

# *Astérisque*

AST

## **Table des matières**

*Astérisque*, tome 69-70 (1979), p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_69-70\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__69-70__1_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION .....	7
CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES	
§ 1.1. <u>Nombres transcendants</u>	
a) Équations différentielles.....	13
b) Ordre arithmétique.....	15
c) Indépendance de logarithmes.....	18
d) Hauteurs.....	19
§ 1.2. <u>Groupes algébriques</u>	
a) Généralités .....	21
b) Fonctions et variétés abéliennes .....	22
c) Problèmes de rationalité.....	25
d) Courbes elliptiques et extensions.....	27
e) Dimension algébrique.....	28
§ 1.3. <u>Exposant de Dirichlet généralisé</u>	
a) Introduction.....	28
b) Généralités sur $\mu(\Gamma, V)$ .....	29
c) Lien avec l'hypothèse d'un théorème de W.M. Schmidt.....	31
d) Sous-groupes de $\mathbb{R}^n$ .....	34
e) Hypersurfaces algébriques de $\mathbb{C}^n$ .....	38
CHAPITRE 2. MATRICES ET NOMBRES TRANSCENDANTS	
§ 2.1. <u>Généralités</u>	
a) Sous-groupes à 1 paramètre de $GL_m(\mathbb{C})$ .....	40
b) Homomorphismes analytiques de $\mathbb{C}^n$ dans $GL_m(\mathbb{C})$ .....	41
§ 2.2. <u>Sous-groupes à un paramètre normalisés</u> .....	42
§ 2.3. <u>Sous-groupes à un paramètre sans normalisation</u>	
a) Points algébriques du graphe.....	44
b) Indépendance linéaire de points algébriques.....	45
c) Dimension algébrique.....	45

§ 2.4.	<u>Sous-groupes commutatifs à plusieurs paramètres normalisés</u>	
a)	Transcendance des coordonnées de points algébriques.....	47
b)	Indépendance linéaire de points algébriques.....	48
c)	Dimension algébrique.....	51
§ 2.5.	<u>Homomorphismes analytiques de <math>\mathbb{C}^n</math> dans <math>GL_m(\mathbb{C})</math></u>	
a)	Points algébriques du graphe.....	55
b)	Dimension algébrique.....	57

### CHAPITRE 3. SOUS-GROUPES A UN PARAMÈTRE NORMALISÉS

§ 3.1.	<u>Enoncés des principaux résultats</u> .....	59
§ 3.2.	<u>Application aux groupes algébriques de dimension 2.</u>	
a)	Variété abélienne simple de dimension 2.....	61
b)	Produit de deux courbes elliptiques.....	62
c)	Extension d'une courbe elliptique par le groupe additif.....	64
d)	Produit d'une courbe elliptique par le groupe multiplicatif.....	65
e)	Extension non triviale d'une courbe elliptique par le groupe multiplicatif.....	66
§ 3.3.	<u>Intégrales elliptiques</u>	
a)	Formes différentielles sur une courbe elliptique .....	68
b)	Intégrales elliptiques de première ou deuxième espèce.....	69
c)	Périodes de certaines intégrales elliptiques de troisième espèce.....	71
§ 3.4.	<u>Démonstration du théorème 3.1.1.</u> .....	73
§ 3.5.	<u>Indépendance linéaire et algébrique de périodes et quasi-périodes..</u> .....	73

### CHAPITRE 4. SOUS-GROUPES A UN PARAMÈTRE SANS NORMALISATION

§ 4.1.	<u>Points algébriques du graphe</u> .....	76
§ 4.2.	<u>Dimension algébrique</u> .....	77
§ 4.3.	<u>Démonstrations</u> .....	82

CHAPITRE 5. SOUS-GROUPES NORMALISÉS A PLUSIEURS PARAMÈTRES

§ 5.1.	<u>Le critère de transcendance de Bombieri.....</u>	84
§ 5.2.	<u>Applications aux homomorphismes analytiques normalisés de <math>\mathbb{C}^n</math> dans <math>G_{\mathbb{C}}</math></u>	
	a) Le théorème principal.....	85
	b) Variétés abéliennes.....	86
	c) Produit d'une variété abéliennes par le groupe additif.....	86
	d) Extension d'une variété abélienne par le groupe additif.....	87
	e) Produit d'une variété abélienne par le groupe multiplicatif.....	88
	f) Extension d'une variété abélienne par le groupe multiplicatif.....	89
	g) Application à la fonction bêta.....	90
§ 5.3.	<u>Généralisations du théorème de Schneider sur la fonction modulaire</u>	
	a) Endomorphismes de variétés abéliennes.....	93
	b) Transcendance de valeurs de fonctions arithmétiques automorphes.....	95
§ 5.4.	<u>Démonstration du théorème de Bombieri</u>	

CHAPITRE 6. VARIÉTÉS ABÉLIENNES SIMPLES DE TYPE C.M.

§ 6.1.	<u>Transcendance des coordonnées de points algébriques ..</u>	103
§ 6.2.	<u>Indépendance linéaire de points algébriques .....</u>	104
§ 6.3.	<u>Application aux homomorphismes analytiques de <math>\mathbb{C}^n</math> dans <math>G_{\mathbb{C}}</math>.</u>	
	a) Sous-groupes à 1 paramètre d'une variété abélienne simple.....	106
	b) Cas général.....	107

CHAPITRE 7. LEMMES DE SCHWARZ EN PLUSIEURS VARIABLES

§ 7.1.	<u>Etude générale</u>	
	a) Fonctions d'une variable.....	114
	b) Un seul zéro d'ordre élevé.....	117
	c) Majoration de $\theta_t$ .....	118
	d) Majoration de $\theta_1$ pour $S = \Gamma_N$ .....	119

§ 7.2.	<u>Produits cartésiens</u>	
	a) Introduction.....	121
	b) Formules d'interpolation.....	122
	c) Application aux sous-groupes de $\mathbb{C}^n$ .....	128
§ 7.3.	<u>Sous-groupes de la trace réelle de <math>\mathbb{C}^n</math></u>	
	a) Énoncés des résultats.....	129
	b) Un théorème de Masser et Moreau sur les polynômes à plusieurs variables.....	130
	c) Démonstration du théorème 7.3.4. ....	130
§ 7.4.	<u>La masse moyenne des zéros</u>	
	a) Introduction.....	133
	b) Fonctions sous-harmoniques.....	136
	c) Fonctions plurisousharmoniques.....	138
	d) Application aux fonctions analytiques.....	139
§ 7.5.	<u>Singularités d'hypersurfaces algébriques</u>	
	a) Le théorème d'existence de Hörmander, Bombieri et Skoda.....	142
	b) Sur les degrés d'hypersurfaces algébriques ayant des singularités données.....	142
	c) Un lemme de Schwarz pour les ensembles finis.....	144
§ 7.6.	<u>Compléments</u> .....	147

CHAPITRE 8. HOMOMORPHISMES ANALYTIQUES DE  $\mathbb{C}^n$  DANS  $G_{\mathbb{C}}$

§ 8.1.	<u>Points algébriques du graphe</u> .....	149
§ 8.2.	<u>Dimension algébrique</u>	
	a) Utilisation du coefficient de densité.....	150
	b) Sur une suggestion de Bombieri et Lang.....	151
	c) Une autre suggestion. Lien avec un problème de Weil et Serre.....	152
§ 8.3.	<u>Critères de transcendance</u>	
	a) Énoncés des critères pour les fonctions entières..	155
	b) Le théorème de Baker par les fonctions de plusieurs variables.....	156
	c) Énoncés des critères pour les fonctions méromorphes.....	157
	d) Démonstration des critères.....	159

APPENDICE I. PROBLEMES LOCAUX, par Daniel BERTRAND

I Introduction

§ 1.1.	Position du problème.....	163
§ 1.2.	Notations.....	164

II Critères de transcendance généraux

§ 2.1.	Le cas normalisé.....	165
§ 2.2.	Le cas non normalisé.....	167
§ 2.3.	Quelques mesures de répartition.....	168
§ 2.4.	Les lemmes de Schwarz.....	169

III Le cas d'une variable

§ 3.1.	Les situations locales .....	171
§ 3.2.	La situation globale normalisée.....	172
§ 3.3.	La situation globale non normalisée.....	173

IV Résultats de transcendance

§ 4.1.	Préliminaires.....	175
§ 4.2.	Sous-groupes à plusieurs paramètres normalisés.....	181
§ 4.3.	Sous-groupes non normalisés.....	183
§ 4.4.	Variétés abéliennes dégénérentes.....	184
§ 4.5.	Problèmes d'indépendance linéaire.....	185

V Applications

§ 5.1.	Arithmétique des corps de nombres.....	187
§ 5.2.	Géométrie diophantienne.....	188

APPENDICE II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES GROUPES ALGÈBRIQUES COMMUTATIFS,  
par Jean-Pierre SERRE

§ 1.	<u>Compactification de <math>G</math></u>	
1.1.	Le groupe $L$ .....	191
1.2.	Compactification de $L$ .....	192
1.3.	Construction de $\bar{G}$ .....	192
1.4.	Diviseurs et plongements projectifs de $\bar{G}$ .....	192
1.5.	Une propriété des endomorphismes $[n]_G$ .....	193
§ 2.	<u>Hauteurs</u>	
2.1.	Rappels .....	195
2.2.	Hauteur sur $\bar{G}$ relativement à $D_{a,b}$ .....	196
2.3.	Hauteur sur $G$ : cas général .....	197

§ 3.	<u>Application exponentielle et uniformisation</u>	
3.1.	Exponentielle.....	198
3.2.	Préliminaires : algèbre affine de $L$ .....	199
3.3.	Préliminaires : périodes.....	199
3.4.	Croissance de certaines fonctions.....	200
3.5.	Applications.....	201
RÉFÉRENCES	.....	203
INDEX	.....	209
INDEX DES NOTATIONS	.....	<b>213</b>
ABSTRACT	.....	<b>217</b>