AST

Introduction et Table des matières

Astérisque, tome 73 (1980), p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__1_0>

INTRODUCTION

Ce volume contient les rédactions détaillées et organisées d'un certain nombre d'exposés du séminaire sur les modèles de l'arithmétique de Péano, qui se tient à Paris VII depuis l'automne 1977. L'arithmétique de Péano est la théorie axiomatique dont le modèle "standard" est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers non-négatifs muni de sa structure d'ordre et des opérations d'addition et de multiplication. En plus d'un nombre fini d'axiomes pour la structure d'ordre et la définition par récurrence de l'addition et de la multiplication, cette théorie comprend une infinité d'axiomes qui expriment que tout ensemble non-vide défini au moyen d'une formule du premier ordre possède un élément minimum (schéma d'axiomes d'induction).

D'après les travaux de Skolem et de Gödel dans les années 1930, on sait que cette théorie possède des modèles qui ne sont pas isomorphes au modèle standard. Un tel modèle non-standard est composé des éléments non-négatifs d'un anneau ordonné et non-archimédien; cependant à cause des axiomes d'induction, les modèles non-standards sont munis d'une structure extrêmement riche et pratiquement inextricable. Or, en utilisant des codages classiques, on peut définir, par des formules ne portant que sur l'addition et la multiplication, les autres fonctions et relations arithmétiques telles que l'exponentiation, la mise en facteurs etc et en prouver les propriétés usuelles. Gödel a exploité ce pouvoir d'expression de la théorie dans la démonstration de son célèbre Théorème d'Incomplétude; ce théorème moyennant les travaux de J. Robinson et Y. Matijasevich, a pour conséquence qu'il existe un modèle M de l'arithmétique de Péano et une équation diophantienne qui possède des solutions dans M sans en avoir dans le modèle standard $\mathbb{N}$. Ce théorème établit donc la "faiblesse" de la théorie axiomatique, et, en même temps, "l'étendue" de la classe de ses modèles.

Depuis les découvertes de Skolem et de Gödel, l'étude des modèles de l'arithmétique se poursuit dans l'espoir que ce travail contribuera, à terme, à mieux comprendre la structure de $\mathbb{N}$, soit en servant à démontrer de nouveaux théorèmes d'arithmétique, soit en précisant des difficultés, tant techniques que conceptuelles, qu'on risque de rencontrer en théorie des nombres ou en combinatoire. Bien que cet espoir soit loin d'être pleinement réalisé, les développements récents ne l'ont pas trahi; bon nombre de résultats exposés dans ce volume mettent en évidence la richesse structurale des modèles étudiés, et certains mènent à de nouveaux théorèmes combinatoires d'énoncé simple, et qui, cependant, ne sont pas démontrables dans l'arithmétique de Péano; ce qui donne de nouveaux exemples, au niveau de l'arithmétique, du phénomène d'incomplétude.

Dans ce volume il y a six exposés .

Les deux premiers traitent de travaux de J.Paris, L.Kirby et L.Harrington. Pour analyser les sous-modèles d'un modèle non-standard, Kirby et Paris ont introduit un outil élégant et puissant, la méthode des indicatrices, et leurs travaux ont abouti à un nouveau théorème d'incomplètude; or Paris a trouvé des variantes du théorème de Ramsey qui sont indépendantes de l'arithmétique de Péano; une telle variante particulièrement limpide était trouvée ensuite par Harrington. Ces travaux sont relatés dans l'Exposé 1 (L. Kirby) et l'Exposé 2 (D. Lascar). Dans les Exposés 3 et 4 (K. Mc Aloon), on établit le rapport entre le "nouveau" théorème d'incomplètude et "l'ancien", et on étend les résultats de Paris-Harrington sur les théorèmes combinatoires à une progression transfinie de théories axiomatiques.

Dans l'Exposé 5 (M.A. Dickmann) et l'Exposé 6 (J.P. Ressayre) on change de point de vue et on étudie les extensions d'un modèle. Pour celà on fait une analyse des types à la façon de H. Gaifman. Un type au-dessus d'un modèle correspond à "un point à l'infini" et l'analyse des types permet d'étudier les extensions possibles du modèle. Dans ces deux exposés, on insiste sur le fait que l'existence de certains types et donc de certaines extensions de modèles, est liée de façon spécifique à certains théorèmes combinatoires de l'arithmétique de Péano. Enfin on applique la "machinerie" ainsi élaborée pour démontrer un beau résultat de F. Abramson et L. Harrington sur l'existence de modèles non-dénombrables n'admettant aucune suite d'éléments indiscernables de longueur supérieure à un nombre entier fixé à l'avance.

Ces textes ont été dactylographiés avec soin et persévérance par Mme Colette Pradier et Melle Bornia Chaouche; nous leur exprimons tous nos remerciements.

K. Mc Aloon

TABLE DES MATIÈRES