Astérisque

KENNETH MCALOON

Progressions transfinies de théories axiomatiques, formes combinatoires du théorème d'incomplétude et fonctions récursives à croissance rapide

Astérisque, tome 73 (1980), p. 41-58

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__41_0>

EXPOSÉ 4

PROGRESSIONS TRANSFINIES DE THÉORIES AXIOMATIQUES, FORMES COMBINATOIRES DU THÉORÈME D'INCOMPLÉTUDE ET FONCTIONS RÉCURSIVES A CROISSANCE RAPIDE

Kenneth Mc Aloon

I - LE CAS INITIAL

Ici nous nous adressons au problème de trouver des théories axiomatiques autres que P qui admettent des indicatrices combinatoires. Exploitant le lien établi dans l'exposé précédent entre la méthode des indicatrices et la méthode de Gödel, nous définissons une hiérarchie transfinie de théories qui sont axiomatisées à la fois par des schémas affirmant des principes combinatoires et par des schémas affirmant des principes métamathématiques; ces théories admettront à leur tour des indicatrices combinatoires.

Dans ce paragraphe nous traitons du cas initial et dans le paragraphe suivant nous considérons l'itération dans le transfini. Nous terminerons avec quelques remarques sur une autre progression transfinie ayant des propriétés analogues et sur des questions annexes.

Considérons la théorie P^+ qui est obtenue en ajoutant à P le schéma de réflection uniforme, c'est-à-dire, le schéma $\mathrm{Cons}(T_n + P)$, $n \in \mathbb{N}$. Nous allons voir ci-dessous que cette théorie admet une axiomatisation "combinatoire". Soit $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction totale; on définit une relation $[a,b] \overset{F}{\underset{*}{\to}} (m)^n_k$ en analogie avec $\underset{*}{\to}$:

$[a,b] \overset{F}{\underset{*}{\to}} (m)^n_k$ $\leftrightarrow$ pour toute partition $P : [a,b]^n \to k$ il existe une partie homogène H telle que $|H| \geq m$ et $|H| \geq F(\min H)$.

Soit P^* la théorie obtenue en ajoutant à P le schéma qui exprime que pour chaque fonction définissable $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pour tous m,n,k,s il existe l tel que $[m,l] \overset{F}{\underset{*}{\to}} (k)^n_s$:

$$\forall u_1 \ldots \forall u_n \; [\forall x \, \exists! y \, F(x,y,u_1,\ldots,x_k) \to \forall x \, \forall y \, \forall u \, \forall v \, \forall z \, ([x,z] \overset{F}{\underset{*}{\to}} (u)^y_v)] \,,$$

nous avons le

I.1. THÉORÈME Les systèmes d'axiomes P^+ et P^* axiomatisent la même théorie.

DÉMONSTRATION Fixons $n \geq 1$ et vérifions que $\mathrm{Cons}(T_n + P)$ est un théorème de P^*. Soit k un entier suffisamment grand tel que dans P^k on peut prouver 3.I.3 pour $\mathrm{Tr}_{n+2}(\phi)$, donc $k \geq s_{n+2}$, et tel que l'on peut aussi y prouver l'induction

pour les formules Σ^o_{n+2}, donc $k \geq t_{n+2}$. Alors dans $\mathcal{P}^k$ on peut définir une fonction de Skolem $F(x) = y$ qui est Δ^o_{n+1} et qui jouit de la propriété suivante

I.2. $I < M \models \mathcal{P}^k$, I clos pour $F^M \Rightarrow \forall \phi \in I(I \models Tr_n(\phi) \Leftrightarrow M \models Tr_n(\phi))$.

En particulier, si $I \models \mathcal{P}$ (même $\mathcal{P}^{s_n}$), et si $I < M \models \mathcal{P}_k$ et I est clos pour F^M, alors $I \prec_n M$. Soit $m \geq k$ tel que $\mathcal{P}^k$ soit (en forme prénexe) de type π^o_m. Travaillons informellement dans $\mathcal{P}^*$. Soit M_o une extension non-standard π^o_m-élémentaire des entiers de domaine $c_1, c_2, \ldots$ dont la relation de satisfaction est Δ^o_{m+2}. Posons $\bar{F}(x) = \sup_{y \leq x} F(y) + x+1$; la fonction $\bar{F}$ est Δ^o_{n+1} dans $\mathcal{P}^k$ et $M_o \models \mathcal{P}^k$. Alors M_o satisfait l'induction pour les formules Σ^o_{n+1} et, donc par le principe de débordement, il existe α, β, γ non-standard tels que $2\gamma < \alpha$ et $M_o \models [\alpha,\beta] \overset{\bar{F}}{\underset{*}{\rightarrow}} (2\gamma)^\gamma_\gamma$. Définissons dans M_o une partition $P : [\alpha,\beta]^\gamma \to \gamma$ comme dans la démonstration du Théorème de Paris-Harrington page 24, en remplaçant le prédicat S par Tr_{n+2} et Δ^o_o par Σ^o_{n+2}; on trouve alors un ensemble $\tilde{H} = \{e_1, \ldots, e_\ell\}$ tel que $M_o \models 2\gamma < e_1 \wedge \bar{F}(e_1) \leq e_\ell$ et tel que, par I.3, les éléments de l'ensemble tronqué $H = \{e_1, \ldots, e_{\ell-\gamma}\}$ sont indiscernables pour les formules Σ^o_{n+2}. On a évidemment $M_o \models \sup_{x \leq e_1} F(x) \leq e_{\ell-\gamma}$; donc par l'indiscernabilité, $M_o \models \sup_{x \leq e_1} F(x) \leq e_{i+1}$ pour $i < \ell-\gamma$. Soit $a \in I \Leftrightarrow a < e_s$ un $s \in \mathbb{N}$. Parce que $\Delta^o_o \subseteq \Sigma^o_{n+2}$, on a en reprenant la démonstration du Théorème de Paris-Paris-Harrington que $I \models \mathcal{P}$ et de plus parce que I est clos pour F^{M_o}, on a $I \prec_n M_o$; or $\mathbb{N} \prec_n M_o$ et donc $\mathbb{N} \prec_n I$. Alors I est un modèle de $\mathcal{P} + \mathcal{J}_n$, ce qui prouve que l'on a $Cons(T_n + \mathcal{P})$.

Quant à la réciproque, l'analyse de la preuve de la forme infinie du théorème de Ramsey fournit l'information suivante : soit $\mathring{f}$ un nouveau symbole de fonction et soit $\mathcal{P}(\mathring{f})$ l'extension de $\mathcal{P}$ obtenue en ajoutant le schéma d'induction pour les formules en $\mathring{f}$. Alors il y a une fonction primitive récursive qui associe à chaque n,l,k une démonstration dans le système $\mathcal{P}(\mathring{f})$ de l'énoncé $\exists y(y \overset{\mathring{f}}{\underset{*}{\rightarrow}} (\bar{l}) \frac{\bar{n}}{k})$. Pour chaque formule arithmétique $F(u_1, u_2, \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_t)$ qui est de type $\forall_m$ en forme prénexe, il existe pour chaque n,ℓ,k une démonstration dans $\mathcal{P}$ de l'énoncé $\forall u_1 \exists! u_2 F(u,v,\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_t) \overset{F}{\underset{*}{\rightarrow}} \exists y(y \overset{F}{\underset{*}{\rightarrow}} (\bar{\ell}) \frac{\bar{n}}{\bar{k}})$ et l'application qui va de $n,1,k$ à cette preuve est de nouveau primitive récursive. Alors dans $\mathcal{P}$ on peut prouver

$$\forall x_1 \ldots \forall x_t \ \forall u \ \forall v \ \forall w \ \exists x \quad Prov(\mathcal{P}^x \wedge \forall u_1 \exists! u_2 F(u_1,u_2,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_t), \overline{\exists z}(z \overset{F}{\underset{*}{\rightarrow}} (\tilde{u})^{\tilde{v}}_{\tilde{w}})).$$

On a donc

$$\mathcal{P} + Cons(T_{m+1} + \mathcal{P}) \vdash \forall x_1 \ldots x \ [\forall u_1 \exists! u_2 F(u_1,u_2,x_1,\ldots,x) \to \forall u,v,w \exists z(z \overset{F}{\underset{*}{\rightarrow}} (u)^v_w)] \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous donnons maintenant la définition d'une fonction qui sera une indicatrice pour la théorie $\mathcal{P}^+$; cette fonction se définit au moyen d'une notion combinatoire qui correspond à une "itération" de "$\overset{}{\underset{*}{\rightarrow}}$".

Nous écrivons $X \overset{}{\underset{**}{\rightarrow}} (m)^n_k$ pour signifier que pour toute partition $P : [X]^n \to k$

il existe une partie homogène H telle que $H \underset{*}{\to} (2\min^2 H)^{\min^2 H}_{\min^2 H}$ où $\min^2 H$ dénote le $\min H^{\text{ième}}$ élément de H.

Posons $Y_1(a,b) = c$ ssi c est le plus grand entier tel que $[a,b] \underset{**}{\to} (2c)^c_c$. Il est clair que Y_1 est une fonction qui est Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$. Nous allons démontrer que Y_1 est une indicatrice pour $\mathcal{P}^+$. Or dans la suite, nous allons poursuivre cette itération de $\underset{*}{\to}$ jusque dans le transfini en rapport avec une suite croissante d'extensions de $\mathcal{P}$; avant d'introduire toute la machinerie nécessaire pour l'itération transfinie, donnons tout de suite le résultat suivant :

I.3. THÉORÈME La fonction Y_1 est une indicatrice pour $\mathcal{P}^+$; et on a

(i) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^+ \vdash \forall x \forall y (Y_1(x,z) \geq n)$;

(ii) $\mathcal{P}^+ + \exists_1 \nvdash \forall x \forall y \exists z (Y_1(x,z) \geq y)$

(iii) $\mathcal{P} \vdash \forall x \forall y \exists z (Y_1(x,z) \geq y) \longleftrightarrow \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P}^+)$

DÉMONSTRATION Remarquons tout d'abord que l'on peut axiomatiser $\mathcal{P}^+$ en ajoutant à $\mathcal{P}$ le schéma $\forall v_1,\ldots,v_k [\exists^\infty x\, E(x,v_1,\ldots,v_k) \to (\forall u,v,w \exists X(X \text{ est un ensemble fini} \wedge \forall x(x \in X \to E(x,v_1,\ldots,v_k)) \wedge X \underset{*}{\to} (u)^v_w)]$, E une formule. Ce schéma exprime que chaque ensemble infini d'entiers contient, quels que soient m,n,k, une partie finie X qui satisfait $X \underset{*}{\to} (m)^n_k$. Pour voir que ce schéma est équivalent au schéma qui définit $\mathcal{P}^+$, on utilise les arguments informels suivants : si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction (que l'on peut supposer croissante), on y associe un ensemble infini $A = \{f(0), f(f(0)), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots\}$; étant donnés m,n,k, si $X \subseteq A$ et $X \underset{*}{\to} (m)^n_k$, alors $f^{-1}(X) \underset{*}{\overset{f}{\to}} (m)^n_k$; inversement, si $A \subseteq \mathbb{N}$ est infini, soit f la fonction qui énumère A; si $\ell \underset{*}{\overset{f}{\to}} (m)^n_k$, alors $X = \{f(0),\ldots,f(\ell)\} \subseteq A$ et $X \underset{*}{\to} (m)^n_k$. On voit maintenant facilement que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^+ \vdash \forall x \exists z (Y_1(x,z) \geq \bar{n})$, en reprenant la démonstration de 2.I.7.

Soit donc M un modèle dénombrable de $\mathcal{P}$ et soient $a,b,c \in M$ tels que $M \models [a,b] \underset{**}{\to} (c+1)^c_c$ où $c > \mathbb{N}$. Parce que $c > \mathbb{N}$, on a $1+2\sqrt{c} \geq 3(c-1)$, et par la Proposition 2.II.1, on a $M \models [a,b] \underset{**}{\to} (2c)^{c-1}_{3(c-1)}$. Soit $\phi_0, \phi_1, \ldots$ une énumération récursive des formules Σ^o_2 du langage de l'arithmétique; soit $\delta \in M$ tel que $\delta > \mathbb{N}$ et $M \models \delta < \log_2(c-1)$. On définit dans M, utilisant le prédicat $Tr_2(\phi)$, une fonction $f(i, \langle x_1,\ldots,x_{c-1}\rangle) : \delta \times [a,b]^{c-1} \to \{0,1\}$ par

$$f(i, \langle x_1,\ldots,x_{c-1}\rangle) = \begin{cases} 0 & \text{si } Tr_2(\phi_i(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{c-1})) \\ 1 & \text{si } \neg Tr_2(\phi_i(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{c-1})) \end{cases}$$

Rappelons que pour $i < \mathbb{N}$ et $\phi_i = \phi_i(v_1,\ldots,v_n)$,

$$M \models f(i,\langle \alpha_1,\ldots,\alpha_{c-1}\rangle) = 0 \Longleftrightarrow M \models \phi_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

Soit $g \in M$ une injection de 2^δ dans $c-1$; définissons une partition

$P : [a,b]^{c-1} \to 3(c-1)-a$ par

$$P(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c-1}) = \begin{cases} 2(c-1)+g(\langle f(0,\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_{c'}\rangle),\ldots,f(\delta,\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_{c'}\rangle) & \text{si } \alpha_1 > 2(c-1) \\ \alpha_1 & \text{si } \alpha_1 \leq 2(c-1) \end{cases}$$

Soit $\bar{H} \in M$ un ensemble homogène pour P tel que $M \models \bar{H} \underset{*}{\to} (\min^2 H+1)^{\min^2 H}_{\min^2 H}$. Alors, en posant $\bar{H} = \{e_1,\ldots,e_{\ell}\}$ et $\ell = \bar{\ell} - (c-1)$, nous avons (i) $e_1 > 2(c-1)$ et (ii) les éléments de $H = \{e_1,\ldots,e_{\ell}\}$ sont indiscernables dans M pour les formules Σ^o_2. Notons par $\Delta^o_o(\Sigma^o_1)$ l'ensemble des formules engendrées à partir des formules Σ^o_1 par des quantifications bornées et des combinaisons booléennes. En appliquant l'induction Σ^o_1 l'on vérifie que dans $\mathcal{P}$ toute formule $\Delta^o_o(\Sigma^o_1)$ est équivalente à une formule Σ^o_2. Alors en reprenant la démonstration de 2.I.7, on voit que les éléments de $H - \{e_1,\ldots,e_m\}$ sont indiscernables par rapport aux formules $\Delta^o_o(\Sigma^o_1)$ à paramètres $\leq e_m$. De nouveau soit $I = \{x \in M : x \leq e_m \text{ pour un } m \in \mathbb{N}\}$. De nouveau, on a le lemme de vérité, 2.I.14, donc $I \models \mathcal{P}$. Nous disons que $I \models \mathcal{P}^{(*)}$. Afin de ce vérifier, soient $a_1,\ldots,a_m \leq e_r$, $r \in \mathbb{N}$, et soit $\Phi(v,a_1,\ldots,a_m) \equiv Q'x_1\ldots Q^n x_n\, \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$ une formule en forme prénexe qui définit une partie non-bornée de I. Donc pour tout $p > r$, on a

$$I \models \exists v > e_p \;\; \Phi(v,a_1,\ldots,a_m)$$

Autrement dit, pour $p > r$

$$I \models \exists v\, Q'x_1\ldots Q^n x_n\, [v > e_p \wedge \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)]$$

Par le lemme de vérité, 2.I.14,

II.5 $$M \models \exists v < e_{\ell-n}\, Q'x_1 < e_{\ell-(n-1)}\ldots Q^n x_n < e_{\ell}\; [v > e_p \wedge \Psi(v,x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_m)]$$

D'où quel que soit μ, $r < \mu < \ell-n$,

II.6 $$M \models \exists v < e_{\ell-1}\, Q'x_1 < \ell-(n-1)\ldots Q^n x_n < e_{\ell}\; [e_\mu < v < e_{\mu+1} \wedge \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,..,a_m]$$

Pour $s = \{e_{s_1},\ldots,e_{s_{n+1}}\}$ une suite croissante extraite de H telle que $e_{r+1} < e_{s_1}$, posons

$$B(s) = \{v : M \models e_{r+1} < v < e_{s_1} \wedge Q'x_1 < e_{s_2}\ldots Q^n x_n < e_{s_{n+1}}\; \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)\}$$

Par l'indicernabilité des éléments de H, nous avons quel que soit γ, $r+1 \leq \gamma \leq \ell-(n+2)$,

$$M \models \exists v < e_{\gamma+1}(e_\gamma < v < e_{\gamma+1} \wedge Q'x_1 < e_{\ell-n}\ldots Q^n x_n < e_{\ell-1}\; \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m))$$

Autrement dit, $B(e_{r+2},e_{\ell-n},\ldots,e_{\ell-1}) \cap (e_\gamma,e_{\gamma+1}) \neq \emptyset$. Clairement, on a

$$M \models \bar{\bar{H}} \underset{*}{\to} (2e_{\ell_1})^{e_{e_1}}_{e_{e_1}-(r+n+2)-c} \quad \text{où } \bar{\bar{H}} = H - \{e_1,\ldots,e_{r+2},e_{\ell-(n+1)},\ldots,e_{\ell}\}$$

. La situation est alors que $\bar{\bar{H}} = \{e_{r+3},\ldots,e_{\ell-(n+2)}\}$ et $B(r+2,e_{\ell-n},\ldots,e_{\ell-1}) = \{b_1,\ldots,b_\mu\}$

sont tels que $b_1 < e_{r+3}$ et pour tout i, $r+3 \leq i < \ell-n-2$, il existe λ tel que $e_i < b_\lambda < e_{i+1}$. Il est alors facile de vérifier que

II.7 $M \models B(e_{r+2}, e_{\ell-(n-1)}, \ldots, e_\ell) \overset{*}{\to} (2e_{e_1})^{e_{e_1}}_{e_{e_1}-\delta}$ où $\delta < e_1$.

Rappelons que la relation $X \overset{*}{\to} (u)^v_w$ est Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$. Rappelons aussi qu'il existe une relation $E(x,X)$ qui est Δ^o_o dans $\mathcal{P}$ et qui exprime que "X code un ensemble fini $\wedge$ $x \in X$" : à cause du Lemme Chinois, on peut prendre

$E(x,X) \equiv \exists u,y,z \leq X(X = (u+(y+z)^2+y)^2 + u \wedge \exists i \leq u \ \exists g \leq y(y = ((i+1).z+1).g+x))$.

Parce que $I \models \mathcal{P}$ et parce que les éléments de H ont cette propriété d'indiscernabilité, il est aisé de voir que pour tous $e_{r+1} < e_{s_1} < \ldots < e_{s_{n+1}} < e_\mu \leq e_\ell$

II.8 $M \models \exists X < e_\mu \ \forall x < e_\mu \ [E(x,X) \leftrightarrow x \in B(s)]$

Donc

$$M \models \forall X < e_\ell \ [X = B(e_{r+2}, e_{\ell-n}, \ldots, e_{\ell-1}) \to (X \overset{*}{\to} (2e_{e_1})^{e_{e_1}}_{e_{e_1}-\delta})]$$

et, pour tous $e_{r+2} < e_t < e_{s_1} < \ldots < e_{s_n} < e_m$, $m \in \mathbb{N}$,

$$M \models \forall X < e_m \ [X = B(e_{r+2}, e_{s_1}, \ldots, e_{s_n}) \to (X \overset{*}{\to} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta})]$$

Autrement dit,

$$I \models \forall X \ [X = \{v < e_{s_1} : \Phi(v, a_1, \ldots, a_m)\} \to (X \overset{*}{\to} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta})]$$

et pour tout s, $r+1 < s < \mathbb{N}$,

$$I \models \exists X(\forall v(v \in X \to \Phi(v, a_1, \ldots, a_m)) \wedge X \overset{*}{\to} (2e_s)^{e_s}_{e_s-\delta})$$

Or $\delta < e_1$; par la proposition 2.II.1, on obtient le résultat parce que e_s et $e_s - \delta$ sont cofinaux dans I. C.Q.F.D.

II - L'ITÉRATION TRANSFINIE

Il nous faut tout d'abord de la notation et quelques définitions au sujet des ordinaux transfinis. On dit qu'un ordinal α est stable pour l'exponentiation si $\beta^\gamma < \alpha$ quels que soient $\beta, \gamma < \alpha$. On note ε_o le premier ordinal $\alpha > \omega$ qui est stable pour l'exponentiation, et, plus généralement, on note ε_β le $\beta^{\text{ième}}$ ordinal $> \omega$ qui est stable pour l'exponentiation. On notera aussi $0 = \varepsilon_{-2}$ et $\omega = \varepsilon_{-1}$. On voit facilement que

$$\varepsilon_o = \lim_n \omega_n \quad \text{où} \quad \omega_o = \omega \text{ et } \omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$$

$$\varepsilon_{\beta+1} = \lim_n (\varepsilon_\beta)_n \quad \text{où} \quad (\varepsilon_\beta)_o = \varepsilon_\beta \text{ et } (\varepsilon_\beta)_{n+1} = \varepsilon_\beta^{(\varepsilon_\beta)_n}$$

et pour λ limite,

$$\varepsilon_\lambda = \lim_{\alpha<\lambda} \varepsilon_\alpha$$

La suite des ε_β est donc une suite strictement croissante et continue; soit alors η_o le plus petit ordinal α tel que $\varepsilon_\alpha = \alpha$. On voit que

$$\eta_o = \lim_n (\eta_o)_n \quad \text{où} \quad (\eta_o)_o = 0 \ , \ (\eta_o)_{n+1} = \varepsilon_{(\eta_o)_n}$$

Rappelons le

II.1. THÉORÈME (Forme Normale de Cantor). Soit $\alpha \geq 2$. Alors tout ordinal $\beta \neq 0$ s'écrit de façon unique

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}.\delta_1 + \ldots + \alpha^{\gamma_n}.\delta_n \quad \text{où} \quad \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n \quad \text{et} \quad 0 < \delta_1 < \alpha, \ldots, 0 < \delta_n < \alpha$$

A l'aide de la Forme Normale de Cantor, nous allons associer à tout ordinal limite $\lambda < \eta_o$ une suite dite fondamentale $\lambda(n)$ telle que $\lambda = \lim_n \lambda(n)$. Pour les ordinaux successeur $\beta = \alpha+1$, on pose $\beta(m) = \alpha$ pour tout $m \in \mathbb{N}$; nous posons aussi $\omega(m) = m$. Pour α un ordinal limite, $\omega < \alpha < \eta_o$, remarquons qu'il existe $\mu < \alpha$ tel que $\varepsilon_\mu \leq \alpha < \varepsilon_{\mu+1}$ et $\alpha < \mu$. Nous définissons la suite $\alpha(n)$ par récurrence sur α en distinguant trois cas

(1) $\alpha = \varepsilon_\lambda$, λ limite. Alors $\lambda < \alpha$ et nous posons $\alpha(n) = \varepsilon_{\lambda(n)}$

(2) $\alpha = \varepsilon_{\beta+1}$. Alors nous posons $\alpha(0) = \varepsilon_\beta$ et $\alpha(n+1) = \varepsilon_\beta^{\alpha(n)} = (\varepsilon_\beta)_{n+1}$

(3) $\varepsilon_\mu < \alpha < \varepsilon_{\mu+1}$, $\mu < \alpha$. Soit $\alpha = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}.\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\delta_m$ la forme normale de α à la base ε_μ. Nous distinguons quatre sous-cas :

(a) $\gamma_m = 0$; alors posons $\alpha(n) = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}.\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_{m+1}}.\delta_{m+1} + \delta_m(n)$

(b) $\gamma_m = \xi+1$, $\delta_m = \beta+1$; alors posons $\alpha(n) = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}.\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\beta + \varepsilon_\mu^{\xi}.\varepsilon_\mu(n)$

(c) $\gamma_m \neq 0$, δ_m limite; alors posons $\alpha(n) = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}.\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_{m-1}}.\delta_{m-1} + \varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\delta_m(n)$

(d) γ_m limite, $\delta_m = \beta+1$; alors posons $\alpha(n) = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}.\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\beta + \varepsilon_\mu^{\gamma_m(n)}$

II.2. REMARQUE. Dans le cas (3), la suite fondamentale est déterminée par le dernier terme $\varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\delta_m$ de la forme normale de α à la base ε_μ ; plus précisément, si $\sigma = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_{m-1}}\delta_{m-1}$ et $\rho = \varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\delta_m$ on a $\alpha(n) = \sigma + \rho(n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Nous définissons ensuite par récurrence sur α la relation $X \overset{\rightarrow}{\alpha} (m)^n_k$ où X est un ensemble fini d'entiers, $\alpha < \eta_o$ et m,n,k sont des entiers :

$$X \overset{\rightarrow}{0} (m)^n_k \iff X \overset{\rightarrow}{*} (m)^n_k$$

et pour $\alpha > 0$,

$X \overset{\rightarrow}{\alpha} (m)^n_k \iff$ pour toute partition $P : [X]^n \to k$ il existe une partie homogène H telle que $|H| \geq m$ et

$$H \underset{\alpha(n)}{\rightarrow} (2\min^2 H)^{\min^2 H}_{\min^2 H}$$

où, de nouveau, $\min^2 H$ dénote le $\min H^{\text{ième}}$ élément de H.

Aussi, étant donné une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nous définissons la relation $X \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k$ ainsi

$$X \overset{f}{\underset{0}{\rightarrow}} (m)^n_k \iff X \overset{f}{\underset{*}{\rightarrow}} (m)^n_k$$

et pour $\alpha > 0$,

$X \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k \iff$ pour toute partition $P : [X]^n \to k$ il existe une partie homogène $H \subseteq X$ telle que $|H| \geq m$ et

$$H \underset{\alpha(n)}{\Rightarrow} (2\min^2 H)^{\min^2 H}_{\min^2 H} \quad \text{et } f(\min H) \geq |H|$$

II.3. REMARQUE. Il est clair que $X \subseteq Y$ et $X \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k$ entrainent $Y \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k$.

II.4. REMARQUE Par un argument tout à fait analogue à celui donné dans la preuve de 2.I.7, on démontre par récurrence sur α que pour tout ensemble infini d'entiers A et tous m,n,k il existe $X \subseteq A$ satisfaisant $X \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k$, X fini.

Les ordinaux $\alpha < \eta_o$ sont "relativement simples" et peuvent être décrits en termes arithmétiques; dans le chapitre 9 de [S] , par exemple, il est donné un système de notations pour ces ordinaux; ainsi pour tout ordinal $\mu < \eta_o$, il existe un ordre récursif $<_{\varepsilon_\mu}$ qui est Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$ et qui, sur $\mathbb{N}$, définit un ordre isomorphe à ε_μ . On définit aussi de façon Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$ les opérations de successeur, addition, multiplication et exponentiation sur les éléments α de cet ordre et de même pour la fonction $(\alpha,n) \to \alpha(n)$.

Le schéma suivant s'abrège $\mathbf{TI}(\varepsilon_\mu)$:

$$\forall v_1,\ldots,\forall v_k\,[\,\forall x[\forall y \underset{\varepsilon_\mu}{<} x(E(y,v_1,\ldots,v_k) \to E(x,v_1,\ldots,v_k))]\to\forall x\, E(x,v_1,\ldots,v_k)]] \ ,$$

Nous énonçons une proposition dont la démonstration est laissée au lecteur.

II.5. PROPOSITION Soit $-2 \le \mu < \eta_o$. Alors

(i) la relation $\alpha < \varepsilon_\mu \wedge X \overset{\to}{\alpha} (m)^n_k$ est Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$ + TI (ε_μ);

(ii) la relation $\alpha < \varepsilon_\mu \wedge X \overset{\to}{\alpha(s)} (m)^n_k$ est aussi Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$ + TI (ε_μ).

(iii) la relation $\alpha < \varepsilon_\mu \wedge X \overset{f}{\alpha} (m)^n_k$ est $\Delta^o_1(\dot{f})$ dans $\mathcal{P}(\dot{f})$ + TI ($\dot{f}$) (ε_μ)

Nous considérons deux progressions de théories axiomatiques $Q^{(\alpha)}$, $\mathcal{P}^{(\alpha)}$, $\alpha < \eta_o$:

$$\mathcal{P}^{(o)} = Q^{(o)} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P}^{(\alpha+1)} = \mathcal{P}^{(\alpha)} + \text{le schéma suivant}$$

$\forall v_1,\ldots,\forall v_k\,[\,\forall x\,\exists!y\,F(x,y,v_1,\ldots,v_k) \to \forall u,v,w\,\exists \ell\,[\ell \overset{F}{\alpha} (u)^v_w]]$ F une formule

$$Q^{(\alpha+1)} = Q^{(\alpha)} + \text{le schéma } \mathrm{Cons}(T_n + Q^{(\alpha)}),\ n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{P}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{P}^{(\alpha)} \ , \quad \lambda \text{ limite}$$

$$Q^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} Q^{(\alpha)}, \quad \lambda \text{ limite}$$

Le résultat suivant est bien connu, voir [K,L], ou [Sc].

II.6. THÉORÈME (Gentzen-Kreisel-Levy). Pour tout $\alpha < \eta_o$, nous avons $Q^{(\alpha+1)} \vdash \mathrm{TI}(\varepsilon_\alpha)$ mais $Q^{(\alpha+1)} \nvdash \mathrm{TI}(\varepsilon_{\alpha+1})$.

Nous définissons les fonctions Y_α (qui seront des indicatrices pour les théories $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ et $Q^{(\alpha)}$) : $Y_\alpha(a,b)$ = le plus grand c tel que $[a,b] \overset{\to}{\alpha} (2c)^c_c$.
Nous allons prouver le résultat suivant.

II. 7. THÉORÈME Soit $\alpha < \eta_o$ et soit ν tel que $\varepsilon_\nu \le \alpha < \varepsilon_{\nu+1}$

(i) Y_α est une indicatrice pour $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ par rapport aux modèles de $\mathcal{P}$ + TI (ε_ν)

(ii) $Q^{(\alpha)}$ et $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ axiomatisent la même théorie.

On aura le corollaire

II.8. COROLLAIRE Soit $\alpha < \eta_o$

(i) $\mathcal{P}^{(\alpha+1)} \vdash \mathrm{TI}(\varepsilon_\alpha)$

(ii) $\mathcal{P}^{(\alpha)} \vdash \forall x\,\forall y\, Y_\alpha(x,y) \ge n$, tout $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\mathcal{P}^{(\alpha)} + \exists_1 \nvdash \forall z\,\forall x\,\exists y (Y_\alpha(x,y) \ge z)$

DÉMONSTRATION (du théorème). Par induction sur α . D'après ce qui précède le théorème est vérifié pour $\alpha = 0,1$. De manière générale, la partie (ii) pour $\alpha+1$ se déduit de la partie (i) pour α comme le théorème I.1. de cet exposé se déduit du résultat de Paris-Harrington; or la partie (ii) au niveau α limite est immédiate. Nous considérons alors la situation suivante : on suppose que le théorème est vérifié pour tout $\alpha < \alpha_o$ et que la partie (ii) est vérifiée au niveau α_o. Parce que $\alpha_o < \eta_o$, nous avons $\nu + 1 < \alpha_o$; donc par l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}^{(\alpha_o)} \vdash TI(\varepsilon_{\nu+1})$

On va avoir besoin d'une série de lemmes techniques dont les démonstrations sont données en appendice. L'intérêt de ces lemmes provient du fait que pour X fini, la relation $X \underset{\beta}{\rightarrow} (m)^n_k$ n'entraine pas $X \underset{\gamma}{\rightarrow} (m)^n_k$ pour n'importe quel $\gamma < \beta$; néanmoins dans des cas où γ "se déduit" de β d'une certaine manière par des applications successives de l'opération $\delta \rightarrow \delta(n)$, on a des implications du type en question . Les lemmes A-G qui suivent sont démontrables dans $\mathcal{P}+ TI(\varepsilon_{\nu+1})$:

II.9. LEMME A. Soit $X = \{x_1,\ldots,x_s\}$ et $Y = \{y_1,\ldots,y_t\}$ deux ensembles finis tels que $s \geq t$ et $x_i \leq y_i$ pour tout $i \leq t$. Si $\beta < \varepsilon_{\nu+1}$ et si $Y \underset{\beta}{\rightarrow} (m)^n_k$, alors $X \underset{\beta}{\rightarrow} (m)^n_k$.

II.10. LEMME B. Soit $\beta < \varepsilon_{\nu+1}$ et soit $k \geq 7$. Si $X \underset{\beta}{\rightarrow} (m)^n_k$, alors $X \underset{\beta}{\rightarrow} (m)^{n'}_k$ pour tout $n' < n$.

II.11. LEMME C. Soit $\alpha < \varepsilon_{\nu+1}$; soient $s < t$ et $2n,k \leq m$. Si $X \overrightarrow{\alpha(t)} (m)^n_k$, alors $X \overrightarrow{\alpha(s)} (m)^n_k$

II.12. LEMME D. Supposons que $\gamma<\beta<\varepsilon_{\nu+1}$. Alors pour tous m, n, k il existe m', n', k' tels que $X \underset{\beta}{\rightarrow} (m')^{n'}_{k'}$ entraine $X \underset{\beta}{\rightarrow} (m)^n_k$ quel que soit X.

II.13. LEMME E. Soient $\alpha < \varepsilon_{\nu+1}$ et $\mu \leq \nu$ tels que $\varepsilon_\mu \leq \alpha < \varepsilon_{\mu+1}$ et soit $m \geq 2n,k$. Alors $X \underset{\alpha}{\rightarrow} (m)^n_k$ entraine $X \overrightarrow{\varepsilon_\mu} (m)^n_k$ quel que soit X.

II.14. LEMME F. Soit s tel que $(\eta_o)_s \leq \varepsilon_\mu < (\eta_o)_{s+1}$ où $\mu \leq \nu$ et soit $m \geq 2n,k$. Alors $X \underset{\varepsilon_\mu}{\rightarrow} (m)^n_k$ entraine $X \overrightarrow{(\eta_o)_s} (m)^n_k$.

II.15. LEMME G. Soit $\alpha<\varepsilon_{\nu+1}$, soit s tel que $(n_o)_s \leq \alpha$ et soient $m \geq 2n,k$. Alors $X \underset{\alpha}{\rightarrow} (m)^n_k$ entraine $X \overrightarrow{(\eta_o)_s} (m)^n_k$ quel que soit X.

Vérifions maintenant que Y_{α_o} est bien une indicatrice pour $\mathcal{P}^{(\alpha_o)}$ par rapport aux modèles de $TI(\varepsilon_{\nu+1})$. Soit donc M un modèle dénombrable de $\mathcal{P}+ TI(\varepsilon_{\nu+1})$ et supposons que $M \models Y_{\alpha_o}(a,b) = c+1$ avec $c > \mathbb{N}$. Nous disons que $M \models [a,b] \overrightarrow{\alpha_o} (2c)^c_{3c}$; en effet, $c > \mathbb{N}$ entraine que $c+1 \geq (1+2\sqrt{3c})$ et par 2.II.1, à toute partition $P: [a,b]^c \rightarrow 3c$ on peut associer une partition $\overline{P} : [a,b]^{c+1} \rightarrow c+1$ telle que toute partie homogène pour $\overline{P}$ ayant au moins $c + 2$ éléments est aussi homogène pour $\overline{P}$; ensuite, puisque nous avons la relation

$[a,b] \xrightarrow{\alpha_o} (2c+2)^{c+1}_{c+1}$ il existe une telle partie homogène K telle que

$K \xrightarrow{\alpha_o(c+1)} (2\min^2 K)^{\min^2 K}_{\min^2 K}$ et par le Lemme C on a $K \xrightarrow{\alpha_o(c)} (2\min^2 K)^{\min^2 K}_{\min^2 K}$

Cela étant, on peut trouver comme pour le Théorème I.3. un ensemble $\bar{H} \subseteq [a,b]$, $\bar{H} = \{e_1,\ldots,e_{\bar{\ell}}\}$ avec $\bar{\ell} > 2c$ tel que les éléments de l'ensemble tronqué $H = \{e_1,\ldots,e_\ell\}$, où $\ell = \bar{\ell} - c$, sont indiscernables pour les formules Σ^o_2 et tel que,

$$M \models H \xrightarrow{\alpha_o(c)} (2e_{e_1})^{e_{e_1}}_{e_{e_1}-c}$$

Or, les éléments de $H - \{e_1,\ldots,e_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, sont indiscernables pour les formules $\Delta^o_o(\Sigma^o_1)$ à paramètres $\leq e_m$. Soit, comme d'habitude, $I = \{x \in M : x \leq e_n$ pour un $n \in \mathbb{N}\}$. D'après les remarques faites au début de la démonstration du Théorème I.3., pour α_o successeur il suffit de démontrer que

(*) $I \models TI(\varepsilon_{\nu+1})$

et

(**) $I \models \forall v_1 \ldots \forall v_k\, [\exists^\infty x\, E(x,v_1,\ldots,v_k) \to \forall u,v,w\, \exists X\, [X$ est un ensemble fini $\wedge\, \forall x(x \in X \to E(x,v_1,\ldots,v_k)) \wedge X \xrightarrow{\alpha_o(c)} (n)^v_w]]$

Or, si α_o est un ordinal limite, on a $M_o \models \alpha_o(n) \leq \alpha_o(c)$ quel que soit n standard; donc par le Lemme C, si on démontre (i) et (ii) on a aussi

$$I \models \forall v_1 \ldots \forall v_k\, [\exists^\infty x\, E(x,v_1,\ldots,v_k) \to \forall u,v,w\, \exists X\, [X \text{ est un ensemble fini } \wedge\, \forall x(x \in X \to E(x,v_1,\ldots,v_k)) \wedge X \xrightarrow{\alpha_o(n)} (n)^v_w]]$$

ce qui entraine

$I \models \mathcal{P}^{(\alpha(n))}$ quel que soit n standard

ce qui donne la conclusion cherchée pour α_o limite.

Vérifions donc que l'on a (*) et (**). Nous savons déjà que $I \models \mathcal{P}$. Soit n_o le plus grand entier n satisfaisant $(\eta_o)_n \leq \alpha_o$. Considérons le tableau à rebours suivant

II.16. $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \xrightarrow{\alpha_o(c)} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

II.17. $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \xrightarrow{\varepsilon_\nu} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

II.17.(η_o) $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \xrightarrow{(\eta_o)_{n_o}} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

II.17.(η_o-1) $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \quad (\eta_o)_{n_o-1} \quad (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

.

.

.

II.17$(\eta_o-(\eta_o-1))$ $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \quad (\eta_o)_1 \quad (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

II.17(0) $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \quad 0 \quad (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

Chaque entrée du tableau peut être vérifiée utilisant les Lemmes E, F et G. En remontant le tableau, on a par les Lemmes A et B, par la méthode de démonstration du Théorème I.3. et le cas initial $\alpha = 1$, que

II.18(0) $I \models \mathbb{P}^{(1)}$, $I \models Q^{(1)}$, $I \models TI((\eta_o)_1)$

Continuant inductivement et invoquant l'hypothèse de récurrence on a

II.18(1) $I = \mathbb{P}^{((\eta_o)_1+1)}$, $I \models Q^{((\eta_o)_1+1)}$, $I \models TI(\eta_o)_2)$

.

.

.

II.18.(n_o) $I \models \mathbb{P}^{((\eta_o)_{n_o}+1)}$, $I \models Q^{((\eta_o)_{n_o}+1)}$, $I \models TI((\eta_o)_{n_o+1})$

Puisque $(\eta_o)_{m_o} \leq \varepsilon_\nu \leq \alpha_o < \varepsilon_{\nu+1} < (\eta_o)_{n_o+1}$, on a bien (*) et en même temps on a (**) par l'absoluité entre I et M de la relation $\overrightarrow{\alpha(c)}$ qui est assurée par la Proposition II.5.

Réciproquement, pour finir cette partie de la démonstration il faut prouver que

$$P^{(\alpha_o)} \vdash \forall x\, \exists y\ Y_{\alpha_o}(x,y) \geq \bar{n}, \text{ tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ceci se vérifie facilement par la méthode de démonstration de 2.I.8. et 3.I.10, c'est-à-dire par un argument de compacité et une application de la forme infinie du Théorème de Ramsey.

Nous avons remarqué au début de cette démonstration que la partie (ii) au niveau α_o+1 se déduit de la partie (i) au niveau α_o. Pour voir ceci, il faut noter que, pour α_o limite, la série d'équivalences $\mathbb{P}^{(\alpha)} \equiv Q^{(\alpha)}$, $\alpha < \alpha_o$, est elle-même prouvable dans $\mathbb{P}^{(\alpha_o)}$ et aussi que l'équivalence $\mathbb{P}^{(\beta)} \equiv Q^{(\beta)}$ est prouvable dans $\mathbb{P}^{(\beta)}$ quand $\alpha_o = \beta+1$. A partir de celà, la démonstration est tout-à-fait analogue à celle du Théorème I.3. et nous la laissons aux soins du lecteur. C.Q.F.D.

Quant au corollaire, la partie (i) est conséquence du théorème et de II.6., la partie (ii) a été notée au cours de la démonstration du théorème. Naturellement, la partie (iii) découle des résultats du premier exposé.

Les méthodes du troisième exposé donnent le

II.19. COROLLAIRE. Soit $\alpha < \eta_o$. Alors

$$P^{(\alpha)} \vdash \mathrm{Cons}(T_1 + P^{(\alpha)}) \longleftrightarrow \forall x \ \forall z \ \exists y \ (Y_\alpha(x,y) \geq z).$$

On peut extraire d'autres renseignements de la démonstration du théorème. Définissons une troisième progression de théories en posant

$$\mathcal{R}^o = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{R}^{\alpha+1} = \mathcal{R}^\alpha + \text{le schéma suivant}$$

$$\forall v_1, \ldots, \forall v_k [\exists^\infty x \, E(x,v_1,\ldots,v_k) \rightarrow \forall u, v, w \ \exists X$$

$$X \text{ est un ensemble fini}, \ \forall x(x \in X \rightarrow E(x,v_1,\ldots,v_k)),$$

$$\text{et } X \underset{\alpha}{\rightarrow} (u)^v_w]$$

$$\mathcal{R}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{R}^{(\alpha)}$$

On a alors le

II.20. COROLLAIRE. Pour $\alpha < \eta_o$, $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, $\mathcal{Q}^{(\alpha)}$ et $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ axiomatisent la même théorie.

III.- REMARQUES ET QUESTIONS CONNEXES

Notons tout d'abord que l'on peut faire une série de remarques analogues à celle du § 2.II. Par exemple, posons pour $\alpha < \eta_o$,

$$\sigma_\alpha(n) = \text{le plus petit entier m tel que } [1,m] \overset{\alpha}{\rightarrow} (n+1)^n_n$$

Alors la fonction σ_α majore toute fonction récursive prouvable de la théorie $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ à un nombre fini d'arguments près. On peut également remplacer σ_α par τ_α où

$$\tau_\alpha(n) = \text{le plus petit m tel que } [1,m] \overset{\alpha}{\rightarrow} (n+1)^x_7 .$$

Il est aussi possible de continuer l'itération transfinie au delà de η_o, voir [Mc,ter]. Récemment, H. Friedman a annoncé la découverte de théorèmes combinatoires indépendants de diverses théories des ensembles, voir [Fr].

Pour finir, notons une autre façon naturelle d'itérer à partir de la formule de Paris-Harrington.

De manière générale, pour la théorie $\mathcal{P}^{\circ}(f) + \forall x(f^{\circ}(x+1) > f^{\circ}(x))$, la fonction

$$Z(a,b) = c \text{ ssi c'est le plus grand entier tel que } [a,b] \xrightarrow[*]{f^{\circ}} (2c)^{c}_{c}$$

est une indicatrice pour les segments initiaux satisfaisant $\mathcal{S}^{\circ}(f)$ par rapport aux modèles (M,f) de $\mathcal{P}^{\circ}(f)$. En effet, si $(M,f) \models \mathcal{S}^{\circ}(f)$ et si pour $c > N$

$$(M,f) \models Z(a,b) = c$$

alors, en reprenant les démonstrations du théorème 2.I.7 et du théorème I.3 de cet exposé, on trouve une suite $e_1,\ldots,e_n,\ldots$ d'indiscernables forts pour les formules $\Delta^{o}_{o}(f)$ telle que $(M,f) \models f(e_n) < e_{n+1}$. Cette suite détermine alors un modèle de $\mathcal{S}^{\circ}(f)$.

Pour $\alpha < \varepsilon_o$, nous définissons une suite transfinie de fonctions récursives ainsi :

$$f_o(n) = \text{le plus petit m tel que } [1,m] \xrightarrow[*]{} (n+1)^{n}_{n}$$

$$f_{\alpha+1}(n) = \text{le plus petit m tel que } [1,m] \xrightarrow[*]{f_\alpha} (n+1)^{n}_{n}$$

$$f_\lambda(n) = \sup_{m \le n} f_{\lambda(m)}(m), \qquad \lambda \text{ limite}$$

ce qui amène à poser

$$Z_o(a,b) = c \text{ ssi c'est le plus grand entier tel que } [a,b] \xrightarrow[*]{} (2c)^{c}_{c}$$

$$Z_{\alpha+1}(a,b) = c \text{ ssi c'est le plus grand entier tel que } [a,b] \xrightarrow[*]{f_\alpha} (2c)^{c}_{c}$$

$$Z_{\lambda}(a,b) = c \text{ ssi c'est le plus grand entier tel que } [a,b] \xrightarrow[*]{f_{\lambda(c)}} (2c)^{c}_{c}$$

et à introduire trois progressions de théories

$$\mathcal{R}^{(o)} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{R}^{(\alpha+1)} = \mathcal{R}^{(\alpha)} + \forall x \exists y\, f_\alpha(x) = y$$

$$\mathcal{R}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{R}^{(\alpha)}$$

$$\mathcal{S}^{(o)} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{S}^{(\alpha+1)} = \mathcal{S}^{(\alpha)} + \forall x \forall z \exists y\, Z_\alpha(x\ y) = z$$

$$\mathcal{S}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{S}^{(\alpha)}$$

$$\mathcal{C}^{(o)} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{S}^{(\alpha+1)} = \mathcal{P} + \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{C}^{(\alpha)})$$

$$\mathcal{C}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{C}^{(\alpha)}$$

Nous avons alors :

III.1. THÉORÈME. Pour $\alpha < \varepsilon_o$,

(i) $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ et $\mathcal{C}^{(\alpha)}$ axiomatisent la même théorie

(ii) $Z^{(\alpha)}$ est une indicatrice pour $\mathcal{R}^{(\alpha)}$ par rapport aux modèles de $\mathcal{R}^{(\alpha)}$

(iii) $\mathcal{R}^{(\alpha)} \vdash \forall x \forall z \exists y (Z_\alpha(x\ y) \geq z) \leftrightarrow \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{R}^{(\alpha+1)})$

(iv) Toute fonction récursive prouvable de $\mathcal{R}^{(\alpha)}$ est majorée à un nombre fini d'arguments près par f_α.

Nous omettons la démonstration. Toutefois, nous remarquons que pour $\alpha < \varepsilon_o$, il existe une fonction récursive prouvable $\varphi = \varphi_\alpha$ de deux arguments telle que pour $\beta < \gamma < \alpha$ on a $f_\beta(n) \leq f_\gamma(n)$ pour tout $n \geq \varphi(\beta,\gamma)$.

L'existence de φ assure que pour les indiscernables forts, $M \models f_\gamma(e_1) < e_2$ entraîne $M \models f_\beta(e_1) < e_2$ et que $M \models f_{\lambda(c)}(e_1) < e_2$ avec $c > \mathbb{N}$ entraîne $M \models f_{\lambda(n)}(e_1) < e_2$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \leq \alpha$.

Pour calculer φ, on procède de la façon suivante : pour tout $\beta < \alpha$ on définit pour $\beta \leq \gamma < \alpha$ un ensemble fini d'entiers $E(\beta,\gamma)$ par récurrence sur γ :

$$E(\beta,\gamma) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \beta = \gamma \\ E(\beta,\gamma(o)) & \text{si } \beta \leq \gamma(o) \\ E(\beta,\gamma(n+1)) \cup \{n+1\} & \text{si } \gamma(n) \leq \beta < \gamma(n+1) \end{cases}$$

Et on pose $\varphi(\beta,\gamma) = \sup E(\beta,\gamma)$.

Remarquons une différence qui apparaît entre cette itération et celle du paragraphe précédent : là on avait $\mathcal{P}^{(\alpha+1)} \vdash \mathrm{TI}(\varepsilon_\alpha)$ alors qu'ici on n'a apparemment pas $\mathcal{R}^{(\alpha+1)} \vdash \mathrm{TI}_1(\varepsilon_o)$ pour aucun $\alpha < \varepsilon_o$, ce qui empêche l'itération au-delà de ε_o étapes.

DÉMONSTRATION A Par récurrence sur β . Pour $\beta > 0$, étant donnés $P : [X]^n \to k$ on définit $\tilde{P} : [Y]^n \to k : (y_{i_1},\ldots,y_{i_n}) \to P(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$. Soit $\tilde{H}$ homogène pour $\tilde{P}$ tel que $\tilde{H} \underset{\beta(n)}{\longrightarrow} (2^{\min^2\tilde{H}})^{\min^2\tilde{H}}_{\min^2\tilde{H}}$. Soit $H = \{x_i : y_i \in \tilde{H}\}$. Alors, par l'hypothèse de récurrence, $H \underset{\beta(n)}{\longrightarrow} (2^{\min^2\tilde{H}})^{\min^2\tilde{H}}_{\min^2\tilde{H}}$, et comme pour I.4 du deuxième exposé, on en déduit que $H \underset{\beta(n)}{\longrightarrow} (2^{\min^2 H})^{\min^2 H}_{\min^2 H}$.

DÉMONSTRATION B Le lemme est évident d'après la Proposition II.1. du deuxième exposé.

DÉMONSTRATION C Nous abrègeons $(\alpha(n_1))(n_2)$ par $\alpha(n_1)(n_2)$, $(\alpha(n_1)(n_2))(n_3)$ par $\alpha(n_1)(n_2)(n_3)$ etc. Nous aurons besoin d'un sous-lemme.

SOUS-LEMME Soit $s < t_1$. Si $\alpha(t_1)\ldots(t_k) \leq \alpha(s)$, alors il existe $i \leq k$ tel que $\alpha(t_1)\ldots(t_i) = \alpha(s)$.

DÉMONSTRATION Par récurrence sur α. Si $\alpha = 0$ ou si α est successeur, la vérification est immédiate. Pour α limite $\neq 0$, il y a trois cas qui correspondent aux clauses (1), (2), (3) de la définition de la suite fondamentale. On traite d'abord du troisième cas où $\varepsilon_\mu \leq \alpha < \varepsilon_{\mu+1}$. Posons

$\sigma = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}\cdot\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_{m-1}}\cdot\delta_{m-1}$ où $\alpha = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}\cdot\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_m}\cdot\delta_m$. Il y a alors quatre sous-cas selon le terme $\varepsilon_\mu^{\gamma_m}\cdot\delta_m$:

a/ Ici $\gamma_m = 0$ et $\alpha = \sigma + \delta_m$, $\alpha(s) = \sigma + \delta_m(s)$. Parce que $\varepsilon_\mu^0\cdot\delta_m$ est le terme du plus petit exposant de ε_μ dans la forme normale de α , il est clair que si $\alpha(t_1)\ldots(t_k) < \sigma$, alors $\alpha(t_1)\ldots(t_{k'}) = \sigma$ pour $k' < k$. On peut donc supposer que $\alpha(t_1)\ldots(t_k) \geq \sigma$ et qu'on a $\alpha(t_1)\ldots(t_i) = \sigma + \delta_m(t_1)\ldots(t_i)$ quel que soit $i \leq k$. Alors, $\sigma + \delta_m(s) > \sigma + \delta_m(t_1)\ldots(t_k)$ entraine $\delta_m(s) > \delta_m(t_1)..(t_k)$; par l'hypothèse de récurrence, il existe $i < k$ tel que $\delta_m(s) = \delta_m(t_1)\ldots(t_i)$ et $\alpha(s) = \sigma + \delta_m(t_1)\ldots(t_i) = \alpha(t_1)\ldots(t_i)$.

b/ Ici $\gamma_m = \xi+1$ et $\delta_m = \beta+1$. Si $\xi = 0$, la chose devient tout-à-fait analogue au cas que l'on vient de traiter. Si $\xi \neq 0$, posons $\tau = \sigma + \varepsilon_\mu^{\gamma_m}\cdot\beta$. Nous avons que $\alpha(t) = \tau + \varepsilon_\mu^{\xi}\cdot\varepsilon_\mu(t)$ pour tout $t \in N$. Alors $\alpha(s) \geq \tau$ et $\alpha(t_1) \geq \tau$; or $\varepsilon_\mu^{\xi}\cdot\varepsilon_\mu(t_1)$ est le terme du plus petit exposant de ε_μ dans la forme normale de $\alpha(t_1)$. Ici, donc, on peut supposer que $\alpha(t_1)\ldots(t_k) \geq \tau$

et que pour $i \leq k$, $\alpha(t_1)\ldots(t_i) = \tau + (\varepsilon_\mu^\xi \cdot \varepsilon_\mu)(t_1)\ldots(t_i)$. On peut aussi supposer que $\alpha(t_1)\ldots(t_{k-1})$ $\alpha(s)$ et, même $\alpha(t_1)\ldots(t_{k-1}) > \alpha(s)$. Nous disons aussi que l'on peut également supposer que $\alpha(t_1)\ldots(t_{k-1}) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi [\varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k')]$. En effet, par la définition de la suite fondamentale, tant que $\varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_i)$, $i = 1,2,\ldots$ l est un ordinal limite, on a $\alpha(t_1)\ldots(t_i) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi \cdot \varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_i)$. Soit ℓ_o le premier entier, s'il en existe, tel que $\varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o})$ soit un ordinal successeur, disons $\zeta + 1$. Alors, $\ell_o < k$ et $\alpha(s) < \alpha(t_1)\ldots(t_{\ell_o})$. A ce moment là,

$(\varepsilon_\mu^\xi \cdot \varepsilon_\mu)(t_1)\ldots(t_{\ell_o}) = \varepsilon_\mu^\xi \cdot \varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o}) = \varepsilon_\mu^\xi(\zeta+1)$ et

$(\varepsilon_\mu^\xi \cdot \varepsilon_\mu)(t_1)\ldots(t_{\ell_o}) = \varepsilon_\mu^\xi \cdot \gamma + \nu$

où $\nu =$

$\varepsilon_\mu^{(t_{\ell_o+1})}$ si ξ est limite

$\varepsilon_\mu^\eta \cdot \varepsilon_\mu(t_{\ell_o+1})$ si $\xi = \eta+1$

Nous avons $\alpha(s) < \tau + \varepsilon_\mu^\xi(\gamma+1)$ et alors, parce que $\alpha(s) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi \cdot \varepsilon_\mu(s)$, nous avons $\varepsilon_\mu(s) \leq \gamma$. Parce que ν est le terme du plus petit exposant de ε_μ dans la forme normale de $\alpha(t_1)\ldots(t_{\ell_o})$, il existe $p, \ell_o+1 \leq p \leq k$ tel que $\alpha(t_1)\ldots(t_p) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi \cdot \gamma$, autrement dit,

$$(\varepsilon_\mu^\xi \cdot \varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o}))(t_{\ell_o+1})\ldots(t_p) = \varepsilon_\mu^\xi \cdot \gamma$$

Nous avons donc, parce que $\gamma+1(t_p) = \gamma$,

$$(\varepsilon_\mu^\xi \cdot \varepsilon_\mu)(t_1)\ldots(t_p) = \varepsilon_\mu^\xi (\varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o})(t_p)), \text{ ce qui donne}$$

$$\alpha(t_1)\ldots(t_p) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi \cdot (\varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o})(t_p)).$$

Continuant ainsi, on se ramène au cas où

$$\alpha(t_1)\ldots(t_{k-1}) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi \cdot \varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k').$$

D'ailleurs, puisque $\alpha(s) < \alpha(t_1)\ldots(t_{k-1})$, l'ordinal $\varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k')$ ne peut être successeur, car sinon on aurait, comme ci-dessus, $\alpha(s) < \tau + \varepsilon_\mu^\xi (\varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k'))(t_k) = \alpha(t_1)\ldots(t_k)$. Donc, $\varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k')$ doit être un ordinal limite et $\alpha(t_1)\ldots(t_k) = \tau + (\varepsilon_\mu^\xi \varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k')(t_k))$. Cependant, $\varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k') > \varepsilon_\mu(s)$ entraine par l'hypothèse de récurrence, que $\varepsilon_\mu(s) \leq \varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k')(t_k)$ ce qui entraine $\alpha(t_1)\ldots(t_k) = \alpha(s)$.

c/ Ce sous-cas est tout à fait analogue à b/.

d/ La situation est analogue aux précédentes moyennant le sous-sous-lemme suivant :

SOUS-SOUS-LEMME Soit $\delta < \varepsilon_\mu$. Si $\varepsilon_\mu^{\delta+1}(t_1)\ldots(t_k) \leq \varepsilon_\mu^\delta$, alors

$\varepsilon_\mu^\delta = \varepsilon_\mu^{\delta+1}(t_1)\ldots(t_i)$ pour un $i \leq k$.

DÉMONSTRATION On procède par induction sur ξ, $1 \leq \xi < \varepsilon_\mu$ pour montrer que $(\varepsilon_\mu^\delta \cdot \xi)(t_1)\ldots(t_k) \leq \varepsilon_\mu^\delta$ entraine $(\varepsilon_\mu^\delta \cdot \xi)(t_1)\ldots(t_i) = \varepsilon_\mu^\delta$ pour un $i \leq k$ Pour $\xi = 1$ et ξ limite, le résultat est clair. Pour $\xi = \eta + 1$, nous avons $(\varepsilon_\mu^\delta (\eta+1))(t_1) = \varepsilon_\mu^\delta \cdot \eta + \varepsilon_\mu^\delta(t_1)$; le terme $\varepsilon_\mu^\delta(t)$ étant du plus petit exposant de ε_μ dans la forme normale de $\varepsilon_\mu^\delta \cdot \eta + \varepsilon_\mu^\delta(t_1)$ à la base ε_μ, il est clair que $\varepsilon_\mu^\delta(\eta+1)(t_1)\ldots(t_k) \leq \varepsilon_\mu^\delta$ entraine la conclusion souhaitée.

Nous arrivons aux cas (1) et (2). De nouveau, moyennant le sous-sous-lemme qui vient d'être établi, ces cas se traitent de la même façon que le sous-cas b/.

Le sous-lemme ayant été démontré, remarquons que si $X \overrightarrow{\beta(t)}(m)^n_k$, $m \geq 2n,k$, alors il existe une partition $P: [X]^n \to k$ tel que, si H est homogène pour P ayant au moins m-éléments alors $\min^2 H \geq m$. Il existe donc une suite décroissante $X = X_o \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_k$ avec $\min^2 X_1 \geq m$ telle que pour $1 \leq i \leq k$, $X_i \overrightarrow{\beta(t_o)\ldots(t_i)} (2\min^2 X_i)^{\min^2 X_i}_{\min^2 X_i}$ où $t_1 = n$, $t_{i+1} = \min^2 X_i$ pour $i \geq 1$ et $\beta(t_o)\ldots(t_k) \leq \beta(s)$. Par le sous-lemme, alors, $\beta(t_o)\ldots(t_p) = \beta(s)$ pour un $p \leq k$ et $X_p \overrightarrow{\beta(s)} (m)^n_k$ par la Proposition 2.II.1.

DÉMONSTRATION D Par induction sur β. Si $\alpha = \beta(m)$, le lemme est évident par le lemme C; si $\alpha + m = \beta$, c'est évident d'après les définitions. Si $\alpha < \beta(m)$, par l'hypothèse d'induction, il existe m'', n'', k'' tels que $X \overrightarrow{\beta(m)}(m'')^{n''}_{k''}$ entraine $X \overrightarrow{\alpha} (m)^n_k$. Alors il suffit de prendre m', n', k' suffisamment grands pour assurer l'existence d'une partition pour lequel toute partie homogène H doit satisfaire $\min^2 H \geq m'', n'', k''$.

DÉMONSTRATIONS E, F, G La démonstration de E est implicite dans celle de C; les démonstrations de F et de G sont analogues à celle de C.

BIBLIOGRAPHIE

[S] K. Shütte, Proof Theory, Springer-Verlag, 1977.

[Fr] H. Friedman, Simpler combinatorial theorems independent of set theory, manuscrit.

[K,L] G. Kreisel et A. Levy, Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, Z. Math. Logik Grundlagen Math., 14.

[Mc] Iterating the new, true improvable formulas, manuscrit.