Astérisque

LÉONARD GALLARDO
RENÉ SCHOTT

Marches aléatoires sur les espaces homogènes de certains groupes de type rigide

Astérisque, tome 74 (1980), p. 149-170
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__149_0>

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MARCHES ALÉATOIRES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES DE CERTAINS GROUPES DE TYPE RIGIDE

Léonard Gallardo et René Schott

INTRODUCTION

Dans le cas où G est un groupe de Lie connexe, il est bien connu que G est récurrent si et seulement si il est à croissance polynomiale de degré inférieur ou égal à deux. [cf [2] et [3]]

Considérons maintenant un espace homogène $M = {}_H\backslash G$ (H est un sous groupe fermé de G). Soit μ une probabilité adaptée et étalée sur G et $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans G indépendantes, et de même loi μ. Soit $x \in M$, alors $Y_n^x = x.X_1 \ldots X_n$ est appelée marche aléatoire (droite) de loi μ partant de x. L'état x est dit récurrent si $P(\sum_n 1_V(Y_n^x)=+\infty)=h_V(x)=1$; il est dit transitoire si $h_V(x) = 0$.

Si l'espace homogène possède une mesure invariante, tous les points sont simultanément récurrents ou transients (ie : M est dichotomique) (cf [11] et [12]). On dit alors que M est transitoire si toute marche de loi μ étalée sur M est transitoire (sinon on dit que M est récurrent).

Lorsque G est un groupe de Lie connexe de type R, ses espaces homogènes sont dichotomiques ; on peut alors envisager de les classer en espaces récurrents ou transitoires. Quelques résultats ont déjà été obtenus dans cette voie (voir [18] pour le cas des espaces homogènes des groupes de Lie nilpotents simplement connexes, [7] pour les espaces homogènes des groupes de déplacements et [10] pour un résultat analogue sur les espaces homogènes de groupes nilpotents discrets). Ces résultats font apparaître que la classification est liée à la "taille" de l'espace homogène considéré.

Dans une première partie, nous généralisons la notion de croissance polynomiale au cas d'un espace homogène d'un groupe de Lie de type R et nous donnons une méthode explicite de calcul du degré de croissance d'un espace homogène d'un groupe extension compacte d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Dans une deuxième partie nous démontrons qu'un tel espace homogène est récurrent si et seulement si il est à croissance polynomiale de degré inférieur ou égal à deux.

Nous remercions Bernard Roynette pour l'aide qu'il nous a apportée pendant la réalisation de ce travail.

I - CROISSANCE D'UN ESPACE HOMOGÈNE

I.1.- Généralités sur la croissance

I.1.1.- Définition et proposition

Soit G un groupe LCD à génération compacte, H un sous groupe fermé tel que l'espace homogène (droit) $M = {}_H\backslash G$ possède une mesure invariante. Soit $x \in M$ et V un voisinage compact de l'élément neutre de G engendrant G. S'il existe un entier k tel que

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{m(x.V^n)}{n^k} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{m(x.V^n)}{n^k} < +\infty$$

alors k est unique, k est indépendant du choix de x et de V et on dit que M est à croissance polynomiale de degré k. De plus, dans ce cas, l'espace homogène gauche G/H a un degré de croissance qui est aussi égal à k. Autrement dit la croissance ne dépend que de G et H.

Démonstration : Soit $y \in M$ et W un voisinage compact de e engendrant G ; alors il existe $g \in G$ tel que $y = xg$ et on a

$$m(y.W^n) = m(x.g\,W^n) = m(x.g\,W^n g^{-1}) = m(x.U^n)$$

où $U = gWg^{-1}$ est encore un voisinage compact de e engendrant G.

On est donc ramené à montrer que k ne dépend pas de V. Maintenant x est fixé et soit W un voisinage compact générateur de G. Il existe alors des entiers p et q tels que $V^p \supset W$ et $V \subset W^q$. D'où

$$(1) \qquad m(x.W^n) \leqslant m(x.V^{pn}) \leqslant m(x.W^{qpn})$$

$$(2) \qquad m(x.V^n) \leqslant m(x.W^{qn}) \leqslant m(x.V^{pqn})$$

(1) implique $\limsup_{n\to\infty} \frac{m(x.W^n)}{n^k} < +\infty$ et (2) implique $\liminf_{n\to\infty} \frac{m(x.W^{qn})}{(qn)^k} > 0$.

Mais pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $n_i q \leqslant i < (n_i+1)q$; alors on a $x.W^{qn_i} \subset x.W^i \subset x.W^{q(n_i+1)}$, d'où :

$$\liminf_{i\to\infty} \frac{m(x.W^{qn_i})}{(n_i+1)^k q^k} \leqslant \liminf_{i\to+\infty} \frac{m(x.W^i)}{i^k}$$

Mais $\liminf_{i\to\infty} \frac{m(x.W^{qn_i})}{(qn_i)^k} = \liminf_{i\to\infty} \frac{m(x.W^{qn_i})}{(q(n_i+1))^k}$

donc $\liminf_{i\to\infty} \frac{m(x.W^{i})}{i^k} > 0$ et l'assertion est prouvée.

Notons $\pi_1 : G \to {}_H\backslash G$ et $\pi_2 : G \to G/_H$ les surjections canoniques et $\varphi : {}_H\backslash G \to G/_H$ l'application définie par $\varphi(Hg) = g^{-1}H$. φ est un homéomorphisme qui transforme une mesure invariante m_1 de ${}_H\backslash G$ en une mesure invariante $m_2 = \varphi(m_1)$ de $G/_H$. En effet soit A un borélien de $G/_H$ et $\tilde{A}$ un ensemble de représentants dans G des éléments de A. On a $g.A = \{gg_iH/g_i \in \tilde{A}\}$ et $\varphi^{-1}(g.A) = \{Hg_i^{-1}g^{-1}/g_i \in \tilde{A}\} = \{Hg_i^{-1}/g_i \in \tilde{A}\}g^{-1} = \varphi^{-1}(A)g^{-1}$. Ainsi $m_1(\varphi^{-1}(gA)) = m_1(\varphi^{-1}(A))$ donc $m_2 = \varphi m_1$ est invariante (par l'action de G) et c'est une mesure σ-finie puisque φ est un homéomorphisme. m_2 est donc une mesure invariante de $G/_H$. Soit alors V un voisinage compact et symétrique de e engendrant G. On a ainsi :

$$m_2(\pi_2(V^n)) = m_1(\varphi^{-1}\{xH/x \in V^n\}) = m_1(\{Hx^{-1}/x \in V^n\}) = m_1(\{Hx/x \in V^n\})$$

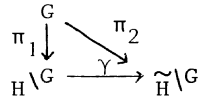
$$= m_1(\pi_1(V^n)).$$

Ce qui prouve que l'entier k vaut aussi pour l'espace homogène $G/_H$ ■

I.1.2.- Proposition

Soit G un groupe de Lie, H et $\tilde{H}$ des sous groupes fermés de G tels que H soit uniforme dans $\tilde{H}$ (ie : $H \subset \tilde{H}$ et $\tilde{H}/_H$ compact) et que les espaces homogènes $M = {}_H\backslash G$ et $\tilde{M} = {}_{\tilde{H}}\backslash G$ possèdent une mesure invariante. Alors si l'un des deux espaces M ou $\tilde{M}$ a un degré de croissance égal à k, il en est de même de l'autre.

Démonstration : Soit $\pi_1 : G \to {}_H\backslash G$ et $\pi_2 : G \to {}_{\tilde{H}}\backslash G$ les surjections canoniques et γ l'application de ${}_H\backslash G$ dans ${}_{\tilde{H}}\backslash G$ définie par $\gamma(Hg) = \tilde{H}g$. Alors γ est équivariante, surjective, continue, ouverte et l'image réciproque par γ de tout compact de ${}_{\tilde{H}}\backslash G$ est un compact de ${}_H\backslash G$ (voir [6]). De plus le diagramme suivant commute :



Soit m_1 une mesure invariante de $_H\backslash G$. Montrons que $m_2 = \gamma m_1$ est une mesure invariante de $\widetilde{H}\backslash G$. Soit A un borélien de $\widetilde{H}\backslash G$ et $g \in G$, on a $m_1(\gamma^{-1}(Ag)) = m_1(\gamma^{-1}(A).g) = m_1(\gamma^{-1}(A))$ (en effet $x \in \gamma^{-1}(Ag)$ équivaut à $\gamma(x) \in Ag$ qui équivaut à $\gamma(x)g^{-1} \in A$ qui équivaut à $\gamma(xg^{-1}) \in A$ car γ est équivariante donc $\{x/\gamma(xg^{-1}) \in A\} = \gamma^{-1}(A)g$). Enfin m_2 est σ-finie puisque $\gamma^{-1}(K)$ est compact pour tout compact K de $\widetilde{H}\backslash G$.

Soit maintenant V un voisinage compact de e dans G ; on va comparer $m_1(\pi_1(e).V^n)$ et $m_2(\pi_2(e).V^n)$. On a :

$$m_2(\pi_2(e).V^n) = m_2(\pi_2(V^n)) = m_2(\gamma\circ\pi_1(V^n)) = m_1(\gamma^{-1}(\gamma\circ\pi_1(V^n))$$

ce qui prouve de suite que $m_1(\pi_1(V^n)) \leqslant m_2(\pi_2(V^n))$ puisque $\pi_1(V^n) \subset \gamma^{-1}(\gamma\circ\pi_1(V^n))$. Remarquons ensuite que l'on a $\gamma^{-1}(\gamma\circ\pi_1(V^n)) = \pi_1(\widetilde{H}.V^n) = \pi_1(H.C_oV^n)$ où C_o est un compact de $\widetilde{H}$ (car $\frac{\widetilde{H}}{H}$ est compact). Mais il existe un entier p tel que $C_o \subset V^p$ donc $\pi_1(H.C_oV^n) \subset \pi_1(H.V^{n+p})$ d'où $m_2(\pi_2(V^n)) \leqslant m_1(\pi_1(V^{n+p}))$ et la proposition en résulte ■

I.1.3.- Remarque : On aura besoin dans la suite de savoir déterminer la mesure invariante de $_H\backslash G$ à partir des mesures de Haar de G et H. Notons m une mesure invariante de $_H\backslash G$, alors on sait qu'il existe des mesures de Haar dg (à droite) sur G et dh sur H bien choisies telles que pour toute f mesurable $\geqslant 0$ on ait (cf [4]) :

$$\int_G f(g)dg = \int_{H\backslash G}\left(\int_H f(hg)dh\right)dm \qquad (*)$$

La mesure de Haar d'un borélien A de G sera notée $|A|$.

Comme G est un groupe de Lie, il existe une section mesurable s de la surjection canonique $\pi : G \to {}_H\backslash G$ (ie : une application mesurable $s : {}_H\backslash G \to G$ telle que $\pi\circ s = Id_{H\backslash G}$) et pour tout borélien A de G on notera $\bar{A} = s(\pi(A))$. Le résultat que nous allons donner est sans doute connu mais faute de références, en voici une démonstration :

I.1.4.- Proposition

Soit H_1 un compact de H de mesure de Haar égale à 1 (ie : $dh(H_1) = 1$). Alors pour tout borélien A de G on a :

$$m(\pi(A)) = |H_1\bar{A}|$$

Démonstration : D'après la formule (*), il suffit de montrer que

$\int_H 1_{H_1\bar{A}}(hg)dh = 1_{\pi(A)}(\dot{g})$ pour tout $g \in G$ ($\dot{g} = Hg$).

Or $1_{H_1\bar{A}}(hg) = 1_{H_1\bar{A}g^{-1}}(h)$ donc $\int_H 1_{H_1\bar{A}}(hg)dh = dh(H_1\bar{A}g^{-1} \cap H)$.

Supposons $\dot{g} \in \pi(A)$, ie : $g = h\bar{a}$ avec $\bar{a} \in \bar{A}$ et $h \in H$ donc

$$H_1\bar{A}g^{-1} \cap H = (H_1\bar{A}\bar{a}^{-1} \cap H)h^{-1} = H_1h^{-1}$$

Ainsi $\dot{g} \in \pi(A)$ implique $\int_H 1_{H_1\bar{A}g^{-1}}(h)dh = 1 = 1_{\pi(A)}(\dot{g})$

Supposons maintenant $\dot{g} \notin \pi(A)$ alors $H_1\bar{A}g^{-1} \cap H = \emptyset$; en effet on a $g = hs(\dot{g})$ et $H_1\bar{A}g^{-1} \cap H = (H_1\bar{A}s(\dot{g})^{-1} \cap H)h^{-1}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in H_1\bar{A}s(\dot{g})^{-1} \cap H$. Alors x est de la forme $x = h_o$ et $x = h_1\bar{a}s(\dot{g})^{-1}$ avec $h_o \in H$ et $h_1 \in H_1$ donc $\bar{a}s(\dot{g})^{-1} \in H$ ce qui est impossible puisque $\dot{g} \notin \pi(A)$. La proposition est donc prouvée ■

I.2.- Espaces homogènes des groupes de Lie nilpotents simplement connexes

I.2.1.- Notations et généralités : Soit N un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe qu'on identifie à son algèbre de Lie (le produit dans N étant défini par $xy = x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\ldots$) et soit $N = N^1 \supset N^2 \supset \ldots \supset N^r \supset N^{r+1} = \{0\}$ la série centrale descendante de N ; l'entier r est la classe de N. Soit m_s un sous espace vectoriel supplémentaire de N^{s+1} dans N^s ; on a $N = m_1 \oplus \ldots \oplus m_r$ (somme directe de sous espaces vectoriels) et on note $u^{(s)}$ la composante de $u \in N$ sur m_s. En réunissant des bases $(e_{p_{s-1}}, \ldots, e_{p_s})$ de chaque m_s ($s = 1,..,r$), on obtient une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de N qui est dite adaptée à la série centrale descendante.

Notons $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ les fonctions coordonnées associées à la base adaptée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. On peut définir une notion de degré sur l'algèbre des polynômes en les variables x_i de la façon suivante (cf [8]) : le degré de x_i noté d_i est par définition le plus grand entier s tel que $e_i \in N^s$, puis le degré d'un monôme $Cx_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ est égal à $d_1k_1+\ldots+d_nk_n$ et le degré d'un polynôme est le plus grand des degrés de ses monômes. Grâce à la formule de Cambell-Hausdorff on peut remarquer que la coordonnée ξ_i suivant e_i du produit xy des éléments $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_je_j$, est donnée par :

$$\xi_i = x_i+y_i+P_i(x_1,\ldots,x_{i-1},y_1,\ldots,y_{i-1})$$

où P_i est un polynôme qui ne dépend en fait que des $p_{d_{i-1}}$ premières coordonnées de x et y mais que nous continuerons à noter comme ci-dessus pour ne pas alourdir les notations. Les propriétés suivantes des polynômes P_i sont immédiates :

i) $P_i(x_1,\ldots,x_{i-1},0,\ldots,0) = 0$ (faire $x.0$)

ii) $P_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_1,\ldots,x_{i-1}) = 0$ (faire $x.x$)

iii) $P_i(x_1,\ldots,x_{i-1},-x_1,\ldots,-x_{i-1}) = 0$ (faire $x.(-x)$)

iv) P_i est sans terme constant (résulte de i).

De plus les propriétés suivantes sur les degrés (au sens défini ci-dessus) des polynômes P_i nous serviront :

v) le degré de P_i est inférieur ou égal à d_i

vi) le degré partiel de P_i par rapport à la première variable $x_1,\ldots,x_{i-1}$ (resp. à la deuxième $y_1,\ldots,y_{i-1}$) est inférieur ou égal à d_i-1.

vii) la valuation partielle de P_i par rapport à la première variable (resp. à la deuxième) est supérieure ou égal à 1.

Soit maintenant H un sous-groupe fermé connexe de N (ie : une sous algèbre de N). Alors il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ adaptée à la série centrale descendante de N et contenant une base $e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_k}$ de H. C'est toujours une telle base qu'on considèrera dans la suite. Soit alors $_H\backslash N$ l'espace homogène des classes Hg ($g \in N$). La proposition suivante donne une description de cet espace homogène :

I.2.2.- Proposition : *Toute classe modulo H admet un représentant unique dans N de la forme $(y_1,\ldots,y_n)$ avec $y_{i_1} = \ldots = y_{i_k} = 0$. Autrement dit $_H\backslash N$ s'identifie topologiquement à $\mathbb{R}^{n-k}$. De façon plus précise, le représentant de la classe de l'élément $(x_1,\ldots,x_n) \in N$ est donné par :*

$$y_j = 0 \quad \text{si} \quad j \in \{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$$

$$y_j = x_j+q_j(x_1,\ldots,x_{j-1}) \quad \text{sinon, où } q_j \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à } d_j.$$

Démonstration : $(y_1,\ldots,y_n)$ et $(x_1,\ldots,x_n)$ sont équivalents modulo H si et seulement si

$$(y_1,\ldots,y_n)(-x_1,\ldots,-x_n) = (y_1-x_1,\ldots,y_i-x_i+P_i(y_1,\ldots,y_{i-1},-x_1,\ldots,-x_{i-1}),\ldots)$$

est un élément de H.

Si $i_1 = 1$, on prend $y_1 = 0$.

Si $i_1 \neq 1$, on prend $y_1 = x_1$.

Voyons le choix de y_2 :

a) si $y_1 = 0$, alors si $i_1 = 2$ on prend $y_2 = 0$ sinon il faut que $y_2 - x_2 + p_2(y_1, -x_1)$ soit nul donc on prend $y_2 = x_2 - p_2(0, -x_1)$.

b) si $y_1 = x_1$: si $i_1 = 2$ on prend $y_2 = 0$, sinon on prend $y_2 = x_2 + p_2(x_1, -x_1)$

Par récurrence supposons que pour $j \leqslant \ell-1$, y_j soit de la forme :

$y_j = 0$ si $j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$

$y_j = x_j + q_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$ si $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ où q_j est un polynôme de degré inférieur ou égal à d_j. Déterminons y_ℓ :

a) si $\ell \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ on prend $y_\ell = 0$.

b) si $\ell \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ on doit avoir $y_\ell - x_\ell + P_\ell(y_1, \ldots, y_{\ell-1}, -x_1, \ldots, -x_{\ell-1}) = 0$ donc on prend $y_\ell = x_\ell - P_\ell(y_1, \ldots, y_{\ell-1}, -x_1, \ldots, -x_{\ell-1})$ mais les y_i $(i \leqslant \ell-1)$ sont des fonctions polynômiales des (x_i) de degré respectif inférieur ou égal à d_i, ainsi $y_\ell = x_\ell + q_\ell(x_1, \ldots, x_{\ell-1})$ et d'après les propriétés sur les degrés des polynômes P_ℓ, q_ℓ est de degré $\leqslant d_\ell$, l'hypothèse de récurrence est vérifiée. Il reste à prouver l'unicité de $(y_1, \ldots, y_n)$: Supposons que $(y'_1, \ldots, y'_n)$ soit équivalent à $(y_1, \ldots, y_n)$ et que $y'_{i_1} = y'_{i_2} = \ldots = y'_{i_k} = 0$. Procédons par récurrence. L'initialisation est claire. Supposons que pour tout $j \leqslant \ell-1$ on ait prouvé que $y_j = y'_j$. Alors :

a) si $\ell \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ on a évidemment $y_\ell = y'_\ell (= 0)$.

b) si $\ell \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ on doit avoir $y_\ell - y'_\ell + P_\ell(y_1, \ldots, y_{\ell-1}, -y'_1, \ldots, -y'_{\ell-1}) = 0$ ie : $y'_\ell = y_\ell + P_\ell(y_1, \ldots, y_{\ell-1}, -y_1, \ldots, -y_{\ell-1})$ d'après l'hypothèse de récurrence mais $P_\ell(y_1, \ldots, y_{\ell-1}, -y_1, \ldots, -y_{\ell-1}) = 0$ (propriété iii des polynômes P_i). L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée ■

Identifions topologiquement ${}_H\backslash N$ à $\mathbb{R}^{n-k}$. Le résultat que nous allons donner sur la mesure invariante de ${}_H\backslash N$ est plus ou moins connu :

I.2.3.- Proposition : *Identifions ${}_H\backslash N$ à $\mathbb{R}^{n-k}$. Alors la mesure invariante de ${}_H\backslash N$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{n-k}$.*

Démonstration : Notons $|A|$ la mesure de Lebesgue du borélien $A \subset {}_H\backslash N = \mathbb{R}^{n-k}$. Il nous faut montrer que pour tout $g \in N$, $|A.g| = |A|$. D'abord il est clair que l'application $x \to x.g$ de $\mathbb{R}^{n-k}$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$ est surjective et continuement différentiable donc il suffit pour avoir le résultat de prouver que le jacobien de $x \to x.g$ est égal à 1 pour tout $g \in N$.

Posons $g = (g_1,\ldots,g_n)$ et $x = (x_1,\ldots,x_{n-k})$. Construisons à partir de x un élément $x' = (x'_1,\ldots,x'_n)$ avec $x'_{i_1} = \ldots = x'_{i_k} = 0$ et les autres composantes étant égales aux x_i disposées dans le même ordre. Alors $x.g$ est égal au représentant canonique de $x'g = (\ldots,x'_i+g_i+P_i(x'_1,\ldots,x'_{i-1},g_1,\ldots,g_{i-1}),\ldots) = (\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_n)$.

On a vu dans la proposition précédente comment est construit ce représentant : ses coordonnées η_i sont données par :

$$\eta_i = 0 \quad \text{si} \quad i \in \{i_1,\ldots,i_k\}$$

$$\eta_i = \xi_i+q_i(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1}) \quad \text{si} \quad i \notin \{i_1,\ldots,i_k\}$$

où q_i est un polynôme. Il en résulte que la composante d'ordre j de $x.g$ est de la forme $(x.g)_j = x_j+q'_j(x_1,\ldots,x_{j-1})$ où q'_j est un polynôme. Le jacobien de $x \to x.g$ est donc triangulaire, avec des 1 sur la diagonale ; cqfd ■

I.3.- Croissance des espaces homogènes des groupes $K \ltimes N$

I.3.1.- Notations : Identifions les éléments de H au zéro de $\mathbb{R}^{n-k}$. Etant donné $x = (x_1,\ldots,x_n) \in N$, on notera $0.x$ le représentant dans $\mathbb{R}^{n-k}$ de la classe de x modulo H. On vient de voir que les coordonnées de $0.x$ sont des fonctions polynomiales des coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ de x :

$$0.x = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_{n-k}(x_1,\ldots,x_n))$$

I.3.2.- Définition : *On appelle action de N sur ${}_H\backslash N$, l'application $x \mapsto 0.x$ de $N(\simeq \mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{R}^{n-k}$ et on appelle degré de l'action de N sur ${}_H\backslash N$ la somme des degrés des polynômes δ_i $(i = 1,\ldots,n-k)$ (au sens défini ci-dessus).*

I.3.3.- Remarque : Il est facile de voir que le nombre $d = \sum_{i=1}^{n-k} d^\circ f_i$ que nous venons de définir est indépendant de la base adaptée (e_i) que nous avons choisie au départ. L'intérêt de cette notion est le calcul explicite du degré de croissance polynômiale d'un espace homogène ${}_H\backslash N$.

I.3.4.- Théorème : *Tout espace homogène ${}_H\backslash N$ est à croissance polynômiale de degré égal au degré de l'action de N sur ${}_H\backslash N$.*

Démonstration : Supposons les sous espaces m_s de N, munis d'une norme $\| \ \|_s$ d'espace vectoriel $(s = 1,\ldots,r)$. Alors la fonction φ définie sur N par $\varphi(u) = \sup_{1\leqslant s\leqslant r} \|u^{(s)}\|_s^{1/s}$ (où $u^{(s)}$ est la projection de u sur m_s) est une jauge

principale (ie : il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tous x et y on ait $\varphi(xy) \leqslant \varphi(x)+\varphi(y)+C$). Le groupe N est alors compactement engendré par les voisinages de e de la forme $B_\rho = \{x \in N \ \varphi(x) \leqslant \rho\}$. En fait B_ρ est le pavé de $\mathbb{R}^n$ égal à : $[-\rho^{d_1},\rho^{d_1}]\times[-\rho^{d_2},\rho^{d_2}] \times\ldots\times [-\rho^{d_n},\rho^{d_n}]$ où d_i = le degré de x_i. D'après la proposition I.2.2., la j^e composante $f_j(x_1,\ldots,x_n)$ de $0.x$ est de la forme $f_j = x_{k_j}+q_{k_j}(x_1,\ldots,x_{k_j-1})$ où q_{k_j} est un polynôme de degré $\leqslant d_{k_j} = r_j$ donc f_j est de degré r_j. Ainsi l'image de B_ρ (qui est connexe) par l'application $(x_1,\ldots,x_n) \to f_j(x_1,\ldots,x_n)$, contient le segment $[-\rho^{r_j},\rho^{r_j}]$ et elle est clairement contenue dans un segment de la forme $[-C_j\rho^{r_j},C_j\rho^{r_j}]$, où C_j est une constante > 0 (résulte du fait que q_{k_j} est de degré $\leqslant r_j$). Il en résulte que $0.B_\rho$ $(\subset \mathbb{R}^{n-k})$ contient un pavé de la forme :

$$[-\rho^{r_1},\rho^{r_1}] \times\ldots\times [-\rho^{r_{n-k}},\rho^{r_{n-k}}]$$

et $0.B_\rho$ est contenu dans un pavé de la forme :

$$[-C_1\rho^{r_1},C_1\rho^{r_1}] \times\ldots\times [-C_{n-k}\rho^{r_{n-k}},C_{n-k}\rho^{r_{n-k}}]$$

On a donc :

$$2^{n-k}\rho^{r_1+r_2+\ldots+r_{n-k}} \leqslant |0.B_\rho| \leqslant 2^{n-k}C_1\ldots C_{n-k}\rho^{r_1+r_2+\ldots+r_{n-k}}$$

ie : $$C\,\rho^d \leqslant |0.B_\rho| \leqslant C'\rho^d \quad (\forall \rho > 0)$$

où C et C' sont des constantes > 0 et $d = r_1+\ldots+r_{n-k}$ est précisément le degré de l'action de N sur $H\backslash N$.

Pour terminer, notons qu'il est facile de voir qu'il existe α et $\beta > 0$ tels que pour n assez grand, on ait :

$$B_{n\alpha} \supset B_1^n \supset B_{n\beta}.$$

On a donc :

$$C(n\beta)^d \leqslant |0.B_1^n| \leqslant C'(n\alpha)^d$$

ie : $C_1 n^d \leqslant |0.B_1^n| \leqslant C_2 n^d$ pour n assez grand (C_1 et C_2 sont des constantes > 0). Ceci prouve que d est le degré de croissance de l'espace homogène $H\backslash N$ et le théorème est prouvé ■

I.3.5.- Remarque : Si H est un sous groupe fermé quelconque de N alors l'enveloppe algébrique $\widetilde{H}$ de N est un sous groupe fermé connexe de N et on sait que H est uniforme dans $\widetilde{H}$ (cf [15]). Donc d'après la proposition I.1.2. ${}_H\backslash N$ est à croissance polynomiale de même degré que celle de ${}_{\widetilde{H}}\backslash N$.

I.3.6.- Corollaire : *Soit $G = K \ltimes N$ un groupe de Lie produit semi direct d'un groupe de Lie N nilpotent simplement connexe par un groupe compact K. Alors si H est un sous groupe fermé de N, l'espace homogène ${}_H\backslash G$ est à croissance polynômiale et égale à celle de ${}_H\backslash N$.*

Démonstration : Topologiquement l'espace homogène ${}_H\backslash K\ltimes N$ s'identifie au produit cartésien $K \times {}_H\backslash N$. Définissons une section s au dessus de ${}_H\backslash K\ltimes N$ par $s(k,\dot{n}) = (k, s_o(\dot{n}))$, où s_o est une section au dessus de ${}_H\backslash N$. Comme dans la proposition I.1.4, $\bar{A}$ désigne $s(\pi(A))$. Prenons un voisinage compact de e dans $K\ltimes N$ de la forme $U = K\ltimes V$ où V est un voisinage de zéro dans N, invariant par K. Alors $U^n = K\times V^n$ et on a $o.U^n = K\times o'.V^n$ et $\overline{U^n} = K\times\overline{V^n}$. Soit λ la mesure invariante de ${}_H\backslash G$ et λ_1 celle de ${}_H\backslash N$. On a d'après la proposition I.1.4. :

$$\lambda(o.U^n) = |H_1.\overline{U^n}| = |H_1(K\times\overline{V^n})| = |K\times H_1\overline{V^n}| = \sigma(K)m(H_1\overline{V^n}) = \lambda_1(\dot{o}.V^n)$$

(où σ est la mesure de Haar de K et m la mesure de Haar de N) d'où le résultat ■

I.3.7.- Corollaire : *Soit H un sous groupe fermé de $G = K\ltimes N$. Alors ${}_H\backslash G$ est à croissance polynomiale.*

Démonstration : Nous avons besoin ici d'un résultat sur la structure des sous groupes fermés de G :

I.3.8.- Lemme : *Soit H un sous groupe fermé de $G = K\ltimes N$. Alors H est uniforme dans un sous groupe fermé $\widetilde{H}$ de G de la forme $\widetilde{H} = K_o\ltimes N_o$ où K_o est compact et N_o est un sous groupe unipotent de G.*

Démonstration du lemme : G admet une représentation linéaire fidèle $\rho : G \to \rho(N)\rho(K) = M$ telle que $\rho(N)$ soit un sous groupe distingué constitué de matrices unipotentes du groupe matriciel M (cf [13]). Nous noterons encore $M=G$. Soit $\widetilde{G}$ l'enveloppe algébrique de G (ie : le plus petit groupe algébrique con-

tenant G). N est distingué dans G donc dans $\tilde{G}$, de plus N est un groupe algébrique car c'est un groupe analytique unipotent. Il existe donc un morphisme de groupes algébriques σ (ie : un homomorphisme rationnel) tel que $\mathrm{Ker}\,\sigma = N$. Or $\sigma(G) = \sigma(K)$ est un groupe compact donc c'est un groupe algébrique (cf [5]) ceci implique que $\sigma^{-1}\sigma(G) = G$ est un groupe algébrique, mais alors G est un groupe distal car sa partie réductive est compacte (cf [1]) (Rappelons qu'on dit qu'un groupe linéaire G est distal lorsque les valeurs propres des matrices $g \in G$ sont toutes de module 1). Soit alors H un sous groupe fermé de G et soit $\tilde{H}$ l'enveloppe algébrique de H ($\tilde{H}$ est un sous groupe fermé de G) alors $\tilde{H}$ est distal et d'après le théorème de structure des groupes distals algébriques (cf [1]) $\tilde{H} = K_o \ltimes N_o$ où N_o est le radical unipotent de $\tilde{H}$ et K_o est un groupe compact. De plus H est uniforme dans $\tilde{H}$, d'où le lemme ■

Fin de la démonstration : $N_o \cap N = N'_o$ est uniforme dans N_o (en effet : $\frac{N_o}{N_o \cap N} \simeq \frac{N_o N}{N} \subset \frac{G}{N} = K$) donc $\tilde{H} = K'_o N'_o$ et d'après la proposition I.1.2. les espaces homogènes $_H\backslash G$, $_{\tilde{H}}\backslash G$ et $_{N'_o}\backslash G$ ont tous même croissance et le corollaire est prouvé ■

II - RÉCURRENCE D'UN ESPACE HOMOGÈNE $_H\backslash K \ltimes N$

Comme dans I, $K \ltimes N$ est un groupe de Lie produit semi direct d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N par un groupe compact K d'automorphismes de N. Nous identifierons comme d'habitude N à son algèbre de Lie et les sous groupes fermés connexes de N à leurs sous algèbres de Lie correspondantes.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème : Soit H un sous groupe fermé de $K \ltimes N$. Alors l'espace homogène $_H\backslash K \ltimes N$ est récurrent si et seulement si son degré de croissance polynomiale est inférieur ou égal à 2.

Dans le paragraphe 1 on ramène la démonstration du théorème à la proposition suivante :

Proposition : Si H est un sous groupe fermé, connexe, non distingué de N et si $\dim N - \dim H = 2$ alors $_H\backslash K \ltimes N$ est transitoire.

Le paragraphe 2 consiste à démontrer cette proposition en utilisant une technique de fonction barrière.

II.1.- Première partie de la démonstration du théorème

II.1.1.- Lemme : *Soit G un groupe de Lie, H et $\widetilde{H}$ des sous groupes fermés tels que H soit uniforme dans $\widetilde{H}$ alors ${}_H\backslash G$ et ${}_{\widetilde{H}}\backslash G$ sont de même nature (récurrents ou transitoires en même temps).*

Démonstration : Soit Γ l'application de ${}_H\backslash G$ dans ${}_{\widetilde{H}}\backslash G$ définie par $\Gamma(Hg) = \widetilde{H}g$. Γ est continue, surjective et équivariante. De plus Γ définit un espace fibré $({}_H\backslash G, {}_{\widetilde{H}}\backslash G, \Gamma)$ dont les fibres sont difféomorphes à l'espace homogène ${}_H\backslash\widetilde{H}$ qui est compact donc pour tout compact C de ${}_{\widetilde{H}}\backslash G$, $\Gamma^{-1}(C)$ est un compact de ${}_H\backslash G$. Soit μ une probabilité adaptée sur G, soit $y \in {}_{\widetilde{H}}\backslash G$ et $x \in \Gamma^{-1}(y)$; notons W_n^y la marche de loi μ sur ${}_{\widetilde{H}}\backslash G$ partant de y et Y_n^x la marche de loi μ sur ${}_H\backslash G$ partant de x. Alors pour tout compact C de ${}_{\widetilde{H}}\backslash G$ on a :

$$W_n^y \in C \Leftrightarrow Y_n^x \in \Gamma^{-1}(C)$$

grâce à l'équivariance de Γ. Ainsi les marches W_n^y et Y_n^x sont de même nature ■

Le lemme qui suit donne déjà une démonstration du théorème dans le cas particulier où $K = \{Id\}$ et précise un résultat obtenu dans [18].

II.1.2.- Lemme : *Soit N un espace homogène d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Alors ${}_H\backslash N$ est récurrent si et seulement si il est de degré de croissance $\leqslant 2$.*

Démonstration : D'après la remarque I.3.5. et le lemme II.1.1. on peut supposer H connexe. Ecartons de suite le cas trivial où $H = N$:

Si la croissance de ${}_H\backslash N$ est $\leqslant 2$ alors $\dim {}_H\backslash N = 1$ ou 2. Si $\dim {}_H\backslash N = 1$ alors H est distingué, ${}_H\backslash N$ est un groupe abélien de dimension 1 donc est récurrent. Si $\dim {}_H\backslash N = 2$, les composantes de l'action $0.x$ sont de degré 1 chacune donc $H \supset N^2$ (= le 1^{er} dérivé $[N,N]$) par conséquent ${}_H\backslash N$ est abélien de rang $\leqslant 2$ donc est récurrent.

Réciproquement si ${}_H\backslash N$ est récurrent alors (cf [18]) H est distingué donc ${}_H\backslash N$ qui est abélien de rang $\leqslant 2$, est de croissance $\leqslant 2$ ■

II.1.3.- Remarque fondamentale : Soit H un sous groupe fermé de $K \ltimes N$ et soit $\widetilde{H}$ son enveloppe algébrique ; alors $\widetilde{H} = K'_o.N'_o$ où K_o est compact et $N'_o \subset N$. Les espaces homogènes ${}_H\backslash K \ltimes N$ et ${}_{N_o}\backslash K \ltimes N$ sont de même nature d'après le lemme II.1.1. et ont même croissance d'après la proposition I.1.2. ; on est donc ramené à

démontrer le théorème dans le cas $H \subset N$ et H connexe. En fait il reste à démontrer que si H est connexe et inclus dans N, alors les espaces homogènes $H\backslash K \ltimes N$ et $H\backslash N$ sont de même nature puisqu'on sait déjà qu'ils ont même croissance d'après le corollaire I.3.6.

II.1.4.- Lemme : *Soit G un groupe de Lie, V un sous groupe abélien distingué de G. On pose $G' = \frac{G}{V} \ltimes V$ (produit semi direct) où l'action de $\frac{G}{V}$ sur V est définie par $\alpha_{\bar{g}}(v) = gvg^{-1}$ (indépendant de $g \in \bar{g}$). Soit H un sous groupe fermé de G et soit $H' = \frac{HV}{V} \ltimes H \cap V$. Alors si l'espace homogène $H\backslash G$ est récurrent, l'espace homogène $H'\backslash G'$ l'est aussi (ou ce qui est équivalent $H'\backslash G'$ transitoire implique $H\backslash G$ transitoire).*

Démonstration : C'est une adaptation d'un résultat de H. Hennion (cf [10]).

II.1.5.- Lemme : *Si $H \subset N$ alors :*

a) $H\backslash N$ récurrent implique $H\backslash K \ltimes N$ récurrent.

b) si $H\backslash K \ltimes N$ est récurrent on a $\dim N - \dim H \leqslant 2$.

Démonstration :

a) par récurrence sur la classe de N. Si la classe r de N est égale à 1 le résultat est connu (cf [7]). Supposons la propriété établie pour tous les groupes nilpotents de classe inférieure ou égale à r-1 et soit N un groupe nilpotent de classe r. $H\backslash N$ est récurrent donc H est distingué et $H\backslash N$ est abélien d'après le lemme II.1.2. donc H contient tous les dérivés de N, en particulier le dernier dérivé V. Comme $H\backslash N$ et $V\backslash H\backslash V\backslash N$ sont de même nature (cf [14]), $V\backslash H\backslash V\backslash N$ est récurrent donc d'après l'hypothèse de récurrence $V\backslash H\backslash K \ltimes (V\backslash N) = V\backslash H\backslash V\backslash K \ltimes N$ est récurrent donc $H\backslash K \ltimes N$ est récurrent (en effet on a pu écrire que : $K \ltimes (V\backslash N) = V\backslash K \ltimes N$ car V est un sous groupe distingué de N stable par K) ■

b) On raisonne par récurrence sur la classe de nilpotence de N. Si $r = 1$ (i.e. N abélien) le résultat est connu. Supposons le résultat établi pour les extensions compactes de groupes nilpotents de classe $\leqslant r-1$, soit N nilpotent de classe r et soit V le dernier dérivé de N (V est dans le centre de N). V est distingué dans N et stable par K donc V est distingué dans $K \ltimes N$ et le groupe $\frac{K \ltimes N}{V}$ peut être considéré comme produit semi-direct de $\frac{N}{V}$ par le groupe compact $\tilde{K}$ obtenu à partir de K par passage au quotient (mais on écrira $\frac{K \ltimes N}{V} = K \ltimes \frac{N}{V}$ au lieu de $\tilde{K} \ltimes \frac{N}{V}$).

A partir de $G = K \ltimes N$ et de V construisons le groupe G' du lemme II.1.4. : $G' = (K \ltimes \frac{N}{V}) \oplus V$ (ici c'est un produit direct car V est central). G' peut être considéré comme une extension compacte du groupe nilpotent $\frac{N}{V} \oplus V$ (qui est de classe $\leqslant r-1$) : $G' = K \ltimes_{\varphi} (\frac{N}{V} \oplus V)$ où l'action φ de K sur $\frac{N}{V}$ est l'action précédente et l'action de K sur V est l'action naturelle.

D'après le lemme II.1.4. si ${}_{H}\backslash G$ est récurrent, ${}_{H'}\backslash G'$ $(H' = \frac{HV}{V} \oplus H \cap V)$ est récurrent donc d'après l'hypothèse de récurrence on a $\dim(\frac{N}{V} \oplus V) - \dim(\frac{HV}{V} \oplus H \cap V) \leqslant 2$. Soit alors γ l'homomorphisme naturel $N \to \frac{N}{V}$. En considérant la restriction de γ à H on voit que $\dim H = \dim \gamma(H) + \dim H \cap V$.

Or $\gamma(H) = \frac{HV}{V}$ donc $\dim H = \dim H'$ d'où $\dim N - \dim H \leqslant 2$ ■

II.1.6.- Remarque : Il reste à montrer que si ${}_{H}\backslash K \ltimes N$ est récurrent alors ${}_{H}\backslash N$ l'est aussi. D'après le lemme II.1.5. on doit examiner les valeurs de $\dim N - \dim H$. Si $\dim N - \dim H = 0$ ou 1, la conclusion est immédiate : ${}_{H}\backslash N$ est récurrent. Si $\dim N - \dim H = 2$ et si H est distingué, $\frac{N}{H}$ est un groupe nilpotent de dimension 2 donc en fait un groupe abélien de dimension 2 donc il est récurrent. Il reste à voir le cas H non distingué dans N et $\dim N - \dim H = 2$ mais ce cas ne se présente pas, c'est le point crucial de la preuve du théorème et ceci fait l'objet du paragraphe 2.

II.2.- Fin de la démonstration du théorème

II.2.1.- Proposition : *Si H est un sous groupe non distingué de N et si $\dim N - \dim H = 2$ alors ${}_{H}\backslash K \ltimes N$ est transitoire.*

La démonstration nécessite plusieurs lemmes.

II.2.2.- Lemme : *Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où N est de classe 2.*

Démonstration : Prenons un sous groupe V abélien distingué de $K \ltimes N$ et explicitons le groupe $G' = \frac{K \ltimes N}{V} \ltimes V$ dans le cas où V est un sous groupe de N stable par K. On va montrer que $G' = K \ltimes_{\varphi} (\frac{N}{V} \ltimes V)$ où l'action de $\frac{N}{V}$ sur V se fait par automorphismes intérieurs et où l'action φ de K sur $\frac{N}{V} \ltimes V$ se fait comme suit :

$$\varphi(k)(\bar{n}, v) = (\tilde{k}\bar{n}, kv)$$

où $\bar{n}$ désigne la classe de n modulo V et $\tilde{k}$ désigne l'automorphisme de $\frac{N}{V}$ déduit de k par passage au quotient.

Considérons le produit des deux éléments $\left((\overline{k,n}),v\right)\left((\overline{k',n'}),v'\right)$ de $\frac{K \ltimes N}{V} \ltimes V$ et le produit des deux éléments $\left(k,(\bar{n},v)\right)\left(k',(\bar{n}',v')\right)$ de $K \ltimes_{\varphi} (\frac{N}{V} \ltimes V)$:

$$\left((\overline{k,n}),v\right)\left((\overline{k',n'}),v'\right) = \left((\overline{k,n)(k',n'}),vnkv'n^{-1}\right)$$

$$= \left((kk',\tilde{\bar{n}}\bar{k}\bar{n}'),vnkv'n^{-1}\right)$$

$$\left(k,(\bar{n},v)\right)\left(k',(\bar{n}',v')\right) = \left(kk',(\bar{n},v)(\tilde{\bar{k}}\bar{n}',kv')\right)$$

$$= \left(kk',(\tilde{\bar{n}}\bar{k}\bar{n}',vnkv'n^{-1})\right)$$

On pourra donc considérer le groupe G' comme un produit semi-direct de K et du groupe nilpotent $\frac{N}{V} \ltimes V$.

Avant de réduire la classe de N remarquons que la condition suivante : (C) dim N - dim H = 2 et H non distingué équivaut à : dim N - dim H = 2 et H ne contient pas N^2 (= le premier dérivé de N). On considèrera 2 cas :

1) Si $H \supset N^r$ (= le dernier dérivé de N), appliquons la construction du lemme II.1.4. avec $V = N^r$ en remarquant que $N' = \frac{N}{V} \ltimes V = \frac{N}{V} \oplus V$ (produit direct) est un groupe nilpotent de classe $\leqslant r-1$. Sous la condition (C), pour montrer que $G/_H$ est transitoire, il suffit de montrer que $G'/_{H'}$ est transitoire. Or la condition (C) est vérifiée par H' : le dérivé de N' est égal à $N'^2 = \frac{N^2}{V} \oplus \{0\}$ donc si $H' = \frac{H}{V} \oplus H \cap V$ contenait N'^2 on aurait $\frac{H}{V} \supset \frac{N^2}{V}$ ie : $H \supset N^2$ ce qui n'est pas. De plus la condition sur la dimension est trivialement vérifiée pour H'. Dans le cas $H \supset N^r$ on a donc abaissé la classe de N d'au moins une unité.

2) Si $H \not\supset N^r$, on prend $V = N^{r-1}$ qui est distingué et abélien (car $[N^{r-1},N^{r-1}] \subset N^{2r-2} = \{0\}$ si $r \geqslant 3$). $N' = \frac{N}{V} \ltimes V$ est alors nilpotent de classe $\leqslant r-1$: en effet $N'^{r-2} \subset V$ (facile à vérifier) donc $N'^{r-1} \subset N^r$ car le commutateur d'un élément $(\bar{n},v) \in \frac{N}{V} \ltimes V$ et $(0,v') \in V$ est égal à $(\bar{n},v)(0,v')(\bar{n},v)^{-1}(0,v')^{-1} = (0,nv'n^{-1}v'^{-1})$ donc $N'^r = \{0\}$ ie : N' est de classe $\leqslant r-1$. La condition (C) subsiste pour H' : en effet si $H' \supset N'^2$ on aurait $H' \supset N^r$ car{les commutateurs des éléments de V}$= N^r$ est dans N'^2 donc $H \cap N^{r-1} \supset N^r$ en particulier $H \supset N^r$ ce qui est exclus par hypothèse. La formule de la dimension est encore vérifiée. Dans ce cas on a encore abaissé la classe de N ■

Dans la suite de la démonstration nous supposerons donc N de classe égale à 2.

II.2.3.- Lemme : *Si N est nilpotent de classe 2, si H est un sous groupe connexe non distingué de N et si dim N - dim H = 2 alors l'espace homogène $H\backslash N$ est isomorphe à un espace homogène $\mathbb{R}\backslash\mathbb{H}_1$ où $\mathbb{H}_1$ est le premier groupe d'Heisenberg et $\mathbb{R}$ un sous groupe non distingué de dimension 1 de $\mathbb{H}_1$.*

Démonstration : Soit N^2 le deuxième dérivé de N alors $N^2\cap H$ est distingué dans H et dans N car N est de classe 2 donc $M = H\backslash N$ est isomorphe à $N^2\cap H\backslash H\backslash N^2\cap H\backslash N$. Or le normalisateur de H contient N^2 et comme $H \not\supset N^2$ ceci implique que $N^2\cap H$ est de codimension 1 dans N^2. Le groupe nilpotent $N_1 = \frac{N}{N^2\cap H}$ a donc un dérivé N_1^2 qui est de dimension 1 et le groupe $\frac{H}{N^2\cap H}$ est inclus dans un supplémentaire de N_1^2. Ainsi on est ramené au cas où $M = H\backslash N$ avec dim $N^2 = 1$ et H inclus dans un supplémentaire de N^2.

Pour tous h,h' dans H, on a le crochet $[h,h'] \in H\cap N^2 = \{0\}$. Soit $\mathbb{R}e$ une droite supplémentaire de N^2+H. Pour tout $h \in H$, $[e,h] = \alpha(h)n_2$ où n_2 est un vecteur fixe de N^2 et $h \to \alpha(h)$ est une forme linéaire sur H qui n'est pas identiquement nulle puisque H n'est pas distingué. Posons $H' = \text{Ker } \alpha$, H' est un sous groupe abélien distingué de H, c'est en fait un hyperplan de H. D'autre part H' est distingué dans N car pour tout $m \in N$ et tout $h' \in H'$ on a :

$$[m,h'] = [n+\lambda e+h,h'] = [n,h']+\lambda[e,h']+[h,h'] = 0$$

où $n,\lambda e,h$ sont respectivement les composantes de m suivant N, $\mathbb{R}e$ et H. Dans ces conditions M est isomorphe à $H'\backslash H\backslash H'\backslash N$ et $H'\backslash N = \mathbb{H}_1$ (premier groupe d'Heisenberg), $H'\backslash H$ est un sous groupe non distingué de dimension 1 de $\mathbb{H}_1$ ■

II.2.4.- Remarques d'ordre général : Les résultats énoncés ci-dessous pour les espaces homogènes sont bien connus dans le cas des groupes (cf [9]) et se démontrent de la même manière :

Soit G un groupe de Lie connexe, H un sous groupe fermé de G et $M = H\backslash G$

a) Soit $X_1,\ldots,X_n$ une suite de variables aléatoires sur G indépendantes, de même loi μ et Γ un automorphisme de G. Alors la marche aléatoire sur M dont les pas sont les X_i, est de même nature (récurrente ou transitoire) que la marche aléatoire de pas $\Gamma(X_i)$.

b) S'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que la marche sur M de loi μ^{*p} soit transitoire, alors la marche de loi μ sur M est transitoire.

II.2.5.- Lemme : *(méthode de la symétrisation) Soit* μ *une probabilité sur* G *et* $\check{\mu}$ *la probabilité définie par* $\check{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$ *pour tout borélien* A *de* G. *Pour que la marche aléatoire de loi* μ *sur* $M = {}_H\backslash G$ *soit transitoire, il suffit que la marche de loi* $\nu = \frac{1}{2}(\mu+\check{\mu})$ *sur* M *soit transitoire.*

Démonstration : C'est une adaptation de [3] ■

II.2.6.- Lemme : *(méthode de la troncature) Soit* ν *une probabilité symétrique sur* G *et* φ *une fonction positive symétrique à support compact dans* G *et telle que* $C = \int_G \varphi d\nu > 0$. *Soit* $\bar{\nu} = (\frac{1}{C}\varphi).\nu$. *Alors si la marche de loi* $\bar{\nu}$ *sur* $M = {}_H\backslash G$ *est transitoire, la marche de loi* ν *sur* M *l'est aussi.*

Démonstration : C'est également une adaptation de [3] ■

II.2.7.- Remarque : D'après les lemmes II.2.5., II.2.6., pour montrer qu'un espace homogène est transitoire, il suffit de montrer que toute marche symétrique à support compact est transitoire.

II.2.8.- Lemme : *(méthode de la fonction barrière)*
Soit G *un groupe de Lie,* H *un sous groupe fermé de* G, $M = {}_H\backslash G$ *et soit* μ *une mesure de probabilité adaptée sur* G. *Supposons que pour un compact* C *de* M *il existe une fonction borélienne* $f : M \to \mathbb{R}$ *telle que*

i) $0 \leqslant f \leqslant 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\sup_{x\in C} f(x) = d < 1$

ii) $E[f(x.X)] \geqslant f(x)$ *pour* $x \notin C$ *(où* X *est une variable aléatoire de loi* μ*)*

Alors la marche aléatoire de loi μ *sur* M *est transitoire.*

Démonstration : (calquée de [9]) Soit Z_n la marche aléatoire sur M de noyau de transition P donnée par : $P(x,A) = \varepsilon_x * \mu(A)$ $x \in M$, A borélien de M. Soit T le temps d'entrée de la marche aléatoire Z_n dans le compact C.

L'hypothèse (ii) implique que f est sous-harmonique (pour le noyau P) en-dehors de C donc $(f(Z_{n\wedge T}))_n$ est une sous-martingale et pour $x \notin C$ on a : $E_x[f(Z_{n\wedge T})] \geqslant f(x)$ d'où :

$$E_x[f(Z_n) \ ; \ T \geqslant n] + E_x[f(Z_T) \ ; \ T < n] \geqslant f(x)$$

Compte tenu de (i) et (ii) et du fait que $Z_T \in C$ on a : $P_x[T \geqslant n] + dP_x[T < n]$.

Faisant tendre n vers l'infini, on obtient : $dP_x[T<+\infty]+1-P_x(T<+\infty) \geqslant f(x)$ ce qui prouve que : $P_x(T < +\infty) \leqslant \frac{1-f(x)}{1-d}$ qui tend vers zéro quand $x \to \infty$ d'après (i), donc la marche de loi μ est transitoire ■

II.2.9.- Démonstration de la proposition : D'après le lemme II.2.2. N est de classe 2. Soit m_1 un supplémentaire de N^2 dans N. Tout $x \in N$ se décompose en $x = x_1+x_2$ $(x_1 \in m_1, x_2 \in N^2)$. Alors pour tout entier n l'application $x \mapsto V_n(x) = \frac{x_1}{\sqrt{n}} + \frac{x_2}{n}$ est un automorphisme de N et l'application $(k,x) \mapsto A_n(k,x) = (k,V_n(x))$ est un automorphisme de $K \ltimes N$ car V_n commute aux éléments de K.

La classe $\dot{(k,x)}$ de l'élément (k,x) modulo H est égale à $H(k,x) = \{(0,h)(k,x) = (k,hx)/h \in H\} = (k,Hx)$.

Soit $(U_1,Y_1),\ldots,(U_i,Y_i),\ldots$ une suite de variables aléatoires sur $K \ltimes N$ indépendantes de même loi μ adaptée, étalée, symétrique à support compact, (cf [II.2.7.]). Pour montrer que la marche de pas (U_i,Y_i) est transitoire, il suffit de voir que celle de pas $A_p(U_1,Y_1)\ldots(U_p,Y_p)$, pour un p bien choisi, est transitoire (cf [II.2.4.]).

Pour $\dot{(k,x)} \in M$, notons qu'on a $\dot{(k,x)}A_p[(U_1,Y_1)\ldots(U_p,Y_p)] = \dot{(k,x)}(R_p,T_p) = (kU_1U_2\ldots U_p, \dot{x}kV_p(Y_1U_1Y_2\ldots U_1U_2\ldots U_{p-1}Y_p)) = (kR_p,\dot{x}kT_p)$.

D'après le T.L.C. de Raugi (cf [16]) la suite de v.a. (R_p,T_p) converge en loi quand $p \to +\infty$ vers (R,T) où la loi de R est la mesure de Haar m sur K, la loi de T est la loi α au temps 1 d'un processus de diffusion sur N, de plus R et T sont indépendantes. En fait avec nos hypothèses on peut en dire plus :

II.2.9.1. Lemme : *T est de loi symétrique et invariante par K*

Démonstration :

a) μ étant symétrique, μ^{*p} est symétrique de même que $A_p(\mu^{*p})$ donc (R,T) est symétrique comme limite en loi de variables aléatoires symétriques. (R,T) a donc même loi que $(R,T)^{-1} = (R^{-1},R^{-1}T^{-1})$; on en déduit que T a même loi que $R^{-1}T^{-1}$ or R^{-1} a aussi pour loi m donc on a :

$$\int_N f(x)d\alpha(x) = \int_{K \ltimes N} f(ux^{-1})d\alpha(x)dm(u) = \int_{K \ltimes N} f(wux^{-1})\, d\alpha(x)dm(u) =$$

$$= \int_N f_w(x)d\alpha(x), \quad \forall w \in K \text{ et } \forall f \text{ fonction continue à support compact}$$

dans N. Par conséquent α est invariante par tous les $w \in K$.

b) Montrons que T est symétrique :

$\forall f$ fonction continue à support compact, $\int_N f(x)d\alpha(x) = \int_{K\ltimes N} f(ux^{-1})d\alpha(x)dm(u)$;

or on vient de voir que α est stable par K donc :

$$\int_N f(ux^{-1})d\alpha(x) = \int_N f(x^{-1})d\alpha(x)$$

d'où $$\int_N f(x)d\alpha(x) = \int_N f(x^{-1})d\alpha(x)\int_K dm(u) = \int f(x^{-1})d\alpha(x)$$ ■

Soit maintenant φ la fonction symétrique à support compact définie par : $\varphi(k,x) = 1_{K\ltimes Q}(k,x)$ où Q est un compact de N, symétrique et invariant par K. Posons $\nu = m \otimes \alpha$ et soit $\bar{\nu} = \frac{1}{C}\varphi.\nu$ et $\bar{\nu}_p = \frac{1}{C_p}\varphi.\nu_p$ les lois déduites de ν et ν_p par troncature relative à φ. Nous noterons symboliquement $(\overline{R_p,T_p})$ (resp. $(\overline{R,T})$) la v.a. de loi $\bar{\nu}_p$ (resp. la v.a. de loi $\bar{\nu}$) et $\bar{T}_p$ (resp. $\bar{T}$) la composante sur N de $(\overline{R_p,T_p})$ (resp. de $(\overline{R,T})$). La loi de $\bar{T}_p$ (resp. de $\bar{T}$) sera notée $\tilde{\bar{\nu}}_p$ (resp. $\tilde{\bar{\nu}}$). Remarquons que $\bar{\nu}_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \bar{\nu}$ (étroitement) et que de plus comme $\tilde{\bar{\nu}}$ est symétrique et invariante par K on a $k(\tilde{\bar{\nu}}_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} \tilde{\bar{\nu}}$ (étroitement) pour tout $k \in K$. Ces lois étant à support dans le même compact on a aussi convergence (uniforme en $k \in K$) de tous les moments de la v.a. $k\bar{T}_p$ vers les moments correspondants de $\bar{T}$.

D'après le lemme II.2.3. on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} {}_H\backslash N & \xrightarrow{\varphi} & {}_{\mathbb{R}}\backslash\mathbb{H}_1 \\ \uparrow \pi_1 & & \uparrow \pi_2 \\ N & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbb{H}_1 \end{array}$$

où φ est l'isomorphisme entre ${}_H\backslash N$ et ${}_{\mathbb{R}}\backslash\mathbb{H}_1$, π_1 et π_2 sont les surjections canoniques et φ' est un homomorphisme surjectif. Comme la compacité des supports et la symétrie des lois se transportent par φ' on a ainsi :

II.2.9.2.- Remarque : $\varphi'(k\,\bar{T}_p)$ converge en loi vers la v.a. symétrique $\varphi'(\bar{T})$ quel que soit $k \in K$. De plus il y a convergence (uniforme en k) de tous les moments de $\varphi'(k\,\bar{T}_p)$ vers les moments correspondants de $\varphi'(\bar{T})$. Notons aussi que d'après [17] quitte à transformer par un automorphisme σ la v.a. $\varphi'(\bar{T})$ (ce qui change l'espace homogène ${}_{\mathbb{R}}\backslash\mathbb{H}_1$ en l'espace homogène isomorphe ${}_{\sigma(\mathbb{R})}\backslash\mathbb{H}_1$), on peut supposer que la matrice de covariance de $\varphi'(\bar{T})$ est de la forme

$$K_{\varphi'(\bar{T})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

II.2.9.3.- Lemme : *Il existe une fonction borélienne* δ *sur* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{H}_1$ *telle que pour* p *assez grand* $(p \geq p_o)$ δ *soit une fonction barrière pour les variables aléatoires* $\varphi'(k\bar{T}_p)$ *quel que soit* $k \in K$.

Démonstration : Montrons d'abord qu'il existe une fonction barrière pour la v.a. $\varphi'(\bar{T})$. Identifions $\mathbb{R}\backslash\mathbb{H}_1$ à $\mathbb{R}^2$ avec l'action de $\mathbb{H}_1$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $(x,y)\circ(a,b,c) = (x+a, y+c+bx)$. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^2$ suffisamment dérivable alors

$$f\Big((x,y).(a,b,c)\Big) = f(x,y) + a\frac{\partial f}{\partial x} + (c+bx)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (c+bx)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2a(bx+c)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \ldots$$

substituons $\varphi'(\bar{T}) = (X_1, X_2, X_3)$ à (a,b,c) on obtient compte tenu de II.2.9 et de la symétrie de $\varphi'(\bar{T})$:

$$E\Big[f\Big((x,y).\varphi'(\bar{T})\Big)\Big] = f(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(A+x^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \text{des termes d'ordre} > 2.$$

Soient $u_1(x,y) = 1 - \dfrac{1}{(x^4+\delta y^2)^\alpha}$ et $u_2 = 1 - \dfrac{1}{\gamma(Ax^2+ay^2)^\alpha}$ et $u = u_1 \vee u_2$.

Il existe γ, a, α et $\delta > 0$ et un compact C tels que si $f = (u \wedge 1_{C^c}) \vee 0$, alors f satisfait aux hypothèses du lemme II.2.8. pour ce compact C et pour la v.a. $\varphi'(\bar{T})$. L'idée de la preuve de cette assertion provient de [9], les calculs sont analogues, nous les omettons. Maintenant pour p assez grand compte tenu de II.2.9.2. et par la même méthode que celle utilisée dans le lemme 33 de [9] on obtient que f est aussi une fonction barrière pour $\varphi'(k\bar{T}_p)$ quel que soit $k \in K$ ■

Considérons maintenant la fonction f_1 définie sur $H\backslash N$ par : $f_1(\dot{x}) = f\circ\varphi(\dot{x})$. Alors f_1 est une fonction barrière sur $H\backslash N$ pour les v.a. $k\bar{T}_p$ $(p \geq p_o)$ (en effet les hypothèses de II.2.8. se vérifient aisément, en particulier $E(f_1(\dot{x}k\bar{T}_p)) = E(f\circ\varphi(\dot{x}k\bar{T}_p)) = E(f[\varphi(\dot{x}).\varphi'(k\bar{T}_p)] \geq f[\varphi(\dot{x})]$). Enfin définissons f_2 sur $H\backslash K\ltimes N$ par : $f_2[\widehat{(k,x)}] = f_1(\dot{x})$ alors f_2 est une fonction barrière pour la v.a. $(\overline{R_p, T_p})$ pour $p \geq p_o$; en effet :

$$E\Big(f_2[\widehat{(k,x)}.(\overline{R_p,T_p})]\Big) = E\Big(f_2[k\tilde{R}_p, \dot{x}k\bar{T}_p]\Big) = E\Big(f_1(\dot{x}k\bar{T}_p)\Big) \geq f_1(\dot{x}k\bar{T}_p) = f_2\Big(\widehat{(k,x)}.(\overline{R_p,T_p})\Big)$$

Les autres hypothèses sont immédiatement vérifiées. Fixons alors $p \geqslant p_o$; on vient donc de montrer d'après le lemme II.2.8. que la marche sur $H\backslash K\ltimes N$ de pas $(\overline{R_p}, \overline{T_p})$ est transitoire donc, d'après le lemme II.2.6., la marche de pas (R_p, T_p) sur $H\backslash K\ltimes N$ est transitoire et la proposition est démontrée compte tenu de II.2.4. ∎

Bibliographie

[1] ABELS H. : Distal affine transformation groups - Journal für die Reine und angewandte Mathematik - Band 299-300, pages 291-300. 1978.

[2] BALDI P. : Caractérisation des groupes de Lie connexes récurrents (à paraître).

[3] BALDI P., LOHOUE N. et PEYRIERE J. : Sur la classification des groupes récurrents. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 285. Série A p. 1103 - 1977.

[4] BOURBAKI N. : Eléments de Mathématique - Livre VI - Intégration chapitre 7 - Hermann, Paris 1963.

[5] CHEVALLEY C. : Classification des groupes de Lie algébriques - Séminaire E.N.S 1956-1958 (Volume n° 1).

[6] GALLARDO L. : Sur deux classes de marches aléatoires - Thèse de $3^{\text{ème}}$ cycle - Nancy 1977.

[7] GALLARDO L. et RIES V. : Marches aléatoires sur les espaces homogènes du groupe des déplacements - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 285 - Série A p. 1093-1977.

[8] GUIVARC'H Y. : Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire (à paraître).

[9] GUIVARC'H Y., KEANE M. et ROYNETTE B. : Marches aléatoires sur les groupes de Lie. Lecture Notes in Mathematics n° 624 - Springer Verlag 1977.

[10] HENNION H. : Marches aléatoires sur les espaces homogènes des groupes nilpotents à génération finie. Zeit.für Warscheinlichkeits theorie - 1976 - p. 245-267.

[11] HENNION H. et ROYNETTE B. : Un théorème de dichotomie pour les marches aléatoires sur les espaces homogènes - C.R. Acad. Sc. Paris, t 285, Série A p. 399 - 1977.

[12] HENNION H. et ROYNETTE B. : Un théorème de dichotomie pour une marche aléatoire sur un espace homogène (à paraître).

[13] HOCHSCHILD G. : La structure des groupes de Lie - Dunod - Paris 1968.

[14] PREVOT D. et SCHOTT R. : Marches aléatoires sur les espaces homogènes des groupes de Lie nilpotents simplement connexes (à paraître aux Lectures Notes - Séminaire Nancy-Strasbourg).

[15] RAGHUNATHAN M.S. : Discrete Subgroups of Lie Groups - Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 68 - Springer Verlag 1972.

[16] RAUGI A. : Théorème de la limite centrale pour un produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type rigide par un groupe compact - Lecture Notes in Mathematics N° 706 - Springer Verlag - 1979.

[17] ROYNETTE B. et SUEUR M. : Marches aléatoires sur un groupe nilpotent - Zeit. f. War. 30 - 1974 - p. 129-138.

[18] SCHOTT R. : Marches aléatoires sur les espaces homogènes de groupes de Lie nilpotents, simplement connexes - C.R. Acad. Sc. Paris, t 287 Série A p. 347 - 1978.

Gallardo Léonard et Schott René
UER Sciences Mathématiques
ERA du CNRS N° 839
Université de Nancy I
C.O. 140
54037 - NANCY CEDEX

Random Walk on Homogeneous Spaces of Certain Rigid Type Groups, by Léonard Gallardo and René Schott.

Abstract : Let $G = K \ltimes N$ be a Lie group which is a semi-direct product of a nilpotent simply connected Lie group N by a compact group K. We prove that a homogeneous space $H\backslash G$ of G is recurrent if and only if, it is of polynomial growth of degree less than 2.