Astérisque

KENNETH MCALOON

Les rapports entre la méthode des indicatrices et la méthode de Godel pour obtenir des résultats d'indépendance

Astérisque, tome 73 (1980), p. 31-39

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__31_0>

EXPOSÉ 3

LES RAPPORTS ENTRE LA MÉTHODE DES INDICATRICES ET LA MÉTHODE DE GODEL POUR OBTENIR DES RÉSULTATS D'INDÉPENDANCE

Kenneth Mc Aloon

I - PRÉLIMINAIRES ET L'ÉQUIVALENCE ENTRE LA FORMULE DE PARIS-HARRINGTON ET UNE FORMULE DE GÖDEL.

L'exposé précédent met en évidence le lien remarquable entre le système $\mathcal{P}$ et la relation combinatoire $[a,b] \underset{*}{\to} (2c)^c_c$ qui définit une indicatrice pour $\mathcal{P}$; on en déduit que l'énoncé $\forall m,n,k\ \exists l(l \underset{*}{\to} (m)^n_k)$ n'est pas prouvable dans $\mathcal{P} + \mathcal{T}_1$ La question se pose alors de savoir si les énoncés indépendants obtenus par la méthode des indicatrices ont un rapport avec les énoncés du type découvert par Gödel portant sur la non-contradiction de systèmes d'axiomes. Il s'avère que l'énoncé de Paris-Harrington et ceux de $[\mathcal{P},\text{bis}]$ qui correspondent à d'autres indicatrices pour $\mathcal{P}$ sont tous équivalents dans $\mathcal{P}$ à une même formule de Gödel, celle qui exprime que "$\mathcal{P}$ est consistant avec toute formule universelle close qui est vraie". Dans cet exposé nous formulons et nous démontrons l'équivalence de la formule de Paris- Harrington et celle de Gödel;or l'équivalence de celle-ci avec les autres formules de Paris s'établit de façon tout à fait analogue. Ensuite nous traitons des rapports entre la méthode de Gödel et celle des indicatrices à un niveau plus général.

Nous allons avoir souvent recours aux méthodes de la Théorie des Modèles pour établir des résultats qui relèvent plutôt de la Théorie de la Démonstration. Nos arguments modèle-théoriques seront tout de même formalisables dans l'arithmétique de Péano; nous faisons donc ici quelques remarques sur le caractère arithmétique du théorème de complètude et sur la façon que nous pouvons utiliser celui-ci en conjonction avec des définitions partielles de satisfaction dans l'arithmétique. Rappelons tout d'abord la situation standard, c'est-à-dire au niveau de $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{A}$ une théorie dans le langage de l'arithmétique. Nous supposerons toujours que les notions syntactiques - formules, variables, etc. - ont été formulées en termes arithmétiques pour pouvoir identifier les formules et leurs nombres de Gödel. Si, moyennant cette identification, la théorie $\mathcal{A}$ constitue un ensemble

Σ^o_{n+1} d'entiers et si elle est non-contradictoire, alors la construction de Henkin démontre que $\mathcal{A}$ possède un modèle M qui jouit des propriétés suivantes : le domaine de M est un ensemble récursif de nouvelles constantes individuelles $c_1, c_2, \ldots$ et la relation de satisfaction $M \models \Phi(c_1, \ldots, c_n)$ entre les formules $\Phi(v_1, \ldots, v_k)$ et les suites finies de constantes $c_1, \ldots, c_n$ est une relation Δ^o_{n+2} .

Rappelons aussi que pour les formules Δ^o_o closes la relation de satisfaction dans $\mathbb{N}$ est primitive récursive, donc Δ^o_1 ; notons $\mathcal{T}_o$ l'ensemble des formules closes Δ^o_o qui sont satisfaites dans $\mathbb{N}$; $\mathcal{T}_o$ est donc défini dans $\mathbb{N}$ par un prédicat Δ^o_1 que nous notons $Tr_o(\phi)$. Par récurrence, nous définissons la classe $\mathcal{T}_n$ des formules closes Π^o_n satisfaites dans $\mathbb{N}$ et un prédicat $Tr_n(\phi)$ qui est également Π^o_n, $n \geq 1$, et qui exprime la satisfaction dans $\mathbb{N}$ des formules closes Π^o_n . Nous avons donc pour toute formule $F(v_1, \ldots, v_s)$ de type Π^o_n et tous $k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} \models F(k_1, \ldots, k_s) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models Tr_n(\bar{F}(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_s))$$

Il est interessant de noter que ces remarques amènent à un théorème d'incomplètude : l'ensemble $\mathcal{T}_2$ n'est pas une partie Σ^o_2 des entiers (et ceci se démontre par un simple argument diagonal qui n'utilise pas de théorème de point-fixe); donc si M est un modèle de $\mathcal{P}$ dont la relation de satisfaction est Δ^o_2 il faut qu'il y ait un énoncé Π^o_2 qui est vraie dans $\mathbb{N}$ et qui n'est pas satisfaite dans M. Donc si $\mathcal{A}+\mathcal{T}_2$ est consistant et $\mathcal{A}$ est récursivement axiomatisable, il y a un énoncé Π^o_2 indépendant de $\mathcal{A}$.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est une théorie récursivement axiomatisable; alors $\mathcal{T}_n \cup \mathcal{A}$ est un ensemble Σ^o_{n+1} , $n \geq 0$. La consistance de $\mathcal{A} \cup \mathcal{T}_n$ s'exprime au moyen d'une formule arithmétique $Cons(T_n + \mathcal{A})$, voir [Mc] ; si $\mathbb{N} \models Cons(T_n + \mathcal{A})$, alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{T}_n$ possède un modèle M pour lequel la relation de satisfaction est Δ^o_{n+2}; or, M est une extension Π^o_n-élémentaire de $\mathbb{N}$, ce que nous abrègeons $\mathbb{N} \prec_n M$.

Nous reprenons les notations de [Mc] . La fonction " - " qui applique $\mathbb{N}$ dans les termes de $\mathcal{L}$, le langage de l'arithmétique

$$\bar{n} = 0+1 \underbrace{+\ldots+1}_{n \text{ fois}}$$

est une fonction récursive; la fonction définie dans $\mathcal{P}$ qui représente " - " sera notée $y = \tilde{x}$; i.e., "~" dénote la version formalisée dans $\mathcal{P}$ de " - " . Dans [Mon] , voir aussi [L] , [K,L] , on démontre le schéma

I.1. $\quad \mathcal{P} \vdash F \leftrightarrow Tr_n(\bar{F})$, $\quad F$ une formule close Π^o_n

Fixons une énumération $P_1, P_2, \ldots$ des axiomes de $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{P}^s \equiv \bigwedge_{i \leq s} P_i$. Montague a démontré, en effet, que pour tout n il existe s_n tel que

I.2 $\quad \mathcal{P}^{s_n} \vdash F \leftrightarrow Tr_n(F)$, $\quad F$ une formule close Π^o_n

et, pour ce faire, il établit le schéma

I.3 $\quad \mathcal{P}^{s_n} \vdash \forall v_1,\ldots,v_k\ [F(v_1,\ldots,v_k) \leftrightarrow Tr_n(\bar{F}(\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_k))]$,

Finalement, il faut remarquer que s_n est une fonction primitive récursive de n, donc Δ_1^o dans $\mathcal{P}$ et absolue. Moyennant le schéma I.3 on peut voir que l'induction pour les formules Π_n^o , n fixé, est prouvable dans un sous-système fini de $\mathcal{P}$; c'est-à-dire, il existe t_n tel que

I.4 $\quad \mathcal{P}^{t_n} \vdash \forall v_1,\ldots,v_k)\ [[F(0,v_1,\ldots,v_k)) \wedge \forall x\ F(x,v_1,\ldots,v_k)$
$\quad \rightarrow F(x+1,v_1,\ldots,v_k))] \rightarrow \forall x\ F(x,v_1,\ldots,v_k)]$, F une formule Π_n^o

Pour ce voir, on doit prendre t_n suffisamment grand pour que $t_n \geq s_n$ et pour que dans $\mathcal{P}^{t_n}$ l'on puisse démontrer le théorème

$$\forall \phi [\phi \in \Pi_n^o \wedge \phi = \phi(v) \rightarrow [Tr_n(\phi(\tilde{0})) \wedge \forall x (Tr_n(\phi(\tilde{x})) \rightarrow Tr_n(\phi(x+1)) \rightarrow \forall x\ Tr_n(\phi(x))$$

Les remarques ci-dessus sur le théorème de complètude ont aussi une version formalisable dans $\mathcal{P}$. Notons $\mathcal{L}^*$ le langage de l'arithmétique augmenté par les constantes $c_1,c_2,\ldots$ Soit $\mathcal{A}$ une théorie dans $\mathcal{L}$ qui est récursivement axiomatisable, et soit $\alpha(v)$ une formule Σ_1^o qui définit $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{N}$. La formule close $Cons(T_n+\mathcal{A})$ qui exprime la consistance de $\mathcal{A} \cup \mathcal{T}_n$ est Π_{n+1}^o dans $\mathcal{P}$. Si $R(\phi)$ est une formule à une variable libre, nous écrirons " $R(\phi)$ est une relation de satisfaction" pour abréger

$$\forall\phi\forall\psi[\phi \text{ et } \psi \text{ des formules closes de } \mathcal{L}^* \rightarrow$$
$$[(R(\phi) \leftrightarrow \neg R(\neg\phi)) \wedge (R(\psi) \vee R(\phi) \longleftrightarrow R(\phi \vee \psi))$$
$$\wedge \forall\rho(\exists u\ \rho(u) = \phi \rightarrow (R(\phi) \leftrightarrow \exists i\ R(\rho(c_i)))]]$$

Alors pour chaque $\alpha(x)$ et pour tout n, il existe une formule $R_n^{\mathcal{A}}(\phi)$ qui est Δ_{n+2}^o dans $\mathcal{P}$ et qui satisfait

I.5 $\quad \mathcal{P} \vdash Cons(T_n+\mathcal{A}) \rightarrow$ ["$R_n^{\mathcal{A}}(\phi)$ est une relation de satisfaction"
$\quad \wedge \forall\phi(Tr_n(\phi) \vee \mathcal{A}(\phi) \rightarrow R_n^{\mathcal{A}}(\phi))]$

Aussi d'après les travaux de Montague et de Kreisel-Levy, a-t-on

I.6 $\quad \mathcal{P} \vdash Cons(T_n+\mathcal{P}^t) \qquad n,t \in \mathbb{N}$

Il en suit que pour chaque n il existe R_n qui est Δ_{n+2}^o dans $\mathcal{P}$ et r_n tel que

I.7 $\quad \mathcal{P}^{r_n} \vdash$ "$R_n(\phi)$ est une relation de satisfaction" $\wedge \forall\phi\ (Tr_n(\phi) \rightarrow R_n(\phi))$
$\quad \wedge \exists i\ \forall x(\neg R_n(\tilde{x} = c_i))$

Autrement dit, I.7 exprime l'existence d'une extension Π_n^o-élémentaire et non-standard des entiers. Remarquons aussi qu'il y a une version formalisable dans $\mathcal{P}$ de la réciproque du théorème de complètude - que toute théorie ayant un modèle est consistante :

I.8 $\quad \mathcal{P} \vdash$ "$R(\phi)$ est une relation de satisfaction"
$$\rightarrow \forall\psi(R(\psi) \rightarrow \mathrm{Cons}(\psi))$$

et

I.9 $\quad \mathcal{P} \vdash [$"$R(\phi)$ est une relation de satisfaction"
$$\wedge\ \forall\psi(\mathcal{A}(\psi) \vee Tr_n(\psi) \rightarrow R(\psi))] \rightarrow \mathrm{Cons}(T_n + \mathcal{A})$$

Donnons une application - due à Harrington et à nous-mêmes indépendamment - de cette série de remarques.

I.10 <u>THÉORÈME</u> Soit $Y(x,y)$ l'indicatrice de Paris-Harrington. Alors on a :
$$\mathcal{P} \vdash \forall x\ \forall y\ \exists z\,[Y(x,y) = z] \leftrightarrow \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P})$$

<u>DÉMONSTRATION</u> Soit k un entier suffisamment grand; travaillons informellement dans $\mathcal{P}^k + \forall x\, \forall y\, \forall z\, [Y(x,z) \geqslant y]$. Soit M une extension Π_3^o - élémentaire non-standard des entiers de domaine $c_1, c_2, \ldots$ dont la relation de satisfaction est Δ_4^o . Notons que M satisfait l'induction pour les formules Σ_1^o. Choisissons dans M des entiers non-standard α, β tels que
$$M \models Y(\alpha,\beta) = 2\alpha$$
(de tels α, β existent parce que le principe de débordement s'applique à M pour les formules Σ_1^o). En appliquant la construction donnée dans l'exposé précédent, nous trouvons de façon Δ_2^o à partir de M une structure I qui est un segment initial de M telle que la relation de satisfaction dans I se réduit récursivement à la satisfaction des formules Δ_o^o dans M; d'ailleurs I vérifie les axiomes de $\mathcal{P}$ et I vérifie les mêmes formules Π_1^o que les entiers standard : en effet, M est un modèle de $\mathcal{T}_1$ et I est un segment initial de M. On conclut que I est un modèle de $\mathcal{P} + \mathcal{T}_1$; on a donc $\mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P})$ par I.9. Quant à la réciproque, on voit que dans la démonstration du théorème I.7. de l'exposé précédent la suite f_b et donc la fonction F sont définies explicitement à partir des paramètres a,b,c. Il existe donc une formule $F(a,b,c,v_1,\ldots,v_n,v)$ telle que
$$\mathcal{P} \vdash \forall a,b,c\ [(\neg\, \exists d([a,d] \underset{*}{\rightarrow} (b)_c^{\bar{n}})) \rightarrow F : [\mathbb{N}]^n \rightarrow c \quad \forall d (F \restriction [a,d]^n \text{ n'a pas de partie homogène dense de cardinalité } b)] \,.$$
Or, la formule F et cette démonstration dans $\mathcal{P}$ sont calculables de façon primitive récursive en n. Par 2. I.8 on voit que pour tous m,n,k
$$\mathcal{P} \vdash \forall a\ \ \exists d([a,d] \underset{*}{\rightarrow} (\bar{m})_{\bar{k}}^{\bar{n}})$$
et qu'il existe une fonction primitive récursive qui associe à m,n,k cette démonstration. Alors, dans $\mathcal{P}$ on peut prouver le théorème

$\forall x\, \forall y\, \forall u\, \forall v\ \exists w\, \mathrm{Prov}(\mathcal{P}^{w}, \overline{\exists d}([\tilde{x},d] \underset{*}{\rightarrow} (\tilde{u})^{\tilde{y}}_{\tilde{v}}))$ où $\mathrm{Prov}(\phi,\psi)$ exprime "$\phi \rightarrow_{1} \psi$ est prouvable dans le calcul des prédicats". On a donc

$$\mathcal{P} + \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P}) \vdash \forall x,y,u,v\ \mathrm{Cons}(T_1 + \overline{\exists d}([\tilde{x},d] \underset{*}{\rightarrow} (\tilde{u})^{\tilde{y}}_{\tilde{v}}))$$

La formule $\exists d[x,d] \underset{*}{\rightarrow} (u)^{y}_{v}$ étant Σ^{0}_{1} dans $\mathcal{P}$ on déduit que

$$\mathcal{P} + \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P}) \vdash \forall x,y,u,v(\neg \mathrm{Tr}_1(\overline{\forall d}([\tilde{x},d] \underset{*}{\not\rightarrow} (\tilde{u})^{\tilde{y}}_{\tilde{v}}))$$

et par I.3 on conclut que

$$\mathcal{P} + \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P}) \vdash \forall x,y,u,v\ \exists d([x,d] \underset{*}{\rightarrow} (u)^{y}_{v})$$

II- REMARQUES ET GÉNÉRALISATIONS

Une formule $\mathrm{Cons}(T_1+\mathfrak{A})$ qui exprime la non-contradiction de $\mathfrak{A}+\mathcal{T}_1$ est élaborée à partir d'une énumération fixée d'axiomes pour $\mathfrak{A}$. Le passage de l'énumération des axiomes à la formule de consistance est dévelloppé de façon systématique dans [Fe] : à toute RE-énumération $\alpha(n) = A_n$ d'axiomes pour $\mathfrak{A}$ est associée une formule de Gödel $\mathrm{Cons}_\alpha(T_1+\mathfrak{A})$; or il y est démontré que les formules ainsi obtenues sont sensibles aux choix de α et ne sont pas toutes équivalentes dans $\mathcal{P}+\mathcal{T}_1$. Dans la section précédente nous avons passé sous silence le fait que pour avoir l'équivalence du théorème I.10 il faut prendre $\mathrm{Cons}(T_1+\mathcal{P})$ à partir d'une énumération $P_1, P_2, \ldots$ dont on peut démontrer dans $\mathcal{P}$ qu'elle liste les axiomes pour $'$,$+$,$.$ et tous les axiomes d'induction et exactement ceux-ci. Or, de différentes indicatrices pour une théorie peuvent amener à des formules indépendantes inéquivalentes : J. Paris a construit une indicatrice pour $\mathcal{P}$ qui donne une formule indépendante strictement plus forte (relativement à $\mathcal{P}$) que celle de l'exposé précédent et nous en avons construit une qui donne une formule strictement moins forte; en perservérant on peut étendre ces résultats et démontrer que toute formule $\mathrm{Cons}_\alpha(T_1+\mathfrak{A})$ où $\mathfrak{A}$ est une extension récursivement axiomatisable de $\mathcal{P}$ est équivalente dans $\mathcal{P}$ à une formule associée à une indicatrice pour $\mathfrak{A}$. Nous allons donner ici une réciproque quoique partielle qui établit que la formule indépendante associée à une indicatrice pour $\mathfrak{A}$ doit toujours entrainer dans $\mathcal{P}$ une formule de Gödel de la forme $\mathrm{Cons}_\alpha(T_1+\mathfrak{A})$.

II.1. THÉORÈME Soit $\mathfrak{A}$ une extension récursivement axiomatisable de $\mathcal{P}$ et soit $K(x,y) = z$ une indicatrice pour $\mathfrak{A}$ par rapport aux modèles d'un sous-système fini $\mathcal{P}^t$ de $\mathcal{P}$. Alors il existe une RE-énumération α d'axiomes pour $\mathfrak{A}$ telle que $\mathcal{P} \vdash \forall x\, \forall z\, \exists y (K(x,y) \geqslant z) \to \mathrm{Cons}_\alpha(T_1+\mathfrak{A})$.

DÉMONSTRATION Soit $A_1, A_2, \ldots$ une **énumération** primitive récursive d'axiomes pour $\mathfrak{A}$; notons $\mathfrak{A}^s \equiv \bigwedge_{i \leqslant s} A_i$. Posons $\pi \equiv \forall x\, \forall z\, \exists y\; K(x,y) \geqslant z$.
Dans la section II du premier exposé, il a été prouvé qu'il existe, uniformément en s, des indicatrices $Y_{\mathfrak{A}^s}(x,y) \equiv Y(s,x,y)$ pour $\mathfrak{A}^s$ par rapport aux modèles M d'un sous-système fini $P_1 \wedge \ldots \wedge P_{t'}$ de $\mathcal{P}$. D'ailleurs, par la méthode de preuve de l'implication $\to$ du théorème I.10, pour t'' suffisamment grand on a

$$P_1 \wedge \ldots \wedge P_{t''} \vdash \forall s\, [\forall x\, \forall z\, \exists y\; Y(s,x,y) \geqslant z \to \mathrm{Cons}(T_1+\mathfrak{A}^s)]$$

Parce que $\mathfrak{A} \vdash \mathrm{Cons}(T_1+\mathfrak{A}^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathfrak{A} \vdash \forall x\, \forall z\, \exists y\; Y(\overline{m},x,y) \geq z$$

On définit l'énumération α en stipulant que α énumère les axiomes $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ tant que

$$P_1 \wedge \ldots \wedge P_{t''} \wedge \pi \vdash \forall x\, \forall z\, \exists y\; Y(\bar{m},x,y) \geq z.$$

Vérifions que α énumére bien les axiomes $A_1, A_2, \ldots$ de $\mathfrak{A}$. Supposons au contraire qu'il existe m_o tel que $P_1 \wedge\ldots\wedge P_{t''} \wedge \pi \wedge \exists x\, \exists z\, \forall y\; Y(\bar{m}_o,x,y) \leq z$ ait un modèle M que l'on suppose non-standard. Soient a,b,c des entiers infinis de M tels que

$$M \models \forall y\; Y(m_o,a,y) \leq b \wedge K(b,c) \geqslant a$$

Soit I un segment initial de M satisfaisant $b < I < c$, $I \models \mathfrak{A}$. Alors $I \models \exists y\; Y(m_o,a,y) > b$ et donc il existe $b' < b$ tel que $I \models Y(m_o,a,b') > b$ ce qui contredit le fait que $Y(m_o,x,y)$ est une fonction Δ_1^o dans $P_1 \wedge\ldots\wedge P_{t'}$. Pour finir, en utilisant les définitions de satisfaction $Tr_n(\phi)$ appliquées à $P_1 \wedge\ldots\wedge P_{t''} \wedge \pi$, on a que

$$\mathcal{P} \vdash \pi \to \forall s(\alpha(s) \text{ défini} \to \forall x\, \forall z\, \exists y\; Y(s,x,y) \geq z)$$

et donc $\mathcal{P} \vdash \pi \to Cons_\alpha(T_1 + \mathfrak{A})$ C.Q.F.D.

Pour finir nous donnons au moyen de la méthode des indicatrices une version du théorème de Rosser. A la différence du résultat d'incomplètude noté au début du §I, le résultat suivant fournit une formule indépendante de $\mathcal{A}$ sans l'hypothèse que $\mathcal{A} + \mathcal{T}_2$ soit consistant.

II.2. <u>THÉORÈME</u> Soit $\mathcal{A}$ une extension récursivement énumérable de $\mathcal{P}$. Alors il existe une formule close Π^o_2 indépendante de $\mathcal{A}$.

<u>DÉMONSTRATION</u> Nous utilisons d'abord une astuce de H. Lessan : l'ensemble $\mathcal{T}_1$ des formules closes Π^o_1 satisfaites dans $\mathbb{N}$ n'étant pas récursif, par un argument d'omission de types, on voit qu'il existe un modèle dénombrable non-standard M de $\mathcal{A}$ tel que pour tout $X \subseteq M$, X définissable dans M entraine $X \cap \mathbb{N} \neq \mathcal{T}_1$. Par conséquence, on a que pour tout $\beta \in M - \mathbb{N}$, il existe une formule $\psi(x)$ de type Δ^o_o, telle que $\mathbb{N} \models \forall x \neg \psi(x)$ et $M \models \exists x (x \leq \beta \wedge \psi(x))$. Ensuite en reprenant la notation du théorème précédent, nous avons pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \vdash \forall x \forall z \exists y\ Y(m,x,y) \geq z$. Par débordement il y a $\beta \in M - \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A} \vdash \forall x \forall z \exists y\ Y(\beta,x,y) \geq z$ et tel que $M \models \psi(\beta) \wedge \forall x < \beta\ \neg \psi(x)$, pour une $\psi \in \Delta^o_o$; autrement dit $M \models \forall \beta [\psi(\beta) \wedge \forall x < \beta\ \neg\psi(x) \rightarrow \forall x \forall z \exists y\ Y(\beta,x,y) \geq z]$.
Soit $M' \succ_f M$ une extension finale élémentaire dénombrable de M.
Parce que $\beta > \mathbb{N}$, il est clair que si $M' \models Y(\beta,a,b) = c$ avec $c > \mathbb{N}$, alors il existe $a < I < b$ tel que $I \models \mathcal{A}$. En reprenant l'argument du lemme 1.IV.5, on trouve qu'il existe I, $M < I < M'$ tel que $I \models \mathcal{A}$ et $I \models \exists x \exists z \forall y\ Y(\beta,x,y) \leq z$; autrement dit, $I \models \exists \beta [\psi(\beta) \wedge \forall x < \beta \neg\psi(\beta) \wedge \exists x \exists z \forall y\ Y(\beta,x,y) \leq z]$. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[Fe] S. Feferman, Arithmetization of metamathematics in a general sitting, F.M. 49

[K,L] G. Kreisel et A. Levy, Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, Z. Math. Logik Grundlagen Math., 14.

[Mc] K. Mc Aloon Completeness theorems, incompleteness theorems and models of arithmetic, TAMS, 239.

[Mon] R. Montague, semantical closure and non-finite axiomatizability, Infinitistic Methods, Pergamon, Oxford, PWN, Warsaw 1961, pp. 45-69.