M. A. DICKMANN

Types remarquables et extensions de modèles dans l'arithmétique de Peano, I

Astérisque, tome 73 (1980), p. 59-117
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__59_0>

EXPOSÉ 5

TYPES REMARQUABLES ET EXTENSIONS DE MODÈLES DANS L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO, I

M.A. Dickmann

INTRODUCTION

Cet exposé forme un tout avec l'exposé 6, et la présente introduction vaut pour l'ensemble des deux. Ces deux exposés sont consacrés aux travaux de Gaifman, [G] et d'Abramson-Harrington, [A-H] , sur les types complets en Arithmétique, et sur les modèles de l'Arithmétique que ces types permettent de construire. En particulier, nous exposerons les notions de type définissable, uniforme, minimal et leur propriétés de base, étudiées par Gaifman (cf. cet exposé et le §I de l'exposé 6). Et nous démontrerons le théorème principal d'Abramson et Harrigton, que nous énoncerons seulement une fois introduites les notions nécessaires : cf. exposé 6, Théorème III.1. Ici nous indiquons seulement un corollaire de ce théorème : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une extension élémentaire M du modèle standard $\mathbb{N}$ telle que M est de cardinal $\beth_n$, mais ne contient aucune suite de $n+1$ points indiscernables pour l'ordre. Notons que ce résultat est optimum, puisque par le théorème d'Erdös-Rado [E,R] , M contient au moins n points indiscernables à cause de sa cardinalité. De ce corollaire on déduira facilement que le nombre de Hanf de la théorie complète du modèle $(\mathbb{N},+,.)$ est $\beth_\omega$: cf. exposé 6, corollaire III.

Sur les types en Arithmétique nous n'avons pas cherché à être exhaustif, mais plutôt à rédiger une introduction facile à lire et où quelques idées de base ressortent clairement; pour un exposé plus complet, voir les articles cités en référence. Le point de départ de nos exposés a été le cours professé par H. Gaifman sur le même sujet, en 1977 à l'Université de Paris VII. L'ensemble de ces deux composés ne comporte pas de nouveauté, excepté dans certaines démonstrations, dans la formulation des constructions de Gaifman et d'Abramson-Harrington, et dans la philosophie du sujet, telle qu'exposée dans l'exposé 6, fin du §I.

Le plan d'ensemble est approximativement le suivant : on expose d'abord séparément les divers aspects du sujets, à raison d'un aspect nouveau par paragraphe; puis on les étudie par combinaisons de deux ou trois d'entre eux, enfin on parviendra au théorème d'Abramson-Harrington en combinant le tout.

§O. PRÉLIMINAIRES.

(A) Dans cet exposé L désignera un langage du premier ordre contenant celui de l'arithmétique (cf. Exposé n°1). Nous supposons que L contient aussi l'opérateur minimum, désigné μ ; celui-ci permet de construire des termes à partir de formules : $\mu v\, \phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$ est le terme qui donne, pour chaque interprétation des variables $v_o,\dots,v_{n-1}$ dans une structure de signature L, le plus petit v tel que $v_o,\dots v_{n-1},v$ satisfont ϕ , s'il y en a un, 0 sinon.

Nous ferons l'hypothèse que le langage L a un nombre fini ou dénombrable de symboles de relation et de fonction à au moins un argument; le nombre des constantes individuelles peut être arbitraire. Cette hypothèse est utilisée dans le §III ci-dessous ("Existence des types") et dans tous les théorèmes qui font appel à l'existence des types, mais pas dans les paragraphes §§I, II et une partie de § IV.

(B) 1/ Etant donné L, on désigne par $\mathcal{P}_L$ - ou simplement par $\mathcal{P}$ s'il n'y a pas lieu à confusion - l'arithmétique de Péano généralisée, i.e., la théorie constituée par les axiomes de Péano (voir Exposé n°1) avec le schéma d'induction pour toutes les formules de L; on ajoute aussi le schéma d'axiome

$$\forall v_o\dots\forall v_{n-1}[\exists v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v) \rightarrow \phi(v_o,\dots,v_{n-1},\ \mu v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v))\wedge$$
$$\wedge\ \forall\, w(\phi(v_o,\dots,v_{n-1},\ )\rightarrow \mu v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)\leq w)]$$

(pour toute formule ϕ de L), qui donne à l'opérateur μ son interprétation correcte.

Remarque. En particulier, $\mu v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$ est une fonction de Skolem canonique pour la formule $\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$. Aussi toute fonction définissable est automatiquement représentée par un terme de L : si $f(v_o,\dots,v_{n-1})$ est définie par $\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$, f coïncide dans tout modèle de $\mathcal{P}$ avec le terme $\mu v\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$. Pour les mêmes raisons l'opérateur "l'unique v tel que $\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$" est aussi représenté par $\mu v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$.

2/ Moyennant peu de changements, une bonne partie des résultats de cet exposé sont valables sous des hypothèses plus faibles . En gros, il suffit que L contienne le symbole de relation $<$ et qu'il s'agisse d'une théorie assurant que $<$ est un ordre total satisfaisant un minimum d'induction et qu'il y ait des fonctions de Skolem pour toutes les formules; voir Shelah [S] .

(C) Les conventions de l'Exposé n°1 concernant les notations restent valables ici. Ajoutons que si M est une structure de signature L, f^M, ϕ^M, Ψ^M , désignent respectivement les interprétations dans M du terme $f(\bar{v})$, de la formule $\phi(\bar{v})$ et de l'ensemble de formules $\Psi(\bar{v})$; ainsi, par exemple :

$$\Psi^M = \{\bar{a}\in M^n \mid \text{pour toute } \phi\in\Psi,\quad M\models\phi\,[\bar{a}]\}.$$

On utilise aussi les notations $\Psi\models\phi$, pour indiquer que $M\models\Psi[\bar{a}] \Rightarrow M\models\phi\,[\bar{a}]$ pour toute structure M et tout $\bar{a}\in M$ de longueur convenable; et $\mathcal{D}^c(M)$ pour le diagramme complet de M.

(D) Etant donnée une structure M de signature L on appelle type (ou n-type) sur M tout ensemble $t(v)$ de formules (où $\bar{v} = \{v_0, \ldots, v_n\}$) à paramètres dans M tel que $\mathfrak{D}^c(M) \subseteq t(\bar{v})$, finiment consistant dans M (i.e., tel que $\Psi \subseteq t$ fini $\Rightarrow M \models \exists v \bigwedge \Psi(\bar{v})$), et clos par la relation de conséquence logique (i.e., $t \models \phi \Rightarrow \phi \in t$) On dit que t est complet si pour toute formule $\phi(\bar{v})$ à paramètres dans $M, \phi \in t$ ou $\neg\phi \in t$.

Il convient de noter que si $\Psi(\bar{v})$ est un ensemble de formules finiment consistant avec $\mathfrak{D}^c(M)$, alors il existe un plus petit n-type sur M contenant $\Psi(\bar{v})$; c'est l'ensemble : $\hat{\Psi}(v) = \{\phi(\bar{v}) \mid \phi(\bar{v})$ formule à paramètres dans M et $\mathfrak{D}^c(M) \cup \Psi \models \phi(\bar{v})\}$ .Lorsqu'il n'y a lieu à confusion nous identifierons $\Psi(\bar{v})$ et $\hat{\Psi}(\bar{v})$.

Remarquons, finalement, que la donnée d'un n-type sur M est manifestement équivalente à celle d'un filtre (propre) sur l'algèbre de Boole des parties définissables de M^n, et celle d'un n-type complet équivaut à la donnée d'un ultrafiltre.

(E) Si $M \models \mathcal{P}$, tout sous-ensemble $X \subseteq M$ est contenu dans un sous-modèle élémentaire minimal contenant X; son univers est

$$\{f^M(\bar{a}) \mid f(\bar{v}) \text{ est un terme de } L \text{ et } \bar{a} \in X\},$$

et ses relations et fonctions sont celles de M restreintes à cet ensemble. Notons, en passant, que pour obtenir ce modèle minimal contenant X il suffit de considérer de termes à une seule variable; ceci parce que tout terme $f(v_0, \ldots, v_{n-1})$ est égal (dans $\mathcal{P}$) au terme $g(v) = f((v)_0, \ldots, (v)_{n-1})$ à une variable.

En particulier, si $X = \emptyset$, on obtient un modèle minimal de $\mathcal{P}$, ou, plus précisément, le modèle minimal d'une théorie complète de L qui étend $\mathcal{P}$, comme on le démontrera dans le (F) ci-après. Ses éléments sont tous les termes constants (= sans variables libres) de L. Du fait que chaque $n \in \omega$ est nommé par la constante $1 + \ldots + 1$ (n fois), il suit que ce modèle minimal contient le modèle standard $\mathbb{N}$ de l'arithmétique de Péano.

Ce modèle minimal M_0 peut coïncider ou non avec le modèle standard $\mathbb{N}$. Par exemple, si $M_0 \models \neg\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$, où $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ est la formalisation arithmétique de l'énoncé "$\mathcal{P}$ est consistant" (*), alors M_0 n'est pas standard, puisque $\mathbb{N} \models \mathrm{Cons}(\mathcal{P})$.

(F) En général, si $M, N \models \mathcal{P}$ et $M \equiv N$, alors les sous-modèles minimaux respectifs M_0 et N_0 sont canoniquement isomorphes par l'application

$$F(\pi^M) = \pi^N$$

où π désigne un terme constant. La réciproque est aussi vraie et triviale.

Donc, toute extension complète T de $\mathcal{P}$ détermine à isomorphisme près un unique

(*) De tels modèles M_0 existent grâce au théorème d'incomplètude de Gödel.

modèle minimal (et réciproquement, tout modèle minimal détermine de façon évidente une extension complète de $\mathcal{P}$). En particulier, si t est un type complet sur M,

$$\{\phi \mid t \models \phi \quad \text{et} \quad \phi \text{ énoncé de } L\}$$

est une théorie complète. Parfois il sera convenable de considérer t comme un type sur son modèle minimal.

(G) Notons aussi que si $N \models \mathcal{P}$ et $M \subseteq N$ (i.e., M est une sous-structure de N), alors $M \prec N$. En effet, si $\bar{m} \in M$, $\phi(\bar{u},v)$ est une formule quelconque et $N \models \exists v\, \phi(\bar{m},v)$, alors par (B.1) ci-dessus on a $N \models \phi(\bar{m}, \mu v \phi(\bar{m},v))$; or $a = \mu v \phi(\bar{m},v) \in M$; donc $N \models \phi(\bar{m},a)$ pour un certain $a \in M$, ce qui par le critère de Tarski pour l'inclusion élémentaire entraine $M \prec N$.

D'ici et de la remarque du (E) ci-dessus il s'en suit que si $X \subseteq M$ est un sous-ensemble clos par images (dans M) de termes à une variable, alors $X \prec M$.

(H) Rappelons que tout type $t(\bar{v})$ sur M est réalisé dans une extension élémentaire N de M : il existe $\bar{c} \in N$ tel que $N \models \phi(\bar{c})$ pour toute formule $\phi \in t$. Dans ce cas, $M(\frac{t}{\bar{c}})$ désigne le sous-modèle de N engendré par $M \cup \{\bar{c}\}$ (voir (F) dessus). On a $M \prec M(\frac{t}{\bar{c}}) \prec N$.

0.1. Lemme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Deux modèles quelconques de la forme $M(\frac{t}{\bar{c}})$ sont isomorphes par un M-isomorphisme qui échange les générateurs $\bar{c}$.

(ii) t est complet.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$(i). Si $M \prec N_1, N_2$ et les n-uples $\bar{c}_i \in N_i (i = 1,2)$ réalisent t, l'application $F : M(\frac{t}{\bar{c}_1}) \to M(\frac{t}{\bar{c}_2})$ donnée par

$$F(f^{N_1}(\bar{m},\bar{c}_1)) = f^{N_2}(\bar{m},\bar{c}_2)$$

pour tout terme f et tout $\bar{m} \in M$, est l'isomorphisme cherché, comme on vérifie aisément.

(i) $\Rightarrow$(ii). Si t n'est pas complet, il existe une formule $\phi(\bar{v})$ à paramètres dans M telle que $t_1 = t \cup \{\phi\}$ et $t_2 = t \cup \{\neg\phi\}$ sont tous deux consistants avec $\mathcal{D}^c(M)$. Si $\bar{c}_i$ réalise le type t_i dans $N_i \succ M$ $(i = 1,2)$, alors $M(\frac{t}{\bar{c}_1}) \models \phi(\bar{c}_1)$ et $M(\frac{t}{\bar{c}_2}) \models \neg\phi(\bar{c}_2)$. En particulier, il n'y a pas de M-isomorphisme $F : M(\frac{t}{\bar{c}_1}) \to M(\frac{t}{\bar{c}_2})$ tel que $F(c_1^i) = c_2^i$ pour $i = 1,\ldots,n$.

(I) Pour faciliter la lecture et alléger les notations on emploiera systématiquement des abus de langage, des raccourcis et des énoncés informels au lieu de certaines formules de L; si besoin est, le lecteur pourra réécrire sans peine les formules originelles. Voici quelques exemples qu'on utilisera par la suite :

0.2 Exemples. (a) Si $\phi(v)$ est une formule et $f(v)$ un terme, "$f \upharpoonright \phi$ constante" est l'abréviation de

$$\exists u \ \forall v \ [\ \phi(v) \rightarrow f(v) = u \ ].$$

(b) De même, "$f \restriction \phi \rightarrow \infty$" abrégera :

$$\forall u \ \exists w \ \forall v \ [\ v > w \ \wedge \ \phi(v) \ \rightarrow f(v) > u \ ]$$

(c) "$f \restriction \phi$ injective" abrégera :

$$\forall u \ \forall v \ [\ \phi(u) \wedge \ \phi(v) \wedge u \neq v \rightarrow f(u) \neq f(v)] \ .$$

(d) "$f \restriction \phi > u$" abrégera :

$$\forall v \ [\ \phi(v) \rightarrow f(v) > u \ ] \ .$$

§I. LA RELATION ENTRE M ET $M(^t_c)$: ÉTUDE LOCALE.

La construction de $M(^t_c)$ est une sorte d'adjonction d'un "point à l'infini" ou "point idéal" à M, qui n'est pas sans rapport avec certaines constructions qu'on trouve ailleurs en mathématique. Par exemple, certains types de compactification en topologie où des nouveaux points sont ajoutés pour assurer la convergence de certains filtres; ou l'adjonction d'un zéro commun à certaines familles de polynômes sur un anneau; ou même l'adjonction d'un point ou une courbe à l'infini en géométrie projective.

D'autre part, un type $t(v)$ définit un filtre - et s'il est complet un ultrafiltre - sur l'ensemble des parties définissables du modèle M; notre analyse des types rappellera, donc, certaines considérations courantes dans l'étude des ultrafiltres sur ω.

Comme $M(^t_c)$ est une extension élémentaire de M, elle garde toutes les propriétés de premier ordre de M. Donc, la construction de $M(^t_c)$ facilite l'étude du type t et, inversement, les propriétés de t nous renseignent sur le modèle $M(^t_c)$.

Dans ce paragraphe nous entreprenons l'étude du premier aspect du sujet évoqué dans l'introduction : l'intéraction entre t et $M(^t_c)$ dans le cas <u>local</u>, c'est-à-dire, pour un M fixé.

Introduisons d'abord les concepts que nous allons utiliser :

<u>I.1. Définition</u>. Soient $M \models \mathcal{P}$, $M \prec N$ et $t(v)$ un type sur M.

(a) t est <u>trivial</u> ssi il existe un terme constant π (du langage L) tel que $(v = \pi) \in t$.

(b) t est <u>non-borné</u> ssi pour tout $a \in M$, $(a < v) \in t$.
Sinon t est dit <u>borné</u>.

(c) N est une <u>extension finale</u> de M, $M \underset{f}{\leq} N$, ssi pour tout $x \in N-M$ et tout $a \in M$, $N \models a < x$ (abrégé $M < x$).

(d) N est une <u>extension finale minimale</u> de N (abrégé N extension $\prec_f$-minimale de M) ssi $M \prec_f N$ et pour tout M', $M \prec_f M' \prec_f N$ implique $M' = M$ ou $M' = N$

(e) N est une <u>extension élémentaire minimale</u> de M (abrégé N extension $\prec$-minimale de M) ssi pour tout M', $M \prec M' \prec N$ entraîne $M' = M$ ou $M' = N$.

Pour commencer notre étude nous trouverons des conditions sur t nécessaires et suffisantes pour que $M(^t_c)$ soit une extension de M de chacun des types que nous venons de définir.

<u>I.2. Théorème</u>. Soit $t(v)$ un type complet et non-borné sur M; écrivons $M(t)$ pour abréger $M(^t_c)$, voir Lemme 0.1. Alors pour $i = 0,1,2$ nous avons les équivalences $(a_i) \Longleftrightarrow (b_i) \Longleftrightarrow (c_i)$ parmi les conditions suivantes :

(a_o) $M \prec_f M(t)$

(b_o) pour tout terme (*) $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien pour tout $a \in M$, $(f(v) > a) \in t$;

(c_o) pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $\psi \in t$ tel que $M = f \upharpoonright \psi$ constante, ou bien pour tout $a \in M$ il existe

$$\psi \in t \text{ tel que } M \models f \upharpoonright \psi > a^{(**)}$$

(a_1) $M(t)$ extension $\prec_f$ - minimale de M;

(b_1) pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien il existe un terme $g(w)$ tel que $(g(f(v)) \geq v) \in t$;

(c_1) pour tout terme $f(v)$ il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi$ constant ou $f \upharpoonright \psi \to \infty$.

(a_2) $M(t)$ extension $\prec$ -minimale de M;

(b_2) pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien il existe un terme $g(w)$ tel que $(g(f(v)) = v) \in t$;

(c_2) pour tout terme $f(v)$ il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi$ constant ou $f \upharpoonright \psi$ injectif.

<u>Remarque</u>. L'équivalence $(b_i) \Longleftrightarrow (c_i)$ $(i \leq 2)$ est une conséquence immédiate de la traduction des propriétés exprimées dans M en propriétés de t donnée par le lemme suivant :

<u>II.3. Lemme</u>. On a les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (i') pour $i \leq 3$:

(0) il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi$ constant;

(0') il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$.

(1) Il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi > a$;

(1') $(f(v) > a) \in t$.

(2) il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi \to \infty$;

(2') il existe un terme $g(w)$ tel que $(g(f(v)) \geq v) \in t$.

(3) Il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi$ injective;

(3') il existe un terme $g(w)$ tel que $(g(f(v)) = v) \in t$.

<u>Démonstration du lemme</u>. On illustre l'argument en démontrant (0) $\Longleftrightarrow$ (0') et (3) $\Leftrightarrow$ (3') les autres équivalences sont laissées en exercice au lecteur.

(0) $\Rightarrow$ (0'). Si $M \models f \upharpoonright \psi$ constant, pour quelque formule $\psi \in t$, il existe $a \in M$ tel que $M \models \forall v(\psi(v) \to f(v) = a)$; comme cette formule contient seulement des paramètres dans M, elle appartient à $\mathfrak{D}^c(M)$, d'où $(\psi(v) \to f(v) = a) \in t$.

(*) Tous les termes dans ce théorème sont <u>avec paramètres dans M.</u>

(**) N'ayant aucun risque de confusion, dans ce paragraphe on omettra le référence à la satisfaction dans M; ainsi "$f \upharpoonright \psi$ injective" veut dire $M \models f \upharpoonright \psi$ injective.

Puisque $\psi(v) \in t$ on peut conclure que $(f(v) = a) \in t$.

$(0') \Rightarrow (0)$. Appelons $\psi(v)$ la formule $f(v) = a$; donc $\psi \in t$ et $M \models \forall v(\psi(v) \rightarrow f(v) = a)$, i.e., $f \restriction \psi$ constant.

$(3') \Rightarrow (3)$. Preuve analogue à celle de $(0') \rightarrow (0)$; soit $\psi(v)$ la formule $g(f(v)) = v$. Donc $\psi \in t$ et $\psi(u) \wedge \psi(v)$ implique $g(f(v)) = v \wedge g(f(u)) = u$; il s'en suit que

$$\psi(u) \wedge \psi(v) \wedge f(u) = f(v) \rightarrow u = v,$$

i.e., $f \restriction \psi$ injective.

$(3) \Rightarrow (3')$. Si $f \restriction \psi$ injective pour un $\psi \in t$, posons

$$g(w) = \mu v(\psi(v) \wedge f(v) = w).$$

Evidemment on a :

$$M \models \forall v\,[\psi(v) \rightarrow g(f(v)) = v\,].$$

L'argument utilisé dans la preuve de $(0) \Rightarrow (0')$ permet de conclure que $(\psi(v) \rightarrow g(f(v)) = v) \in t$ et donc aussi la formule $(g(f(v)) = v)$ y appartient.

Pour démontrer l'équivalence $(a_1) \Leftrightarrow (b_1)$ nous aurons besoin du fait suivant :

<u>I.4. Lemme</u>. Si $M \prec N$, alors le segment initial de N déterminé par M :

$$M' = \{b \in N \mid \text{il existe } a \in M \text{ tel que } b \leq a\},$$

est une sous-structure élémentaire de N.

<u>Démonstration</u>. Par (G) du §0 il suffit de voir que M' est clos par images dans N de termes à un argument. Soient $f(v)$ un tel terme et $b \in M'$; alors $b \leq a$ pour un $a \in M$, et aussi $f^N(b) \leq \max\{f^N(v) \mid v \leq a\}$. Or $\max\{f^N(v) \mid v \leq a\} \in M$, d'où $f^N(b) \in M'$.

<u>Démonstration du Théorème I.2</u>. En vertu de I.3. et la remarque qui lui précède il suffit de prouver $(a_i) \Leftrightarrow (b_i)$.

$(a_o) \Leftrightarrow (b_o)$. Les équivalences suivantes sont facilement vérifiées en utilisant les faits que tout $x \in M(^t_c)$ est de la forme $x = f(c)$ pour un terme $f(v)$, que c réalise t et que t est complet :

$M \prec_f M(^t_c) \Leftrightarrow$

pour tout $x \in M(^t_c)$, soit $x \in M$, soit $M < x \Leftrightarrow$

pour tout terme $f(v)$, soit $f(c) \in M$, soit $M < f(c) \Leftrightarrow$

pour tout terme $f(v)$, soit il existe $a \in M$ tel que $f(c) = a$, soit $f(c) > a$ pour tout $a \in M \Leftrightarrow$

pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien $(f(v) > a) \in t$ pour tout $a \in M$.

$(a_1) \Leftrightarrow (b_1)$. Par le lemme I.4. on a

$$(*)\qquad \begin{cases} M\binom{t}{c} \text{ extension } \prec_f\text{-minimale de } M \Leftrightarrow \\ \text{pour tout } x \in M\binom{t}{c},\ x \in M \text{ ou } M(x) \text{ est cofinal dans } M(c). \end{cases}$$

En effet, si $M \precneq_f N \precneq_f M\binom{t}{c}$ pour un certain N, en choisissant $x \in N - M$ on aura $M \precneq_f M(x) \precneq_f M\binom{t}{c}$, et donc $c > M(x)$; il en résulte que $x \notin M$ et $M(x)$ n'est pas cofinal dans $M(c)$. Réciproquement, s'il existe $x \in M\binom{t}{c} - M$ tel que $M(x)$ n'est pas cofinal dans $M\binom{t}{c}$, comme on peut supposer $M \prec_f M\binom{t}{c}$, par I.4 on aura $M \precneq_f N \precneq_f M\binom{t}{c}$, où N' est le segment initial de $M\binom{t}{c}$ déterminé par $M(x)$.

Vu la forme des éléments de $M(x)$ la condition "$M(x)$ est cofinal dans $M(c)$" équivaut à :

(**) il existe un terme $g(w)$ tel que $g(x) \geq c$.

En effet, si $g(x) \geq c$, alors pour tout $y \in M(c)$ - i.e., $y = h(c)$ pour quelque terme h - on a :

$y = h(c) \leq \max\{h(v) \mid v \leq g(x)\} \in M(x)$.

L'implication inverse est évidente.

Vu la forme des membres de $M(c)$, de (*) et (**) on obtient immédiatement l'équivalence entre (a_1) et

pour tout terme $f(v)$, ou bien $f(c) \in M$, ou bien
il existe un terme $g(w)$ tel que $g(f(c)) \geq c$.

Puisque c réalise t, il est évident que cette condition équivaut à (b_1).

$(a_2) \Leftrightarrow (b_2)$. Ceci suit des équivalences suivantes, que le lecteur pourra justifier sans peine :

$M\binom{t}{c}$ extension $\prec$-minimale de M $\Longleftrightarrow$
pour tout $x \in M\binom{t}{c}$, ou bien $x \in M$, ou bien $M(x) = M(c)$ $\Longleftrightarrow$
pour tout $x \in M\binom{t}{c}$, ou bien $x \in M$, ou bien $c \in M(x)$ $\Longleftrightarrow$
pour tout terme $f(v)$, ou bien $f(c) \in M$, ou bien il existe
un terme $g(w)$ tel que $g(f(c)) = c$.

<u>I.5. Remarques.</u> (a) La condition (b_1) du Théorème I.2. peut être améliorée; elle est équivalente à :

(b_1') pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien il existe un terme <u>pur</u> (i.e. <u>sans paramètres</u>) $h(w)$ tel que $(h(f(v)) \geq v) \in t$.

L'implication $(b_1) \Rightarrow (b_1')$ s'obtient en posant

$$h(w) = \max\{g'(u,w) \mid u \leq w\},$$

où $g'(u,w)$ est un terme <u>pur</u> tel que le terme $g(w)$ est $g'(b,w)$ pour quelque $b \in M$. Ainsi on a : $\models u \leq w \to g'(u,w) \leq h(w)$. Comme on peut supposer que $(f(v) = a) \notin t$ pour tout $a \in M$ et que $M \prec_f M\binom{t}{c}$, de (b_o) on obtient $(f(v) > a) \in t$ pour tout $a \in M$, d'où $(f(v) > b) \in t$, et donc la formule

$$v \leq g(f(v)) = g(b,f(v)) \leq h(f(v)),$$

i.e., $v \leq h(f(v))$ aussi appartient à t. L'autre implication est triviale.

Cette amélioration sera utilisée plus loin.

(b) Il est clair que $(c_2) \Rightarrow (c_o)$. Donc toute extension $\prec$ - minimale de M de la forme $M(^t_c)$, où t est complet et non-borné, est une extension finale. Ainsi nous avons :

<u>I.6. Corollaire</u> (de I.4). Soit N extension $\prec$ - minimale de M. Alors $M \prec_f N$ ou M est cofinal dans N. Si $N = M(^t_c)$, où t est un type complet et non-borné, alors $M \prec_f N$.

<u>Démonstration</u>. Soit M' le segment initial de N déterminé par M. Par I.4, $M \prec M' \prec N$. Si $M' = M$, alors $x > M$ pour tout $x \in N-M$ et $N \underset{f}{\succ} M$.
Si $M' = N$, alors M est cofinal dans N. Si $N = M(^t_c)$, alors $c > M$, d'où $N \underset{f}{\succ} M$.

Le théorème I.2. admet une version pour des types non forcément complets.

<u>I.7. Proposition</u> (version de I.2 pour t non-complet). Si t est non-borné, on a pour chaque $i \leq 2$ l'équivalence $(a_i^!) \Leftrightarrow (c_i^!)$ suivante :

$(a_i^!)$ Pour tout type t' complet sur M tel que $t' \supseteq t$, M et $M(^{t'}_c)$ ont la relation (a_i) du Théorème I.2;

$(c_i^!)$ Pour tout terme $f(v)$ (et, dans le cas $i = 0$, pour tout $a \in M$) il existe un ensemble fini de formules $\psi_o, \ldots, \psi_{n-1}$ telles que $t \models \bigvee_{k=0}^{n-1} \psi_k$ et pour chaque $j \leq n-1$, $f \restriction \psi_j$ vérifie la condition (c_i) du Théorème I.2.

<u>Démonstration</u> $(a_i^!) \Rightarrow (c_i^!)$. Ceci est une application simple de la compacité qui équivaut essentiellement au fait que t est l'intersection des types complets qui le contiennent.

Soit $f(v)$ donné et soit $P_i(\psi)$ la condition (c_i) de I.2 (par exemple, si $i = 2$, $P_i(\psi)$ est "$f \restriction \psi$ constante ou $f \restriction \psi$ injective"). Soit $\{t_j \mid j \in J\}$ la famille des types complets contenant t; noter que chaque t_j est non-borné. En appliquant l'implication $(a_i) \Rightarrow (c_i)$ de I.2 au type t_j on obtient une formule $\psi_j \in t_j$ telle que $P_i(\psi_j)$. Supposons qu'il n'y ait pas de sous-ensemble fini de $\{\psi_j \mid j \in J\}$ dont le disjonction est une conséquence de t. Ceci veut dire que l'ensemble $t \cup \{\neg\psi_j \mid j \in J\}$ est finiment consistant avec $\mathcal{D}^c(M)$, et donc, par compacité, consistant. Donc il y aurait un type complet qui le contient, disons t_{j_o} ; alors $\psi_{j_o} \in t_{j_o}$ et $\neg\ \psi_{j_o} \in t_{j_o}$ ce qui contredit la consistance de t_{j_o}.

$(c_i^!) \Rightarrow (a_i^!)$. La condition $(c_i^!)$ entraine que tout type complet t' contenant t contient une des formules ψ_k et donc $f \restriction \psi_k$ vérifie la condition (c_i) du théorème I.2. Puisque $(c_i) \Leftrightarrow (a_i)$, M et $M(^{t'}_c)$ ont la relation (a_i).

§II. L'UNIFORMISATION DES CONSIDÉRATIONS LOCALES.

Dans ce paragraphe nous cherchons à rendre globales les considérations locales du paragraphe précédent, c'est-à-dire à rendre ces considérations valables simultanément dans tout $N \succ M$.

Pour mettre ce programme en œuvre on devra d'abord trouver une manière de se donner un type non seulement sur M mais simultanément sur tout $N \succ M$. La seconde étape consiste à développer les constructions et les arguments locaux encore dans le modèle initial M mais cette fois de manière uniforme par rapport aux paramètres de M.

Nous discutons d'abord des manières de se donner des types simultanément pour tout $N \succ M$.

(A) Schémas de types.

II.1. Définition. Un schéma de type sur M est un ensemble t^* de formules $\psi(\bar{u},v)$ de $L^{(*)}$ clos par conjonction et tel que l'ensemble

$$t^*(M,v) = \{\psi(\bar{a},v) \mid \bar{a} \in M,\ \ell(\bar{u}) = \ell(\bar{a}) \text{ et } \psi(\bar{u},v) \in t^*\}$$

engendre un type sur M [i.e., est consistant avec $\mathfrak{D}^c(M)^{(**)}$] .

Un argument habituel de compactité montre qu'un schéma de type sur M définit auto-automatiquement un type sur chaque $N \succ M$.

II.2. Remarque. Tout schéma de type sur M est aussi un schéma de type sur chaque $N \succ M$.

Démonstration. Il faut voir que $t^*(N,v)$ engendre un type sur N, c'est-à-dire consistant avec $\mathfrak{D}^c(N)$, pour tout $N \succ M$. Par compacité il suffit de voir que pour tout $n \in \omega$, $\psi_1(\bar{u}_1,v),\dots,\psi_n(\bar{u}_n,v) \in t^*$ et $\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n \in N$, $\ell(\bar{u}_i) = \ell(\bar{b}_i)$ $(i = 1,\dots,n)$,

$$\mathfrak{D}^c(N) \cup \{\psi_i(\bar{b}_i,v) \mid i = 1,\dots,n\}$$

est consistant. Comme t^* est clos par conjonction il suffit de le prouver pour une seule formule, $\psi(\bar{b},v)$.

Désignons par $\bar{a}$ les éléments de $\bar{b}$ appartenant à M, et $\bar{b}'$ ceux appartenant à $N-M$; écrivons $\psi(\bar{b},v)$ dans la forme $\psi(\bar{a},\bar{b}',v)$. Si $\psi(\bar{b},v)$ n'est pas consistante avec $\mathfrak{D}^c(N)$, on aura

$$\mathfrak{D}^c(N) \models \forall v \neg \psi(\bar{a},\bar{b}',v)$$

d'où

$$\mathfrak{D}^c(N) \models \exists \bar{w}\ \forall v \neg \psi(\bar{a},\bar{w},v).$$

Puisque $M \prec N$, on a

$$M \models \exists \bar{w}\ \forall v \neg \psi(\bar{a},\bar{w},\bar{v});$$

soit $\bar{a}' \in M$ tel que $M \models \forall v \neg \psi(\bar{a},\bar{a}',v)$. Ceci entraine

---

(*) La longueur de la suite $\bar{u}$ étant variable.

(**) Nous allons confondre par la suite l'ensemble $t^*(M,v)$ avec le type $\hat{t}^*(M,v)$ qu'il engendre; cf. §0.D.

$$\mathfrak{B}^c(M) \models \forall v \; \neg \psi(\bar{a},\bar{a}',v)$$

ce qui contredit les faits que $\psi(\bar{a},\bar{a}',v) \in t^*(M,v)$ et ceci est un type sur M.

Ensuite nous allons illustrer le second aspect de nos propos, à savoir, le principe que la globalisation d'une propriété locale (de M) équivaut à l'uniformisation de cette propriété par rapport aux paramètres de M.

II.3. Définition. (Les formules considérées ici peuvent avoir des paramètres dans M). On dit que la formule $\psi(v)$ décide la formule $\phi(v)$ ssi

$$M \models \forall v(\psi(v) \to \phi(v)) \vee \forall v(\psi(v) \to \neg\phi(v)).$$

On dit que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(v)$ s'il existe $\bar{b} \in M$ tel que $\psi(\bar{b},v)$ décide $\phi(v)$, c'est-à-dire

$$M \models \exists \bar{w} \; [\forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(v)) \vee \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \neg\phi(v))] .$$

On dit que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$ (*) si $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{a},v)$ pour tout $\bar{a} \in M$, i.e.,

$$M \models \forall \bar{u} \; \exists \bar{w} \, [\forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(\bar{u},v)) \vee \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \neg\phi(\bar{u},v))] .$$

On dit que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$ positivement ssi

$$M \models \forall \bar{u} \; \exists \bar{w} \; \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(\bar{u},v)).$$

Considérons les versions locales et globales de la propriété d'être un type complet, i.e. :

$(i)_M$ pour tout $N > M$, $t^*(N,v)$ est un type complet sur N.

Il est clair que (i) est la "globalisation" de $(i)_M$. Considérons maintenant les conditions :

$(ii)_M$ pour toute formule $\phi(v)$ (à paramètres dans M) il existe $\psi(v) \in t^*(M,v)$ telle que $\psi(v)$ décide $\phi(v)$;

(ii) pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ de L (i.e. sans paramètres) il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$.

Il est clair que (ii) est l'uniformisation de $(ii)_M$ par rapport aux paramètres de M; en explicitant les paramètres dans $(ii)_M$ on voit plus clairement à quoi consiste l'uniformisation :

$(ii)_M$ s'explicite : pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ de L (sans paramètres) et pour tout $\bar{a} \in M$ il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ et $\bar{b} \in M$ tels que $\psi(\bar{b},v)$ décide $\phi(\bar{a},v)$;

(ii) s'explicite : pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ de L (sans paramètres) il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que pour tout $\bar{a} \in M$ il existe $\bar{b} \in M$ tels que $\psi(\bar{b},v)$ décide $\phi(\bar{a},v)$. C'est-à-dire, on a "fait passer" un quantificateur existentiel devant un quantificateur universel : $\forall\forall\exists \rightsquigarrow \forall\exists\forall\exists$.

On démontre par la suite que $(i)_M \Leftrightarrow (ii)_M$ et que $(i) \Leftrightarrow (ii)$; cette dernière équivalence illustre bien le "principe" énoncé plus haut.

(*) $\bar{w}$ et $\bar{u}$ n'ont pas forcément même longueur.

II.4. Proposition. Il y a équivalence entre $(i)_M$ et $(ii)_M$, et entre (i) et (ii).

Démonstration. $(i)_M \Rightarrow (ii)_M$ est démontré par un argument simple de compacité qu'on laisse comme exercice.

$(ii)_M \Rightarrow (i)_M$. Puisque $\psi \in t^*(M,v)$, on a $\phi \in t^*(M,v)$ si $M \models \psi \to \phi$, $\neg\phi \in t^*(M,v)$ si $M \models \psi \to \neg\phi$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Pour tout $N > M$, $(ii) \Rightarrow (ii)_N \Rightarrow (i)_N$; donc $(ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons non (ii) : il existe $\phi(\bar{u},v)$ formule de L telle que pour tout $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ il existe $a_\psi \in M$ tel que $\psi(\bar{w},v)$ ne décide pas $\phi(\bar{a}_\psi,v)$, ce qui s'exprime $M \models \theta_\psi[\bar{a}_\psi]$ où $\theta_\psi(\bar{u})$ est la formule

$$\forall w\ [\exists v(\psi(\bar{w},v) \wedge \phi(\bar{u},v)) \wedge \exists v(\psi(\bar{w},v) \wedge \neg\phi(\bar{u},v))]\ .$$

Il est facile à vérifier que $\vdash \theta_{\psi_1 \wedge \psi_2}(\bar{u}) \to \theta_{\psi_1}(\bar{u}) \wedge \theta_{\psi_2}(\bar{u})$; donc l'ensemble Θ des conséquences de $\{\theta_\psi(\bar{u}) \mid \psi \in t^*\}$ est clos par conjonction, puisque t^* l'est. Ceci et $M \models \theta_\psi[\bar{a}_\psi]$ impliquent que Θ est finiment consistant avec $\mathcal{D}^c(M)$. Donc il existe $N > M$ avec $\bar{a} \in N$ tels que $N \models \Theta[\bar{a}]$; la formule $\phi(\bar{a},v)$ n'est pas décidée dans N par aucune formule $\psi(\bar{w},v) \in t^*$, donc par aucune formule $\psi(v) \in t^*(N,v)$. Ceci prouve non $(ii)_N$ et donc non $(i)_N$, ce qui entraine non (i).

On appellera <u>schémas complets</u> ceux qui vérifient les conditions équivalentes (i) et (ii).

Remarque. On peut construire M et t^* tels que $(ii)_M$ est vérifié, mais pas uniformément, c'est-à-dire, (ii) est faux (cf. Exemple III.4). Donc, au contraire de ce qui se passe pour la consistance (cf. Remarque II.2) la complétude de $t^*(M,v)$ n'entraine pas celle du schéma t^*.

Il est parfois commode d'identifier les schémas de type selon la relation d'équivalence suivante :

II.5. Définition. Deux schémas de type t_1^*, t_2^* sur M sont <u>équivalents</u>, $t_1^* \equiv t_2^*$, ssi pour tout $N > M$, $t_1^*(N,v) = t_2^*(N,v)$.

Tout schéma t^* est équivalent dans ce sens à un autre schéma $\hat{t}^*$ - appelé la <u>clôture de</u> t^* - qui est souvent plus facile à manier.

II.6. Lemme. Soit t^* un schéma de type sur M et $\hat{t}^* = \{\phi(\bar{u},v) \mid$ il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ tel que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$ positivement$\}$. Alors $\hat{t}^*$ est un schéma de type sur M et $t^* \equiv \hat{t}^*$.

La démonstration est laissée au lecteur comme exercice facile.

D'après ce lemme on pourra substituer, sans perte de généralité, un schéma par sa clôture, c'est-à-dire, on pourra supposer qu'il est <u>clos</u> (i.e., $t^* = \hat{t}^*$).

On utilisera plus tard la propriété suivante :

II.7. Lemme. Soient t^* un schéma sur M, clos et complet, et $\phi(\bar{u},v)$ une formule. Si $\phi(\bar{a},v) \in t^*(M,v)$ pour tout $\bar{a} \in M$, alors $\phi(\bar{u},v) \in t^*$.

Démonstration. Comme t^* est complet, il existe $\psi(\bar{w},v)$ décidant $\phi(\bar{u},v)$:

$$M \models \forall\bar{u}\ \exists\bar{w}\ [\forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(\bar{u},v)) \vee \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \neg\phi(\bar{u},v))]\ .$$

Le fait que $\phi(\bar{a},v) \in t^*(M,v)$ pour tout $a \in M$ implique l'impossibilité de la seconde alternative pour aucun w; donc $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$ positivement, d'où $\phi(\bar{u},v) \in t^*$ puisque t^* est clos.

(B) Types définissables.

Il s'agit d'une deuxième manière de se donner un type globalement, mais qui s'avère équivalente à la première.

II.8. Définition (a). On appelle définition de type sur M toute fonction d qu'à chaque formule $\phi(\bar{u},v)$ associe une formule $d_\phi(\bar{u})$ de façon telle que quels que soient $\phi_1(\bar{u}_1,v),\dots,\phi_n(\bar{u}_n,v)$, on ait

$$M \models \forall \bar{u}_1 \dots \forall \bar{u}_n \exists v \, [\bigwedge_{i=1}^{n} (d_{\phi_i}(\bar{u}_i) \to \phi_i(\bar{u}_i,v))] .$$

(b) On dira qu'une définition de type d est complète ssi pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$,

$$M \models \forall \bar{u}(d_{\neg\phi}(\bar{u}) \longleftrightarrow \neg d_\phi(\bar{u})).$$

(c) Etant donné une définition de type d sur M et $N \succ M$, on pose :

$$d(N,v) = \{\phi(\bar{a},v) \mid \bar{a} \in N \text{ et } N \models d_\phi[\bar{a}]\}.$$

(d) Un type $t(v)$ sur M est définissable ssi il existe une définition de type d sur M telle que $t(v) = d(M,v)$; c'est-à-dire, ssi pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ et tout $\bar{a} \in M$,

$$\phi(\bar{a},v) \in t \Leftrightarrow M \models d_\phi[\bar{a}] .$$

On appellera la fonction d un schéma définissant t.

Remarques. (a) La définissabilité d'un type signifie que chaque propriété de premier ordre d'un élément réalisant t dans une extension de M peut être caractérisée déjà dans M.

(b) La formule d_ϕ peut, en général, avoir des paramètres dans M (auquel cas le type t sera appelé, si besoin est, définissable à paramètres).

(c) La condition de II.8 (a) est manifestement équivalente à ce que $d(N,v)$ soit finiment consistant avec $\mathfrak{D}^c(N)$; donc, si d est une définition de type sur M, $d(N,v)$ engendre un type sur N, pour tout $N \succ M$. Notons en plus que d est complète ssi $d(M,v)$ est un type complet ssi pour tout $N \succ M$, $d(N,v)$ est un type complet.

(d) Remarquons que si d est une définition de type complète et si $\phi(\bar{u})$ ne contient pas la variable v, alors par II.8 (a) et (b) on a $M \models \forall \bar{u}(d_\phi(\bar{u}) \leftrightarrow \phi(\bar{u}))$. Donc on peut supposer, sans perte de généralité, que toute définition de type complète est telle que $d_\phi = \phi$ pour toute formule ne contenant pas la variable v.

On montre maintenant que la donnée d'une définition de type complète est équivalent à celle d'un schéma de type complet :

II.9. Proposition (a). Si d est une définition de type complète sur M, il existe un schéma de type complet t^* sur M tel que pour tout $N \succ M$, $d(N,v) = t^*(N,v)$.

(b) Réciproquement, pour tout schéma de type complet t^* sur M, il existe une définition de type complète d sur M telle que pour tout $N \succ M$, $t^*(N,v) = d(N,v)$.

Démonstration. (a) Etant donné d, posons

$$t^*(v) = \{d_\phi(\bar{u}) \to \phi(\bar{u},v) \mid \phi(\bar{u},v) \text{ formule de } L\}.$$

Par II.8 (a) il est évident que pour $N \succ M$, $t^*(N,v)$ est finiment consistant avec $\mathfrak{D}^c(N)$, i.e. il engendre un type sur N. D'autre part, de

$$\phi(\bar{a},v) \in d(N,v) \Leftrightarrow N \models d_\phi[a] \Leftrightarrow d_\phi(\bar{a}) \in \mathfrak{D}^c(N),$$

et parce que $\mathfrak{D}^c(N) \subseteq t^*(N,v)$, $(d_\phi(\bar{a}) \to \phi(\bar{a},v)) \in t^*(N,v)$ et $t^*(N,v)$ est clos par conséquence logique, on obtient l'inclusion $d(N,v) \subseteq t^*(N,v)$. Puisque $d(N,v)$ est un type complet on a forcément l'égalité.

(b) Réciproquement, étant donné un schéma de type complet sur M, soit d la fonction ainsi définie : par II.4, pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$; on choisit une telle ψ et on pose :

$d_\phi(\bar{u}) : \exists \bar{w}\ \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(\bar{u},v)$ (i.e., $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$ positivement)

Pour $N \succ M$ et $\bar{a} \in N$, on a :

$\phi(\bar{a},v) \in d(N,v) \Leftrightarrow$

$N \models d_\phi[\bar{a}] \Leftrightarrow$

il existe $\bar{b} \in N$ tel que $N \models \psi(\bar{b},v) \to \phi(\bar{a},v) \Longleftrightarrow$

$\phi(\bar{a},v) \in t^*(N,v)$.

Les deux premières équivalences et l'implication $\Rightarrow$ dans la dernière sont évidentes; quant à l'implication réciproque, puisque $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$, il y a bien $\bar{b} \in N$ tel que $N = (\psi(\bar{b},v) \to \phi(\bar{a},v)) \vee (\psi(\bar{b},v) \to \phi(\bar{a},v))$; le second membre de cette disjonction aurait comme conséquence l'inconsistance de $t^*(N,v)$; donc $N \models \psi(\bar{b},v) \to \phi(\bar{a},v)$.

Ceci prouve que $d(N,v)$ est un type sur N, et donc par la remarque (c) ci-dessus, que d est une définition de type sur M; en plus, puisque $t^*(M,v) = d(M,v)$ est un type complet sur M, encore par la remarque (c), d est complète.

La proposition ci-dessus complète l'information donnée jusqu'ici :

II.10. Proposition. Soit $t(v)$ un type complet sur M.

(a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) pour toute relation R définissable (avec paramètres) dans $M(^t_c)$, $R \upharpoonright M$ est définissable (avec paramètres) dans M;

(2) t est définissable;

(3) il existe un schéma de type complet t^* sur M tel que $t(v) = t^*(M,v)$.

(b) La fonction d définissant t et le schéma t^* de (a) sont uniques dans le sens suivant : si d^1 est une définition de type et t^*_1 un schéma de type complet sur M tels que

$$d^1(M,v) = t(v) = t^*_1(M,v),$$

alors pour tout $N \succ M$,

$$d^1(N,v) = d(N,v) = t^*(N,v) = t^*_1(N,v).$$

Démonstration. (a).

(1) $\Rightarrow$ (2). Soit $\phi(\bar{u},v)$ une formule de L; alors $\phi(\bar{u},c)$ définit une relation R sur $M(^t_c)$. Par (1) il existe une formule, que nous notons $d_\phi(\bar{u})$, telle que $R \upharpoonright M = (d_\phi)^M$. On vérifie aisèment que $\phi(\bar{a},v) \in t(v) \Leftrightarrow M \models d_\phi\,[a]$, i.e. que d définit t dans M.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supposons que R est définie dans $M(^t_c)$ par la formule $\psi(\bar{u},\bar{b})$ avec paramètres $\bar{b} = \langle b_1,\dots,b_k\rangle \in M(^t_c)$. Chaque paramètre s'écrit $b_i = f_i(\bar{a_i},c)$ pour un terme f_i et $\bar{a_i} \in M$; donc $\psi(\bar{u},\bar{b}) = \phi\,(\bar{u},\bar{a},c)$ où $\bar{a} = \bar{a_1}{}^\frown\dots{}^\frown\bar{a_k}$ et $\phi(\bar{u},\bar{w},v) = \psi\,(\bar{u},f_1(\bar{w_1},),\dots,f_k(\bar{w_k},v))$ avec $\bar{w} = \bar{w_1}{}^\frown\dots{}^\frown\bar{w_k}$. Comme c réalise t, pour $\bar{x} \in M(^t_c)$ on a :

$$\bar{x} \in R \Leftrightarrow M(^t_c) \models \phi\,[\bar{x},\bar{a},\bar{c}] \Leftrightarrow \phi(\bar{x},\bar{a},\bar{v}) \in t(v).$$

Si d est le schéma définissant t, puisque $\bar{a} \in M$ on obtient :

$$\bar{x} \in R \upharpoonright M \Leftrightarrow \bar{x} \in M \wedge \bar{x} \in R \Leftrightarrow \bar{x} \in M \wedge \phi(\bar{x},\bar{a},v) \in t(v) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M = d_\phi\,[\bar{x},\bar{a}]\ ,$$

c'est-à-dire, la formule $d_\phi(\bar{u},\bar{a})$ définit $R \upharpoonright M$ dans M. Remarquez que cette équivalence reste valable même lorsque t n'est pas complet.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Ceci est la Proposition II.9.

(b) Comme les schémas d et d^1 définissent tous les deux le type t dans M, on a :

$$\phi(\bar{a},v) \in t(v) \Leftrightarrow M \models d_\phi\,[\bar{a}]\ ,$$
$$\phi(\bar{a},v) \in t(v) \Leftrightarrow M \models d^1_\phi\,[\bar{a}]$$

pour toute formule ϕ et tout $\bar{a} \in M$; donc, $M \models \forall\bar{u}(d_\phi(\bar{u}) \leftrightarrow d^1_\phi(\bar{u}))$.
Cette équivalence étant à paramètres dans M, elle est valable dans tout $N \succ M$, d'où

(*) $d^1(N,v) = d(N,v)$.

Le schéma t^*_1 étant complet, de la Proposition II.4 il suit que pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$, i.e. la formule

(**) $\forall\bar{u}\ \exists\bar{w}(\forall v(\psi(\bar{w},v) \rightarrow \phi(\bar{u},v)) \vee \forall v(\psi(\bar{w},v) \rightarrow \neg\phi(\bar{u},v))$

est valable dans tout $N \succ M$. Nous démontrons,

(***) $\phi(\bar{a},v) \in t^*_1(N,v) \Rightarrow N \models d^1_\phi\,[\bar{a}]$.

Sinon, comme $d^1(M,v) = t(v)$ et t complet entraînent que d^1 est complète, on aurait $N \models \exists\bar{u}\ d^1_{\neg\phi}\,(\bar{u})$; puisque $N \succ M$ on aurait donc un $\bar{b} \in M$ tel que $M \models d^1_{\neg\phi}[\bar{b}]$, i.e. $\neg\phi(\bar{b},v) \in d^1(M,v)$. D'autre part, $\phi(\bar{a},v) \in t^*_1(N,v)$ implique que le second cas de (**) est impossible, d'où $\phi(\bar{b},v) \in t^*_1(M,v)$. Ainsi on a conclu $t^*_1(M,v) \neq d^1(M,v)$, ce qui contredit l'hypothèse du théorème.

En appliquant (***) à $\neg\phi$ on obtient l'implication réciproque, d'où :

(****) $t^*_1(N,v) = d^1(N,v)$ pour $N \succ M$.

Le même argument (ou, alternativement, la preuve de II.9) démontre que $t^*(N,v) = d(N,v)$ pour $N \succ M$. Ceci et (*) complètent la preuve de II.10.

Nous allons maintenant combiner ensemble l'aspect étudié au §I avec les présentes "considérations globales" : le théorème II.11 est une version globale, uniforme, de la Proposition I.2. Ci-dessous, pour tout schéma t^*, on note $M\binom{t^*}{c}$ le modèle $M\binom{t^*(M,v)}{c}$; et si $f(u,v)$, $\psi(u,v)$ sont un terme et une formule, et $a \in M$, on écrit f_a et ψ_a au lieu de $f(a,v)$ et $\psi(a,v)$.

<u>II.11. Théorème</u>. Soit t^* un schéma de type sur M, tel que $t^*(M,v)$ soit un type complet et non-borné sur M. Pour chaque $i \leq 2$ on a les équivalences $(a_i) \Leftrightarrow (b_i) \Leftrightarrow (c_i)$:

(a_o) pour tout $N \succ M$, $N \prec_f N\binom{t^*}{c}$;

(b_o) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe un terme pur $f_1(u)$ tel que pour tous $N \succ M$ et $a \in N$, soit $(f(a,v) = f_1(a)) \in t^*(N,v)$, soit pour tout $c \in N$, $(f(a,v) > c) \in t^*(N,v)$;

(c_o) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe $\psi(w,v) \in t^*$ telle que $M \models \forall a\,[\exists b(f_a \wedge \psi_b \text{ constante}) \vee \forall c\ \exists b(f_a \wedge \psi_b > c)]$.

(a_1) pour tout $N \succ M$, $N\binom{t^*}{c}$ est extension $\prec_f$-minimale de N;

(b_1) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe des termes purs $f_1(u)$, $f_2(u)$ tels que pour tous $N \succ M$ et $a \in N$, $(f(a,v) = f_1(a) \in t^*(N,v)$ ou $(f_2(f(a,v)) \geq v) \in t^*(N,v)$;

(c_1) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe $\psi(w,v) \in t^*$ telle que $M \models \forall a\ \exists b(f_a \wedge \psi_b \text{ constante} \vee f_a \wedge \psi_b \to \infty)$.

(a_2) pour tout $N \succ M$, $N\binom{t^*}{c}$ est extension $\prec$-minimale de N;

(b_2) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe des termes purs $f_1(u)$, $f_3(u,x)$ tels que pour tous $N \succ M$ et $a \in N$, $(f(a,v) = f_1(a)) \in t^*(N,v)$ ou $f_3(a,f(a,v)) = v) \in t^*(N,v)$;

(c_2) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe $\psi(w,v) \in t^*$ telle que $M \models \forall a\ \exists b(f_a \wedge \psi_b \text{ constante} \vee f_a \wedge \psi_b \text{ injective})$.

<u>Démonstration</u>. On montre $(a_i) \Rightarrow (c_i) \Rightarrow (b_i) \Rightarrow (a_i)$. La preuve s'appuie sur les équivalences correspondantes du Théorème 1.2. Comme illustration on fait la preuve du cas $i=1$.
$(a_1) \Rightarrow (c_1)$. Argument de compacité semblable à celui de la Proposition II.4.
Supposons non (c_1) : il existe un terme $f(u,v)$ tel que pour toute formule $\psi(w,v) \in t^*$ on a $M \models \exists a\ \theta_\psi(a)$, où $\theta_\psi(u)$ est la formule $\forall b(\neg(f_u \wedge \psi_b \text{ constante}) \wedge f_u \wedge \psi_b \to \infty)$. C'est-à-dire, chaque formule $\theta_\psi(u)$ est consistante avec $\mathcal{D}^c(M)$. On vérifie aisément que $\vdash \theta_{\psi_1 \wedge \psi_2}(u) \to \theta_{\psi_1}(u) \wedge \theta_{\psi_2}(u)$. Donc, l'ensemble $\Theta = \{\theta_\psi(u) \mid \psi(w,v) \in t^*\}$ est finiment constant avec $\mathcal{D}^c(M)$, d'où il existe $N \succ M$ avec $a \in N$ tel que $N \models \Theta[a]$. Ceci veut dire que le terme $f(v) = f(a,v)$ viole la condition (c_1) du Théorème I.2 appliquée au type $t^*(N,v)$; en vertu de l'équivalence $(c_1) \Leftrightarrow (a_1)$ du I.2 il en résulte que $N\binom{t^*}{c}$ n'est pas une extension $\prec_f$-minimale de N, i.e. non (a_1).

$(c_1) \Rightarrow (b_1)$. Etant donné le terme $f(u,v)$, soit $\psi(w,v)$ la formule de t^* dont l'existence est assurée par (c_1). Posons

$$f_1(u) = \mu x\,[\,\exists w\ \forall v(\psi(w,v) \to f(u,v) = x)]\ ,$$
$$h(u,x) = \max\{v \mid \exists w\ \psi(w,v) \wedge f(u,v) \leq x\}\ ,$$
$$f_2(x) = \max\{h(u,x) \mid u \leq x\}.$$

Etant donné $N \succ M$ et $a \in N$, si $M \models \exists b(f_a \upharpoonright \psi_b$ constante), ceci est aussi valable dans N; de $\psi(b,v) \in t^*(N,v)$ et de la définition de f_1 on conclut $(f(a,v) = f_1(a)) \in t^*(N,v)$. Si, par contre, $N \models \exists b(f_a \upharpoonright \psi_b \to \infty)$, alors il existe $c \in N$ tel que $N \models \forall v(v > c \wedge \psi(b,v) \to f(a,v) \geq a)$. Par définition de h et f_2 :

$$N \models f(a,v) \geq a \to h(a,f(a,v)) \leq f_2(f(a,v)),$$
$$N \models \psi(b,v) \to v \leq h(a,f(a,v)).$$

Comme $t^*(N,v)$ est non-borné et $\psi(b,v)$ y appartient, on conclut que $(f_2(f(a,v)) \geq v) \in t^*(N,v)$.

$(b_1) \Rightarrow (a_1)$. Conséquence triviale de l'implication correspondante du Théorème I.2., appliquée à un $N \succ M$ arbitraire.

Remarques. (a) La définition du terme $f_3(u,x)$ dans la preuve de $(c_2) \Rightarrow (b_2)$ est la suivante :

$$f_3(u,x) = \mu y\ [\exists w(f_u \upharpoonright \psi_w \text{ injective} \wedge \forall w'(f_u\ \psi_{w'} \text{ injective} \to w \leq w') \wedge$$
$$\wedge\ \psi(w,y)) \wedge f(u,y) = x\,].$$

On ne sait pas si le terme f_3 peut être choisi à une seule variable; cf. Gaifman[G], Théorème 3.13 et discussion.

(b) L'hypothèse que $t^*(M,v)$ est complet et non-borné a servi pour appliquer le Théorème I.2. On aurait pu utiliser au lieu du Théorème I.2. sa version pour t non-complet, la Proposition I.7 : ainsi, on aurait pu se passer même de l'hypothèse que $t^*(M,v)$ est complet et obtenir une version du Théorème II.11 pour t^* quelconque (non-borné). Nous n'énonçons pas cette version, qui est simplement l'uniformisation de la Proposition I.7.

(c) On n'a pas eu besoin, dans II.11, de l'hypothèse plus forte "t^* est un schéma complet"; ce fait est exploité par le Corollaire II.12 ci-dessous. Pourtant sous cette hypothèse (et lorsque t^* est clos), les conditions (b_i) du théorème précédent peuvent être reformulées de manière plus élégante; voir Corollaire II.13.

II.12. Corollaire. Soit t^* un schéma tel que $t^*(M,v)$ est complet sur M. Sont équivalents :

(i) pour tout $N \succ M$, $N \prec_f N(^{t^*}_c)$;

(ii) t^* est un schéma complet.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Evidemment (i) implique (c_o) du Théorème II.11. Ceci appliqué quand $f(u,v)$ est la fonction caractéristique d'une formule $\phi(u,v)$ entraîne l'existence d'une $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que

(*) $\quad M \models \forall a\ \exists \bar{b}(f_a \upharpoonright \psi_{\bar{b}}$ constante) (car f ne prenant que deux valeurs l'autre condition de (c_o) du II.11. est impossible). Or, (*) équivaut à dire que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(u,v)$; alors t^* est un schéma complet par la Proposition II.4.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Par la Proposition II.10, (ii) entraîne :

(**) pour tout $N \succ M$ et tout $X \subseteq N(\overset{t^*}{c})$ définissable dans $N(\overset{t^*}{c})$, $X \cap N$ est définissable dans N.

Mais cette condition implique $N \prec_f N(\overset{t^*}{c})$; sinon, en choisissant $x \in N(\overset{t^*}{c}) - N$ et $a \in N$ tels que $x \leq a$, on pourrait conclure que $X \cap N$ est définissable dans N, où $X = \{z \in N(\overset{t^*}{c}) \mid x < z\}$; par le principe du minimum, $X \cap N$ aurait donc un premier élément; or, $X \cap N$, étant la partie supérieure de la coupure de N déterminée par $x \notin N$, n'a pas de premier élément.

II.13. Corollaire. Soit t^* un schéma de type sur M, clos, complet et tel que $t^*(M,v)$ est non-borné. Alors pour $i \leq 2$ on a les équivalences $(a_i) \Leftrightarrow (b_i') \Leftrightarrow (c_i)$, où (a_i) et (c_i) sont les énoncés du Théorème II.11, et :

(b_o') pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe un terme pur $f_1(u)$ tel que la formule

$f(u,v) = f_1(u) \vee f(u,v) > w$

appartient à t^*.

(b_1') pour tout terme pur $f(u,v)$ il y a des termes purs $f_1(u)$, $f_2(u)$ tels que la formule

$f(u,v) = f_1(u) \vee f_2(f(u,v)) \geq v$

appartient à t^*.

(b_2') pour tout terme pur $f(u,v)$ il y a des termes purs $f_1(u)$ et $f_3(u,x)$ tels que la formule

$f(u,v) = f_1(u) \vee f_3(u,f(u,v)) = v$

appartient à t^*.

Démonstration. On prouve $(b_i) \Leftrightarrow (b_i')$.

$(b_o) \Rightarrow (b_o')$. Comme $t^*(M,v)$ est clos par conséquence logique, (b_o) implique

$(f(a,v) = f_1(a) \vee f(a,v) > c) \in t^*(M,v)$

pour tous $a,c \in M$. Comme t^* est clos et complet, en appliquant le Lemme II.7. à cette formule on obtient bien (b_o').

$(b_o') \Rightarrow (b_o)$. Ceci est immédiat en utilisant le fait qu'un type complet qui contient une disjonction, contient aussi l'un des cas disjoints.

Remarque. Le Lemme II.7 montre clairement que pour un schéma clos et complet t^* sur M, la condition "$t^*(M,v)$ est non-borné" équivaut à la "formule $(v > u)$ appartient à t^*".

(C) Types uniformes.

II.14. Définition. Soit $t(v)$ un type sur M; on dit que t est uniforme ssi :

(a) t est non-borné;

(b) pour tout $N \succ M$, $t(v) \cup \{v > a \mid a \in N\}$ est un type complet sur N.

Autrement dit, un type non-borné est uniforme ssi pour tout $N \succ M$ il n'a qu'<u>une seule extension</u> à un type complet non-borné sur N.

Essentiellement, cette notion est un cas spécial des schémas de type complets; en effet :

<u>II.15. Remarques</u>. (a) t uniforme $\Leftrightarrow t^* = t(v) \cup \{ v > u\}$ est un schéma de type <u>complet</u> sur M.

(b) Si t est uniforme, pour tout $N \succ M$ l'unique extension non-bornée et complète de t à N coïncide avec $t^*(N,v)$.

Moyennant cette remarque, tout ce qui a été vu sur les schémas complets se spécialise au cas des types uniformes; par exemple on a :

<u>II.16. Proposition</u>. Un type t sur M est uniforme si et seulement si pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ il existe $\psi(v) \in t$ telle que

$$M \models \forall \bar{u} \; \exists v_o \; [(\forall v > v_o)(\psi(v) \to \phi(\bar{u},v)) \vee (\forall v > v_o)(\psi(v) \to \neg\phi(\bar{u},v))] \; .$$

<u>Démonstration</u>. Résulte de la caractérisation des schémas de type complets (Proposition II.4) par la Remarque II.15(a) ci-dessus).

<u>II.17. Notations</u>. On dira que $\psi(v)$ <u>décide finalement</u> $\phi(\bar{u},v)$ lorsque la formule de la proposition précédente est vérifiée. En général, on dit qu'une propriété s'exprimant par une formule de la forme $\forall u \; \theta(u)$ est <u>finalement vraie</u> (dans M) ssi $M \models \exists u_o (\forall u > u_o) \; \theta(u)$. Par exemple :

$f \restriction \psi$ <u>est finalement égale à u</u> $\Leftrightarrow \exists v_o \; \forall v > v_o \; [\psi(v) \to f(v) = u]$,

$f \restriction \psi$ <u>est finalement constante</u> $\Leftrightarrow \exists u \; \exists v_o \; \forall v > v_o \; [\psi(v) \to f(v) = u]$,

$f \restriction \psi$ est <u>finalement injective</u> $\Leftrightarrow \exists v_o (\forall u > v_o)(\forall v > v_o)$
$[\psi(u) \wedge \psi(v) \wedge u \neq v \to f(u) = f(v)]$.

Le Théorème suivant donne plusieures caractérisations de la notion de type uniforme.

<u>II.18. Théorème</u>. Soit $t(v)$ un type complet et non-borné sur M. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) t est uniforme;

(2) pour tout terme $f(u,v)$ il existe des termes $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$ tels que la formule
$\forall u \; [v > f_1(u) \to f(u,v) = f_2(u) \vee f_3(f(u,v)) \geq v]$
appartient à t;

(3) pour tout $N \succ M$ et toute extension non-bornée t' de t à N, $N(^{t'}_c)$ est une extension $\prec_f$-minimale de N;

(4) pour tout $N \succ M$ et toute extension non-bornée t' de t à N, $N \prec_f N(^{t'}_c)$;

(5) pour tout terme $f(u,v)$ il existe $\phi(v) \in t$ telle que
$M \models \forall a [f_a \restriction \phi$ finalement constante $\vee f_a \restriction \phi \to \infty]$;

(6) pour tout $N \succ M$, tout type complet et non-borné sur N qui étend t est définissable à paramètres dans M.

<u>Démonstration.</u> Celle-ci est faite suivant le schéma :

$$\begin{tikzcd}
& & (2) \arrow[rr, Rightarrow] & & (3) \arrow[d, Rightarrow] \\
(5) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (1) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (4) \arrow[ll, Rightarrow] \\
& & & (6) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

L'implication (3) $\Rightarrow$ (4) est triviale.

(1) $\Rightarrow$ (6) résulte directement de l'équivalence entre (2) et (3) de la Proposition II.10. (a).

(6) $\Rightarrow$ (4) suit du fait que toute extension $N \to N(\begin{smallmatrix} t' \\ c \end{smallmatrix})$, où t' est un type définissable et complet sur N, est une extension finale.

La preuve de ce fait est l'argument de (ii) $\Rightarrow$ (i) du II.12. (appliqué au type t' au lieu du schéma t^*) et l'équivalence entre (2) et (3) du II.10. (a). Ce même fait et la Remarque II.15. (a) prouvent l'équivalence entre (1) et

(1') pour tout $N > M$, $N <_f N(\begin{smallmatrix} t^* \\ c \end{smallmatrix})$

où ici (et par la suite) t^* désigne l'ensemble $t(v) \cup \{v > u\}$, qui manifestement est un schéma sur M puisque t est non-borné.

(1) $\Rightarrow$ (5). Par (1') et l'équivalence $(a_o) \Leftrightarrow (c_o)$ du II.11. appliquée à t^* on obtient que pour tout terme $f(u,v)$ il existe $\psi(w,v) \in t^*$ telle que

(*) $\quad M \models \forall a\ [\ \exists b(f_a \restriction \psi_b \text{ constante}) \vee \forall c\ \exists b(f_a \restriction \psi_b > c)]$.

Or, vu la forme des formules dans t^*, $\psi(w,v)$ est $\phi(v) \wedge v > w$ pour quelque $\phi \in t$, et pour des formules ψ de cette forme le premier cas de la disjonction (*) équivaut à

$f_a \restriction \phi$ est finalement constante,

et le second cas équivaut à

$f_a \restriction \phi \to \infty$;

donc (5) est vérifiée.

(5) $\Rightarrow$ (1). On inverse pas par pas l'argument précédent.

(1) $\Rightarrow$ (2). Par ce qui précède on peut utiliser (5). Un calcul simple effectué sur la formule de (5) montre qu'en posant $\psi(w,v) = \phi(v) \wedge v > w$ on obtient :

$M \models \forall a\ \exists b(f_a \restriction \psi_b \text{ constante} \vee f_a \restriction \psi_b \to \infty)$.

Par (1) t^* est un schéma complet, qu'on peut supposer clos sans perte de généralité (Lemme II.6). L'équivalence $(b_1') \Leftrightarrow (c_1)$ du II.13. montre alors qu'il y a des termes $f_2(u)$, $f_3(u)$ tels que la formule $\sigma(u,v)$ suivante appartient à t^* :

$\sigma(u,v) : f(u,v) = f_2(u) \vee f_3(f(u,v)) \geq v.$

Par la Proposition II.16 il y a $\phi(v) \in t$ qui décide finalement $\sigma(u,v)$. Puisque $\sigma(u,v) \in t^*$ il est clair que ϕ décide σ positivement, i.e.

$M \models \forall u\ \ \exists v_o(\forall v > v_o)(\phi(v) \to \sigma(u,v)).$

Posons :

$g_1(u) = \mu v_o\ [\ (\forall v > v_o)(\phi(v) \to f(u,v) = f_2(u))\ ]$,

$g_2(u) = \mu v_o\ [\forall v > v_o(\phi(v) \to f_3(f(u,v)) \geq v\ ]$,

$f_1(u) = \max\{g_1(u), g_2(u)\}$.

On prouve aisèment que

$M \models \phi(v) \to \forall u(v > f_1(u) \to \sigma(u,v))$;

d'où il suit que la formule à droite est dans t, puisque $\phi(v) \in t$.

(2) $\Rightarrow$ (3). La condition (2) entraine qu'étant donnés $N \succ M$ et un type non-borné t' sur N tel que $t' \supseteq t$, on a

(**) pour tout $x \in N\binom{t'}{c}$, $x \in N$ ou $x \geq c$.

En effet, comme $x = f(a,c)$ pour quelque $a \in N$, il suffit d'appliquer (2) au terme pur $f(u,v)$. (**) implique trivialement que $N\binom{t'}{c}$ est une extension $\prec_f$-minimale de N.

(4) $\Rightarrow$ (1). La condition (1') est une conséquence immédiate de (4) en posant $t' = t^*(N,v)$; donc (4) $\Rightarrow$ (1).

Remarques. (a) Les versions affaiblies de (3) et (4) ci-dessous sont équivalentes aux énoncés du Théorème II.18 :

(3'$_*$) pour tout $N \succ M$ et tout schéma de type t_1^* sur M tel que $t_1^*(M,v) = t$, $N\binom{t_1^*}{c}$ est une extension $\prec_f$-minimale de N,

et similairement pour (4').

En effet, les implications (3) $\Rightarrow$ (3') $\Rightarrow$ (4') et (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (4') sont triviales, et l'argument utilisé pour démontrer (4) $\Rightarrow$ (1) prouve aussi (4') $\Rightarrow$ (1).

(b) La condition (b) du Théorème II.18. - ou, alternativement, l'équivalence entre (2) et (3) du Théorème II.10. (a) - montrent que tout type uniforme est définissable. La réciproque n'est pas vraie comme on verra au moyen d'un exemple simple au §III.5.

(D) Types minimaux.

Commençons par démontrer la proposition suivante dont les énoncés et la preuve sont parallèles à ceux du Théorème II.18 :

II.19. Proposition. Soit t un type complet et non-borné sur M. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe des termes purs $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u,w)$ tels que la formule

$\forall u\, [v > f_1(u) \to f(u,v) = f_1(u) \vee f_3(u,v)) = v\,]$

appartient à t;

(2) pour tout $N \succ M$ et toute extension non-bornée t' de t à N, $N\binom{t'}{c}$ est une extension $\prec$-minimale de N;

(3) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe $\phi(v) \in t$ telle que

$M \models \forall a\, [f_a \restriction \phi$ finalement constant $\vee\ f_a \restriction \phi$ finalement injective $]$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Etant donnés N et t' vérifiant les hypothèses de (2), (1) entraîne :

(*) pour tout $x \in N\binom{t'}{c}$, $x \in N$ ou il existe un terme pur $g(u,w)$ et un $a \in N$ tels que $g(a,x) = c$.

Puisque $x = f(a,c)$ pour un terme pur f et un $a \in N$, (*) s'obtient en appliquant (1) à $f(u,v)$ et en posant $g = f_3$. Mais (*) implique (2); si $N \underset{\neq}{\prec} N' \prec N(^{t'}_{c})$ et $x \in N'-N$, alors $c = g(a,x) \in N(x) \subseteq N'$, d'où $N' = N(c)$.

Convenons d'appeler (2') le cas particulier de (2) lorsque $t' = t^*(N,v)$ et $t^* = t(v) \cup \{v > u\}$ (ceci est un schéma de type sur M puisque $t^*(M,v) = t$).

(2') $\Rightarrow$ (3). Ceci suit de l'équivalence $(a_2) \Leftrightarrow (c_2)$ du II.11 par exactement le même argument de l'implication (1) $\Rightarrow$ (5) du II.18.

(3) $\Rightarrow$ (1). Notons que (3) implique trivialement (5) du II.18. Donc t^* est un schéma de type complet (i.e. t est uniforme), que nous supposerons clos sans perte de généralité. En posant $\psi(w,v) = \phi(v) \wedge v > w$, (3) entraîne :

$$M \models \forall a\ \exists b\ [f_a \restriction \psi_b \text{ constante} \vee f_a \restriction \psi_b \text{ injective}]\ .$$

Par l'équivalence $(b_2) \Leftrightarrow (c_2)$ du II.13. il existe des termes $f_2(u)$, $f_3(u,x)$ tels que la formule

$$f(u,v) = f_1(u) \vee f_3(u,f(u,v)) = v$$

appartient à t^*. Puisque t est uniforme on peut appliquer la Proposition II.16. à cette formule et finir la démonstration comme dans (1) $\Rightarrow$ (2) du II.18.

On dit qu'un type complet et non-borné $t(v)$ sur M est <u>minimal</u> si il vérifie les conditions équivalentes de la Proposition II.19. <u>Tout type minimal est uniforme</u> : ce fait, qui a été déjà utilisé dans la démonstration précédente, résulte de ce que (3) du II.19. implique trivialement (5) du II.18. La réciproque n'est pas vraie (cf. Remarque III.8), mais la notion suivante établit le lien entre les types uniformes et les types minimaux : on dit qu'un type non-borné sur M est <u>rare</u> si il vérifie les conditions équivalentes de la proposition suivante :

<u>II.20. Proposition</u>. Pour un type non-borné t sur M, les conditions suivantes sont équivalentes :

(s_1) pour tous $N \succ M$, $a \in N$ et terme pur $h(u,v)$,

$$t(v_1) \cup t(v_2) \cup N < v_1 < v_2 \vdash h(a,v_1) < v_2;$$

(s_2) pour tout terme pur $h(v)$ il existe $\phi \in t$ telle que

$$\phi(v_1) \wedge \phi(v_2) \wedge v_1 < v_2 \vdash h(v_1) < v_2;$$

(s_3) pour tout terme $f(v)$, si $M \models f \to \infty$, alors il existe $\phi \in t$ telle que $M \models f \restriction \phi$ est injective.

<u>Démonstration</u>. $(s_1) \Rightarrow (s_2)$ est trivial par compacité, en prenant $N = M$ dans (s_1).

$(s_2) \Rightarrow (s_1)$. Etant donné un terme $h(a,v)$ où $a \in N$, soit $h'(v) = \max\limits_{u \leq v} h(u,v)$. De (s_2) appliqué à $h'(v)$ on déduit

$$t(v_1) \cup t(v_2) \cup a < v_1 < v_2 \vdash h(a,v_1) < v_2\ ,$$

d'où (s_2).

$(s_2) \Rightarrow (s_3)$. Soit $f(v)$ un terme tel que $M \models f \to \infty$; soit $h(v)$ le terme : $h(v) = \mu u\ [(\forall x > u)(f(w) < v)]$. Par (s_2) appliqué au terme $h(f(v))$ il existe $\phi \in t$ telle que

$$\phi(v_1) \wedge \phi(v_2) \wedge v_1 < v_2 \vdash h(f(v_1)) < v_2,$$

ce qui entraîne $M \models f \restriction \phi$ est injective (et même $f \restriction \phi$ strictement croissante).
$(s_3) \Rightarrow (s_2)$. Notons d'abord que :
(*) $M \models g \to \infty$ implique $Im(g) \in t$ [$Im(g)$ est la formule $\exists u(v = g(u))$] .
En effet, soit $g'(v) = \mu u(v = g(u))$; on a $M \models g' \to \infty$, puisque si $Im(g')$ est bornée par w, comme $g(g'(v)) = g(v)$, $Im(g)$ serait bornée par $\max\{ g(u) \mid u \leq w \}$, contradiction. Il suffit maintenant d'appliquer (s_3) à g' pour obtenir $\psi' \in t$ telle que $g' \restriction \psi'$ est injective; en posant $\psi = \psi' - \{0\}$ on a manifestement $\psi \in t$ et $\psi \subseteq Im(g)$, d'où $Im(g) \in t$.

Maintenant soit $h(v)$ un terme pur. Si $Im(h)$ est borné, (s_2) est trivialement vérifié. Supposons donc que $Im(h)$ est non-borné (i.e. $h \to \infty$); considérant $f(v) = \max\{h(u) \mid u \leq v\}$ au lieu de h on peut supposer, sans perte de généralité, que h est non-décroissant. Par (s_3) il existe $\sigma \in t$ telle que $h \restriction \sigma$ est injective. Définissons par induction le terme g :

$$g(x+1) = \mu u\ [\sigma(u) \wedge (\forall y \leq x)(h(g(y)) < u)]$$

Il est clair que $Im(g) \subseteq \sigma$ et $h(g(x)) < g(x+1)$. Puisque $h \restriction \sigma$ est injective, elle est strictement croissante et le principe du minimum entraîne $\vdash \sigma(u) \to u \leq h(u)$; en particulier on a $g(x) \leq h(g(x)) < g(x+1)$, et donc $g \to \infty$; par (*) on obtient : $\phi = Im(g) \in t$.

On peut maintenant vérifier (s_2) pour cette formule ϕ : si $\phi(v_1)$, $\phi(v_2)$ et $v_1 < v_2$, on a $v_i = g(x_i)$ pour certain x_i $(i=1,2)$; comme g est strictement croissante, $x_1 < x_2$, d'où :

$$h(v_1) = f(g(x_1)) < g(x_1+1) \leq g(x_2) = v_2.$$

<u>II.21. Proposition</u>. Soit $t(v)$ un type non-borné sur M. t est minimal si et seulement si t est à la fois uniforme et rare.

<u>Démonstration</u>. ($\Rightarrow$) Si t est minimal, on a vu que t est uniforme. La condition (3) de la Proposition II.19 entraîne trivialement la condition (s_3) ci-dessus, ce qui démontre que t est rare.
($\Leftarrow$) Inversement, si t est uniforme, la condition (5) de II.18. est vérifiée; celle-ci, jointe à la condition de rareté (s_3) entraîne la condition (3) de II.19, donc la minimalité de t.

§ III.- EXISTENCE DE TYPES

Dans la première partie A de ce chapitre, nous démontrons que, pour l'arithmétique de Péano $\mathcal{P}$, les classes de types introduites dans le chapitre précédent sont non-vides.

Rappelons que chacune des classes introduites dans le § II est contenue dans la précédente :

Définissable $\supseteq$ Uniforme $\supseteq$ Minimal

(cf. pages et). Dans la seconde partie B, nous montrons que ces inclusions sont propres.

La troisième partie C est une présentation de quelques notions et faits élémentaires du forcing dans les modèles de l'arithmétique, utilisés dans l'exposé suivant. On montre comment les arguments d'existence de la partie A se traduisent, en langage du forcing, en termes de densité.

A.- Existence de types minimaux.

Pour démontrer que ces classes sont non-vides, il suffit, évidemment, de prouver l'existence d'un type minimal.

III.1.- Théorème. Si le langage L a un nombre au plus dénombrable de symboles de relation et de fonction, alors pour tout $M \models \mathcal{P}$ il existe un type minimal sur M. De plus, t peut être choisi de façon telle que $\varphi \in t$ où $\varphi(v)$ est n'importe quelle formule donnée à l'avance telle que $M \models$ "φ est non-bornée".

Démonstration.- Nous démontrons le théorème pour le langage L_o obtenu en enlevant toutes les constantes individuelles de L, sauf 0 et 1. Dans une remarque ultérieure, nous montrerons comment le cas général peut être déduit de ce cas particulier (cf. III.2 ci-dessous). En vue de la Proposition II.19 (3), il suffit de prouver :

(*) pour tout terme pur f(u,v) et toute formule $\varphi(v)$, il existe une formule $\psi(v)$ telle que :

$$\mathcal{P} + \text{"}\varphi \text{ non-bornée"} \vdash \text{"}\psi \text{ non-bornée"} \wedge \psi \subseteq \varphi \wedge$$
$$\wedge \ \forall u(f_u \restriction \psi \text{ finalement constante} \vee f_u \restriction \psi \text{ finalement injective}).$$

En effet, si cette condition est remplie, on construit t en énumérant les termes à deux variables du langage, $f_o(u,v)$, $f_1(u,v)$,... et en choisissant inductivement à l'aide de (*) une suite de formules $< \psi_n(v) \mid n \in \omega >$ telle que

$\psi_o = \varphi$

ψ_{n+1} non-borné $\wedge\ \psi_{n+1} \subseteq \psi_n\ \wedge\ \forall\, u(f_n(u,.) \upharpoonright \psi_{n+1}$ est finalement constante ou finalement injective).

N'importe quel ensemble consistant et complet de formules étendant $\{\psi_n(v) \mid n \in \omega\} \cup \{v > a \mid a \in M\}$ sera alors un type minimal.

En parlant informellement, le problème (*) se pose ainsi : étant donné un ensemble infini d'entiers X (qui correspond à $\varphi(v)$) et une suite f_n d'applications des entiers dans les entiers (f_n correspond donc à $f(n,.)$), il s'agit de trouver un ensemble infini X^∞ (qui correspond à $\psi(v)$) tel que $X^\infty \subseteq X$ et tel que chaque f_n soit finalement injective ou finalement constante sur X^∞.

Voyons comment construire X^∞. D'abord de la notation : si g est une fonction définie sur un ensemble Y, on a canoniquement un ensemble infini d'éléments de Y sur lequel g est injective ou constante : soit $c_o = \mu\, y\ (y \in Y)$; $c_o,\dots,c_i$ étant supposés définis, s'il existe $y \in Y$, $y > c_i$ tel que $g(y) \neq g(c_o),\dots,g(c_i)$, on pose c_{i+1} égale au plus petit tel y, autrement $c_{i+1} = c_i$. Soit $I(g,Y) = \{c_o,c_1,\dots\}$. Par construction g est injective sur $I(g,Y) \subseteq Y$. Si $I(g,Y)$ est non-borné, la question est réglée. Sinon cela entraîne que $g\,[Y]$ est borné - notamment par le dernier élément de $I(g,Y)$ - d'où, comme dans la démonstration du théorème de Mac Dowell-Specker au § 1 du premier exposé, on doit avoir $g^{-1}(m) \cap Y$ non-borné pour au moins un $m \in g[Y]$; en posant

$$m(g,Y) = \mu\, x[g^{-1}(x) \cap Y \text{ non-borné}]$$

on aura certainement g constante [égale à $g(m(g,Y))$] sur l'ensemble non-borné $g^{-1}(m(g,Y)) \cap Y$.

Nous définissons maintenant une suite décroissante X_n, $n = -1,0,\dots$ avec $X_{-1} = X$ et avec, pour $n \geq 0$,

$$X_n = \begin{cases} I(f_n,X_{n-1}) & \text{si } I(f_n,X_{n-1}) \text{ est non-borné} \\ f_n^{-1}(m(f_n,X_{n-1})) \cap X_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par l'argument précédent, chaque X_n est non-borné et f_n est soit injective, soit constante sur X_n. Alors on peut prendre :

$X^\infty = \{i \mid i$ est le (n+1)-ième élément de $X_n\}$.

Il est clair que X^{∞} a la propriété cherchée.

Cependant, pour s'assurer que la relation $i \in X_n$, et donc $i \in X^{\infty}$, puisse être définie arithmétiquement à partir de X et de la suite f_n de manière formalisable dans l'arithmétique de Péano, nous détaillons la construction de la façon suivante.

Etant donné u, posons

$X_u = \{x_o,\ldots,x_u\}$ = l'ensemble des u+1 premiers éléments de X,

et

Seg(u) = l'ensemble des suites de longueur $\le$ u extraites de l'intervalle [0,u];

pour $\sigma \in$ Seg(u), on pose

$\ell(\sigma)$ = longueur de σ (avec $\ell(\emptyset) = 0$).

On laisse au lecteur la tâche, facile, de normaliser dans $\mathcal{P}$ ces notions et celles de I(g,Y) et m(g,Y) ci-dessus, à l'aide de la machinerie des codages exposée au § II du premier exposé.

A chaque u on associe de façon récursive une famille $\{X^u_\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Seg}(u)\}$ de parties $X^u_\sigma \subseteq X_u$ indexées par $\sigma \in$ Seg(u) ; par récurrence sur $\ell(\sigma)$ on pose $X^u_\emptyset = X_u$ et

$$X^u_{\sigma^\frown m} = \begin{cases} I(f_{\ell(\sigma)}, X^u_\sigma) & \text{pour } m = 0 \\ f^{-1}_{\ell(\sigma)}(m-1) \cap X^u_\sigma & \text{pour } m \neq 0. \end{cases}$$

Notons que w > u entraîne $X^w_\sigma \supseteq X^u_\sigma$ pour $\sigma \in$ Seg(u) et que pour $u \ge z + 1$ et pour $\sigma,\tau \in$ Seg(u) avec $\ell(\sigma) = z - 1$, $\ell(\tau) \le u - z$, nous avons :

(a) f_z est injective sur $X^u_{\sigma^\frown 0^\frown \tau}$,

(b) f_z est constamment égale à w − 1 sur $X^u_{\sigma^\frown w^\frown \tau}$ pour $1 \le w \le u$.

Nous notons card(X^u_σ) le terme des variables u,σ qui donne la cardinalité de X^u_σ ; le lecteur pourra donner sans difficulté la définition formelle de ce terme dans $\mathcal{P}$. Parce que les ensembles X^u_σ sont monotones croissants en u pour l'inclusion, on a l'équivalence :

$$\forall z\ \exists u\ \forall w \ge u(\mathrm{card}(X^w_\sigma) \ge z) \longleftrightarrow \forall z\ \exists u(\mathrm{card}(X^u_\sigma) \ge z).$$

Nous aurons besoin de la remarque suivante :

(**) Soit σ une suite telle que $\forall z\ \exists u\ (\mathrm{card}(X_\sigma^u) \geq z)$. Alors il existe m tel que $\forall z\ \exists u(\mathrm{card}(X_{\sigma^\frown m}^u) \geq z)$.

En effet, soit $f_{\ell(\sigma)}[\bigcup_u X_\sigma^u]$ est non-borné, dans lequel cas on peut prendre m = 0, soit on peut prendre $m = m(f_{\ell(\sigma)}, \bigcup_u X_\sigma^u)$.

Puisque X est non-borné, on a $\forall z\ \exists u(\mathrm{card}(X_\emptyset^u) \geq z)$. En vertu de (**) on peut donc définir par récurrence une fonction h ainsi :

$$h(0) = \mu m(\forall z\ \exists u(\mathrm{card}(X_{<m>}^u) \geq z),$$

$$h(x+1) = \mu m(\forall z\ \exists u(\mathrm{card}(X_{<h(0),\dots,h(x)>^\frown m}^u) \geq z).$$

On peut poser alors

$$i \in X_y \longleftrightarrow \exists u(i \in X_{<h(0),\dots,h(y)>}^u),$$

ce qui donne la définition arithmétique cherchée de la relation $i \in X_n$.

III.2.- Remarque. Il est assez facile d'étendre le théorème III.1 au cas des langages L avec un nombre arbitraire de constantes individuelles.

Remarquez d'abord que la formule $\psi(v)$ construite dans le Théorème III.1 ne dépend que de la variable v ; la variable u du terme f(u,v) n'intervient pas. Si φ a des paramètres, alors ψ a les mêmes paramètres. Ensuite, l'analogue de (*) du III.1 pour des termes purs $f(\bar{u},v)$ de L_o à plusieurs variables $\bar{u} = (u_o,\dots,u_n)$ est obtenu automatiquement en appliquant le cas précédent au terme $g(u,v) = f((u)_o,\dots,(u)_n,v)$ Ces remarques donnent :

(†) pour tout terme pur $f(\bar{w},v)$ de L_o et pour toute formule $\varphi(\bar{c},v)$ où les constantes $\bar{c}$ appartiennent à $L - L_o$, il existe une formule $\psi(\bar{c},v)$ telle que :

$$\mathcal{P} + \text{"}\varphi_{\bar{c}} \text{ non-borné"} \vdash \psi_{\bar{c}} \subseteq \varphi_{\bar{c}} \wedge \psi_{\bar{c}} \text{ non-borné} \wedge \forall w(f_{\bar{w}} \upharpoonright \psi_{\bar{c}} \text{ finalement constante} \vee f_{\bar{w}} \upharpoonright \psi_{\bar{c}} \text{ finalement injective}).$$

Finalement, puisque chaque terme pur g(u,v) de L est de la forme $f(\bar{c},u,v)$ où $f(\bar{z},u,v)$ est un terme pur de L_o et les $\bar{c}$ des constantes individuelles de $L - L_o$, il est évident que la spécialisation de (†) à $\bar{w} = \bar{c}^\frown u$ donne ce même résultat pour le terme $g(u,v)$; d'où le type construit au III.1 est aussi minimal pour L.

Une variante de la démonstration du Théorème III.1 permet de déduire :

III.3.- Proposition. Etant donné L et M comme dans le Théorème III.1, la cardinalité des ensembles de types purs définissables, uniformes et minimaux est $K^{\aleph_0}$, où K est la cardinalité du sous-modèle minimal de M.

Démonstration.- Elle est basée dans (*) de III.1 et l'observation suivante :

(†) pour chaque formule $\varphi(v)$ il existe une formule $\sigma(u,v)$ telle que :

$$\mathcal{P} + \text{"}\varphi \text{ non-bornée"} \vdash \forall u(\sigma_u \subseteq \varphi \wedge \sigma_u \text{ non-borné}) \wedge$$
$$\wedge \forall u\, w(u \neq w \rightarrow \sigma_u \cap \sigma_w = \emptyset) \wedge \forall v\, \exists u(\varphi(v) \rightarrow \sigma(u,v)).$$

C'est-à-dire, la famille des σ_u, lorsque u varie, est une partition de φ en ensembles non-bornés.

Soit M_o le sous-modèle minimal de M. Pour chaque suite $s \in {}^{\omega}M_o$ on construit un type minimal t_s. En utilisant la même astuce que dans la remarque III.2, on peut ramener la construction de t_s à celle d'un type du langage L_o. Notez que chaque élément de M_o étant un terme constant, on peut l'insérer dans une formule sans y ajouter des paramètres. On définit par récurrence sur n une suite $< \theta^s_n(v) \mid n \in \omega >$ de formules :

$$\theta^s_o = \varphi \quad ;$$

en supposant $\theta^s_o, \ldots \theta^s_n$ déjà définis et non-bornés, on pose ,

si n est impair, $n = 2m + 1$:

θ^s_{n+1} est obtenu à partir de θ^s_n et du terme $f_m(u,v)$ comme dans le Théorème III.1,

si n est pair, $n = 2m$:

$$\theta^s_{n+1} = \sigma^{\theta^s_n}_{s(m)}$$

(où σ^{ψ} désigne la formule σ de (†) construite à partir de ψ).

Le type t_s est n'importe quel ensemble consistant et complet de formules contenant $\{\theta^s_n(v) \mid n \in \omega\} \cup \{v > a \mid a \in M_o\}$.

Il est clair que si $s \neq s'$ sont des suites distinctes, les types t_s et $t_{s'}$ sont contradictoires, puisque $\sigma^{\theta}_{s(n)} \in t_s$, $\sigma^{\theta}_{s'(n)} \in t_{s'}$ et $\sigma^{\theta}_{s(n)} \cap \sigma^{\theta}_{s'(n)} = \emptyset$, où n est le plus petit rang auquel s et s' sont distinctes et $\theta = \theta^{s}_{2n} = \theta^{s'}_{2n}$.

La preuve de (†) est facile : soit p_u la fonction qui donne le u-ième nombre premier, avec $p_o = 1$. On pose :

$$\sigma(u,v) \longleftrightarrow \begin{cases} \text{il existe } w \text{ tel que } v \text{ est le} \\ (p_u)^w\text{-ième membre de } \varphi & \text{si } u \neq 0 \\ v \in \varphi - \bigcup\limits_{w\neq 0} \sigma(w,v) & \text{si } u = 0 \text{ .} \end{cases}$$

Cette définition est manifestement formalisable dans $\mathcal{P}$.

L'argument précédent montre qu'il y a au moins $K^{\aleph_o}$ types purs minimaux. D'autre part, il y a au plus $K^{\aleph_o}$ types purs <u>définissables</u> de L.

En effet, le type pur (ou type sur M_o) défini par un schéma d est (cf. II.8 (c)) :

$$d(M_o,v) = \{\varphi(\bar{\pi},v) \mid \bar{\pi} \text{ suite de termes constants de L,} \\ \varphi(\bar{u},v) \text{ formule de L et } M_o \models d_{\varphi}[\bar{\pi}]\} \text{ .}$$

En rajoutant à $\bar{\pi}$ les termes constants qui peuvent apparaître dans $\varphi(\bar{u},v)$, et puisque les termes constants de L sont des membres de M_o, on peut considérer un schéma d comme une application qui envoie les formules de L_o dans des formules de L_o <u>à paramètres dans</u> M_o (i.e., les paramètres qui peuvent apparaître dans d_{φ}). Evidemment il y au plus $K^{\aleph_o}$ possibilités pour le choix d'une telle fonction, et donc au plus $K^{\aleph_o}$ types définissables purs.

B.- <u>Exemples</u>

III.4.- <u>Exemple d'un type non-définissable engendrant une extension finale.</u>

Pour donner un exemple de type non-définissable t(v) sur un modèle dénombrable M de $\mathcal{P}$ tel que $M \prec_f M\binom{t}{c}$, il suffit de construire une extension finale $M \prec_f N$ et une partie $Y \subseteq N$ telle que $Y \cap M$ ne soit pas une partie définissable de M, bien que $< N,Y > \models \mathcal{P}_{L(U)}$ où L(U) s'obtient du langage L de N en ajoutant un nouveau symbole de prédicat unaire U. En effet, étant donné de tels N,Y et $b \in N - M$, soit $c \in N - M$ qui satisfait :

$$< N,Y > \models (\forall u < b)(p_u \mid c \longleftrightarrow u \in Y).$$

On peut prendre alors comme $t(v)$ le type de c sur M dans le langage L de M. En effet, comme l'ensemble $Z = \{x \in N \mid x < b \wedge p_x \mid c\}$ est définissable dans N mais $Z \cap M = Y \cap M$ ne l'est pas dans M par hypothèse, la Proposition II.10 (a) entraîne que $t(v)$ n'est pas un type définissable. D'un autre côté, $M \prec_f N$ implique trivialement $M \prec_f M(^t_c)$.

Or, pour construire N, Y, il suffit d'avoir une partie non-définissable X de M telle que $< M,X > \models \mathcal{P}_{L(U)}$, car à partir de $< M,X >$ on peut construire le modèle cherché $< N,Y >$ en ajoutant un type définissable sur $< M,X >$(où alternativement par la méthode de démonstration du théorème de Mac Dowell-Specker).

Enfin, en utilisant la méthode de forcing de Cohen, on peut démontrer de manière élégante qu'une telle partie $X \subseteq M$ existe ; nous renvoyons le lecteur à Simpson [Si] pour plus de détails.

III.5.- Exemples de types définissables non-uniformes

Pour obtenir des exemples de cette situation, il suffit d'"itérer" deux ou plus de types définissables quelconques ; ces itérations seront l'objet d'une étude détaillée au § IV ci-dessous, auquel nous renvoyons le lecteur.

Par exemple, si $t_o(v)$, $t_1(v)$ sont des types définissables sur M, si $M\begin{pmatrix} t_o & t_1 \\ c_o & c_1 \end{pmatrix}$ désigne le modèle $M\begin{pmatrix} t_o \\ c_o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t'_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ où t'_1 est l'unique extension définissable de t_1 à $M\begin{pmatrix} t_o \\ c_o \end{pmatrix}$ et si t désigne le type sur M réalisé par l'élément $c = <c_o,c_1>$ qui code la paire (c_o,c_1), alors t est un type définissable.

En effet, on prouvera par la suite (Proposition IV.2 (a)) que le 2-type $(t_o(v_o),\ t_1(v_1))$ réalisé par la paire (c_o,c_1) est définissable. D'autre part, le type t s'obtient par application à (t_o,t_1) de l'opération de contraction définie ci-dessous qui, manifestement, préserve la définissabilité. Etant donné un n-type $t'(v_o,\ldots,v_{n-1})$, on pose :

$$< t'(v_o,\ldots,v_{n-1}) > = \{\varphi(v) \mid \varphi((v)_o,\ldots,(v)_{n-1}) \in t'\} \quad ;$$

(cf. Définition IV.15 et Lemme IV.16).

Enfin, le type t n'est pas uniforme puisque $M \prec_f M(c_o) \prec_f M(c) = M(c_o,c_1)$, c'est-à-dire $M(^t_c)$ n'est pas une extension $\prec_f$-minimale de M ; voir (3) du Théorème II.18.

Si on itère trois ou plusieurs types définissables, par exemple $N = M\begin{pmatrix} t_o & t_1 & t_2 \\ c_o & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ on peut prendre $c = \langle c_o, c_2 \rangle$, d'où $M(c_1)(c) = N$, mais $M(c_1) \not\prec_f N$ puisque $N \models c_o < c_1$, c'est-à-dire , $\langle (t_o, t_2) \rangle$ n'est pas un type uniforme sur $M(c_1)$.

Nous laissons au lecteur comme exercice de démontrer que, d'une manière générale, on a :

III.6.- Fait. Si $t_o, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$ sont des types définissables sur un modèle M de $\mathcal{P}$, alors le type $\langle (t_o(v_o), \ldots t_n(v_n)) \rangle$ est définissable mais non-uniforme.

Ce fait et l'existence de $K^{\aleph_o}$ types définissables ont comme conséquence immédiate :

III.7.- Corollaire. Etant donné L et M comme dans le Théorème III.1, il y a $K^{\aleph_o}$ types définissables non-uniformes, où K est la cardinalité du sous-modèle minimal de M.

Démonstration.- Il suffit de remarquer que, étant donné deux suites finies $t_o, \ldots, t_n, t'_o, \ldots t'_n$ $(n \geq 1)$ de types définissables tels que $t_i \neq t'_i$, et si $\varphi(v) \in t_i$ $\neg \varphi(v) \in t'_i$, alors

$$\varphi(\langle v_o, \ldots, v_n \rangle) \in \langle (t_o, \ldots, t_n) \rangle, \text{ tandis que } \neg\varphi(\langle v_o, \ldots, v_n \rangle) \in \langle (t'_o, \ldots, t'_n) \rangle.$$

III.8.- Remarques. (a) Il est possible de démontrer l'existence de types uniformes qui ne sont pas minimaux sur chaque modèle M de $\mathcal{P}$. Pourtant, la construction qui donne ces exemples, due à Paris et Gaifman,est relativement compliquée et donc ne sera pas incluse ici. Nous renvoyons le lecteur à Gaifman [G], Théorème 5.2.

(b) Comme corollaire des résultats du § IV nous allons obtenir un exemple d'extension minimale d'un modèle qui n'est pas une extension finale ; voir exemple IV.24.

C.- Forcing sur les modèles de l'arithmétique

Dans ce paragraphe, on introduit quelques notions élémentaires du forcing sur les modèles de l'arithmétique qui seront utilisés dans l'exposé suivant. Ceci est fait dans un cadre assez général pour couvrir toutes les applications ultérieures. Quelques-uns parmi les exemples concrets les plus courants serviront pour illustrer ces notions. On montre aussi la façon d'associer un type à chaque ensemble générique de conditions, et on analyse les propriétés de ces types. On verra que dans certains de nos exemples concrets l'existence de ces types en découle du même type d'argument que dans le paragraphe A ci-dessus.

Dans ce paragraphe, on travaille sur un modèle M de $\mathcal{P}$ fixé.

III.9.- Le cadre général.

(a) Soit $n \in \omega$ fixé. On appelle n-condition de forcing sur M à tout n+1-uplet $< \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n >$ de formules à paramètres dans M, contenant la variable libre v et éventuellement (mais pas forcément) une autre variable libre u, telle que $M \models \forall u \, (\varphi_u$ non-borné) (*).

(b) On supposera qu'on s'est donné un ensemble $\mathcal{C}$ de n-conditions de forcing pour un n fixé, et un ordre partiel $\lesssim$ sur $\mathcal{C}$. On ne suppose pas que $\mathcal{C}$ est arithmétiquement définissable (même si dans les applications on trouve fréquemment des $\mathcal{C}$ qui le sont). Par contre, $\lesssim$ est supposé définissable dans le sens qu'il existe une formule $\Phi(X, X_1, \ldots, X_n, Y, Y_1, \ldots, Y_n)$ du langage L de l'arithmétique de Péano généralisée avec termes de classe X, X_i, Y, Y_i $(i = 1, \ldots, n)$, sans d'autres variables libres et ayant les variables v et u explicitement liées, telles que pour $< \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n >, < \psi, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n > \in \mathcal{C}$, on ait :

$$M \models \Phi(\varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \psi, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n) \Longleftrightarrow < \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n > \lesssim < \psi, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n > .$$

(c) On demande que la relation $\lesssim$ satisfasse la condition de cohérence finie suivante :

pour tous $k \in \omega$, $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathcal{C}$, si $\alpha = < \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n >$, $\beta_i = < \psi_i, \sigma^i_1, \ldots, \sigma^i_n >$ et $\alpha \lesssim \beta_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, alors

$$M \models \forall u \, \exists v \, [\varphi(u,v) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \psi_i(u,v)].$$

Dans tous les exemples qui suivent, cette condition de cohérence finie est trivialement vérifiée puisque $< \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n > \lesssim < \psi, \sigma'_1, \ldots \sigma'_n >$ entraîne soit que $\varphi \subseteq \psi$ soit que φ est contenu dans ψ à partir d'un certain rang.

(*) Si φ contient seulement la variable libre v, cette condition doit être remplacée par $M \models \varphi$ non-borné.

III.10.- Exemples.

(a) Soient $n = 0$, $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les formules non-bornées ayant v comme seule variable libre et $\preccurlyeq$ la relation d'inclusion :

$$\varphi \preccurlyeq \psi \Longleftrightarrow M \models \forall v(\varphi(v) \rightarrow \psi(v))$$

(i.e., la formule $\Phi(X,Y)$ définissant $\preccurlyeq$ est $\forall\, v\ (v \in X \rightarrow v \in Y)$).

(b) Avec le même $\mathcal{C}$ on peut considérer l'ordre $\preccurlyeq$ d'inclusion finale (noté $\subseteq_f$) :

$$\varphi \preccurlyeq \psi \Longleftrightarrow M \models \exists v_o\ \forall v > v_o\ (\varphi(v) \rightarrow \psi(v)).$$

(c) Cas des familles. Ici $n = 0$ et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des formules $\varphi(u,v)$ à deux variables telles que $M \models \forall u\ (\varphi_u$ non-borné). Il y a deux cas selon que des paramètres de M soient admis ou non dans les formules φ. L'ordre $\preccurlyeq$ est :

$$\varphi \preccurlyeq \psi \Longleftrightarrow M \models \forall a\ \exists b\ (\varphi_a \subseteq_f \psi_b) \wedge \forall b\ \exists a\ (\varphi_a \subseteq_f \psi_b).$$

Un cas intéressant s'obtient lorsque les éléments de $\mathcal{C}$ sont des familles disjointes, i.e.,

$$M \models \forall u_1 u_2\ \forall v\ [u_1 \neq u_2 \rightarrow \neg(\varphi(u,v) \wedge \varphi(u_2,v))].$$

Abramson-Harrington [A-H] considérent les exemples suivants :

(d) Le m-forcing. Ici $n = m - 1$, où m est un entier fixe ≥ 2, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des n-uplets de formules non-bornées à une seule variable libre ; $\preccurlyeq$ est l'ordre d'inclusion simultanée dans toutes les coordonnées :

$$< \varphi_1, \ldots, \varphi_n > \preccurlyeq < \psi_1, \ldots, \psi_n > \Longleftrightarrow M \models \bigwedge_{i=1}^{n} \forall v\ (\varphi_i(v) \rightarrow \psi_i(v)).$$

(e) Ici $n = 2$, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des triplets $< \varphi, \sigma_1, \sigma_2 >$ où :

$\varphi(v)$ = formule non-bornée sur M avec v comme seule variable libre ;

et il existe $k \in \omega$ tel que

$\sigma_1(u,v)$ = fonction définie sur φ, à valeurs dans 2^{k+1} et telle que pour tout $s \in 2^{k+1}$ l'image inverse de s est non-bornée ;

$\sigma_2(v)$: $v = k$.

En appelant $< X,F,k >$ les éléments de $\mathcal{C}$, l'ordre $\lesssim$ est ainsi défini :

$$< X_2,F_2,k_2 > \lesssim < X_1,F_1,k_1 > \iff X_2 \subseteq X_1 \wedge k_2 \geq k_1 \wedge$$
$$\mathrm{Dom}(F_2) \subseteq \mathrm{Dom}(F_1) \wedge F_1 \upharpoonright \mathrm{Dom}(F_2) = F_2.$$

D'autres exemples des conditions de forcing seront considérés dans l'exposé suivant (cf. Lemme II.10).

III.11.- Ensembles génériques

(a) Notation. Etant donné une formule $\theta(X,X_1,\ldots,X_n)$ contenant les termes de classe $X,X_1,\ldots,X_n$, sans d'autres variables libres et ayant les variables v et u explicitement liées, on pose :

$$\mathcal{C}_\theta = \{ < \varphi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n > \in \mathcal{C} \mid M \models \theta(\varphi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\}.$$

(b) On dit qu'un ensemble de conditions de forcing $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ est dense ssi pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$ il existe $\beta \in \mathcal{D}$ tel que $\alpha \lesssim \beta$.

(c) Soit Θ un ensemble de formules de la forme spécifiée au (a) ci-dessus. On dit qu'un ensemble de conditions de forcing $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$ est Θ-générique ssi

(i) $\alpha \in \mathcal{G} \wedge \alpha \lesssim \beta \Rightarrow \beta \in \mathcal{G}$

(ii) $\alpha, \beta \in \mathcal{G} \Rightarrow$ il existe $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $\gamma \lesssim \alpha$ et $\gamma \lesssim \beta$.

(iii) pour toute formule $\theta \in \Theta$, $\mathcal{C}_\theta$ dense $\Rightarrow \mathcal{G} \cap \mathcal{C}_\theta \neq \emptyset$.

Lorsque Θ est l'ensemble de toutes les formules de la forme spécifiée au (a) ci-dessus, on dit que $\mathcal{G}$ est générique.

III.12.- Existence d'ensembles génériques

Dans ce contexte ci - comme dans tout autre où la machinerie du forcing est utilisée - le premier point à considérer est celui de l'existence d'ensembles génériques. Ici, comme ailleurs, le critère principal est le suivant :

(a) Critère d'existence d'ensembles génériques. Pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de conditions de forcing, si l'ensemble Θ de formules est dénombrable, alors il existe un ensemble Θ-générique de conditions contenu dans $\mathcal{C}$.

Démonstration.- Soit $<\theta_n \mid n \in \omega>$ une énumération de toutes les formules $\theta \in \Theta$ telles que $\mathcal{C}_\theta$ est dense. Par induction, on choisit pour chaque $n \in \omega$ un $\alpha_n \in \mathcal{C}$ tel que $\alpha_{n-1} \preccurlyeq \alpha_n$ et $\alpha_n \in \mathcal{C}_{\theta_n}$. L'ensemble

$$\mathcal{G} = \{\beta \in \mathcal{C} \mid \text{il existe } n \in \omega \text{ tel que } \alpha_n \preccurlyeq \beta\}$$

est manifestement Θ-générique.

En particulier, si le langage L et le modèle M sont tous deux dénombrables, dans tout ensemble $\mathcal{C}$ de conditions de forcing il existe un sous-ensemble générique. Mais le critère précédent prouve aussi l'existence d'ensembles génériques dans d'autres cas intéressants : par exemple, lorsque L est dénombrable, Θ est l'ensemble de toutes les formules de L (i.e., sans paramètres) de la forme spécifiée au III.11 (a), mais M n'est pas forcément dénombrable.

Pour familiariser le lecteur avec les concepts introduits, on laisse en exercice facile le suivant :

(b) Exercice. Soient L dénombrable, Θ l'ensemble de toutes les formules sans paramètres de la forme décrite au III.11 (a), M un modèle de $\mathcal{P}$, et $\mathcal{C}_2$ l'ensemble des conditions de forcing de l'exemple III.10 (b). Démontrer qu'il existe $M_o \prec M$ dénombrable, tel que si $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des conditions de forcing de l'exemple III.10 (a), avec formules à paramètres dans M_o, alors on a :

tout sous-ensemble générique de $\mathcal{C}_1$ est un sous-ensemble Θ-générique de $\mathcal{C}_2$.

On montre maintenant que tout sous-ensemble générique donne lieu de façon naturelle à un type.

III.13.- Le type associé à un ensemble générique

Proposition.- Soient $\mathcal{C}$ un ensemble de conditions de forcing sur M, Θ un ensemble arbitraire de formules de la forme décrite au III.11 (a), et $\mathcal{G}$ un ensemble Θ-générique. Alors :

(i) L'ensemble (des conséquences de) :

$t_{\mathcal{G}}(v) = \{\varphi(a,v) \mid a \in M$ et il existe $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ tel que $<\varphi(u,v),\sigma_1,\dots,\sigma_n> \in \mathcal{G}\}$ (*)

(*) Omettre a si les formules de $\mathcal{C}$ ont v comme seule variable libre.

est un type sur M.

(ii) Soit $\delta_\varphi(X)$ la formule

$$X \text{ non-borné} \wedge X \text{ décide } \varphi(u,v)^{(*)} .$$

Si pour toute formule $\varphi(u,v)$, $\delta_\varphi \in \Theta$ et $\mathcal{C}_{\delta_\varphi}$ est dense, alors $t_{\mathcal{G}}$ est complet et non borné.

(iii) Soit $\delta^f_\varphi(X)$ la formule

$$X \text{ non-borné} \wedge X \text{ décide finalement } \varphi(u,v).$$

Si pour toute formule $\varphi(u,v)$, $\delta^f_\varphi \in \Theta$ et $\mathcal{C}_{\delta^f_\varphi}$ est dense, alors $t_{\mathcal{G}}$ est uniforme.

(iv) pour tout terme $f(u,v)$, soit $\theta_f(X)$ la formule

$$\exists b \ \forall a \ (f_a \restriction X_b \text{ finalement constante} \vee f_a \restriction X_b \text{ finalement injective}).$$

Si pour tout terme $f(u,v)$, $\theta_f \in \Theta$ et $\mathcal{C}_{\theta_f}$ est dense, alors $t_{\mathcal{G}}$ est minimal.

<u>Démonstration.</u>- (i) La condition de cohérence finie III.9 (c) garantit que $t_{\mathcal{G}}$ est finiment consistant avec $\mathcal{D}^c(M)$: puisque si $\varphi_i(a_i,v) \in t_{\mathcal{G}}$, avec $a_i \in M$ et $\beta_i = < \varphi_i, \sigma^i_1, \ldots, \sigma^i_n > \in \mathcal{G}$ $(i = 1,\ldots,k)$, alors par III.11 (c,ii) il existe $\alpha \in \mathcal{G}$ $\alpha = < \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n >$ tel que $\alpha \lesssim \beta_i$ $(i = 1,\ldots,k)$; d'où par III.9 (c), on conclut :

$$M \models \exists v \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i(a_i,v).$$

(ii) $t_{\mathcal{G}}$ est complet. Si $\varphi(a,v)$ est une formule quelconque, l'hypothèse entraîne que $\mathcal{C}_{\delta_\varphi} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, i.e. il existe $<\psi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n > \in \mathcal{G}$ tel que $\psi(w,v)$ décide $\varphi(u,v)$; en particulier, $\psi(b,v) \in t_{\mathcal{G}}$ décide $\varphi(a,v)$ pour un certain $b \in M$; donc, $\varphi(a,v)$ ou $\neg \varphi(a,v)$ est dans $t_{\mathcal{G}}$ selon que $\psi(b,v)$ décide $\varphi(a,v)$ ou $\neg \varphi(a,v)$ positivement.

$t_{\mathcal{G}}$ est non-borné. En appliquant l'argument précédent à la formule $v > u$, on obtient $< \psi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n > \in \mathcal{G}$ tel que $\psi(w,v)$ décide $v > u$; puisque $\psi(w,v) = \psi_w(v)$ est non-bornée, elle doit décider $v > u$ positivement ; d'où $v > a \in t_{\mathcal{G}}$ pour tout $a \in M$.

(iii) et (iv) La preuve de ces deux cas est semblable à celle de (ii) en utilisant les caractérisations des types uniformes et minimaux données par les Théorèmes II.18

(*) Si le terme de classe X contient une variable libre, disons w, alors δ_φ est la formule " $\forall$ w (W(w) est non-borné) $\wedge$ X(w) décide $\varphi(u,v)$". La même remarque s'applique à (iii).

et II.19 respectivement.

Cette proposition donne des conditions de densité le plus souvent utilisées en pratique. La vérification de l'une ou l'autre de ces conditions de densité dans des cas concrets peut être hautement non triviale ; cf.,par exemple, le lemme II.10 de l'exposé suivant.

Pour terminer ce paragraphe, remarquons que l'énoncé et la preuve du Théorème III.1 ci-dessus peuvent être reformulés de façon à montrer que les conditions de densité de la proposition précédente sont toujours vérifiées par les notions de forcing des exemples III.10 (a), (b) et (c). Ceci est immédiat dans les deux premiers cas. Pour l'exemple III.10 (c), il suffit de noter que l'argument que démontre (*) du Théorème III.1 donne ψ uniformément à partir de φ ; c'est-à-dire

pour toute formule $\varphi(u,v)$ telle que $M \models \forall u(\varphi_u$ non-bornée),
et pour tout terme $f(u,v)$ il existe une formule
$\psi(u,v)$ telle que
$M \models \forall u[\psi_u$ non-borné $\wedge\ \psi_u \subseteq \varphi_u \wedge \theta_f(\psi_u)]$.

(cf. aussi l'argument du III.2). Ceci veut dire que pour tout terme $f(u,v)$ l'ensemble $\mathcal{C}_{\theta_f}$ est dense.

On peut conclure donc que dans ces trois cas, <u>pour tout ensemble générique $\mathcal{G}$ le type associé $t_{\mathcal{G}}$ est minimal</u>. On peut aussi vérifier sans peine, en utilisant (ii) de la Proposition précédente, que <u>tous ces types sont complets et non-bornés</u>; pour ceci il suffit de modifier légèrement l'argument de (*) du Théorème III.1, de façon à prouver le suivant :

pour toute formule $\varphi(u,v)$ telle que $M \models \forall u(\varphi_u$ non-borné)
il existe une formule $\psi(w,v)$ telle que
$M \models \forall w(\psi_w$ non-borné) $\wedge\ \psi(w,v)$ décide $\varphi(u,v)$.

<u>Problème ouvert</u>.- On ne sait pas si, réciproquement, pour ces notions de forcing et sous les restrictions de dénombrabilité du III.12, tout type minimal est de la forme $t_{\mathcal{G}}$ pour un ensemble générique $\mathcal{G}$.

IV.- ITÉRATION DES TYPES

Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques propriétés des modèles obtenus par itération d'extensions de la forme $M \longmapsto M\binom{t}{c}$ définies au § 1, où t est un type définissable et complet (ces hypothèses sont indispensables ; cf. lemme 0.1 et discussion au début de § II. A et B).

Notons d'abord que la construction des modèles $M\binom{t}{c}$ peut être itérée un nombre fini quelconque de fois de manière évidente : étant donné des types définissables $t_o,\dots,t_n$ sur un modèle M de $\mathcal{P}$, $M\begin{pmatrix} t_o\dots t_n \\ c_o\dots c_1 \end{pmatrix}$ est le modèle obtenu en ajoutant d'abord un élément c_o qui réalise t_o, puis c_1 réalisant l'unique extension définissable de t_1 à $M\begin{pmatrix} t_o \\ c_o \end{pmatrix}$ - i.e., le type $d_1(M\begin{pmatrix} t_o \\ c_o \end{pmatrix},v)$, où d_1 est le schéma définissant t_1, cf. § II.B -, etc...

Dans un second temps, des itérations $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ le long d'un ensemble totalement ordonné arbitraire I sont obtenues comme limites directes des itérations sur tous les sous-ensembles finis de I.

Le paragraphe A est dédié à la définition et les propriétés élémentaires des itérations mentionnées ci-dessus. Dans B, on introduit la notion de <u>bloc</u>, outil permettant l'étude des itérations $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ quand les types t_i sont uniformes. Le paragraphe C est réservé à l'exposition de ce que nous appelons des "phénomènes d'exclusion", notamment des types minimaux ; ceux-ci consistent en ce que les types en question ne sont réalisés qu'une seule fois dans certaines parties des modèles. Dans D on prouve l'existence d'un <u>support</u> pour tout élément d'un modèle de la forme $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, c'est-à-dire d'un ensemble fini minimal de "coordonnées" $i \in I$ dont l'élément dépend ; dans les modèles obtenus par itération des types minimaux, le support d'un élément détermine complètement le sous-modèle engendré par cet élément.

IV.1.- RAPPEL DE FAITS ÉLÉMENTAIRES (les démonstrations détaillées sont laissées en exercice au lecteur).

(a) Si $M_1, M_2 \models \mathcal{P}$ et f est une application élémentaire, $\mathrm{Dom}(f) \subseteq M_1$, $\mathrm{Im}(f) \subseteq M_2$, alors f s'étend de façon unique en une application élémentaire entre les sous-modèles élémentaires de M_1, M_2 engendrés par Dom(f), Im(f), respectivement.

(b) Si $M_1, M_2 \models \mathcal{P}$, t est un type définissable et t_i (i = 1,2) l'unique extension définissable de t à M_i (i.e., $t_i = d(M_i, v)$ où d est le schéma définissant t), alors toute application élémentaire $h : M_1 \to M_2$ s'étend de façon unique en une application élémentaire $\overline{h} : M_1\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \to M_2\begin{pmatrix} t_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ telle que $\overline{h}(c_1) = c_2$. En particulier, $M_1 \prec M_2$ entraine $M_1\binom{t}{c} \prec M_2\binom{t}{c}$.

(c) Sous les hypothèses de (b) on a

$$x \in M_1\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1 \end{pmatrix} - M_1 \Longleftrightarrow \overline{h}(x) \in M_2\begin{pmatrix} t_2 \\ c_2 \end{pmatrix} - M_2 .$$

En particulier, si $M_1 \prec M_2$, on a

$$x \in M_1\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1 \end{pmatrix} - M_1 \Longleftrightarrow x \in M_2\begin{pmatrix} t_2 \\ c_2 \end{pmatrix} - M_2 .$$

(a) est trivial (mettre $\overline{f}(\tau^{M_1}(\overline{a})) = \tau^{M_2}(f(\overline{a}))$ pour $\overline{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ et tout terme τ).
(b) est conséquence immédiate de (a).
(c) Tout $x \in M_1(c_1)$ est de la forme $x = \tau(\overline{a}, c_1)$ pour un terme τ et un $\overline{a} \in M_1$. En appelant $\varphi(\overline{u}, w, v)$ la formule $w = \tau(\overline{u}, v)$, pour tout $b \in M_1$ on a :

$$x = b \Longleftrightarrow M_1(c_1) \models \varphi(\overline{a}, b, c_1) \Longleftrightarrow \varphi(\overline{a}, b, v) \in t_1 \Longleftrightarrow M_1 \models d_\varphi(\overline{a}, b),$$

et puisque h est élémentaire :

$$x \in M_1 \Longleftrightarrow M_1 \models \exists\, w\, d_\varphi(\overline{a}, w) \Longleftrightarrow M_2 \models \exists\, w\, d_\varphi(h(\overline{a}), w) \Longleftrightarrow \overline{h}(x) \in M_2 .$$

A.- Itération des types définissables le long d'un ensemble ordonné

Etant donné $M \models \mathcal{P}$ et $t_o, \ldots, t_n$ types définissables sur M, le modèle $M\begin{pmatrix} t_o \ldots t_n \\ c_o \ldots c_n \end{pmatrix}$ est défini par induction sur n de la manière suivante :

$$M\begin{pmatrix} t_o \dots t_n \\ c_o \dots c_n \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} t_o \dots t_{n-1} \\ c_o \dots c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t'_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

où t'_n est l'unique extension définissable de t_n à $M\begin{pmatrix} t_o \dots t_{n-1} \\ c_o \dots c_{n-1} \end{pmatrix}$:

$t'_n = d_n(M\begin{pmatrix} t_o \dots t_{n-1} \\ c_o \dots c_{n-1} \end{pmatrix}, v)$, où d_n est le schéma définissant t_n (cf. § II.B).

Notons que si le type t_i est non-trivial on doit avoir $c_i \in M\begin{pmatrix} t_o \dots t_{i-1} \\ c_o \dots c_{i-1} \end{pmatrix}$.

On désigne ces modèles par $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \leq n}$.

IV.2.- <u>Proposition</u>. (a) Le n+1-type sur M réalisé par $(c_o, \dots, c_n)$ dans $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \leq n}$ est définissable. Son schéma de définition s'obtient récursivement à partir des schémas définissant les t_i.

(b) Si $0 \leq i_o < i_n < \dots < i_k \leq n$, alors $M\begin{pmatrix} t_{i_j} \\ c_{i_j} \end{pmatrix}_{j \leq k} \prec M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \leq n}$.

(c) $$m < n \Rightarrow \left[M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \leq m} \right] \begin{pmatrix} t_j \\ c_j \end{pmatrix}_{m+1 \leq j \leq n} \simeq M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \leq n} .$$

<u>Démonstration</u>. (a) Par induction sur n. Soient d_i les schémas définissant les t_i, et d' le schéma définissant le type de $(c_o, \dots, c_{n-1})$ sur M. Alors pour $\bar{a} \in M$ et toute formule φ , on a :

$$M(c_i)_{i \leq n} \models \varphi(\bar{a}, c_o, \dots, c_n) \Leftrightarrow M(c_i)_{i \leq n-1} \models (d_n)_\varphi (\bar{a}, c_o, \dots c_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow M \models d'_{(d_n)_\varphi} (\bar{a}).$$

(b) Ceci suit par induction de $M\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \prec M\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ et $M \prec N \Rightarrow M\binom{t}{c} \prec N\binom{t}{c}$.

(c) Induction facile sur $n \geq m+1$.

Soit I un ensemble totalement ordonné par < et supposons que pour chaque $i \in I$ on s'est donné un type définissable (non trivial) t_i de M. Pour chaque $i \in I$, soit c_i un élément tel que quels que soient $k \in \omega$ et $i_o < \dots < i_k < i$, on a

$c_i \notin M\begin{pmatrix} t_{i_j} \\ c_{i_j} \end{pmatrix}_{j \leq k}$. Pour chaque $J \in \mathbb{P}_\omega(I)$, $J = \{i_o, \ldots, i_k\}_<$ (i.e., $i_o < \ldots < i_k$)

posons $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \in J} = M\begin{pmatrix} t_{i_j} \\ c_{i_j} \end{pmatrix}_{j \leq k}$. La proposition précédente montre que

$\left\{M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \in J} \;\middle|\; J \in \mathbb{P}_\omega(I)\right\}$ est une famille filtrante pour la relation $\prec$ de sous-structure élémentaire lorsque $\mathbb{P}_\omega(I)$ est muni de l'ordre d'inclusion. On pose :

<u>Définition</u>.- $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \in I} = \bigcup\left\{M\begin{pmatrix} t_j \\ c_j \end{pmatrix}_{j \in J} \;\middle|\; J \in \mathbb{P}_\omega(I)\right\}$.

IV.3.- <u>Proposition</u>.- (a) $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \in I}$ est un modèle de $\mathcal{P}$.

(b) $- J \in \mathbb{P}_\omega(I) \Rightarrow M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \in J} \prec M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \in I}$

(c) Si $t_i = t$ pour tout $i \in I$ et t est un type non-trivial, alors $\{c_i \mid i \in I\}$ avec l'ordre $c_i < c_j \Leftrightarrow i < j$ est un ensemble d'indiscernables sur M dans $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \in I}$.

<u>Démonstration</u>.- (a) et (b) sont des conséquences immédiates du "lemme de la réunion" bien connu de Tarski.

(c) Etant donné deux suites $J = \{i_o, \ldots, i_k\}_<$, $J' = \{i'_o, \ldots, i'_k\}_<$ de la même longueur $k+1$, alors $(c_{i_o}, \ldots, c_{i_k})$ et $(c_{i'_o}, \ldots, c_{i'_k})$ réalisent dans $M(c_i)_{i \in J}$ et $M(c_i)_{i \in J'}$, respectivement, le même type sur M (à savoir le $k+1$-type construit comme dans la proposition IV.2(a) à partir de $t_o = t, \ldots, t_k = t$). Donc, ces deux suites réalisent le même type également dans le modèle $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \in I}$ puisque c'est une extension élémentaire de $M(c_i)_{i \in J}$ et $M(c_i)_{i \in J'}$.

<u>Notations</u>.- Comme d'habitude, nous abrégeons $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i \in I}$ par $M(c_i)_{i \in I}$ et même par $M(I)$, s'il n'y a pas de danger de confusion. En vue de (c) de la proposition qui précède, nous dirons, quand il y a lieu, que I (avec son ordre) est un ensemble d'indiscernables de $M(I)$.

Un argument semblable permet de démontrer les deux premiers points de :

IV.4. <u>Proposition</u>.- Soient I_1, I_2 des ensembles ordonnés . Alors

(a) $I_1 \subseteq I_2^{(1)} \Rightarrow M(c_i)_{i\in I_1} \prec M(c_i)_{i\in I_2}$

(b) Plus généralement, si $f : I_1 \to I_2$ est un monomorphisme d'ordre et si $t'_{f(i)} = t_i$ pour tout $i \in I_1$, alors il existe un unique plongement élémentaire $\overline{f} : M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I_1} \longrightarrow M\begin{pmatrix} t'_j \\ c'_j \end{pmatrix}_{j\in I_2}$ tel que $\overline{f}(c_i) = c'_{f(i)}$ et $\overline{f} \upharpoonright M$ est l'identité.

(c) Si I_1 est un segment initial de I_2, alors

$$M(c_i)_{i\in I_2} = (M(c_i)_{i\in I_1})(c_i)_{i\in I_2 - I_1} .$$

<u>Démonstration</u>.- (a) se déduit de manière évidente de (b). Pour prouver (b), il suffit de remarquer que pour $i_o <\ldots< i_k$ dans I_1, $(c_{i_o},\ldots,c_{i_k})$ et $(c'_{f(i_o)},\ldots,c'_{f(i_k)})$ réalisant le même type sur M ; donc l'application $c_i \mapsto c'_{f(i)}$ $(i \in I_1)$ et l'identité sur M est élémentaire, et par IV.1 (a) elle s'étend à $M(c_i)_{i\in I_1}$.

(c) Soient $N = M(c_i)_{i\in I_1}$, $N' = M(c_i)_{i\in I_2}$. (a) implique que $N(c_i)_{i\in K} \prec N'$ pour tout $K \in \mathbb{P}_\omega(I_2 - I_1)$, et en particulier que $N(c_i)_{i\in I_2 - I_1} \subseteq N'$. Réciproquement, si $J \in \mathbb{P}_\omega(I_2)$, le fait que I_1 est segment initial de I_2 et IV.2 (c) entraînent $M(c_i)_{i\in J} = [M(c_i)_{i\in J\cap I_1}](c_i)_{i\in J\cap(I_2 - I_1)}$; donc, par IV.1 (c) on a $M(c_i)_{i\in J} \prec N(c_i)_{i\in J\cap(I_2-I_1)}$, d'où il suit facilement l'inclusion $N' \subseteq N(c_i)_{i\in I_2 - I_1}$.

IV.5.- <u>Corollaire</u>.- (Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski)

Etant donné une structure infinie $\mathfrak{A}$ de langage quelconque [2] et un type d'ordre total τ, il existe $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ contenant un ensemble d'indiscernables de type τ.

<u>Démonstration</u>.- Un argument standard de compacité montre qu'on peut se ramener au

---

(1) C'est-à-dire l'ordre de I_1 est la restriction de celui de I_2.

(2) de cardinalité arbitraire et n'étendant pas nécessairement celui de l'arithmétique.

cas où le langage L de $\mathfrak{A}$ est fini.

En "copiant" sur l'univers de $\mathfrak{A}$, au moyen d'une bijection quelconque la structure d'un modèle de l'arithmétique de même cardinalité que $\mathfrak{A}$ on enrichit $\mathfrak{A}$ en modèle de $\mathcal{P}$ (appeler L' le langage ainsi obtenu et noter que l'arithmétique et la L-strucutre initiale de $\mathfrak{A}$ ne sont pas nécessairement reliées).

On applique la Proposition IV.3 (c) avec $M = \mathfrak{A}$, I un ensemble de type τ et t un type définissable non-trivial quelconque (qui existe en vertu des résultats de § III puisque L' est fini).

La L'-structure $M\binom{t_i}{c_i}_{i \in I}$ a I comme ensemble d'indiscernables ; en particulier, I est aussi un ensemble d'indiscernables pour la L-structure $\mathfrak{B} = M\binom{t_i}{c_i}_{i \in I} \upharpoonright L$.

B.- Blocs. Itération des types uniformes

On introduit ici l'importante notion de bloc. Celle-ci permet de décrire de manière simple et intuitive les modèles de la forme $M\binom{t}{c}$ où t est un type uniforme et, plus généralement, les modèles obtenus par itération des types uniformes.

IV.6.- Définition.- Si $M \models \mathcal{P}$ et $x,y \in M$, posons :

$x \sim y \Leftrightarrow$ il existe un terme pur (i.e. sans paramètres) $f(v)$ tel que $M \models x \leq f(y) \wedge y \leq f(x)$.

$B(x,M) = \{y \in M \mid x \sim y\}$ s'appelle le bloc de x en M.

IV.7. Proposition.- (1) Chacune des conditions suivantes équivaut à $x \sim y$.

(a) il existe des termes purs $f_1(v)$, $f_2(v)$ tels que

$$M \models x \leq f_1(y) \wedge y \leq f_2(x).$$

(b) il existe des termes purs $g_1(v)$, $g_2(v)$ tels que

$$M \models g_1(x) \leq x,y \leq g_2(g_1(x)).$$

(c) il existe un terme pur $h(v)$ tel que $M \models x,y \leq \min\{h(x),h(y)\}$.

(2) $\sim$ est une relation d'équivalence

(3) $B(x,M)$ est un segment de M.

Démonstration.- (1) $x \sim y \Leftrightarrow$ (a) est évidente en posant $f(v) = \max\{f_1(v), f_2(v)\}$. Pour (b) $\Rightarrow x \sim y$ mettre $f(v) = \max\{g_2(g_1(v)), g_2'(g_1'(v))\}$ où g_1, g_2, g_1', g_2' sont obtenus en appliquant (b) à x,y respectivement. Pour la réciproque mettre $f'(v) = \max\{f(u) \mid u \leq v\} + v$, $g_1(v) = \mu u(f'(u) \geq v)$ et $g_2(v) = f'(f'(v))$.

(c) $\Leftrightarrow x \sim y$ est prouvée en posant $h(v) = f(v) + v$.

(2) La réflexivité et la symétrie de $\sim$ sont triviales. Pour la transitivité, vérifier la condition (1.a) pour les termes $f_1'(f_2(v))$ et $f_2'(f_1'(v))$, où $f_i'(v) = \max\{f_i(u) \mid u \leq v\}$ $(i = 1,2)$ et f_1, f_2 sont donnés par les conditions $x \sim y$ et $y \sim z$. On obtient $x \sim z$.

(3) Etant donné $y_1, y_2 \in B(x,M)$ et $y \in M$ tels que $y_1 \leq y \leq y_2$, la conclusion $y \in B(x,M)$ est obtenue en appliquant (1.a) aux termes f_1', f_2', où $f_1'(v) = \max\{f_1(u) \mid u \leq v\}$, et les termes f_1, f_2 sont obtenus à partir des conditions $x \sim y_1 \sim y_2$.

Les blocs permettent de caractériser facilement les segments initiaux de M qui sont des sous-structures élémentaires :

IV.8. Proposition.- Soit S un segment initial de M ($M \models \mathcal{P}$). Alors $S \prec M$ ssi pour tout $x \in S$, $B(x,M) \subseteq S$.

Démonstration.- $\Rightarrow$) Si $S \prec M$, soient $x \in S$ et $y \in M$ tels que $x \sim y$; soit $f(v)$ un terme tel que $M \models x \leq f(y) \wedge y \leq f(x)$. Comme $f^M(x) \in S$, il est évident que $y \in S$.

$\Leftarrow$)Soient $\tau(v_1, \ldots, v_n)$ un terme et $x_1, \ldots, x_n \in S$; il suffit de prouver que $\tau^M(x_1, \ldots, x_n) \in S$. Posons $f(v) = \max\{\tau(v_1, \ldots, v_n) \mid v_1, \ldots, v_n \leq v\}$ et $x' = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$. On a $\tau^M(x_1, \ldots, x_n) \leq f^M(x')$. Puisque S est un segment initial il suffit de voir que $f^M(x') \in S$. Si $M \models f(x') \leq x'$, alors $f^M(x') \in S$ puisque S est un segment initial. Si $M \models x' \leq f(x')$, alors $x' \sim f^M(x')$ par IV.7 (1.a) avec $x = x'$, $y = f^M(x')$, $f_2 = f$ et $f_1(v) = v$; donc $f^M(x') \in B(x',M) \subseteq S$.

IV.9. Corollaire.- Soient $M \models \mathcal{P}$ et $\{x_i \; i \in I\}$ un système complet de représentants pour la relation $\sim$ dans M, i.e.

$$x_i \not\sim x_j \quad \text{pour } i \neq j, \; i,j \in I,$$

pour tout $x \in M$ il existe $i \in I$ tel que $x \sim x_i$.

Définissons dans I l'ordre suivant :

$$i <_I j \Leftrightarrow M \models x_i < x_j.$$

Alors l'application $J \longmapsto \bigcup_{i \in J} B(x_i,M)$ est une bijection entre les segments initiaux de $< I, <_I >$ et les segments initiaux M' de M tels que $M' \prec M$.

Démonstration.- Si J est un segment initial de I, alors $\bigcup_{i \in J} B(x_i,M)$ est évidemment un segment initial de M clos par la relation $\sim$; par IV.8, il est donc une sous-structure élémentaire de M.

Réciproquement, si $M' \prec M$ est un segment initial, on pose $J = \{i \in I | B(x_i,M) \subseteq M'\}$, et l'on vérifie sans peine en utilisant IV.7 que J est un segment initial de I et $M' = \bigcup_{i \in J} B(x_i,M)$.

Nous montrons maintenant que rajouter à M un(élément réalisant un) type uniforme revient à lui ajouter un bloc.

IV.10. Théorème.- (a) Soit t un type uniforme. Alors $M(^t_c) - M = B(c,M(^t_c))$.

(b) Soit I un ensemble ordonné. Si t_i est un type uniforme pour chaque $i \in I$, alors

$$M(c_j)_{j \leq i} - M(c_j)_{j<i} = B(t_i,M(c_i)_{i \in I}).$$

Démonstration.- (a) L'inclusion $B(c,M(c)) \subseteq M(c) - M$ est évidente.

Pour prouver la réciproque, si $x \in M(c) - M$, alors $x = f(a,c)$ pour un terme pur $f(u,v)$ et un $a \in M$. En posant $f'(v) = \max \{f(u,v) | u \leq v\}$ on obtient $M(c) \models x \leq f'(c)$. D'autre part, la remarque (*) ci-dessous donne $M(c) \models c \leq g(x)$ pour un terme pur $g(v)$, d'où $x \sim c$ par IV.7 (1.a), i.e. $x \in B(c,M(c))$.

En utilisant la condition (2) du théorème II.18, on voit aisément que l'uniformité de t entraîne :

(*) pour tout $x \in M(c) - M$ il existe un terme pur $g(v)$ tel que $M(c) \models g(x) \geq c$ (1)

(1) En effet, cette condition pour tout $N \succ M$ équivaut à l'uniformité de t ; cf. démonstration de (2) $\Longrightarrow$ (3), théorème II.18.

(b) Posons $N = M(c_j)_{j\leq i}$. Puisque $M(c_j)_{j\leq i} = N(c_i)$ (cf.IV.5 (c)),de la partie (a) on obtient :

$$M(c_j)_{j\leq i} - M(c_j)_{j<i} = B(c_i, N(c_i)).$$

Il suffit de voir que $B(c_i,N(c_i)) = B(c_i,M(c_j)_{j\in I})$. Par IV.4 (c et a), $N(c_i)$ est un segment initial et une sous-structure élémentaire de $M(c_j)_{j\in I}$; d'où par IV.8 :

$$B(c_i,M(c_j)_{j\in I}) \subseteq N(c_i) ;$$

ceci entraîne évidemment l'égalité voulue.

C.- Phénomènes d'exclusion

On va voir que tout point d'un modèle possède une "zone d'influence" dans laquelle il empêche tout autre point de réaliser le même type que lui ; d'où le nom de "phénomène d'exclusion" donné à ce genre de situation. Par exemple, on montre qu'un type minimal est réalisé par un seul élément du bloc qu'il détermine (et même mieux, cf. théorème IV.17 (c)). Un autre résultat important dans la même direction est le théorème IV.11 ci-dessous.

IV.11. Théorème.- (Ehrenfeucht-Gaifman). Soient M un modèle de $\mathcal{P}$, f(v) un terme et $a \in M$. Si $f^M(a) \neq a$, alors a et $f^M(a)$ réalisent dans M des types distincts ; en effet, les types respectifs sont distingués par une formule ayant les mêmes paramètres que f. En particulier, si f est un terme pur, a et $f^M(a)$ ont des types purs distincts.

Démonstration.- Commençons par définir une relation d'équivalence entre éléments x,y de M :

$x \underset{f}{\equiv} y \Leftrightarrow$ il existe une suite finie $x_o = x, x_1,\dots,x_z = y$ d'éléments de M telle que pour chaque i, $0 \leq i \leq z$, ou bien $x_{i+1} = f(x_i)$ ou bien $f(x_{i+1}) = x_i$.

On dira que la suite $x_o,\dots,x_z$ relie x à y.

Ces définitions sont formalisables dans $\mathcal{P}$ de manière évidente au moyen de la codification des suites finies. Remarquons que :

(a) $\underset{f}{\equiv}$ est, en effet, une relation d'équivalence.

La preuve est laissée en exercice.

(b) Si $x \underset{f}{\equiv} y$, alors il existe une chaîne $x_o = x, x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_z = y$ telle que $x_{i+1} = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq t-1$ et $x_i = f(x_{i+1})$ pour $t \leq i \leq z-1$ (ici $1 \leq t \leq z-1$).

En effet, si $x_i = f(x_{i+1})$ et $x_{i+2} = f(x_{i+1})$, alors $x_i = x_{i+2}$ et on pourra supprimer des éléments de la chaîne initiale jusqu'à l'élimination de ce cas de figure. Evidemment, ce procédé d'élimination n'augmente pas la longueur d'une suite donnée reliant x à y ; en particulier, la plus courte suite reliant x à y doit avoir cette forme-ci.

Supposons maintenant que $a \in M$, $b = f^M(a)$ et $b \neq a$. Evidemment $a \underset{f}{\equiv} b$ par une chaîne de longueur 1. Posons :

$$g(v) = \mu u \, (u \underset{f}{\equiv} v)$$

et

$$h(v) = \mu w (\exists s \ \ (s \text{ code une suite reliant } v \text{ à } g(v) \wedge \ell(s) = w)).$$

(c) $\mathcal{P} \models g(v) = g(v') \longleftrightarrow v \underset{f}{\equiv} v'$.

Ceci est clair puisque g(v) est le plus petit élément de la classe d'équivalence de v modulo $\underset{f}{\equiv}$.

En particulier, $M \models g(a) = g(b)$. Soit c cet élément, et soit $s_o = c$, $s_1, \ldots s_{h(a)-1} = a$ une suite de longueur minimale reliant c à a. Deux cas sont possibles :

(d) b apparaît dans cette suite.

Disons $b = s_i$. Alors $i = h(a) - 2$, parce que sinon $s_o = c, s_1, \ldots, s_i = b = f(a)$, a serait une suite plus courte reliant c et a. Pratiquement, le même argument montre aussi que $s_o, \ldots, s_i$ est la plus courte suite reliant c à b. Donc $h(a) = h(b) + 1$. Ceci entraîne que l'un de h(a), h(b) est pair et l'autre impair, et donc que a et b ont des types distincts.

(e) b n'apparaît pas dans cette suite.

Dans ce cas, la suite doit être de la forme $s_o = c$, $s_1 = f(c)$, $s_2 = f(f(c)), \ldots$, $s_{h(a)-1} = f^{(h(a)-2)}(c) = a$.

Sinon, vu que la suite $s_o,\ldots,s_{h(a)-1}$ a la forme établie dans (b), on aurait $s_{h(a)-2} = f(a) = b$.

Soit :

$$q(v) = \mu u(f^{(u)}(g(v)) = v),$$

(où f^u désigne le u-ième itéré de f). Comme $b = f(a)$, il est évident que $q(b) = q(a)+1$. Donc q(a) et q(b) n'ont pas même parité, et, en particulier, n'ont pas même type.

Remarque.- La preuve ci-dessus est due à Ehrenfeucht. Celle de Gaifman utilise des idées très semblables, mais elle est légèrement plus longue.

IV.12. Corollaire.- Si $N = M(b)$, le seul M-endomorphisme élémentaire de N est l'identité.

Démonstration.- Chaque $x \in N$ a la forme $x = f^N(b)$ où f est un terme à paramètres dans M . Si $x \neq b$, par IV.11 x et b ont types distincts sur M. En particulier, toute application élémentaire de N dans N qui laisse M fixe envoie b dans lui-même ; i.e., elle est l'identité sur $M \cup \{b\}$, et donc aussi sur N.

Dans le reste de ce paragraphe, nous étudions les phénomènes d'exclusion pour les types minimaux.

IV.13. Proposition.- Soient $M,N \models \mathcal{P}$, $M \prec N$, M_o le sous-modèle minimal de M, et a $a,b \in N$ tels qu'il existe un terme pur f(v) tel que $M < a \leq b \leq f^N(a)$. Alors :

(a) il existe $x \in M_o(a) \cap M_o(b)$ tel que $M < x$;

(b) si $M' \prec M$ et M'(b) est une extension $\prec$-minimale de M', alors $b \in M'(a)$; si M'(a) est une extension $\prec$-minimale de M', alors $a \in M'(b)$.

Démonstration.- On peut supposer que $\mathcal{P} \models$ "f est strictement croissante et monotone"; sinon on prend $\max\{f(u) \mid u \leq v\} + v$ au lieu de f. Soit $f^{(u)}(v)$ un terme de variables u,v qui donne la u-ième itération de f, i.e. qui satisfait la condition d'induction

$$\mathcal{P} \models f^{(o)}(v) = v \wedge \forall u(f^{(u+1)}(v) = f(f^{(u)}(v))).$$

Soit $g(v) = \mu u(f^{(u)}(o) \geq v)$. On a :

(*) $\quad \mathcal{P} \models v_1 \leq v_2 \leq f(v_1) \rightarrow g(v_2) = g(v_1) \vee g(v_2) = g(v_1) + 1.$

En effet, si $g(v_1) = u$, on a $f^{(u)}(o) \geq v_1$, d'où soit $f^{(u)}(o) \geq v_2$, soit $f(f^{(u)}(o)) \geq f(v_1) \geq v_2$. Soit $w < u$; dans le premier cas par définition de $g(v_1)$ on a $f^{(w)}(o) < v_1 \leq v_2$, d'où $g(v_2) = u = g(v_1)$. Dans le second cas, $f^{(u)}(o) < v_2$, d'où $f^{(w+1)}(o) \leq f^{(u)}(o) < v_2$; on en conclut que $g(v_2) = u + 1 = g(v_1) + 1$.

Preuve de (a).- Soit $x = g^N(a)$; donc $N \models f^{(x)}(o) \geq a$ et $x \in M_o(a)$. Comme $M < a$ et $M \prec N$, ceci implique $M < x$. La relation (*) implique $x = g^N(b)$ ou $x = g^N(b)-1$, d'où $x \in M_o(b)$.

Preuve de (b).- Si $M' \prec M$ et $M'(b)$ est une extension $\prec$-minimale de M, comme $x \in M'(b) - M$, on obtient $M'(x) = M'(b)$, d'où $b \in M'(x) \subseteq M'(a)$. L'autre affirmation se démontre de manière analogue.

IV.14. Corollaire.- (a) Si $M \models a \leq b \leq f(a)$ pour un terme pur $f(v)$, $M_o < a$, (mais pas forcément $M < a$) et b réalise un type minimal, alors il y a un terme pur $g(v)$ tel que $M \models b = g(a)$; si a aussi réalise un type minimal, il existe un terme pur $h(v)$ tel que $M \models a = h(b)$.

(b) Si $M \prec N$, $a,b \in N$, et $M(a)$, $M(b)$ sont des extensions $\prec$-minimales de M chacune cofinale dans l'autre, alors $M(a) = M(b)$.

Démonstration.- (a) Utilisez la proposition IV.13(b) avec M au lieu de N et M_o = le modèle minimal de $\mathcal{P}$ au lieu de M et M'. Le résultat suit de ce que $M_o(c) = \{g^M(c) \mid g(v)$ terme pur de $L\}$, pour $c \in M$.

(b) On peut supposer que $N \models a \leq b$, l'autre cas étant symétrique. Le fait que M(a) est cofinal dans M(b) se traduit par l'existence d'un terme f(v) à paramètres dans M tel que $N \models a \leq b \leq f(a)$. Or, f(v) devient un terme pur dans L(M), l'extension de L où chaque élément de M est nommé par une constante. Puisque $M < a$ (a réalise un type minimal, donc non-borné) on peut donc utiliser la proposition IV.13(b) avec M' = M pour conclure que $b \in M(a)$ et $a \in M(b)$, c'est-à-dire $M(a) = M(b)$.

Remarque.- Si a,b réalisent le même type minimal, la partie (b) du corollaire peut être améliorée (voir théorème IV.17 (d)).

Dans le but d'établir la relation entre les blocs d'un modèle et les types minimaux réalisés dedans, nous introduisons une relation de dépendance entre des types :

IV.15. Définition.- (a) Soit $t(v)$ un type et $f(v)$ un terme. On pose :

$$f(t) = \{\varphi(v) \mid \varphi(f(v)) \in t\}.$$

(b) On dit qu'un type t_1 dépend d'un autre t_2 ssi il existe un terme $f(v)$ tel que $t_1 = f(t_2)$. On pose $t_1 \approx t_2$ ssi t_1 dépend de t_2 et t_2 dépend de t_1.

Remarques.- (a) $f(t)$ est un type dans la même théorie complète et dans le même langage que t.

(b) Si a réalise t dans M, alors $f^M(a)$ réalise $f(t)$ dans M.

(c) $\approx$ est une relation d'équivalence entre types d'une théorie complète donnée.

(d) Le théorème d'Ehrenfeucht-Gaifman (IV.11) peut être reformulé de la manière suivante : pour tout type t et tout terme $f(v)$, soit $(f(v) = v) \in t$, soit $f(t) \neq t$.

La vérification, facile, de ces faits est laissée en exercice au lecteur.

IV.16. Lemme.- Soit $t_2 = f(t_1)$ pour un terme f.

(a) Si t_1 est définissable, t_2 l'est aussi.

(b) Si t_1 est minimal, alors t_2 est minimal ou trivial (i.e. $(v = \pi) \in t_2$ pour un terme constant π). Si t_2 est minimal, alors il existe un terme $g(v)$ tel que $(g(f(v)) = v) \in t_1$, d'où $t_1 = g(t_2)$ et $t_1 \approx t_2$.

Remarque.- Il y a une condition semblable à (b) pour les types uniformes (que nous n'utilisons pas, et donc ne démontrons pas) :

Si t_1 est uniforme, alors t_2 est uniforme ou trivial.

Démonstration.- (a) Soit d^1 le schéma définissant t_1 ; t_2 est défini par le schéma :

$$d^2_\varphi = d^1_\psi \quad \text{où } \psi(\bar{u},v) = \varphi(\bar{u},f(v))$$

comme on peut le vérifier sans peine.

(b) Soit M le modèle minimal sur lequel t_1 est un type, et soit $M' = M\binom{t_1}{b}$. Soit $b' = f^{M'}(b)$. Si $b' \in M$, alors il existe un terme constant π tel que $M' \models b' = \pi$; comme b' réalise t_2 on a $(v = \pi) \in t_2$. Si $b' \notin M$, comme M' est une extension $\prec$- minimale de M, $M(b') = M(b)$; donc il existe un terme g(v) tel que $M' \models g(b') = b$, i.e., $M' \models g(f(b)) = b$. Puisque b réalise t_1, $(g(f(v)) = v) \in t_1$; ceci donne :

$$\varphi(v) \in t_1 \iff \varphi(g(f(v))) \in t_1 \iff \varphi(g(v)) \in t_2$$

pour toute formule φ , c'est-à-dire $t_1 = g(t_2)$. On a aussi $(f(g(f(v))) = f(v)) \in t_1$, c'est-à-dire $\psi(f(v)) \in t_1$, où $\psi(v)$ est la formule $f(g(v)) = v$; donc $\psi(v) \in t_2$, i.e., $(f(g(v)) = v) \in t_2$.

Pour voir que t_2 est minimal, la relation $M' \models g(b') = b$ et le fait que t_1 est non-borné montrent que $M < b'$ et donc que t_2 est non-borné. Si $N' = N(c)$ où $N \succ M$, $N < c$ et c réalise t_2, on a $N' \models f(g(c)) = c$, ce qui entraîne $N < c'$ et $N(c') = N(c)$, où $c' = g^{N'}(c)$. Puisque $t_1 = g(t_2)$, c' réalise t_1, d'où N(c') - et donc N(c) - est une extension $\prec$ -minimale de N.

IV.17. <u>Théorème</u>.- Soit $a \in N$ et supposons que a réalise dans N un type minimal t. Alors

(a) Pour tout $b \in B(a,N)$ il existe un terme pur f(v) tel que $a = f^N(b)$ (réciproquement, si $a = f^N(b)$, $b \in N$, alors $b \in B(a,N)$, comme l'on peut vérifier aisément).

(b) Si un élément de B(a,N) réalise un type minimal t', alors $t' \approx t$.

(c) Tout type t' tel que $t' \approx t$ est réalisé par un et un seul élement de B(a,N).

(d) Si $b \in N$ réalise le même type minimal t et $M \prec N$, alors $b \neq a$ implique que l'un de M(a), M(b) n'est pas cofinal dans l'autre.

<u>Démonstration</u>.- (a) Par IV.7 (1.c) il existe un terme pur h(v) tel que $N \models a \leq b \leq h(a)$ ou bien $N \models b \leq a \leq h(b)$. Dans les deux cas IV.14(a) entraîne l'existence d'un terme f(v) tel que $N \models a = f(b)$.

(b) Si $b \in B(a,N)$ réalise t', par (a) $N \models a = f(b)$; d'où $t = f(t')$. Comme t' est minimal, le lemme IV.16(b) entraîne $t \approx t'$.

(c) Soit $t' \approx t$, par exemple $t' = f(t)$. Le lemme IV.16(b) implique que t' est minimal ou trivial ; la seconde alternative est exclue parce que $t = g(t')$ pour un terme g, et t' est non-trivial.

Par IV.16(b), $(g(f(v)) = v) \in t$. En mettant $b = f^N(a)$ on obtient $a = g^N(b)$, d'où $b \in B(a,M)$. Comme a réalise t, b réalise $f(t) = t'$.

Supposons que $c \in B(a,N)$ réalise t' dans N. Comme $b \in B(a,N) = B(c,N)$, par (a) appliqué à c (au lieu de a) il existe un terme h tel que $N \models h(b) = c$. Or, b et $c = h^N(b)$ ont même type t' ; du théorème d'Ehrenfeucht-Gaifman (IV.11) il s'ensuit donc que $(h(v) = v) \in t'$, d'où $N \models h(b) = b$, i.e. $c = b$, car b réalise t'.

(d) Supposons, par contradiction, que M(a) et M(b) sont cofinaux l'un dans l'autre. alors IV.14(b) entraîne que M(a) = M(b) ; appelons M' ce modèle. Puisque t est uniforme, le théorème IV.10(a) implique

$$M' - M = B(a,M') = B(b,M').$$

Il en résulte que le type minimal est réalisé par les éléments distincts a, b du même bloc, ce qui contredit (c).

<u>Remarque</u>.- Pour finir, remarquons qu'il est possible de démontrer l'existence de $K^{\aleph_0}$ types minimaux deux par deux non-équivalents selon la relation $\approx$, où K est la cardinalité du modèle minimal de $\mathcal{P}$. Ce résultat améliore considérablement le résultat, donné au § III, d'existence de $K^{\aleph_0}$ types minimaux tout court. Pour la démonstration, voir Gaifman [ ], théorème 4.13.

D.- <u>Support d'un élément dans</u> M(I)

Nous montrons ici que dans un modèle de la forme $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, où les types t_i sont définissables, tout élément dépend - dans un sens précisé ci-dessous - seulement d'un ensemble fini de coordonnées $i \in I$; cet ensemble S_x est appelé le <u>support</u> de x. Quand les types t_i sont minimaux, le support détermine le sous-modèle M(x) engendré par x de la manière la plus forte possible : $M(x) = M(c_i)_{i\in S_x}$.

En fait, nos résultats sont plus généraux et dépendent seulement de ce que les types t_i aient la propriété suivante (toujours vérifiée par les types définissables dans $\mathcal{P}$; cf IV.20 ci-dessous) :

IV.18. Définition.- Un type définissable t sur M a la propriété d'intersection si quels que soient les modèles M_o, M_1, M_2 tels que $M \prec M_1 \cap M_2 \prec M_i \prec M_o$ $(i = 1,2)$, on a

$$(M_1 \cap M_2)\binom{t}{c} = M_1\binom{t}{c} \cap M_2\binom{t}{c}.$$

IV.19. Théorème.- Soient I un ensemble ordonné et $N = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in I}$, où $M \models \mathcal{P}$.

(a) Pour tout $x \in N - M$ il existe un unique $i_x \in I$ tel que : $x \notin M(c_i)_{i<i_x}$, et pour tout $J \subseteq I$, on a

$$x \in M(c_i)_{i\in J} \Rightarrow i_x \in J \quad \text{et} \quad x \in M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_x}}$$

(b) Si chaque type t_i a la propriété d'intersection, alors pour chaque $x \in N$, il y a un unique $S_x \subseteq I$ fini tel que pour tout $J \subseteq I$:

$$x \in M(c_i)_{i\in J} \Leftrightarrow S_x \subseteq J.$$

Démonstration.- (a) Soit $x \in N - M$. Nous commençons par démontrer que pour chaque $J \subseteq I$ tel que $x \in M(c_i)_{i\in J}$, il existe $i_J \in J$ tel que $x \in M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_J}} - M(c_i)_{i<i_J}$.

Puis nous montrons que $i_J = i_{J'}$, pour toute paire de tels ensembles J, J'.

i_J est construit de la façon suivante. Comme $x \in M(c_i)_{i\in J}$, il existe $J' \subseteq J$, J' fini tel que $x \in M(c_i)_{i\in J'}$. Mieux, il existe un tel J' minimal, c'est-à-dire tel que aucun sous-ensemble propre n'a la même propriété ; comme $x \notin M$, $J' \neq \emptyset$. Soient $i_J = \max J'$, et $J'' = \{i \in J' \mid i < i_J\}$. Puisque J' est minimal et $J'' \subset J'$, on a

$$x \in M(c_i)_{i\in J'} - M(c_i)_{i\in J''} = (M(c_i)_{i\in J''})\binom{t_{i_J}}{c_{i_J}} - M(c_i)_{i\in J''}.$$

Aussi la proposition IV.4(a) entraîne que $M(c_i)_{i\in J''} \prec M(c_i)_{i<i_J}$. En utilisant le fait IV.1(c) avec $M_1 = M(c_i)_{i\in J''}$, $M_2 = M(c_i)_{i<i_J}$ et $t = t_{i_J}$ on conclut que

$$x \in M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_J}} - M(c_i)_{i<i_J}.$$

Pour démontrer la seconde affirmation, si $i_J < i_{J'}$, on a $x \in M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_J}}$ et $x \notin M(c_i)_{i<i_{J'}}$, ce qui est évidemment contradictoire puisque

$M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_J}} \subseteq M(c_i)_{i<i_{J'}}$. Un argument symétrique prouve que $i_{J'} < i_J$ est aussi impossible. Donc $i_J = i_{J'}$.

Le i_x est défini en mettant $i_x = i_J$ pour n'importe quel $J \subseteq I$ tel que $x \in M(c_i)_{i\in J}$.

(b) Soit $x \in N$. Mettons $S_x = \bigcap \{J \subseteq I \mid x \in M(c_i)_{i\in J}\}$. L'implication $x \in M(c_i)_{i\in J} \Rightarrow S_x \subseteq J$ est évidente. Pour la réciproque il suffit de montrer que $x \in M(c_i)_{i\in S_x}$. Comme $x \in M(c_i)_{i\in J}$ pour un $J \subseteq I$ fini, S_x est fini et il existe $J_1,\ldots,J_n$ finis tels que $S_x = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_k$ et $x \in M(c_i)_{i\in J_k}$ $(k = 1,\ldots,n)$; donc il suffit de prouver

$$\bigcap_{k=1}^{n} M(c_i)_{i\in J_k} = M(c_i)_{i\in \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_k} \quad ;$$

ceci se réduit au cas $n = 2$ de manière évidente. L'inclusion $\supseteq$ est aussi évidente. Nous démontrons l'autre inclusion par induction sur $\overline{\overline{J_1}} + \overline{\overline{J_2}}$ ($\overline{\overline{J_i}}$ = cardinalité de J_i, finie). Soit $x \in M(c_i)_{i\in J_1} \cap M(c_i)_{i\in J_2}$. Si $x \in M$, alors évidemment $x \in M(c_i)_{i\in J_1\cap J_2}$. Donc, supposons $x \notin M$. Par la partie (a), $i_x \in J_1 \cap J_2$ et $x \in M(c_i)_{i\in J_k}$. Soit $J'_k = \{ i \in J_k \mid i < i_k\}$ $(k = 1,2)$. On a

$x \in M(c_i)_{i\in J'_1}\binom{t_{i_x}}{c_{i_x}} \cap M(c_i)_{i\in J'_2}\binom{t_{i_x}}{c_{i_x}}$. Comme $\overline{\overline{J'_1}} + \overline{\overline{J'_2}} < \overline{\overline{J_1}} + \overline{\overline{J_2}}$, par hypothèse d'induction $M(c_i)_{i\in J'_1} \cap M(c_i)_{i\in J'_2} = M(c_i)_{i\in J'_1\cap J'_2}$; or, t_{i_x} a la propriété d'intersection, d'où

$$x \in M(c_i)_{i\in J'_1\cap J'_2}\binom{t_{i_x}}{c_{i_x}} = M(c_i)_{\substack{i\in J_1\cap J_2\\ i\leq i_x}} \subseteq M(c_i)_{i\in J_1\cap J_2} \ .$$

On démontre maintenant :

IV.20.- <u>Proposition</u>.- Tout type définissable sur un modèle de l'arithmétique de Péano généralisée $\mathcal{P}$ a la propriété d'intersection. De plus, ceci est vrai pour toute théorie ayant la propriété suivante : si la formule $\varphi(\overline{u},\overline{v})$ définit une relation d'équivalence entre n-uples, alors il y a des termes $\sigma_1(\overline{u}),\ldots,\sigma_n(\overline{u})$ tels que :

$$\forall \bar{u}\ \forall \bar{v}\ [\varphi(\bar{u},\bar{v}) \rightarrow \varphi(\bar{u},\sigma_1(\bar{u}),\ldots,\sigma_n(\bar{u})) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \sigma_i(\bar{u}) = \sigma_i(\bar{v})] \ ,$$

(c'est-à-dire, en ayant assez de termes pour choisir des représentants des classes de toute relation d'équivalence définissable).

Démonstration.- Il est évident que $(M_1 \cap M_2)\binom{t}{c} \subseteq M_1\binom{t}{c} \cap M_2\binom{t}{c}$. Il faut démontrer l'inclusion réciproque. Soit $N = M_o\binom{t}{c}$. Chaque $x \in M_1(c) \cap M_2(c)$ a les formes $x = \tau_1(\bar{a}_1\ ,c) = \tau_2(\bar{a}_2,c)$, où τ_1, τ_2 sont des termes et $\bar{a}_i \in M_i$; d'où $N \models \tau_1(\bar{a}_1,c) = \tau_2(\bar{a}_2,c)$.

On trouvera un $\bar{a}_o \in M_1 \cap M_2$ tel que $x = \tau_1(\bar{a}_o,c)$. Puisque t est définissable, il existe une formule $\psi(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ telle que pour tous $\bar{z}_1,\bar{z}_2 \in M_o$,

$$N \models \tau_1(\bar{z}_1,c) = \tau_2(\bar{z}_2,c) \Leftrightarrow M_o \models \psi(\bar{z}_1,\bar{z}_2).$$

Donc $M_o \models \exists\, \bar{u}_1\ \psi(\bar{u}_1,\bar{a}_2)$, et puisque $M_2 \prec M_o$, il existe $\bar{a}'_1 \in M_2$ tel que $N \models \tau_1(\bar{a}_1,c) = \tau_1(\bar{a}'_1,c)\ (= \tau_2(\bar{a}_2,c))$.

En appliquant une seconde fois la définissabilité de t, il y a une formule $\varphi(\bar{u},\bar{u}')$ (où $\ell(\bar{u}) = \ell(\bar{u}') = \ell(\bar{a}_1)$) telle que pour tous $\bar{z}$, $\bar{z}' \in M_o$ on a :

$$N \models \tau_1(\bar{z},c) = \tau_1(\bar{z}',c) \Leftrightarrow M_o \models \varphi(\bar{z},\bar{z}').$$

Il est évident que φ définit une relation d'équivalence entre n-uples $(n = \ell(\bar{a}_1))$ et qu'on a $M_o \models \varphi(\bar{a}_1,\bar{a}'_1)$. Vu l'hypothèse, on a $M_o \models \sigma_i(\bar{a}_1) = \sigma_i(\bar{a}'_1)$ $(i = 1,\ldots,n)$, où la suite des termes σ_i choisit des représentants des classes d'équivalence modulo φ . Puisque $\sigma_i(\bar{a}_1) \in M_1$ et $\sigma_i(\bar{a}'_1) \in M_2$ $(i = 1,\ldots,n)$, en mettant $\bar{a}_o = \langle\sigma_1(\bar{a}_1),\ldots,\ \sigma_n(\bar{a}_n)\rangle$ on a la conclusion voulue.

Manifestement, $\mathcal{P}$ satisfait la condition de l'énoncé ; le principe du minimum permet de choisir la plus petite n-uple dans l'ordre lexicographique construit à partir de l'ordre de base < , de chaque classes d'équivalence modulo φ . Formellement, les termes σ_i sont définis par induction :

$$\sigma_1(\bar{u}) = \mu v_o\ [\ \exists\ \bar{v}((\bar{v})_o = v_o \wedge \varphi(\bar{u},\bar{v}))]\ \ ,$$

$$\sigma_2(\bar{u}) = \mu v_o\ [\ \exists\ \bar{v}((\bar{v})_1 = v_1 \wedge (v)_o = \sigma_1(\bar{u}) \wedge \varphi(\bar{u},\bar{v}))]\ \ ,$$

et pour $2 \leq i \leq n$:

$$\sigma_i(\bar{u}) = \mu v_{i-1} [\exists \bar{v}(\bigwedge_{j=0}^{i-2} (\bar{v})_j = \sigma_{j+1}(\bar{u}) \wedge \varphi(\bar{u},\bar{v}))] .$$

Le théorème suivant est le résultat central sur l'itération des types minimaux :

IV.21. <u>Théorème</u>.- Soient I un ensemble ordonné, $M \models \mathcal{P}$ et $N = M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$. Si chaque t_i est un type minimal, alors pour tout $x \in N$, on a $M(x) = M(c_i)_{i\in S_x}$, où S_x est le support de x.

<u>Démonstration</u>.- Induction sur $\overline{\overline{S_x}}$. Si $S_x = \emptyset$, alors $x \in M$ et il n'y a rien à prouver. Soit donc $S_x = \{i_o,\dots,i_m\}_<$, où $<$ est l'ordre de I. Pour simplifier la notation écrivons j au lieu de i_j, M' au lieu de $M(c_i)_{i\leq m} = M(c_i)_{i\in J_x}$ et M" au lieu de $M(c_i)_{i<m}$. On a $M' = M''\binom{t_m}{c_m}$; comme t_m est uniforme (puisque minimal), IV.10(a) entraîne $M' - M'' = B(c_m,M')$. Puisque $\{0,\dots,m-1\} \subset S_x$, on a $x \notin M''$, d'où $x \in M' - M''$, et donc $x \in B(c_m,M')$. En appliquant IV.17(a); on obtient un terme <u>pur</u> f(v) tel que $M' \models c_m = f(x)$. Or, $x \in M' = M''\begin{pmatrix} t_m \\ c_m \end{pmatrix}$, d'où il existe un terme g(u,v) et un $a \in M''$ tels que $M' \models x = g(a,c_m)$. Soient $h(v) = \mu u(v = g(u,f(v)))$ et $a' = h^N(x)$. Donc $a' \in M(x)$. Puisque $M' \models x = g(a,f(x))$; il s'ensuit que $a' \leq a$; M" étant un segment initial de M', on obtient $a' \in M'' = M(c_i)_{i<m}$, d'où $S_{a'} \subseteq \{0,\dots,m-1\}$. Il est clair aussi que $N \models x = g(a',f(x)) = g(a',c_m)$; donc on a $x \in M(c_i)_{i\in S_{a'}\cup\{m\}}$.
Vu la propriété qui définit S_x, on en conclut que $S_x \subseteq S_{a'}\cup\{m\}$, ce qui implique $S_{a'} = \{0,\dots,m-1\}$. Par l'hypothèse d'induction, on $M(a') = M(c_i)_{i<m} = M''$.
Puisque $a',c_m \in M(x)$, on obtient finalement $M(x) = M''(c_m) = M'$, ce qui achève la démonstration.

IV.22. <u>Corollaire</u>.- Soient I un ensemble ordonné et $M \models \mathcal{P}$. Si pour chaque $i \in I$, t_i est un type minimal, alors tout modèle intermédiaire $M \prec M' \prec M(c_i)_{i\in I}$ est de la forme $M' = M(c_i)_{i\in J}$ pour un unique $J \subseteq I$.

<u>Démonstration</u>.- Etant donné M', soit $J = \{i \in I \mid c_i \in M'\}$. Evidemment on a $M(c_i)_{i\in J} \subseteq M'$. L'inclusion inverse est conséquence du théorème précédent ; en effet,

si $x \in M'$, IV.21 implique $S_x \subseteq \mathcal{J}$, d'où $x \in M(c_i)_{i\in J}$ par définition du support (cf. IV.19(b)). L'unicité de J est évidente.

IV.23. Corollaire.- Le treillis des structures intermédiaires, $< \{M' \mid M \prec M' \prec M(c_i)_{i\in I}\}, \subseteq >$, où M, I et les types t_i sont comme dans le corollaire IV.22, est isomorphe à l'algèbre de Boole $< \mathbb{P}(I), \subseteq >$ des sous-ensembles de I.

Démonstration.- Conséquence triviale de IV.22.

IV.24. Exemple d'une extension minimale qui n'est pas finale.-

Soit $N = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in I}$, où $M \models \mathcal{P}$, I est un ensemble ordonné et chaque type t_i est minimal. On peut conclure du corollaire IV.22 que N est une extension $\prec$-minimale de $M' = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in I-\{i_o\}}$, où $i_o \in I$. E, effet, si $M' \prec M'' \prec N$, alors $M'' = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in J}$ pour un unique $J \subseteq I$; on a $I - \{i_o\} \subseteq J \subseteq I$, d'où $M'' = M'$ ou $M'' = N$.

En prenant $\overline{\overline{I}} \geq 2$ et i_o distincts du dernier élément de I, $M' \not\prec_f N$ puisque $c_i \in M'$ et $N \models c_i > c_{i_o}$, si $i > i_o$.

BIBLIOGRAPHIE

[A.H] F. Abramson, L. Harrington, Models without indiscernibles, Journal Symb. Logic, vol. 43 (1978), pp. 572-600.

[E.R] P. Erdös, R. Rado, A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc., vol 62 (1956), pp. 427-489.

[G] H. Gaifman, Models and types of Peano's arithmetic, Ann. Math. Logic, vol.9 (1976), pp. 223-306.

[K] J. Knight, Omitting types in set theory and arithmetic, Journal Symb. Logic, vol. 41 (1976), pp. 25-32.

[N.R] J. Nešetřil, V. Rödl, Partitions of finite relation and set systems, Journal Combinatorial Theory, Series A, vol. 22 (1976), pp. 289-312.

[S] S. Shelah, End extensions and numbers of countable models, Journal Symb. Logic, vol. 43 (1978), pp. 550-562.

[Si] S.G. Simpson, Forcing and models of arithmetic, Proc. Amer. Math. Soc., vol 43 (1974), pp.193-194.