \Theta < 0\}} + I \circ \Theta . 1_{\{I \circ \Theta > 0\}}$ P.p.s.

Si O_1 est intégrable, d'après le théorème de décomposition, cette variable aléatoire engendre une suite additive qui convient pour la décomposition de la suite sous-additive O_n et de plus

$$\lim_n \frac{1}{n} O_n = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-M . 1_{\{M<0\}} + I . 1_{\{I>0\}}) \circ \Theta^i$$
$$= E \left[-M . 1_{\{M<0\}} + I . 1_{\{I>0\}} / J\right]$$

Ainsi est obtenu le :

<u>Théorème</u> : <u>Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est un processus réel stationnaire intégrable, si</u> $M = \sup_{1 \leq k} \sum_{i=1}^{k} X_i$, $I = \inf_{1 \leq k} \sum_{i=1}^{k} X_i$, <u>alors</u>

$$E \left[-M . 1_{\{M<0\}} + I . 1_{\{I>0\}} / J\right] = \left| E \left[X_1 / J\right] \right|$$

<u>Corollaire</u> : $1_{\{E [X_1/J] > 0\}} . E [X_1/J] = 1_{\{E [X_1/J] > 0\}} . E [I . 1_{\{I>0\}} / J]$,

$1_{\{E [X_1/J] < 0\}} . E [X_1/J] = 1_{\{E [X_1/J] < 0\}} E [M . 1_{\{M<0\}} / J]$, et $\int_\Omega X_1 \, dP = \int_{\{I>0\}} I \, dP + \int_{\{M<0\}} M \, dP$

<u>Démonstration</u> : Ces formules résultent immédiatement du théorème. Il suffit d'utiliser l'invariance sous Θ des ensembles $\{E [X_1/J] > 0\}$, $\{E [X_1/J] < 0\}$ et d'observer que $P(\{E [X_1/J] > 0\} \cap \{M < 0\}) = 0$, $P(\{E [X_1/J] < 0\} \cap \{M > 0\}) = 0$.

La dernière égalité du corollaire a été prouvée récemment par une méthode directe par Marcus et Petersen. Ces deux auteurs déduisent de cette égalité une intéressante discussion du lemme ergodique maximal de Hopf ([17]).

Si G est un groupe localement compact à base dénombrable engendré par un voisinage compact V de l'élément neutre e, on peut encore définir l'oscillation d'un processus à accroissements stationnaires $(S_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans G. Comme dans [12] on définit $\delta_V(x) = \inf\{n>0 \ / \ x \in V^n\}$ et $d_V(x,y) = \delta_V(x^{-1}y)$; la fonction d_V vérifie l'inégalité triangulaire et est invariante à gauche. Si l'on pose $O_n = \text{diamètre}_{d_V} \{S_k \ / \ 1\leq k\leq n+1\} = \sup\{d_V(S_\ell, S_k)/\ell, k \in \{1,\dots,n+1\}\}$ la suite O_n est sous-additive et positive. Si de plus $\delta_V(X_1)$ est P-intégrable les hypothèses du théorème de Kingman sont réunies et donc $\frac{1}{n} O_n$ converge P.p.s. et dans L^1.

IV - L'entropie

Considérons un groupe G discret et une mesure de probabilité μ sur G à support fini. Avez définit l'entropie de la marche aléatoire de loi μ sur G comme le nombre $\lim\limits_n -\frac{1}{n} \sum\limits_{x\in G} \mu^n(x) \operatorname{Log} \mu^n(x) = h(\mu)$ (on pose $t \operatorname{Log} t = 0$ pour $t = 0$). Cette limite existe car la suite numérique $-\sum\limits_{x\in G} \mu^n(x) \operatorname{Log} \mu^n(x)$ est sous-additive et positive. Le principal intérêt de cette notion réside dans le résultat suivant :

<u>Théorème</u> (Avez [3]) : <u>Si le support de μ engendre G, si $h(\mu) = 0$, les constantes sont les seules fonctions bornées μ-harmoniques (i.e. solutions de l'équation $\sum\limits_{y\in G} f(xy)\,\mu(y) = f(x)$ pour tout $x \in G$).</u>

La sous-additivité de la suite $(-\sum\limits_{x\in G} \mu^n(x) \operatorname{Log} \mu^n(x))$ repose sur l'inégalité évidente $\mu^{n+m}(xy) \geq \mu^n(x)\,\mu^m(y)$. Suivant une observation de J.P. Conze cette simple inégalité implique que la suite $H_n = -\operatorname{Log} \mu^n(S_n)$ est sous-additive (il n'y a pas d'ambiguité dans la définition de H_n car P.p.s. $\mu^n(S_n) > 0$). En effet $\mu^{n+m}(S_{n+m}) \geq \mu^n(X_1\dots X_n)\ \mu^m(X_{n+1}\dots X_{n+m})$ et $\mu^m(X_{n+1}\dots X_{n+m}) = \mu^m(S_m \circ \theta^n)$. Comme les variables aléatoires H_n sont positives, en appliquant le théorème de Kingman on obtient le :

<u>Théorème</u> : <u>Si G est discret, si</u> μ <u>est une probabilité telle que</u>

$\sum_{x \in G} \mu(x) \operatorname{Log} \mu(x)$ <u>soit fini, en particulier si le support de</u> μ <u>est fini, alors</u> $\frac{1}{n} H_n = -\frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu^n(S_n)$ <u>converge</u> P.p.s. <u>et dans</u> L^1 <u>vers l'entropie</u> $h(\mu)$ <u>de la marche aléatoire</u> (S_n) <u>de loi</u> μ <u>sur</u> G.

Cherchons, comme dans les exemples précédents, une décomposition de la suite sous-additive H_n. Pour cela étudions $H_{n+1} - H_n \circ \Theta = \operatorname{Log} \dfrac{\mu^n(S_n \circ \Theta)}{\mu^{n+1}(S_{n+1})}$. Il va résulter du lemme suivant que cette suite converge P.p.s.

<u>Lemme</u> : Posons pour $a, y \in G$,

$$q_n(a,y) = \begin{cases} \dfrac{\mu^n(a^{-1}y)}{\mu^{n+1}(y)} & \text{si } \mu^{n+1}(y) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $a \in G$, la suite $q_n(a, S_{n+1}(\omega))$ converge P.p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire $q(a,\omega)$ telle que $\int_\Omega q(a,\omega)\, P(d\omega) \leq 1$

<u>Démonstration</u> : On a d'abord

$$\int_\Omega q_n(a, S_{n+1}(\omega))\, P(d\omega) = \sum_{y;\mu^{n+1}(y)>0} \mu^n(a^{-1}y) \leq 1$$

De plus $q_n(a, S_{n+1})$ est une sur-martingale renversée :

$$E\left[q_n(a, S_{n+1}) / S_{n+2}, S_{n+3}, \ldots\right] \leq q_{n+1}(a, S_{n+2})$$

En effet d'après la propriété de Markov

$$E\left[q_n(a, S_{n+1}) / S_{n+2}, S_{n+3}, \ldots\right] = E\left[q_n(a, S_{n+1}) / S_{n+2}\right] ;$$

de plus si $x \in G$ est tel que $\mu^{n+2}(x) > 0$ on a

$$E\left[q_n(a, S_{n+1}) / S_{n+2} = x\right] = \sum_{y;\mu^{n+1}(y)>0} q_n(a,y) \frac{\mu^{n+1}(y)\, \mu(y^{-1}x)}{\mu^{n+2}(x)}$$

$$= \frac{1}{\mu^{n+2}(x)} \sum_{y;\mu^{n+1}(y)>0} \mu^n(a^{-1}y)\, \mu(y^{-1}x) \leq q_{n+1}(a,x)$$

Il résulte donc du théorème des martingales que $q_n(a, S_n)$ converge P.p.s. et dans L^1 et la limite vérifie l'inégalité annoncée. (ce résultat apparaît dans [18] pour une chaîne de Markov).

<u>Corollaire</u> : <u>Sous les hypothèses du théorème précèdent la suite</u>

$$(H_{n+1} - H_n \circ \Theta)(\omega) = \mathrm{Log}\,\frac{\mu^n(S_n \circ \Theta(\omega))}{\mu^{n+1}(S_{n+1}(\omega))}$$

<u>converge</u> P.p.s. <u>vers la variable aléatoire</u> $\mathrm{Log}(q(X_1(\omega),\omega))$ <u>qui est intégrable</u>. <u>De plus l'entropie de</u> μ <u>vaut</u> $h(\mu) = \int_\Omega \mathrm{Log}(q(X_1(\omega),\omega))\, P(d\omega)$.

<u>Démonstration</u> : $\dfrac{\mu^n(S_n \circ \Theta(\omega))}{\mu^{n+1}(S_{n+1}(\omega))} = q_n\,(X_1(\omega),\, S_{n+1}(\omega))$.

D'après le lemme $(H_{n+1} - H_n \circ \Theta)(\omega)$ converge donc P.p.s. vers $\mathrm{Log}\,(q(X_1(\omega),\omega))$. D'après le théorème de décomposition $\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}(H_n - H_{n-1} \circ \Theta)$ admet une valeur d'adhérence dans L^1 pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$; cette valeur d'adhérence ne peut être que $\mathrm{Log}(q(X_1(\omega),\omega))$ qui est donc intégrable et qui engendre une suite additive convenable pour la décomposition de la suite sous-additive H_n. Donc

$$\lim_n \frac{1}{n} H_n = h(\mu) = \int_\Omega \mathrm{Log}(q(X_1(\omega),\omega))\, P(d\omega).$$

Le principal intérêt de cette formule est de conduire à la réciproque du théorème d'Avez :

<u>Théorème</u> : <u>Si</u> $\sum_{x\in G}\mu(x)\,\mathrm{Log}\,\mu(x)$ <u>est fini</u>, <u>en particulier si le support de</u> μ <u>est fini</u>, <u>et si les fonctions</u> μ-<u>harmoniques bornées sont constantes</u>, <u>alors l'entropie</u> $h(\mu) = 0$

<u>Démonstration</u> : Considérons d'abord le cas où μ vérifie l'hypothèse supplémentaire $\mu(e) > 0$. Alors on sait ([$\mathcal{J}$]) que les variables asymptotiques pour la chaîne S_n sont invariantes P.p.s. L'hypothèse faite sur les fonctions μ-harmoniques bornées implique que les variables invariantes pour (S_n) sont P.p.s. constantes. Comme $q(a,\omega) = \lim_n \dfrac{\mu^n(a^{-1} S_{n+1}(\omega))}{\mu^{n+1}(S_{n+1}(\omega))}$ est asymptotique pour la chaîne (S_n), elle est constante P.p.s. quel que soit $a \in G$. Notons cette constante $q(a)$. Alors

$$h(\mu) = \sum_{a\in G} \mathrm{Log}\, q(a)\, \mu(a).$$

Comme d'après le lemme $q(a) \leqslant 1$ on a

$$0 \leqslant h(\mu) = \sum_{a\in G} \mathrm{Log}\, q(a)\, \mu(a) \leqslant 0 .$$

Si $\mu(e) = 0$, on pose, pour $\alpha \in]0,1[$, $\mu_\alpha = \alpha\delta_e + (1-\alpha)\mu$. Les harmoniques pour μ_α sont exactement les harmoniques pour μ . D'après la première partie de la démonstration $h(\mu_\alpha) = 0$. Il résulte de la concavité de la fonction $\beta(t) = -t \operatorname{Log} t$ ($t \in]0,1]$), $\beta(0) = 0$ que

$$\sum_{x \in G} \beta(\mu_\alpha^n(x)) \geq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-\alpha)^i \alpha^{(n-i)} \left(\sum_{x \in G} \beta(\mu^i(x)) \right).$$

La suite $\sum_{x \in G} \beta(\mu^n(x))$ étant sous additive,

$$\inf_n \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \beta(\mu^n(x)) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \beta(\mu^n(x)) = h(\mu)$$

$$\text{et} \quad \sum_{x \in G} \beta(\mu_\alpha^n(x)) \geq h(\mu) \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-\alpha)^i (\alpha^{n-i}) i \right) = n(1-\alpha)\, h(\mu)$$

donc $h(\mu_\alpha) \geq (1-\alpha)\, h(\mu)$.

V - Lois des grands nombres

Considérons un groupe G localement compact à base dénombrable engendré par un voisinage compact V de e. Posons $\delta_V(x) = \inf\{n \geq 1 \mid x \in V^n\}$. Suivant Guivarc'h ([12]) une loi des grands nombres pour la marche aléatoire sur G de loi μ est un énoncé donnant la convergence p.s. de la suite $\frac{1}{n} \delta_V(S_n)$ ainsi que la valeur de la limite. Comme $\delta_V(xy) \leq \delta_V(x) + \delta_V(y)$ la suite $\delta_V(S_n)$ est sous-additive ; sous l'hypothèse d'intégrabilité $\int_G \delta_V(x)\, \mu(dx) < \infty$ le théorème de Kingman implique donc que $\frac{1}{n} \delta_V(S_n)$ converge p.s. et dans L^1 vers une limite constante γ. Le calcul de la limite γ est en général difficile ; γ dépend fortement de la structure du groupe considéré ([12]).

Suivant le théorème de décomposition, si la suite $\delta_V(S_{n+1}) - \delta_V(S_n \circ \theta) = \delta_V(S_{n+1}) - \delta_V(X_1^{-1} S_{n+1})$ converge alors l'intégrale de sa limite égale γ. Cette méthode ne semble pas être très générale. Par exemple, prenons $G = \mathbb{Z}^3$ et pour V l'ensemble des points de coordonnées égales à 1, 0 ou -1. Alors $\delta_V(x) \sim \|x\|$. Si μ est équirépartie sur V on sait que $\|S_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et que S_n visite p.s. une infinité de fois toute demi-droite de $\mathbb{Z}^3$. Il est clair donc que $\|S_n\| - \|S_n - X_1\|$ ne converge pas p. s.

Cette méthode s'applique cependant si G est le groupe libre sur les d générateurs $\{a_1 \dots a_d\}$ $(d \geqslant 2)$. Notons $a_{-1} \dots a_{-d}$ les inverses des générateurs. Prenons $V = \{e, a_1, \dots, a_d, a_{-1}, \dots, a_{-d}\}$; alors $\delta_V(x)$ est la longueur de l'écriture minimale de x, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $x = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ avec $i_\ell \in \{\pm 1, \dots, \pm d\}$. Supposons μ adaptée sur G (i.e. le support de μ engendre G). On sait alors que la marche aléatoire (S_n) de loi μ sur G est transitoire et $\delta(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ([6]). On peut montrer de plus que S_n "converge" p.s. vers une variable aléatoire S_∞ à valeurs dans l'espace F des mots infinis réduits $a_{i_1} \dots a_{i_\ell} \dots$ $(i_\ell \in \{\pm 1, \dots, \pm d\}$; $i_\ell + i_{\ell+1} \neq 0$ pour tout $\ell \geqslant 1)$; si (x_n) est une suite de G telle que $\delta(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, on dit qu'elle converge vers le mot infini réduit $a_{i_1} \dots a_{i_\ell} \dots$ si pour tout ℓ il existe N tel que l'écriture réduite de x_n commence par $a_{i_1} \dots a_{i_\ell}$ pour tout $n \geqslant N$. La convergence de S_n est montrée dans [7] sous l'hypothèse supplémentaire que le support de μ est fini. Pour ce résultat l'hypothèse d'adaption suffit. En effet, notons pour tout mot réduit $a_{i_1} \dots a_{i_\ell}$, $C_{a_{i_1}\dots a_{i_\ell}}$ l'ensemble des $z \in G \cup F$ dont l'écriture réduite commence par $a_{i_1} \dots a_{i_\ell}$. Considérons deux mots réduits $a_{i_1}\dots a_{i_\ell}\, a_{i_{\ell+1}}$ et $a_{i_1} \dots a_{i_\ell}\, a'_{i_{\ell+1}}$ avec $a'_{i_{\ell+1}} \neq a_{i_{\ell+1}}$. Alors la probabilité de visiter k fois $C_{a_{i_1} \dots a_{i_{\ell+1}}}$ et $C_{a_{i_1}\dots a_{i_\ell}\, a'_{i_{\ell+1}}}$ après la dernière sortie de l'ensemble fini $\{x \in G \mid \delta(x) \leqslant \ell + j\}$ est plus petite que $(\mu\{x \in G \mid \delta(x) \geqslant 2(j+1)\})^k$ car après la dernière sortie de $\{x \in G \mid \delta(x) \leqslant \ell + j\}$ le passage de $C_{a_{i_1}\dots a_{i_\ell}\, a_{i_{\ell+1}}}$ à $C_{a_{i_1}\dots a_{i_\ell}\, a'_{i_{\ell+1}}}$ ne peut s'effectuer qu'en un seul saut. Comme j peut être pris aussi grand qu'on veut, la probabilité de visiter une infinité de fois $C_{a_{i_1}\dots a_{i_\ell}\, a_{i_{\ell+1}}}$ et $C_{a_{i_1}\dots a_{i_\ell}\, a'_{i_{\ell+1}}}$ est nulle et donc S_n converge p.s. vers S_∞ prenant ses valeurs dans F.

<u>Lemme</u> :

<u>Pour tout</u> $x \in G$ <u>la suite</u> $\delta(S_n) - \delta(x^{-1} S_n)$ <u>converge p.s.</u> <u>Si l'écriture réduite de</u> x <u>est</u> $a_{i_1} \dots a_{i_k}$ <u>alors la limite vaut</u> :

$$\begin{array}{lll} k & \underline{\text{si}} & S_\infty \in C_{a_1\ldots a_k} \\ 2\ell - k & \underline{\text{si}} & S_\infty \in C_{a_1\ldots a_\ell} \setminus C_{a_1\ldots a_{\ell+1}} \qquad \ell = 1, \ldots, k-1 \\ -k & \underline{\text{si}} & S_\infty \notin C_{a_1} \end{array}$$

<u>Démonstration</u> : C'est un raisonnement élémentaire reposant sur la convergence p.s. de S_n vers S_∞.

Notons $L(x, \omega) = \lim\limits_n \delta(S_n) - \delta(x^{-1} S_n)$ p.s.

<u>Théorème</u> :

<u>Si</u> μ <u>est adaptée sur</u> G, <u>si</u> $\sum\limits_{x \in G} \delta(x)\, \mu(x) < \infty$, <u>alors la variable aléatoire</u> $L(X_1(\omega), \omega)$ <u>est</u> P-<u>intégrable</u>. <u>Son intégrale égale</u> $\lim\limits_n \frac{1}{n} \delta(S_n)$ <u>et vaut</u> :

$$\int_\Omega L(X_1(\omega),\omega) P(d\omega) = \sum_{\substack{x = a_1\ldots a_k \\ x \in G}} \mu(x) \Big(\sum_{\ell=1}^{k-1} (2\ell - k)\, P\left[S_\infty \in C_{a_1\ldots a_\ell} \setminus C_{a_1\ldots a_{\ell+1}}\right]$$

$$+ k\left(P\left[S_\infty \in C_{a_1\ldots a_k}\right] + P\left[S_\infty \in C_{a_1}\right] - 1\right)\Big]$$

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème de décomposition sous l'hypothèse $\sum\limits_{x \in G} \delta(x)\, \mu(x) < \infty$ la suite $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (\delta(S_{i+1}) - \delta(S_i \circ \theta))$ admet une sous-suite qui converge faiblement dans L^1. Comme

$\delta(S_{i+1}) - \delta(S_i \circ \theta) = \delta(S_{i+1}) - \delta(X_1^{-1} S_{i+1})$ converge p.s. vers $L(X_1(\omega), \omega)$ cette valeur d'adhérence ne peut être que cette variable aléatoire qui est donc intégrable. Elle engendre une suite additive convenable pour la décomposition de la suite sous-additive $\delta(S_n)$ donc $\frac{1}{n} \delta(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega L(X_1(\omega), \omega) P(d\omega)$. L'expression de cette intégrale s'obtient directement à partir du lemme.

Dans le cas où $\mu(x)$ ne dépend que de $\delta(x)$ la dernière formule se simplifie. Si $\delta(x) = k$ posons $\mu(x) = \mu_k$. Pour des raisons évidentes de symétrie

$$P\left[S_\infty \in C_{a_1\ldots a_k}\right] = \frac{1}{(2d)(2d-1)^{k-1}}$$

$$P\left[S_\infty \in C_{a_1 \dots a_k} \setminus C_{a_1 \dots a_k\, a_{k+1}}\right] = \frac{1}{(2\,d)\,(2\,d-1)^k}$$

car il y a $(2\,d)\,(2\,d-1)^{k-1}$ éléments de G de longueur k. Par un calcul élémentaire

$$\int_\Omega L(X_1(\omega),\omega)P(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k \frac{4d-2}{(2d-1)^2-1}\left(1-\frac{1}{(2d-1)^k}\right)\right](2d-1)^{k-1}\,(2d)\ \mu_k$$

Cette formule est analogue à celle récemment trouvée par Sawyer dans le contexte très voisin des marches aléatoires isotropes sur un arbre homogène [22]. Dans le cas $d = 2$, μ équirépartie sur les générateurs et les inverses, on retrouve $\frac{1}{n}\ \delta\ (S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ p.s., résultat obtenu précédemment par Fürstenberg [11].

Dans le cas général si l'on pose $d_V\ (x,\ y) = \delta_V\ (x^{-1}\ y)$ on a $\delta_V\ (S_n) = d_V\ (e,\ S_n)$. Cela suggère de considérer aussi les suites $d_V\ (g^n,\ S_n)$ où g est fixé dans G. On a $d_V\ (g^{n+k},\ S_{n+k}) \leqslant d_V\ (g^{n+k},\ S_n\ g^k) + d_V\ (S_n\ g^k,\ S_{n+k})$; par l'invariance à gauche de d_V, $d_V\ (S_n\ g^k,\ s_{n+k}) = d_V\ (g^k,\ S_k) \circ \theta^n$. Si de plus d_V est invariante à droite $d_V\ (g^{n+k},\ S_n\ g^k) = d_V\ (g^n,\ S_n)$ et dans ce cas $d_V\ (g^n,\ S_n)$ est une suite sous-additive. Sous l'hypothèse $\int_G \delta_V\ (x)\ \mu\ (dx) < \infty$ le théorème de Kingman implique la convergence de $\frac{1}{n}\ d_V\ (g^n,\ S_n)$. Le calcul de la limite d'une telle suite (en particulier la caractérisation des cas où il existe un $g \in G$ unique tel que $\lim\limits_n \frac{1}{n}\ d_V\ (g^n,\ S_n) = 0$) semble être aussi un problème intéressant.

VI - Quelques remarques

D'autres suites sous-additives peuvent être associées de façon naturelle à un processus à accroissements stationnaires $(S_n)_{n\geqslant 1}$. Par exemple si S_n est à valeurs réelles et si $A_n\ (\omega)$ est la longueur de la plus longue suite croissante de termes successifs parmi $S_1\ (\omega),\ \dots,\ S_n\ (\omega)$, alors la suite A_n est sous-additive. Si S_n est à valeurs dans un groupe G et si ψ est une fonction à valeurs réelles définies sur l'espace des mesures positives finies sur G, vérifiant

$$\psi\,(\sup\,(\lambda_1,\ \lambda_2)) \leqslant \psi\,(\lambda_1) + \psi\,(\lambda_2)$$

alors pour toute mesure positive finie λ la suite $\psi\,(\sup\limits_{1\leq k\leq n}\,(\lambda * \delta_{S_k^{-1}(\omega)}))$ est sous additive.

Le théorème de Kingman a été étendu à des processus sous-additifs multidimensionnels par Smythe [23]. Cela peut être appliqué à l'étude des processus à accroissements stationnaires à temps multidimensionnel. Par exemple dans [10] est étudié le trajet d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ à temps bidimensionnel : si $S_{m,n} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} X_{ij}$ le trajet $R_{m,n}$ est défini par $R_{m,n} = \text{card}\ \{S_{p,q} \mid 1 \leqslant p \leqslant m,\ \ 1 \leqslant q \leqslant n\}$. Le résultat de [23] implique immédiatement que $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{1}{m\ n}\ R_{mn}$ existe p.s.

Dans les exemples de suites sous-additives g_n traités précédemment, il apparaît que la suite $g_{n+1} - g_n \circ \theta$ converge (donc aussi la suite $f_m = \frac{1}{m} \sum\limits_{i=1}^{m} (g_i - g_{i-1} \circ \theta))$, la convergence ayant lieu en un sens plus fort que le sens faible dans L^1. A priori, cela pourrait laisser penser que sous des hypothèses assez larges la suite f_m converge en un sens plus fort que le sens faible (soit p.s. ou en probabilité). L'exemple suivant montre qu'un tel résultat n'est pas possible. Prenons pour (S_n) la marche aléatoire de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, les X_i sont indépendantes équidistribuées, $P\,[X_1 = 1] = P\,[X_1 = -1] = \frac{1}{2}$. La suite $S_n^+ = \max\,(S_n,\ 0)$ est sous-additive et

$$S_{n+1}^+ - S_n^+ \circ \theta = \begin{cases} 0 & \text{si}\quad S_{n+1} < 0 \\ -1 & \text{si}\quad S_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad X_1 = -1 \\ 0 & \text{si}\quad S_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad X_1 = +1 \\ X_1 & \text{si}\quad S_{n+1} > 0 \end{cases}$$

donc $\quad S_{n+1}^+ - S_n^+ \circ \theta = X_1\ (1_{\{S_{n+1}>0\}} + 1_{\{S_{n+1}=0,\ X_1=-1\}})$. Comme $P\,[S_n = 0] \sim 1\Big/\sqrt{\frac{\pi}{2}\,n}$, $1_{\{S_{n+1}=0\}}$ converge vers 0 dans L^1. L'étude de la convergence de $\frac{1}{m} \sum\limits_{n=1}^{m} S_{n+1}^+ - S_n^+ \circ \theta$ se ramène donc à celle de la suite $\frac{1}{m} \sum\limits_{n=1}^{m} 1_{\{S_{n+1}>0\}}$.

Or $\sum_{n=1}^{m} 1_{\{S_{n+1}>0\}}$ est le nombre de visites à la demi-droite $[1, +\infty[$ entre l'instant 2 et l'instant m+1. D'après la loi classique de l'arcsinus, la suite $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} 1_{\{S_{n+1}>0\}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition $\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ $(x \in [0, 1])$. D'autre part, par un calcul immédiat, on obtient que si A est l'évènement $A = [X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_k = \varepsilon_k]$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$

$$\int_A 1_{\{S_{n+1}>0\}} \, dP = P(A) \, P\left(\sum_{i=k+1}^{n+1} X_i > -(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} P(A)$$

Comme les évènements du type de A engendrent la tribu $\mathfrak{F} = \sigma(X_1, X_2, \ldots)$ et que la suite $1_{\{S_{n+1}>0\}}$ est bornée par 1, il en résulte que $1_{\{S_{n+1}>0\}}$ et aussi $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} 1_{\{S_{n+1}>0\}}$ convergent faiblement dans L^1 vers la constante $\frac{1}{2}$. Le sens de cette convergence ne peut être renforcé en aucune façon car sinon la convergence en loi n'aurait pas lieu vers une variable non constante. Donc $S^+_{n+1} - S^+_n \circ \theta$ et $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (S^+_{n+1} - S^+_n \circ \theta)$ convergent faiblement dans L^1 mais en aucun sens plus fort. Cet exemple montre de plus que la convergence au sens faible dans L^1 de la suite $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (g_i - g_{i-1} \circ \theta)$, et même celle de $(g_n - g_{n-1} \circ \theta)$, n'impliquent pas l'unicité de la décomposition de la suite sous-additive (g_n). En effet dans ce cas, quel que soit $a \in [0, 1]$ la suite additive $(a\, S_n)$ convient pour décomposer (S^+_n). Par contre, il est clair que la convergence au sens faible dans L^1 de la suite $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (g_i - g_{i-1} \circ \theta)$ résulte de l'unicité de la décomposition de la suite sous-additive (g_n) considérée.

Références

[1] AKCOGLU - SUCHESTON (1978) : A ratio ergodic theorem for superadditive processes. Z. Wahr. verw. Geb. vol. 44, 269-278

[2] AVEZ A. (1974) : Théorème de Choquet-Deny pour les groupes à croissance non exponentielle. C.R.A.S. Paris, t. 279, Sér. A, 25-28

[3] AVEZ A. (1974) : Croissance des groupes de type fini et fonctions harmoniques. Lecture Notes n° 532 (Théorie ergodique) Springer

[4] BURKHOLDER D. (1973) : Discussion de [15].

[5] DEL JUNCO A. (1977) : On the decomposition of a subadditive stochastic process. Ann. Probability, vol. 5, 289-302

[6] DERRIENNIC - GUIVARC'H (1973) : Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables. C.R.A.S. Paris, t. 277, Sér. A, 613-615

[7] DERRIENNIC Y. (1975) : Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin. Z. Wahr. Verw. Geb. Vol. 32, 261-276

[8] DERRIENNIC Y. (1975) : Sur le théorème ergodique sous-additif. C.R.A.S. Paris Sér. A, t. 281, 985-988

[9] DERRIENNIC Y. (1976) : Lois "zéro ou deux" pour les processus de Markov. Applications aux marches aléatoires. Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, Vol. 12, n° 2, 111-129

[10] ETEMADI N. (1976) : The range of a random walk in two dimensional time. Ann. Probability, Vol. 4, n° 5, 836-843

[11] FURSTENBERG H. (1971) : Random walks on discrete subgroups of Lie groups. Advanc. Proba. and related topics, Vol. 1, 3-63

[12] GUIVARC'H Y. (1976) : Une loi des grands nombres pour les groupes de Lie. Séminaire de Probabilités, Rennes, 60 p et Astérisque (présent volume)

[13] JAIN - BRUITT (1971) : The range of random walk. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. Vol. 3, 31-50

[14] KINGMAN J.F.C. (1968) : The ergodic theory of subadditive processes. J. Roy. Stat. Soc. Sér. B, Vol. 30, 499-510

[15] KINGMAN, J.F.C. (1973) : Subadditive ergodic theory. Ann. Probability, Vol 1, 883-909

[16] KINGMAN J.F.C. (1976) : Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour. Lecture Notes n° 539, 168-223, Springer

[17] MARCUS - PETERSEN (1978) : Balancing ergodic averages. Preprint.

[18] OREY S. (1971) : Limit theorems for Markov chain transition probabilities. London : Van Nostrand

[19] PALMGREN B. (1976) : On the range of transient Markov chains. Conférence de Vilnius

[20] PITT J. (1974) : Multiple points of transient random walks. Proc. Amer. Math. Soc. Vol 43 n° 1, 195-199

[21] REVUZ D. (1975) : Markov chains. North-Holland. Mathematical Library

[22] SAWYER S. (1978) : Isotropic random walks in a tree. Z. Wahr. Verw. Geb. Vol. 42, 279-292

[23] SMYTHE R.T. (1976) : Multiparameter subadditive processes. Ann. Probability Vol 4 n° 5, 772-782

[24] SPITZER F. (1964) Principles of random walk. Amsterdam : Van Nostrand.

[25] SPITZER F. (1973) : Discussion de [15].

Yves DERRIENNIC
Faculté des Sciences
6, avenue Le Gorgeu
29283 BREST