Astérisque

DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Formule de Chernoff pour des rapports de vraisemblance

Astérisque, tome 68 (1979), p. 25-31

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__68__25_0>

FORMULE DE CHERNOFF POUR DES RAPPORTS DE VRAISEMBLANCE

D. DACUNHA-CASTELLE.

I. GÉNÉRALITÉS.

Soient P_o, P_1 deux probabilités de densité f_o et f_1 par rapport à une mesure ν. On suppose $P_o \neq P_1$ et P_o équivalente à P_1.

Soit $\Phi(t) = E_{P_o} \exp t \log \frac{f_1}{f_o}$.

Pour $t \in [0,1]$, $\Phi(t)$ est finie, $0 \leq \Phi(t) \leq 1$ d'après l'inégalité de Holder. Si $t \geqq 0$, Φ est en fait définie (et finie) sur $[0,s[$, $s = \text{ess sup} \log \frac{f_1}{f_o}$, $(s \geqq 1)$. En s, Φ est finie si et seulement si

$$P_o\left(\log \frac{f_1}{f_o} = s\right) = 0 .$$

On pose $h(a) = \sup\limits_{t \geq 0} at - \log \phi(t)$

(fonction de Cramer du couple P_o, P_1), et

$$K(P_o, P_1) = E_{P_o} \log \frac{f_o}{f_1} \leqq \infty$$

$$K(P_1, P_o) = - E_{P_1} \log \frac{f_o}{f_1} \leqq \infty \qquad .$$

ϕ est analytique sur $]0, 1[$ et

$$\lim_{t \downarrow 0} \Phi'(t) = - K(P_o, P_1)$$

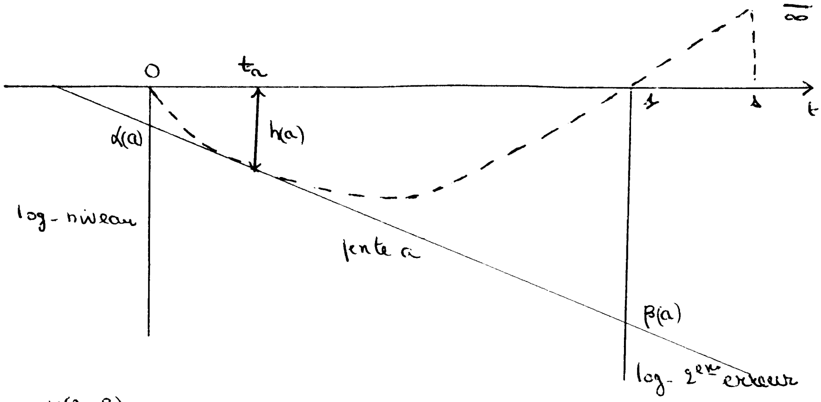
$$\lim_{t \uparrow 1} \Phi'(t) = K(P_1, P_o)$$

On a $h(a) \to 0$ pour $a \to -K(P_o, P_1)$, et on définit h partout dans $\overline{\mathbb{R}}$, en posant $h(a) = 0$ pour $a \leqq -K(P_o, P_1)$.

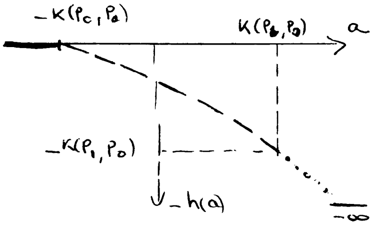
h ainsi définie est convexe, strictement convexe et continue, sauf en s dans le cas où $P_o\left(\log \frac{f_1}{f_o} = s\right) > 0$.

Enfin $E_{P_1} \exp t \log \frac{f_1}{f_o} = \Phi\,(1-t)$ et donc si $a \leqq K\,(P_1, P_o)$,

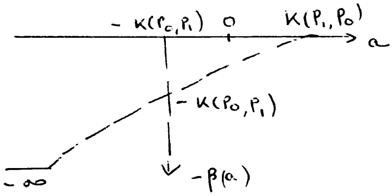
$$- \sup_{t > 0} \; (- at - \log \Phi\,(1-t)) = a-h\,(a)$$



(3)



(1)



Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+ \infty\}$.

La duale $\hat{f}$ de f est définie par

$$\hat{f}\,(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \; tx - f\,(x)$$

$\hat{f}$ est évidemment convexe, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+ \infty\}$. Dans le cas où f est dérivable, alors $\hat{f}$ est dérivable, et $\hat{f}'$ est la fonction réciproque $(f')^{-1}$ de f'.

Les résultats de convergence suivant sont faciles (pour des fonctions de variables réelles). On note $Df = \{x,\ f\,(x) < \infty\}$.

1) Soit f_n une suite de fonctions convexes à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

convergeant vers f en tout point, sauf peut-être les points de $(Df)^*$, frontière de Df. Supposons $\overset{\circ}{Df} \neq \emptyset$ ($\overset{\circ}{Df}$ intérieur de Df). Alors la convergence est uniforme sur tout compact de $\overset{\circ}{Df}$ (et de $R - \overline{Df}$), ($\overline{Df}$ fermeture de Df).

2) De plus $\hat{f}_n(x) \to \hat{f}(x)$ sauf peut-être en $x \in (D\hat{f})^*$.

3) Soit alors Z une variable aléatoire (non dégénérée). $\phi(t) = E \exp tZ$ est convexe à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. $\log \phi(t)$ est convexe (inégalité de Hölder).

Il est immédiat de vérifier que

$$\overline{\{t, \log \phi(t) < \infty\}} = \text{support } Z$$

et de manière plus précise

si $b = \sup (x, x \in \text{support } Z)$, on a

$$\log \phi(b) < \infty \text{ équivaut à } P(Z = b) = 0$$

Dans la suite interviendra de manière décisive la duale de $\log \Phi$.

Soit $(P_{o,n}, P_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de couples de probabilités équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. On dira que cette suite est de Chernoff si

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n^{1/n}(t) = \exp L(t), \qquad t \in [0,1]$$

où L est une fonction convexe sur $[0,1]$.

On a donc $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \Phi_n(t) = L(t)$.

Si de plus $\frac{1}{n} \phi'_n(0)$ converge, on appellera $K(P_o, P_1)$ sa limite, qui sera définie comme l'information de Kullback de P_1 par rapport à P_o.

Le test de vraisemblance au seuil na de P_o contre P_1 a pour région de rejet de P_o, $\{\frac{1}{N} \log \frac{f_{1,N}}{f_{o,N}} > a)$ pour N fixé.

Le théorème du chapitre précédent s'écrit ici sous la forme suivante :

<u>Théorème</u> : Soit une suite $(P_{o,n}, P_{1,n})$ de Chernoff, supposons $K(P_o, P_1)$, $K(P_1, P_o)$ définies et $a \in (-K(P_o, P_1), K(P_1, P_o))$. Alors

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log P_{o,N} \left(\frac{1}{N} \log \frac{f_{1,N}}{f_{o,N}} > a\right) = - h\ (a)$$

où h est la duale de L, $L\ (t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \phi_N\ (t)$.

Ce théorème permet de régler asymptotiquement le seuil du test à un niveau $\exp - N\alpha$. On devra avoir $h\ (a_N) \not\approx \alpha$, et l'on aura $a_N \to a$ tel que $h\ (a) = \alpha$.

Ce réglage étant fait, on peut calculer

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log P_{1,N} \left(\frac{1}{N} \log \frac{f_{1,N}}{f_{o,N}} \leq a\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log P_{1,N} \left(\frac{1}{N} \log \frac{f_{o,N}}{f_{1,N}} \geq a\right)$$

$$= \beta$$

tel que $\alpha + \beta = a$, d'après une formule vue plus haut. Le test de Neyman-Pearson au niveau $\exp - n\alpha$ est donc tel que son erreur de 2ème espèce est $\exp - \beta_n$, avec $\lim_{N\to\infty} \beta_n = a - \alpha$ avec $\alpha = h\ (a)$. (Voir dessin).

Il est immédiat d'appliquer ce résultat à une suite de variables indépendantes équidistribuées. Nous allons l'appliquer à un cas qui n'est pas traité complètement, dans la littérature, celui de deux processus gaussiens stationnaires.

II. CAS DE DEUX PROCESSUS GAUSSIENS (d'après [3]).

[0] se réfère au chapitre I.

Les notations sont celles de [3] qui contient une bibliographie complète. F et G sont deux mesures gaussiennes centrées stationnaires sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, et X^N désigne l'observation $(X_1,\dots,X_N)$ du processus des coordonnées. On suppose que pour tout N assez grand, F et G ont des densités F_N, G_N par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que F et G aient des densités spectrales f, g telles que $\log f, \log g \in L^1\ (T)$ (s'il n'en est pas ainsi, le problème statistique étudié ici est trivial).

On pose $L_N(t) = \frac{1}{N} \log \phi_N(t)$

avec $\phi_N(t) = E_F \exp t \log \frac{dG_N}{dF_N}$, $t \in [0,1]$

On désigne par $(T_N f)$, $(T_N g)$ la suite des matrices de Toeplitz associées à f et g .

On a $$\log \frac{dG_N}{dF_N} = \frac{1}{2} \log \det T_N^{-1} g\, T_N f + \frac{1}{2} {}^t X^N (T_N^{-1} f - T_N^{-1} g) X^N$$

Comme la covariance de $T_N^{-1/2} f X^N$ est I_N (identité sur $\mathbb{R}^N$), on a en désignant par $(\mu_i^N)_{i=1\ldots N}$ les valeurs propres de $A_N = I_N - T_N^{1/2} f\, T_N^{-1} g\, T_N^{1/2} f$,

$$N L_N(t) = \frac{t}{2} \log \det T_N^{-1} g\, T_N f - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \log (1 - \mu_i^N t) \; .$$

Pour $|t| < \frac{1}{\sup\limits_{1 \leq i \leq N} |\mu_i^N|}$, (N fixé), on a

$$\sum_{i=1}^{N} \log (1 - \mu_i^N t) = - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p}{p} \operatorname{Tr} A_N^p$$

$$= - \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{1}{\ell} \operatorname{Tr} (T_N f\, T_N^{-1} g)^{\ell} \left(\frac{t}{1-t} \right)^{\ell} + N \log (1-t)$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme $T_N f$, $T_N g$ sont régulières on a, dans un voisinage ouvert de 0, $T_N (zf + g)$ régulière, et donc [1],

$$\frac{d}{dz} \log \det T_N (zf + g) = \operatorname{Tr} T_N f\, T_N^{-1} (zf + g)$$

$$\frac{d}{dz^{\ell}} \log \det T_N (zf + g)\Big|_{z=0} = (-1)^{\ell-1} (\ell-1)! \operatorname{Tr} (T_N f\, T_N^{-1} g)^{\ell}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{N} \log (1 - \mu_i^N t) = - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell !} \log \det T_N (zf + g)\Big|_{z=0}^{(\ell)} \cdot \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\ell} + N \log(1-t)$$

De l'analycité au voisinage de 0 de la fonction $z \to \log \det T_N (zf + g)$, on tire

$$\sum_{i=1}^{N} \log (1 - \mu_i^N t) = \log \det T_N \left(\frac{t}{1-t} f + g \right) - \log \det T_N g + N \log (1-t)$$

d'où

$$N\, L_N\,(t) = \frac{t}{2} \log \det T_N^{-1} g\, T_N\, f$$

$$- \frac{1}{2}\left[\log \det T_N \left(\frac{t}{1-t} f + g\right) - \log \det T_N\, g + N \log (1-t)\right]$$

$$N\, L_N\,(t) = \frac{1}{2}\left[t \log \det T_N\, f + (1-t) \log \det T_N\, g - \log \det T_N\, tf+(1-t)g\right] \star$$

Cette formule est valable au voisinage de 0.

Mais la fonction $z \to \log \det (z\, T_N\, f + (1-z)\, T_N\, g)$ est analytique dans un C -voisinage de tout point de $]0,1[$, car $\log(tf + (1-t)\, g) \in L^1$ (par convexité) et donc $T_N(tf + (1-t)\, g)$ est régulière pour $t \in [0,1]$.

Par suite, par prolongement analytique, la formule est valable pour $t \in]0,1[$ et par continuité pour $t \in [0,1]$. Appliquons maintenant le théorème élémentaire de Szegö [1]: si $\log f \in L^1$, alors

$$\frac{1}{N} \log \det T_N\, f \to \frac{1}{2\pi} \int_T \log f\,(\theta)\, d\theta \text{ ,quand } N \to +\infty ,$$

et donc :

<u>Théorème</u> : Si $\log f, \log g \in L^1\,(T)$ et $t \in [0,1]$

$L_N\,(t) \to L\,(t) \qquad (N \to \infty) \qquad$ avec

$$L\,(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[t \log f\,(\theta) + (1-t) \log g\,(\theta) - \log (tf\,(\theta) + (1-t)g(\theta))\right] d\theta$$

On en déduit, comme dans [0], la formule de Chernoff et les propriétés asymptotiques du lemme de Neyman-Pearson, moyennant la remarque faite en [0] sur le cas où $M_1=0$ et la deuxième remarque ci-après.

Remarque : 1) Si $f, g \in B$, avec $fg > 0$ et B algèbre de Banach définie dans [2], on a plus précisément

$$L_N\,(t) = L\,(t) + O\left(\frac{1}{N}\right) .$$

Le même type de raisonnement que celui fait en [2] permet de préciser la convergence quand f,g sont p-fois dérivables.

2) Sous ces hypothèses la formule de Chernoff démontrée au chapitre précédent vaut encore H3) remplaçant le fait que ϕ_N (t) est définie sur un intervalle contenant 0 en son intérieur (la modification de démonstration est immédiate). On obtient donc les propriétés asymptotiques du lemme de Neyman-Pearson comme indiqué au § I.

Bibliographie :

[1] GRENANDER, SZEGÖ
Toeplitz form and their applications
Univ. of California press (1958)

[2] D. DACUNHA-CASTELLE
Remarque sur l'étude asymptotique du rapport de vraisemblance de deux processus gaussiens stationnaires
Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, février 1979 (à paraître)

[3] J. COURSOL, D. DACUNHA-CASTELLE
Sur la formule de Chernoff pour deux processus gaussiens stationnaires,
Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, mars 1979 (à paraître).

Didier DACUNHA-CASTELLE

Département Mathématique - Bât. 425
E.R.A. CNRS 532 "Statistique Appliquée"
Université Paris-Sud (Centre d'Orsay)
91405 ORSAY.